ISSN 2518-7929

№ 3(87)/2017

МАТЕМАТИКА сериясы

Серия МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS Series

ҚАРАҒАНДЫ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

ВЕСТНИК КАРАГАНДИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF THE KARAGANDA UNIVERSITY

ISSN 2518-7929
Индексі 74618
Индекс 74618

ҚАРАҒАНДЫ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ **ХАБАРШЫСЫ**

ВЕСТНИК КАРАГАНДИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF THE KARAGANDA UNIVERSITY

МАТЕМАТИКА сериясы

Серия МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS Series

№ 3(87)/2017

Шілде–тамыз–қыркүйек
29 қыркүйек 2017 ж.

Июль–август–сентябрь
29 сентября 2017 г.

July-August-September
September, 29, 2017

1996 жылдан бастап шығады
Издается с 1996 года
Founded in 1996

Жылына 4 рет шығады
Выходит 4 раза в год
Published 4 times a year

Қарағанды, 2017
Караганда, 2017
Karaganda, 2017

Редакцияның мекенжайы: 100028, Қазақстан, Қарағанды қ., Университет к-сі, 28
Тел.: (7212) 77-03-69 (ішкі 1026); факс: (7212) 77-03-84.
E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Сайт: vestnik.ksu.kz

Редакторы
Ж.Т.Нурмуханова
Компьютерде беттеген
Г.Қ.Қалел

Қарағанды университетінің хабаршысы. «Математика» сериясы.
ISSN 2518-7929.

Меншік иесі: «Академик Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті» РММ.

Қазақстан Республикасының Мәдениет және ақпарат министрлігімен тіркелген. 23.10.2012 ж. № 13104–Ж тіркеу куәлігі.

Басуға 28.09.2017 ж. қол қойылды. Пішімі 60×84 1/8. Қағазы офсеттік. Көлемі 15,75 б.т. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша. Тапсырыс № 100.

Е.А.Бөкетов атындағы ҚарМУ баспасының баспаханасында басылып шықты.
100012, Қазақстан, Қарағанды қ., Гоголь к-сі, 38. Тел. 51-38-20. E-mail: izd_kargu@mail.ru

Адрес редакции: 100028, Казахстан, г. Караганда, ул. Университетская, 28
Тел.: (7212) 77-03-69 (внутр. 1026); факс: (7212) 77-03-84.
E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Сайт: vestnik.ksu.kz

Редактор
Ж.Т.Нурмуханова
Компьютерная верстка
Г.К.Калел

Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика».
ISSN 2518-7929.

Собственник: РГП «Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова».

Зарегистрирован Министерством культуры и информации Республики Казахстан. Регистрационное свидетельство № 13104–Ж от 23.10.2012 г.

Подписано в печать 28.09.2017 г. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная. Объем 15,75 п.л. Тираж 300 экз. Цена договорная. Заказ № 100.

Отпечатано в типографии издательства КарГУ им. Е.А.Букетова.

100012, Казахстан, г. Караганда, ул. Гоголя, 38, тел.: (7212) 51-38-20. E-mail: izd_kargu@mail.ru

Postal address: 28, University Str., 100028, Kazakhstan, Karaganda
Tel.: (7212) 77-03-69 (add. 1026); fax: (7212) 77-03-84.
E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Web-site: vestnik.ksu.kz

Editor
Zh.T.Nurmukhanova
Computer layout
G.K.Kalel

Bulletin of the Karaganda University. «Mathematics» series.
ISSN 2518-7929.

Proprietary: RSE «Academician Ye.A.Buketov Karaganda State University».

Registered by the Ministry of Culture and Information of the Republic of Kazakhstan. Registration certificate No. 13104–Zh from 23.10.2012.

Signed in print 28.09.2017. Format 60×84 1/8. Offset paper. Volume 15,75 p.sh. Circulation 300 copies. Price upon request. Order № 100.

Printed in the Ye.A.Buketov Karaganda State University Publishing house.
38, Gogol Str., 100012, Kazakhstan, Karaganda, Tel.: (7212) 51-38-20. E-mail: izd_kargu@mail.ru

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

CONTENTS

MATHEMATICS

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.9 (574)

М.С. Айтенова[1], Г.Ш. Искакова[2], К.К. Фазылов[3]

[1]*Карагандинский экономический университет Казпотребсоюза, Казахстан;*
[2]*Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова, Казахстан;*
[3]*Региональный культурно-образовательный центр, Морден, Канада*
(E-mail: abibekove@mail.ru)

Об оценке сверху функции распределения

При изучении эллиптических операторов возникает необходимость исследования вложения весовых пространств Соболева в пространство Лебега. Существует ряд численных характеристик для данных вложений, одной из которых являются аппроксимативные числа. В статье доказана оценка сверху функции распределения аппроксимативных чисел вложения весового пространства Соболева в пространство Лебега. Рассмотрены основные определения, связанные с понятием функции распределения аппроксимативных чисел, и для этой функции показаны оценки соответствующего оператора вложения. Данный результат может быть применен в исследовании спектральных свойств самосопряженных дифференциальных операторов.

Ключевые слова: аппроксимативные числа, функция распределения, характеристический размер, пространство Соболева, пространство Лебега, открытые кубы, весовая функция.

Введение

В работе дается оценка сверху функции распределения аппроксимативных чисел вложения пространства $W_p^l(v)$ в L_p.

Приведем основные определения и обозначения. Через $W_p^l(v)$ будем обозначать пополнение $C_\infty^0(R^n)$ бесконечно дифференцируемых финитных функций в R^n с заданной следующей нормой:

$$\|u\|_{W_p^l(v)} = \left(\int |\nabla_l u|^p v + \int |u|^p v \right)^{1/p}. \tag{1}$$

Здесь v — почти всюду положительная функция из $L(loc) = L_1(loc)$; $v^{1-p'} \in L(loc)$; $p' = \frac{p}{p-1}$; $1 < p < \infty, l > n$

$$|\nabla_l u| = \left(\sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}; \quad D^\alpha u = \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

$L_p, L_p(loc)$ — лебегово пространство функций $L_p(R^n)$ с нормой

$$\|u\|_p = \left(\int |u|^p dt \right)^{1/p}. \tag{2}$$

R^n — n-мерное вещественное евклидово пространство.

Пусть $L(X,Y)$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из банахового пространства X в банахово пространство Y.

N — аппроксимативным числом оператора $A \in L(X,Y)$ называют следующее число:

$$a_N(A) = inf_K \left\| A - K \right\|,$$

где inf берется по совокупности всех конечномерных операторов $K \in L(X,Y)$ размерности $\le N$. Здесь $a_0(A)$ — норма оператора A.

Рассмотрим пространства X, Y с соответствующими нормами $\|\bullet\|_X,\ \|\bullet\|_Y$. Говорят, что X вложено в Y (запись $X \to Y$), если $X \subset Y$ и существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\|x\|_Y \le C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

При этом ограниченный оператор $E : X \to Y$, где $Ex = x$, называют оператором вложения.

Основной результат

Пусть $E:\ W_p^l(v) \to L_p$ – оператор вложения пространства $W_p^l(v)$ в L_p.

Положим $N(\lambda,\ E) = \sum_{a_k(E)>\lambda} 1, (\lambda > 0)$, где $N(\lambda,\ E)$ есть функция распределения аппроксимативных чисел $a_k(E)$. Через I^n будем обозначать совокупность открытых кубов вида

$$Q = Q_d = Q_d(x) = \left\{ y \in R^n :\ |y_i - x_i| < \frac{d}{2},\ \ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Пусть $|E|$ – лебегова мера $E \subset R^n$. Неотрицательную функцию $v \in L(loc)$ называют весом.

Вес v на R^n удовлетворяет условию A_∞ (запись $v \in A_\infty$), если существуют такие $\delta, \tau \in (0,1)$, что для всех $Q \in I^n$ выполняется неравенство $\int\limits_e v \le \tau \int Qv$, как только $e \subset Q, |e| \le \delta\,|Q|$.

Пусть

$$d(x,v) = sup_{d>0} \left\{ d:\ M_{p,l}(x,d|v) \le 1 \right\}, \tag{3}$$

где

$$M_{p,l}(x,d|v) = d^{l-n} \left(\int_{Q_d(x)} v^{1-p'} \right)^{1/p'} \left(\int_{Q_d(x)} v \right)^{1/p} \tag{4}$$

и

$$K(x,d) = d^{l-n/p'} \left(\int_{Q_d(x)} v^{1-p'} \right)^{1/p'}. \tag{5}$$

Применяя неравенство Гельдера, получим

$$M_{p,l}(x,d|v) = d^{l-n} \left(\int_Q v^{1-p'} \right)^{1/p'} \left(\int_Q v \right)^{1/p} \ge d^l.$$

Отсюда справедливо

$$1 =\ sup_{d>0} \left\{ d:\ d^l \le 1 \right\} \ge sup_{d>0} \left\{ d:\ M_{p,l}(x,d|v) \le 1 \right\} = d(x,v).$$

В дальнейшим через $Q(x)$ будет обозначаться куб $Q_d(x)$ при

$$d = d(x,v).$$

Будем считать, что весовая пара (v,v) на R^n удовлетворяет условию $\Pi_{p,l}$ относительно функции (запись $(v,v) \in \Pi_{p,l}$), если существует положительная функция $d(x)$ на R^n такая, что для $x : M_{p,l}(x,d|v) \ge 1$. Рассмотрим λ-характеристический размер $S(\lambda,x)$, определенный для $\forall\lambda > 0$ и $x \in R^n$ следующим равенством:

$$S(\lambda,x) = \sup_{d>0} \left\{ d : K(x,d) \le \lambda \right\}. \tag{6}$$

Для дальнейшего вычисления нам нужны будут следующие леммы.

Лемма 1. Справедливы утверждения:

a) Пусть $0 < d(x,v) < \infty,\ 0 < c < 1,\ 0 < c_1 \leq 1 - c$. Тогда $c_1 d(x,v) \leq d(t,v)$ для $t \in cQ(x)$.

b) Пусть $0 < S(\lambda, x) < \infty,\ 0 < c < 1,\quad c_1 = (1+c)^{n-l}$. Тогда $S(c_1\lambda, t) \leq (1+c) S(\lambda, x)$ для $t \in cQ_d(x),\ d = S(\lambda, x)$.

Доказательство.

a) Положим $\tilde{d} = d(x,v)$ и $d = (1-c)\tilde{d}$. Тогда куб $Q_d(t) \subset \widetilde{Q}$ для любого $t \in c\widetilde{Q} = cQ_{\tilde{d}}(x)$.

Из этих равенств и формулы (4) справедливо, что:

$$M_{p,l}(x, d|v) = d^{l-n}\left(\int_{Q_d(t)} v^{1-p'}\right)^{1/p'}\left(\int_{Q_d(t)} v\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq (1-c)^{l-n}\tilde{d}^{l-n}\left(\int_{\widetilde{Q}} v^{1-p'}\right)^{1/p'}\left(\int_{\widetilde{Q}} v\right)^{1/p} \leq (1-c)^{l-n} M_{p,l}\left(x, \tilde{d}|v\right) \leq 1.$$

Отсюда имеем, что $d(t,v) \geq d = (1-c)\tilde{d} = c_1 d(x,v)$.

b) Пусть $d^* = S(\lambda, x)$ и $Q^* = Q_{d^*}$. Тогда куб $Q_d(t) \supset Q^*$для любого $t \in cQ^*$и при всех $d \geq (1+c) d^*$. Следовательно, из формул (5), (6) и из сказанного выше имеем

$$(K(x,d))^{p'} = d^{lp'-n}\int\limits_{Q_d(t)} v^{1-p'} \geq \left(\frac{d}{d^*}\right)^{lp'-n}(K(x,d^*))^{p'} >$$

$$> (1+c)^{lp'-n}\lambda^{p'} = (c_1\lambda)^{p'}.$$

Откуда следует требуемая оценка $S(c_1\lambda, t) \leq (1+c) S(\lambda, x)$.

Лемма 2. Пусть весовая функция $v \in A_\infty,\ M_{p,l}(x, d|v) \geq 1, Q = Q_d = Q_d(x)$. Тогда справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_p(Q)} \leq cK(x,d)\left(\int_Q |\nabla_l u|^p v + \int_Q |u|^p v\right)^{\frac{1}{p}},\ u \in C_0^\infty(Q_d), \tag{7}$$

где $c > 0$ не зависит от x и d.

Доказательство леммы 2 приведено в [1]. Пусть $v \in \Pi_{p,l}$. Введем следующие множества $\Omega_\lambda, \Omega^\lambda$:

$$\Omega_\lambda = \{x : S(\lambda, x) < d(x,v)\}, \Omega^\lambda = \{x : S(\lambda, x) \geq d(x,v)\}.$$

Рассмотрим вспомогательную теорему:

Теорема 1. Существует постоянная $c_0 \geq 1$ такая, что при всех $c \geq c_0$ справедлива оценка

$$N(\lambda,\ E) \leq c\int_{\Omega_{c,\lambda}} \frac{dt}{S^n(c^{-1}\lambda, t)}, \tag{8}$$

где $\Omega_{c,\lambda} = \left\{x : S\left(c^{-1}\lambda, t\right) \leq cd(t,v)\right\}$.

Доказательство теоремы вытекает из леммы 1 (см. [2]).

Теорема 2. Пусть $v \in A_\infty$ и удовлетворяет следующим условиям:

1. Существует $L < \infty$ такое, что для любого $Q \in I^n$ справедливо

$$\frac{1}{Q}\int_Q v^{1-p'} \leq L < \infty.$$

2. Для любого $R > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\frac{1}{Q}\int_Q v^{1-p'} < \varepsilon,$$

как только $Q \subset R^n \backslash Q_R(0)$. Тогда существует постоянная $c_0 \geq 1$ такая, что при всех $c \geq c_0$ справедлива оценка

$$N(\lambda, E) \leq c\lambda^{-\frac{n}{l}}\left|\{x : K(x, cd(x,v)) > \lambda\}\right|. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть v удовлетворяет условию (1). Тогда для $Q = Q_d(x)$ и из формулы (5) имеем

$$K(x,d) = d^{l-n/p'}\left(\int_{Q_d(x)} v^{1-p'}\right)^{1/p'} \leq\ Ld^l,$$

откуда следует оценка

$$S(\lambda, x) = \sup_{d>0}\{d : K(x,d) \leq \lambda\}\ \geq \sup_{d>0}\{d : Ld^l \leq \lambda\}\ = \left(L^{-1}\lambda\right)^{\frac{1}{l}}. \tag{10}$$

В силу определения (6) для любого числа $c_1 > c$ имеем

$$\Omega_{\lambda\ ,c} = \left\{x : S\left(c^{-1}\lambda, x\right) \leq cd(x,v)\right\} \subset \{x : K(x, c_1 d(x,v)) > \lambda\}. \tag{11}$$

Учитывая (10) и (11), из теоремы 1 выводим требуемую оценку

$$N(\lambda,\ E) \leq c\int_{\Omega_{c,\lambda}} S^{-n}\left(c^{-1}\lambda, t\right)dt \leq c\left(L^{-1}\lambda\right)^{-\frac{n}{l}}|\Omega_{\lambda\ ,c}| = c_2\lambda^{-\frac{n}{l}}\left|\{x : K(x, c_1 d(x,v)) > \lambda\}\right|,$$

где $c_2 = cL^{n/l}$.

Список литературы

1 Кусаинова Л.Г. Весовые неравенства вложений / Л.Г. Кусаинова // Доклады МН АН РК. — 1998. — № 6. — С. 23–32.

2 Лизоркин П.И. Оценки аппроксимативных чисел оператора вложения для пространств соболевского типа с весами / П.И. Лизоркин, М.О. Отелбаев // Труды Математического института АН СССР. — Т. 170. — 1984. — С. 213–232.

М.С. Айтенова, Г.Ш. Искакова, К.К. Фазылов

Тарату функциясын жоғарыдан бағалау туралы

Эллипстік операторларды зерттегенде салмақты Соболев кеңістігін Лебег кеңістігіне енгізуді зерттеу қажет. Бұл енгізуді алу үшін бірқатар сандық сипаттамалар бар, солардың бірі — жуықтау сандары. Мақалада салмақты Соболев кеңістігін Лебег кеңістігіне енгізудің жуықтау сандарының тарату функциясын жоғарыдан бағалауы дәлелденген. Жуықтау сандарының тарату функциясы түсініктерімен байланысты негізгі анықтамалар және осы функциялар үшін сәйкес енгізу операторының бағалауы көрсетілген. Алынған нәтижені өзіне-өзі түйіндес дифференциалдық операторлардың спектрлік қасиеттерін зерттеуде қолдану мүмкін.

Кілт сөздер: жуықтау сандар, тарату функциясы, сипаттамалық мөлшер, Соболев кеңістігі, Лебег кеңістігі, ашық кубтар, салмақты функция.

M.S. Aitenova, G.Sh. Iskakova, K.K. Fazylov

About upper bound of the distribution function

It is necessary to study Sobolev's weighting space embedding into the Lebesgue space in the research of the elliptic operators. There exist a number of numerical characteristics for such embeddings. Approximate numbers are one of them. An upper bound of the distribution function of the approximate numbers of Sobolev's weighting space into the Lebesgue space is proved in this paper. Basic definitions related to notion of the distribution function of the approximate numbers are considered by us. Estimates of the appropriate embedding operator are obtained for this function. The result obtained can be employed in the study of the spectral properties of self-adjoint differential operators.

Keywords: approximate numbers, distribution function, characteristic size, Sobolev's space, Lebesg's space, open cubes, weighting function.

References

1 Kusainova, L.G. (1998). Vesovye neravenstva vlozhenii [Weighted investment inequalities]. *Doklady MN AN RK — Reports of the Ministry of Education of the Republic of Kazakhstan, 6,* 23–32 [in Russian].

2 Lizorkin, P.I. & Otelbaev, M.O. (1984). Otsenki approksimativnyh chisel operatora vlozheniia dlia prostranstv sobolevskoho tipa s vesami [Estimates of the approximative numbers of the embedding operator for spaces of Sobolev type with weights]. *Trudy Matematicheskoho Instituta Akademii Nauk SSSR — Proceedings of the Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the USSR, 170,* 213–232 [in Russian].

UDC 517.51

G. Akishev

Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan;
Institute of Mathematics and mathematical modeling SC MES RK, Almaty, Kazakhstan
(E-mail: akishev@ksu.kz)

Estimations of the best M-term approximations of functions in the Lorentz space with constructive methods

This paper considers the Lorentz space of periodic functions of many variables with the anisotropic norm, of functional Nikol'skii-Besov's class and of the best M-term approximation of function. We have established sufficient conditions for the function to belong to one of the Lorentz spaces in another. We obtain upper and lower bounds for the best M-member approximations of functions from the Nikol'skii-Besov class in the anisotropic Lorentz space To prove the upper bound, we used a new constructive method developed by V.N. Temlyakov.

Keywords: Lorentz space, Nikol'ski-Besov class, the best M-term approximations, approximation, sufficient conditions, estimate.

Introduction

Let $\bar{x} = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, $I^m = [0, 2\pi)^m$ and numbers $\theta_j, q_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, ..., m$. Let $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ denotes the space of Lebesgue measurable functions $f(\overline{x})$ defined on $\mathbb{R}^m$ with the period 2π with respect to each variable such that the quantity

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1}\left[\cdots\left[\int_0^{2\pi}\left(f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,...,t_m)\right)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1}dt_1\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\cdots\right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}}dt_m\right]^{\frac{1}{\theta_m}},$$

is finite, where $f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,...,t_m)$ is a non-increasing rearrangement of the function $|f(\overline{x})|$ in each variable x_j, whereas the other variables are fixed [1].

In case when the $q_1 = ... = q_m = \theta_1 = ... = \theta_m = q$, the space of Lorentz $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ coincides with the space of Lebesgue $L_q(I^m)$ with the norm ([2], Ch. I, item 1.1)

$$\|f\|_q = \left[\int_0^{2\pi}...\int_0^{2\pi}|f(x_1,...,x_m)|^q dx_1...dx_m\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Let $\overset{\circ}{L}{}^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ be the set of all functions $f \in L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ such that

$$\int_0^{2\pi} f(\overline{x})\,dx_j = 0, \ \ \forall j = 1, ..., m.$$

For any function $f \in L_1(I^m) = L(I^m)$, let

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m} a_{\overline{n}}(f)\,e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}$$

be function's Fourier series with respect to the multiple trigonometric system $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$, where $\mathbb{Z}^m$ is the set of points in $\mathbb{R}^m$ with integer coordinates.

Suppose

$$\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\,e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

where $\langle \bar{y}, \bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$, $s_j = 1, 2, ...$ and

$$\rho(\bar{s}) = \left\{\bar{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m\right\}.$$

For a number sequence, we will write $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m} \in l_{\overline{p}}$ if

$$\left\|\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}\right\|_{l_{\overline{p}}} = \left\{\sum_{n_m=-\infty}^{\infty}\left[...\left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}|a_{\overline{n}}|^{p_1}\right]^{\frac{p_2}{p_1}}...\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\right\}^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

where $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $1 \leq p_j < +\infty$, $j = 1, 2, ..., m$.

The spaces $S_p^{\bar{r}}H$ and $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$ of functions with the dominating mixed derivative were introduced by S.M. Nikol'skii [3] and T.I. Amanov ([4] Ch.I, item 17). The spaces $S_p^{\bar{r}}H$, $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$ are called Nikolski-Besov's space, or, sometimes, Nikolski-Besov-Amanov's space.

P.I. Lizorkin and S.M. Nikol'skii [5] investigated a decomposition of elements of the space $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$. We will use their definition.

Let $\bar{r} = (r_1, ..., r_m)$, $r_j > 0, j = 1, ..., m$, $1 \leq p, \theta \leq +\infty$. Suppose $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$ is the space all of functions $f \in \overset{\circ}{L}{}^{*}_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ such that

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^{\bar{r}}B} = \left[\int_0^{2\pi}...\int_0^{2\pi}\|\Delta_{\bar{t}}^{\bar{k}}f(\bullet)\|_p^{\theta}\prod_{j=1}^{m}\frac{dt_j}{t_j^{1+\theta r_j}}\right]^{\frac{1}{\theta}} < +\infty,$$

where $\Delta_{\bar{t}}^{\bar{k}}f(\bar{x}) = \Delta_{t_m}^{k_m}(...\Delta_{t_1}^{k_1}f(\bar{x}))$ is the mixed difference of order $\bar{k}$ with step $\bar{t} = (t_1, ..., t_m)$ and $k_j > r_j$, $j = 1, ..., m$.

In [5], it is given that the function $f \in S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$ can be decomposed into Fourier series in the following form

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m, \prod_{j=1}^{m} n_j \neq 0} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}.$$

Moreover, it is known (see [5]) that $\|f\|_{S_{p,\theta}^{\bar{r}}B}$ is a norm and

$$\|f\|_{S_{p,\theta}^{\bar{r}}B} \asymp \left\{\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle\theta}\,\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}$$

provided $1 < p < +\infty$, $1 \leq \theta \leq +\infty$.

Therefore, in the anisotropic Lorentz space $\overset{\circ}{L}{}^{*}_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$, we will consider an analogous space. Suppose $S_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}^{\bar{r}}B$ denotes the space of all functions $f \in \overset{\circ}{L}{}^{*}_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ such that

$$\|f\|_{S_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}^{\bar{r}}B} = \left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\bar{\tau}}} < \infty,$$

where $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$, $1 < p_j < \infty$, $1 < \theta_j < \infty$, $1 \leq \tau_j \leq +\infty$, $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$.

In this space, let's consider the unit ball (with keeping the notation)

$$S_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}^{\bar{r}}B = \left\{f \in \overset{\circ}{L}{}^{*}_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m) : \|f\|_{\overset{\circ}{S}{}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}^{\bar{r}}B} = \left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\,\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\theta}}^{*}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\bar{\tau}}} \leq 1\right\}.$$

For a fixed vector $\bar{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$, $\gamma_j > 0$, $j = 1, ..., m$, set

$$Q_n^{\bar{\gamma}} = \cup_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle<n}\rho(\bar{s}), \quad T(Q_n^{\bar{\gamma}}) = \{t(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in Q_n^{\bar{\gamma}}} b_{\bar{k}}e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}\},$$

$$Y^m(\overline{\gamma}, n) = \left\{ \overline{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \sum_{j=1}^{m} s_j \gamma_j \geq n \right\}.$$

Let X, Y be spaces with the norm of 2π-periodic functions of several variables. For a function $f \in X$ the following quantity is called the best M-term approximation of f [6–8]:

$$e_M(f)_X = \inf_{\bar{k}^{(j)}, b_j} \|f - \sum_{j=1}^{M} b_j e^{i\langle \bar{k}^{(j)}, \bar{x}\rangle}\|_X,$$

where $\{\bar{k}^{(j)}\}_{j=1}^M$ is a system of vectors $\bar{k}^{(j)} = (k_1^{(j)}, ..., k_m^{(j)})$ with integer coordinates and b_j are arbitrary numbers.

For a given class F, let

$$e_M(F)_X = \sup_{f \in F} e_M(f)_X.$$

In the case $X = L_2$, the quantity $e_M(f)_{L_2}$ for a function of one variable was introduced by S.B. Stechkin [6] and it was used in a criteria for an absolute convergence of Fourier series by complete orthonormal systems. Order estimations of the quantity $e_M(F)_X$ were investigated by R.S. Ismagilov [7], B.Ye. Mayorov [8] (for $X = L_p$, one-dimensional case), E.S. Belinskii [9–11] (multi-dimensional case in the case $Y = L_q(I^m), X = L_p(I^m)$, $F = W_p^r$), V.N. Temlyakov [12] (in the case $Y = L_q(I^m), F = H_p^r$), A.S. Romanyuk [13, 14], R. De Vore and R.A. Devore [15], V.N. Temlyakov [16] (in the case $Y = L_q(I^m), F = B_{p,\theta}^r$), Dinh Dung [17]. We should note that B.S. Kashin [18] established an estimation of the quantity $e_M(f)_X$ in the case $X = L_2$ by orthonormal systems. The latest results in this direction can be found in [19–21].

In particular, the following theorem is well known.

Theorem 1 (A.S. Romanyuk [13]). Let $\overline{r} = (r_1, ..., r_m)$, $0 < r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \leq ... \leq r_m$, $1 \leq p \leq 2 < q < +\infty$, and $1 \leq \theta \leq +\infty$.

1) If $r_1 > \frac{1}{p}$ then

$$e_M\left(S_{p,\theta}^{\overline{r}} B\right)_q \asymp M^{-\left(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)} (\log M)^{(\nu-1)\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\right) + \sum\limits_{j=2}^{\nu} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)_+};$$

2) If $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p}$, then

$$e_M\left(S_{p,\theta}^{\overline{r}} B\right)_q \asymp M^{-\frac{q}{2}\left(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)} (\log M)^{(q-1)(\nu-1)\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{q'}{q} \frac{1}{\theta'}\right)_+};$$

3) If $r_1 = \frac{1}{p}$, then

$$e_M\left(S_{p,\theta}^{\overline{r}} B\right)_q \asymp M^{-\frac{1}{2}} \left(\log^\nu M\right)^{\frac{1}{\theta'}},$$

where $a_+ = \max\{a, 0\}$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = 1$.

Here $\log M$ is the logarithm with the base 2 of $M > 0$.

V.N. Temlyakov [22–24] developed a constructive method of estimation of the $M-$ term best approximations of functions of the Nikol'skii-Besov's class $S_{p,\tau}^{\overline{r}} B$ in the space $L_q(I^m)$ in the case $1 < p < q < \infty$. This method is based on greedy algorithms.

The main goal of the present paper is to find the exact order of the best M-term approximation of a function in the class $S_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}^{\overline{r}} B$ in the Lorentz spaces with anisotropic norm in the case $1 < p_j < q_j \leq 2,\ j = 1, ..., m$, and in the case $1 < p_j < 2 \leq q_j < \infty, j = 1, ..., m$, to give a constructive proof for an upper bound for the quantity $e_M\left(S_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}^{\overline{r}} B\right)_{\bar{q},\bar{\theta}}$.

Let us denote by $C(p, q, r, y)$ positive quantities which depend on the parameters in the parentheses, which are, in general, are distinct in distinct formulas. $A(y) \asymp B(y)$ means that there are positive C_1, C_2 such that $C_1 \cdot A(y) \leq B(y) \leq C_2 \cdot A(y)$.

S.1. Auxiliary results

To prove the main results, we need the following auxiliary results.

Lemma 1 [25]. Suppose $\alpha \in (0,+\infty)$ and $\overline{\gamma}=(\gamma_1,...,\gamma_m)$, $\overline{\gamma}'=\left(\gamma_1',...,\gamma_m'\right)$, $\bar{\theta}=(\theta_1,...,\theta_m)$, $\theta_j \in [1,+\infty)$, $j=1,...,m$, $1=\gamma_1=...=\gamma_\nu<\gamma_{\nu+1}\leq ...\leq\gamma_m$, $1=\gamma_j'=\gamma_j$, $j=1,...,\nu$, and $1=\gamma_j'<\gamma_j$, $j=\nu+1,...,m$. Then the following relation holds

$$\left\|\left\{2^{-\alpha\langle\bar{s},\overline{\gamma}\rangle}\right\}_{\bar{s}\in Y^m\left(\overline{\gamma}',n\right)}\right\|_{l_{\bar{\theta}}} \asymp 2^{-n\alpha} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Remark. For the case $\theta_1=...=\theta_m$, Lemma 1 was proved by V.N. Temlyakov [12]. In what follows we denote by $\chi_{\varkappa(n)}(\bar{s})$ the characteristic function of the set $\varkappa(n)=\{\bar{s}=(s_1,...,s_m)\in\mathbb{Z}_+^m: \quad \langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle=n\}$.

Lemma 2 ([25], Lemma 2.3 and [26], Lemma 4). Let $\bar{\tau}=(\tau_1,...,\tau_m)$, $1\leq\tau_j<+\infty$, and $j=1,...,m$. Then the following relation holds

$$\left\|\left\{\chi_{\varkappa(n)}(\bar{s})\right\}_{\bar{s}\in\varkappa(n)}\right\|_{l_{\bar{\tau}}} \asymp n^{\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\tau_j}}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Theorem 2 [27]. Let $\overline{p}=(p_1,...,p_m)$, $\overline{q}=(q_1,...,q_m)$, $\overline{r}=(r_1,...,r_m)$, $\bar{\theta}=(\theta_1,...,\theta_m)$, $\quad \overline{\tau}=(\tau_1,...,\tau_m)$, $1\leq p_j<2<q_j$, $j=1,...,m$, $1\leq\theta_j,\tau_j<+\infty$, $0<r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}=...=r_\nu+\frac{1}{q_\nu}-\frac{1}{p_\nu}<r_{\nu+1}+\frac{1}{q_{\nu+1}}-\frac{1}{p_{\nu+1}}\leq ...\leq r_m+\frac{1}{q_m}-\frac{1}{p_m}$.

1) If $r_j>\frac{1}{p_j}, j=1,...,m$, $(r_1-\frac{1}{p_1})\frac{1}{q_j}<(r_j-\frac{1}{p_j})\frac{1}{q_1}, j=\nu+1,...,m$, then

$$e_M\left(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta},\overline{\tau}}B\right)_{\overline{q},\bar{\theta}} \asymp M^{-\left(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2}\right)+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)_+};$$

2) If $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}<r_j<\frac{1}{p_j}, \theta_j<\tau_j, j=1,...,m$, $(r_1-\frac{1}{p_1})\frac{1}{q_j}<(r_j-\frac{1}{p_j})\frac{1}{q_1}, j=\nu+1,...,m$, then

$$e_M\left(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta},\overline{\tau}}B\right)_{\overline{q},\bar{\theta}} \asymp M^{-\frac{q_1}{2}\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{q_1\left(r_1-\frac{1}{p_1}\right)\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}};$$

3) If $\nu\leq\mu$, $r_j=\frac{1}{p_j}, j=1,...,\mu$ and $r_j>\frac{1}{p_j}, j=\mu+1,...,m$, then

$$e_M\left(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta},\overline{\tau}}B\right)_{\overline{q},\bar{\theta}} \asymp M^{-\frac{1}{2}}(\log M)^{\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\tau_j'}}.$$

Theorem 3 [25]. *Let* $\bar{p}=(p_1,...,p_m)$, $\quad \bar{q}=(q_1,...,q_m)$, $\quad \bar{\theta}^{(1)}=(\theta_1^{(1)},...,\theta_m^{(1)})$, $\quad \bar{\theta}^{(2)}=(\theta_1^{(2)},...,\theta_m^{(2)})$ *and* $1\leq p_j<q_j<+\infty$, $\quad 1\leq\theta_j^{(1)},\theta_j^{(2)}<+\infty$, $\quad j=1,...,m$. *If* $f\in \overset{\circ}{L}{}^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}(I^m)$ *and the quantity*

$$\sigma(f)\equiv\left\{\sum_{s_m=1}^{\infty}2^{s_m\theta_m^{(2)}(\frac{1}{p_m}-\frac{1}{q_m})}\left[\cdots\left[\sum_{s_1=1}^{\infty}2^{s_1\theta_1^{(2)}(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}\left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\right)^{\theta_1^{(2)}}\right]^{\frac{\theta_2^{(2)}}{\theta_1^{(2)}}}\cdots\right]^{\frac{\theta_m^{(2)}}{\theta_{m-1}^{(2)}}}\right\}^{\frac{1}{\theta_m^{(2)}}}$$

is finite, then $f\in \overset{\circ}{L}{}^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}(I^m)$ *and*

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\leq C(p,q,\theta)\cdot\sigma(f).$$

S. 2. Estimates of the best M−term approximations of functions

Theorem 4. Let $1<q_j<2\leq p_j<+\infty$, $1<\theta_j,\lambda_j<+\infty$, $j=1,...,m$. *If* $f\in L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$, *then*

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}}\geq C(q,\theta,p,m)\Big\{\sum_{s_m=1}^{\infty}2^{s_m\theta_m\left(\frac{1}{p_m}-\frac{1}{q_m}\right)}\Big[...\Big[\sum_{s_1=1}^{\infty}2^{s_1\theta_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}\left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\lambda}}\right)^{\theta_1}\Big]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}...\Big]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}}\Big\}^{\frac{1}{\theta_m}}.$$

Proof. Firstly, we will prove the theorem for the case $p_j = \lambda_j^{(1)} = 2, \ \ j = 1, ...m$. Then

$$\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\lambda}}^{*} = \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2, \ \ \bar{s} \in \mathbb{Z}_{+}^{m}.$$

By the conditions of the theorem $f \in \overset{\circ}{L}{}_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*}(I^m)$, $1 < q_j, \theta_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$. Therefore [1]

$$\|f\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*} \geq \sup_{\|g\|_{\bar{q}',\bar{\theta}'}^{*} \leq 1} \int_{I^m} f(\bar{x}) g(\bar{x}) d\bar{x}, \tag{1}$$

where $\bar{q}' = (q_1', ..., q_m')$, $\bar{\theta}' = (\theta_1', ..., \theta_m')$, $\frac{1}{q_j} + \frac{1}{q_j'} = 1$, $\frac{1}{\theta_j} + \frac{1}{\theta_j'} = 1$, $j = 1, ..., m$.

From the inequality (1), we have

$$\|f\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*} \geq \sup_{\|g\|_{\bar{q}',\bar{\theta}'}^{*} \leq 1} \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_{+}^{m}} \int_{I^m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \delta_{\bar{s}}(g, \bar{x}) d\bar{x}. \tag{2}$$

Since by the assumption of the theorem $1 < q_j < 2, j = 1, ..., m$, we have $2 < q_j^{'} < \infty, j = 1, ..., m$. Therefore, by Theorem 3 for $p_j = \theta_j^{(1)} = 2, \ \ j = 1, ...m$, we obtain

$$\|g\|_{\bar{q}',\bar{\theta}'}^{*} \leq C_0 \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_j^{'}}\right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2 \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_{+}^{m}} \right\|_{l_{\bar{\theta}'}}. \tag{3}$$

Let's introduce the following notation

$$U_{\bar{q}',\bar{\theta}'} = \left\{ g \in L_{\bar{q}',\bar{\theta}'}^{*} : C_0 \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_j^{'}}\right)} \|\delta_{\bar{s}}(g)\|_2 \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_{+}^{m}} \right\|_{l_{\bar{\theta}'}} \leq 1 \right\}.$$

Then it follows from the inequality (3) that the set $U_{\bar{q}',\bar{\theta}'}$ is a subset of the unit ball of the the space $L_{\bar{q}',\bar{\theta}'}^{*}(I^m)$. Therefore, the formula (2) implies that

$$\|f\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*} \geq C \sup_{g \in U_{\bar{q}',\bar{\theta}'}} \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_{+}^{m}} \int_{I^m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \delta_{\bar{s}}(g, \bar{x}) d\bar{x}. \tag{4}$$

If $g \in L_{\bar{q}',\bar{\theta}'}^{*}(I^m)$, such that $\|\delta_{\bar{s}}(g)\|_2 \leq b_{\bar{s}}, \ \ \bar{s} \in \mathbb{Z}_{+}^{m}$ and

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_j^{'}}\right)} b_{\bar{s}} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_{+}^{m}} \right\|_{l_{\bar{\theta}'}} \leq 1,$$

then from inequality (4) we obtain

$$\|f\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*} \geq C \sup_{\{b_{\bar{s}}\}} \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_{+}^{m}} \sup_{\|\delta_{\bar{s}}(g)\|_2 \leq b_{\bar{s}}} \int_{I^m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \delta_{\bar{s}}(g, \bar{x}) d\bar{x}. \tag{5}$$

Now let's prove that the following inequality holds

$$\sup_{\|\delta_{\bar{s}}(g)\|_2 \leq b_{\bar{s}}} \int_{I^m} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \delta_{\bar{s}}(g, \bar{x}) d\bar{x} \geq \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2 \, b_{\bar{s}} \tag{6}$$

for each $\bar{s} \in \mathbb{Z}_{+}^{m}$. So consider the function

$$g_0(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})} a_{\bar{k}}(g_0)e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle},$$

where

$$a_{\bar{k}}(g_0) = \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2^{-1} a_{\bar{k}}(f)b_{\bar{s}}.$$

Then $\|\delta_{\bar{s}}(g)\|_2 \le b_{\bar{s}}, \ \ \bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m$. Hence, by the Perseval's equality, we have

$$\sup_{\|\delta_{\bar{s}}(g)\|_2\le b_{\bar{s}}} \int_{I^m} \delta_{\bar{s}}(f,\bar{x})\delta_{\bar{s}}(g,\bar{x})d\bar{x} \ge \int_{I^m} \delta_{\bar{s}}(f,\bar{x})\delta_{\bar{s}}(g_0,\bar{x})d\bar{x} =$$

$$= \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2^{-1} b_{\bar{s}} \sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})} a_{\bar{k}}^2(f) = \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2 \, b_{\bar{s}},$$

which proves the formula (6).

Next, it follows from formulas (5) and (6) that

$$\|f\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*} \ge C\sup_{\{b_{\bar{s}}\}} \sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m} b_{\bar{s}} \left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_2 . \tag{7}$$

Suppose

$$\sigma_{\bar{s}_{m-j}}(f)_{\bar{\theta}_j} =$$

$$= \Big\{\sum_{s_j=1}^{\infty} 2^{s_j\theta_j\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j}\right)}\Big[...\Big[\sum_{s_1=1}^{\infty} 2^{s_1\theta_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_1}\right)}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2^{\theta_1}\Big]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}...\Big]^{\frac{\theta_j}{\theta_{j-1}}}\Big\}^{\frac{1}{\theta_j}},$$

where $\bar{s}_{m-j} = (s_{j+1},...,s_m), \ \ \bar{\theta}_j = (\theta_1,...,\theta_j), \ \ j=1,...,m-1$.

Consider the following sequence

$$b_{\bar{s}} = \left\|\left\{\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})}\left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_2\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{-\frac{\theta_m}{\theta'_m}} \prod_{j=1}^{m}(\sigma_{\bar{s}_{m-j}}(f)_{\bar{\theta}_j})^{\theta_{j+1}-\theta_j}\times$$

$$\times \left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_2^{\theta_1-1}\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})\theta_j}$$

for $\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m$. Then

$$\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{q'_j})} b_{\bar{s}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\bar{\theta}'}} = 1$$

and

$$\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m} b_{\bar{s}}\left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_2 = \left\|\left\{\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})}\left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_2\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}.$$

Therefore, from the inequality (7), we get

$$\|f\|_{\bar{q},\bar{\theta}}^{*} \ge C\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})}\left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_2\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}. \tag{8}$$

Next, if $2 < p_j < \infty, \ \ j=1,...,m$, then, by applying the inequality of different metrics for trigonometric polynomials [28, 29], we obtain from the estimate (8) the following

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} \geq C \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\lambda}} \right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}$$

for $1<q_j<2\leq p_j<\infty,\ \ 1<\theta_j,\lambda_j<\infty,\ \ j=1,...,m$. The theorem has been proved.

Suppose $y_+=\max\{0,y\}$.

Theorem 5. Let $\overline{p}=(p_1,...,p_m)$, $\overline{q}=(q_1,...,q_m)$, $\overline{r}=(r_1,...,r_m)$, $1\leq p_j<q_j\leq 2$, $j=1,...,m$, $1\leq\theta_j^{(1)},\theta_j^{(2)}<+\infty$, $1\leq\tau_j\leq+\infty$, $0<r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}=...=r_\nu+\frac{1}{q_\nu}-\frac{1}{p_\nu}<r_{\nu+1}+\frac{1}{q_{\nu+1}}-\frac{1}{p_{\nu+1}}=...=r_m+\frac{1}{q_m}-\frac{1}{p_m}$.

1. If $\theta_j^{(2)}\leq\tau_j, j=1,...,m$, then

$$e_M\left(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B\right)_{\overline{q},\bar{\theta}^{(2)}} \asymp M^{-\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}\right)+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j}\right)}.$$

2. If $\theta_1^{(2)}=...=\theta_m^{(2)}=\theta>\tau=\tau_1=...=\tau_m$, then

$$e_M\left(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B\right)_{\overline{q},\theta} \leq M^{-\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}\left(\log^{\nu-1}M\right)^{\left(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\tau}\right)_+}.$$

3. If $\tau_j\leq\theta_j^{(2)}, j=1,...,m$, then

$$e_M\left(S^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B\right)_{\overline{q},\bar{\theta}^{(2)}} \geq CM^{-\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}\right)+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j}\right)}.$$

Proof. The upper bound estimation of the quantity $e_M\left(S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B\right)_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}$ was proved in [30]. Let us consider the lower bound.

For a number $M\in\mathbb{N}$ choose a natural number n such that $M\asymp 2^n n^{m-1}$ and $2^n n^{m-1}\geq 4M$.

Consider the function

$$f_0(\bar{x})=n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\tau_j}}\sum_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle=n}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_j(r_j+1-\frac{1}{p_j})}\sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})}e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}.$$

Then, by Lemma 2,

$$\left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{\bar{p},\bar{\lambda}}\right\}_{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle=n}\right\|_{l_{\bar{\tau}}}=$$

$$=n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\tau_j}}\left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_j(r_j+1-\frac{1}{p_j})}\left\|\sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})}e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}\right\|^*_{\bar{p},\bar{\lambda}}\right\}_{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle=n}\right\|_{l_{\bar{\tau}}}\leq$$

$$\leq Cn^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\tau_j}}\left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_j(r_j+1-\frac{1}{p_j})}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(1-\frac{1}{p_j})}\right\}_{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle=n}\right\|_{l_{\bar{\tau}}}=$$

$$=Cn^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\tau_j}}\left\|\{1\}_{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle=n}\right\|_{l_{\bar{\tau}}}\leq C_0.$$

Thus, the function $f_0\in S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B$.

Let Ω_M be an arbitrary collection in M of m-dimensional vectors $\{\bar{k}^{(1)},...,\bar{k}^{(M)}\}$ with integer coordinates. For every vector $\bar{s}$, that satisfies the condition $\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle=n$, we consider the set $\Omega_M\cap\rho(\bar{s})$. Then, according to the choice of the number n, the set S of vectors $\bar{s}$ such that $\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle=n$ and $|\Omega_M\cap\rho(\bar{s})|\leq\frac{1}{2}|\rho(\bar{s})|$ contains at least half of all vectors $\bar{s}$ such that $\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle=n$. Hence $|S|\asymp n^{m-1}$.

Let $T(\bar{x})$ be an arbitrary polynomial with a collection of harmonics from Ω_M. Then, by Theorem 4, for $p_j = \lambda_j = 2, \ \ j = 1, ..., m$, we get

$$\|f_0 - T\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \geq C \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f_0 - T)\|_2 \right\}_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle = n} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} \geq$$

$$\geq C \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f_0 - T)\|_2 \right\}_{\bar{s}\in S} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} \geq$$

$$\geq C n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\tau_j}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(r_j+1-\frac{1}{p_j})} \prod_{j=1}^{m} 2^{\frac{s_j}{2}} \right\}_{\bar{s}\in S} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} \geq$$

$$\geq C n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\tau_j}} \left\| \left\{ 2^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle} \right\}_{\bar{s}\in S} \right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} = C n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\tau_j}} 2^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} \left\|\{1\}_{\bar{s}\in S}\right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}}.$$

Applying the Holder's inequality ($\frac{1}{\theta_j^{(2)}} + \frac{1}{\theta_j^{(2)\prime}} = 1, \ \ j = 1, ..., m$) and Lemma 4 , we have

$$|S| = \sum_{\bar{s}\in S} 1 \leq \left\|\{1\}_{\bar{s}\in S}\right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} \left\|\{1\}_{\bar{s}\in S}\right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)\prime}}} \leq$$

$$\leq \left\|\{1\}_{\bar{s}\in S}\right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}} \left\|\{1\}_{\langle \bar{s},\gamma\rangle = n}\right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)\prime}}} \leq C n^{\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\theta_j^{(2)\prime}}} \left\|\{1\}_{\bar{s}\in S}\right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}}.$$

Since $|S| \asymp n^{m-1}$, we obtain

$$n^{\nu-1} \leq C n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j^{(2)\prime}}} \left\|\{1\}_{\bar{s}\in S}\right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}}.$$

Hence

$$n^{\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\theta_j^{(2)}}} \leq C \left\|\{1\}_{\bar{s}\in S}\right\|_{l_{\bar{\theta}^{(2)}}}.$$

Therefore,

$$\|f_0 - T\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \geq C 2^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} n^{\sum\limits_{j=2}^{m}(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j})}$$

for any polynomial $T(\bar{x})$ with a collection of harmonics from Ω_M. Hence

$$e_M\left(S^{\bar{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B\right)_{\bar{q},\theta^{(2)}} \geq C 2^{-(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} n^{\sum\limits_{j=2}^{m}(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j})} \geq$$

$$\geq C M^{-\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)} (\log M)^{(m-1)\left(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}\right)+\sum\limits_{j=2}^{m}\left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j}\right)}. \tag{9}$$

Since $\nu \leq m$, then we obtain the lower bound estimation from (9). The theorem has been proved.

V.N. Temlyakov [22, 23] developed a constructive method of estimation of the best $M-$ term approximations functions from Nikol'skii-Besov's classes $S^{\bar{r}}_{p,\tau}B$ in the space $L_q(I^m)$ in the case $1 < p < 2 \leq q < \infty$. Let us recall some notations.

Let $\bar{r} = (r_1, ..., r_m)$, $r_j > 0$, $j = 1, ..., m$, and $l \in \mathbb{N} \cap \{0\} = \mathbb{N}_0$. Let $r = r_1$ and for a function $f \in L_1(I^m)$ suppose

$$f_{l,\bar{r}}(\bar{x}) = \sum_{\bar{s}: rl \leq \langle \bar{s},\bar{r}\rangle < r(l+1)} \delta_{\bar{s}}(f,\bar{x}), \ \ \bar{x} \in I^m;$$

$$\|f_{l,\bar{r}}\|_A = \sum_{\bar{s}: rl \leq \langle \bar{s},\bar{r}\rangle < r(l+1)} \sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})} |a_{\bar{k}}(f)|.$$

V.N. Temlyakov [22] considered the class

$$W_A^{\bar r,a,b}=\Big\{f\in L_1(I^m): \|f_{l,\bar r}\|_A\le 2^{-la}l^{(\nu-1)b}\Big\},$$

where $a>0, b>0$.

Lemma 3 [22]. Let $2\le p<+\infty$ and $a>0,b>0$. Then there exists a constructive method based on the greedy algorithms which leads to the following estimation

$$e_M(W_A^{\bar r,a,b})_p\le CM^{-a-\frac12}(\log M)^{(\nu-1)(a+b)}.$$

Theorem 6. Let $1<p_j<2\le q<+\infty,\quad 1<\theta_j<\infty,\quad 1\le\tau_j\le\infty,\quad j=1,...,m,\quad 0<r_1=...=r_\nu<$ $<r_{\nu+1}\le...\le r_m,\quad r_1>\frac{1}{p_1}$ and $\frac{r_1}{p_j}=\frac{r_j}{p_1}, j=1,...,\nu$ and $\frac{r_1}{p_j}<\frac{r_j}{p_1}, j=\nu+1,...,m$. Then the following relation holds

$$e_n(S^{\bar r}_{\bar p,\bar\theta^{(1)},\bar\tau}B)_q\asymp n^{-(r+\frac12-\frac{1}{p_1})}(\log n)^{(\nu-1)(r-\frac{1}{p_1})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}},$$

where $\tau_j'=\frac{\tau_j}{\tau_j-1},\quad j=1,...,m$.

Proof. Let $f\in S^{\bar r}_{\bar p,\bar\theta^{(1)},\bar\tau}B$. By the condition of the theorem $1<p_j<2,\quad j=1,...,m$, then there exists a number p_0 such that $1<p_j<p_0<2,\quad j=1,...,m$. Therefore, by applying the Holder's inequality ($\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_0'}=1$) and the Hausdorf-Young's Theorem [31; 211], we get

$$\|f_{l,\bar r}\|_A\le\sum_{\bar s:rl\le\langle\bar s,\bar r\rangle<r(l+1)}\prod_{j=1}^{m}2^{(s_j-1)\frac{1}{p_0}}\Big(\sum_{\bar k\in\rho(\bar s)}|a_{\bar k}(f)|^{p_0'}\Big)^{\frac{1}{p_0'}}\le$$

$$\le C\sum_{\bar s:rl\le\langle\bar s,\bar r\rangle<r(l+1)}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\frac{1}{p_0}}\|\delta_{\bar s}(f)\|_{p_0}. \tag{10}$$

Now, since $p_j<p_0,\quad j=1,...,m$, then by applying the inequality of different metrics for trigonometric polynomials (see [28, 29])and the Holder's inequality, we obtain from (10) the following

$$\|f_{l,\bar r}\|_A\le C\sum_{\bar s:rl\le\langle\bar s,\bar r\rangle<r(l+1)}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\frac{1}{p_j}}\|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar p,\bar\theta}\le$$

$$\le C\left\|\Big\{2^{\langle\bar s,\bar r\rangle}\|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{\bar p,\bar\theta}\Big\}_{rl\le\langle\bar s,\bar r\rangle<r(l+1)}\right\|_{l_{\bar\tau}}\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(\frac{1}{p_j}-r_j)}\right\}_{rl\le\langle\bar s,\bar r\rangle<r(l+1)}\right\|_{l_{\bar\tau'}}. \tag{11}$$

Suppose $\gamma_j=\frac{r_j}{r_1},\quad \gamma_j'=\frac{r_j-\frac{1}{p_j}}{r_1-\frac{1}{p_1}}, j=1,...,m$. Then, by the assumption of the theorem, $1=\gamma_1=...=\gamma_\nu<$ $<\gamma_{\nu+1}\le...\le\gamma_m$ and $\gamma_j'=\gamma_j,\quad j=1,...,\nu,\ \gamma_j=\gamma_j',\quad j=\nu+1,...,m$. Then using Lemma 1 we have

$$\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(\frac{1}{p_j}-r_j)}\right\}_{rl\le\langle\bar s,\bar r\rangle<r(l+1)}\right\|_{l_{\bar\tau'}}\le$$

$$\le\left\|\Big\{2^{-(r_1-\frac{1}{p_1})\langle\bar s,\bar\gamma'\rangle}\Big\}_{\langle\bar s,\bar\gamma\rangle\ge l}\right\|_{l_{\bar\tau'}}\le C2^{-l(r_1-\frac{1}{p_1})}l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}}, \tag{12}$$

where $\frac{1}{\tau_j'}=1-\frac{1}{\tau_j},\quad j=1,...,m$.

Next, it follows from the inequalities (11) and (12) that

$$\|f_{l,\bar r}\|_A\le C2^{-l(r_1-\frac{1}{p_1})}l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}}$$

for any function $f \in S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B$ in the case $r_1 > \frac{1}{p_1}$. Thus, the function $f \in S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B$ belongs to the class $W^{\bar{r},a,b}_{A}$ in the case $a = r_1 - \frac{1}{p_1}$ and $b = \frac{1}{\nu-1}\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}$. Hence, by Lemma 3, we have

$$e_n(S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B)_q \leq Ce_n(W^{\bar{r},a,b}_{A})_q \leq Cn^{-(r+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}(\log n)^{(\nu-1)(r-\frac{1}{p_1})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}}$$

in the case $1 < p_j < 2 \leq q < +\infty, \quad 1 < \theta_j < \infty, \quad 1 \leq \tau_j \leq \infty, \quad j = 1, ..., m, \quad r_1 > \frac{1}{p_1}$. It proves the upper bound estimation.

Now let's consider the lower bound estimation. Since $2 \leq q < \infty$, then $\|f\|_2 \leq C\|f\|_q, \quad f \in L_q(I^m)$. Therefore

$$e_n(S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B)_q \geq Ce_n(S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B)_2.$$

Now, by letting $\theta_j = q = 2$, $j = 1, ..., m$, in Theorem 5, we get

$$e_n(S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B)_2 \geq Cn^{-(r+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}(\log n)^{(\nu-1)(r+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})}.$$

Hence

$$e_n(S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B)_q \geq Cn^{-(r+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}(\log n)^{(\nu-1)(r+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j})} \geq$$

$$\geq Cn^{-(r+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1})}(\log n)^{(\nu-1)(r-\frac{1}{p_1})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\tau_j'}}.$$

It proves the theorem.

Remark. Note that the upper bound estimation in the case $p_j = \theta_j = p$, $j = 1, ..., m$, in Theorem 6 was proved by V.N. Temlyakov [22] using the constructive method.

In [32] obtained the exact estimation of the best $M-$ term approximations of Nikol'skii's and Besov's classes in the Lebesgue space with the mixed norm.

This work was supported by the Ministry of Education and Science of Republic Kazakhstan (Grant No. 5129/GF4). Of this research was written when the author was staying at the Centre de Recerca Mathematica, within the Research Program on Constructive Approximation and Harmonic Analysis.

References

1 Blozinski A.P. Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms / A.P. Blozinski // Transac. Amer. math. soc. — 1981. — Vol. 263, No. 1. — P. 146–167.

2 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М.Никольский. — М.: Наука, 1977. — 456 с.

3 Никольский С.М. Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера / С.М. Никольский // Сиб. мат. журн. — 1963. — Т. 4, № 6. — С. 1342–1364.

4 Аманов Т.И. Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной / Т.И. Аманов. — Алма-Ата: Наука, 1976. — 224 с.

5 Лизоркин П.И. Пространства функций смешанной с декомпозиционной точки зрения / П.И. Лизоркин, С.М. Никольский // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. — 1989. — Т. 187. — С. 143–161.

6 Стечкин С.Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов / С.Б. Стечкин // Доклады Академии наук СССР. — 1955. — Т. 102, № 1. — С. 37–40.

7 Исмагилов Р.С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами / Р.С. Исмагилов // Успехи математических наук. — 1974. — Т. 29, № 3. — С. 161–173.

8 Майоров В.Е. Тригонометрические поперечники соболевских классов W^r_p в пространстве L_q / В.Е. Майоров // Математические заметки. — 1986. — Т. 40, №2. — С. 161–173.

9 Белинский Э.С. Приближение периодических функций «плавающей» системой экспонент и тригонометрические поперечники / Э.С. Белинский // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль, 1984. — С. 10–24.

10 Белинский Э.С. Приближение «плавающей» системой экспонент на классах периодических функций / Э.С. Белинский // Математический сборник. — 1987. — Т. 132, 1. — С. 20–27.

11 Белинский Э.С. Приближение «плавающей» системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной / Э.С. Белинский // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль, 1988. — С. 16–33.

12 Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной / В.Н. Темляков // Труды Математического института им. В.А.Стеклова. — 1986. — 178. — С. 1–112.

13 Романюк А.С. Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных / А.С. Романюк // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2003. — Т. 67. — Вып. 2. — С. 61–100.

14 Романюк А.С. Приближение классов периодических функций многих переменных / А.С. Романюк // Мат. замет. — 2002. — Т. 71, № 1. — С. 109–121.

15 De Vore R.A. Nonlinear approximation by trigonometric sums / R.A. DeVore, V.N. Temlyakov // Journal of Fourier Analysis and Applications. — 1995. — Vol. 2, No. 1. — P. 29–48.

16 Temlyakov V.N. Greedy algoritm and m-term trigonometric approximation / V.N. Temlyakov // Constructive approximation. — 1998. — Vol. 14, No. 4. — P. 569–587.

17 Dinh Dung. On asymptotic order of n-term approximations and non-linear-n widths / Dinh Dung // Vietnam Journal Mathematics. — 1999. — No. 27(4). — P. 363–367.

18 Кашин Б.С. Об аппроксимативных свойствах полных ортонормированных систем / Б.С. Кашин // Труды Математического института им. В.А.Стеклова. — 1985. — 172. — С. 187–201.

19 DeVore R.A. Nonlinear approximation / R.A. DeVore // Acta Numerica. — 1998. — 7. — P. 51–150.

20 Temlyakov V.N. Nonlinear methods approximation / V.N. Temlyakov // Found. Comp. Math. — 2003. — 3. — P. 33–107.

21 Dinh Dung. Hyperbolic cross approximation / Dinh Dung, V.N. Temlyakov, T. Ullrich // ArXiv: 1601. 03978v1. — 15, Januare. — 2016. — P. 1–154.

22 Темляков В.Н. Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости / В.Н. Темляков // Математический сборник. — 2015. — 206:11. — С. 131–160.

23 Temlyakov V.N. Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness / V.N. Temlyakov // ArXiv: 1503.00282v1 [NA]. — 2015. — P. 1–30.

24 Bazarkhanov D.B. Nonlinear tensor product approximation of functions / D.B. Bazarkhanov, V.N. Temlyakov // ArXiv: 1409.1403v1 [stat ML]. — 2014. — P. 1–23.

25 Akishev G. On approximation of function classes in Lorentz spaces with anisotropic norm / G. Akishev // Analysis in theory and applications. — 2013. — 29(4). — P. 358 – 372.

26 Акишев Г. О точности оценок наилучшего M-членного приближения класса Бесова / Г. Акишев // Сиб. электр. матем. изв. — 2010. — Т. 7. — С. 255–274.

27 Акишев Г. О порядках M-членного приближения классов в пространстве Лоренца / Г. Акишев // Математический журнал. — 2011. — 11. — 1. — С. 5–29.

28 Акишев Г. Неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов / Г. Акишев // Уалихановские чтения – 9. — Кокшетау, 2004. — С. 3–6.

29 Нурсултанов Е. Д. Неравенства разных метрик С.М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространства Лоренца / Е. Нурсултанов // Труды Математического института РАН. — 2006. — 255. — С. 1–18.

30 Акишев Г. О порядках M-членного приближения классов периодических функций / Г. Акишев // Математический журнал. — 2006. — Т. 6, № 4. — С. 5–11.

31 Бари Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. — М.: Наука, 1961. — 936 с.

32 Akishev G. On M-term approximations of the Nikol'skii-Besov class / G. Akishev // Hacet. Jour. Math. and Stat. — 2016. — Т. 45, № 2. — P. 297–310.

Ғ. Ақышев

Лоренц кеңістігінде функциялардың ең жақсы M-мүшелі жуықтауларын конструктивті әдістермен бағалау

Мақалада көпайнымалы периодты функциялардың аралас нормалы Лоренц кеңістігі, Никольский-Бесовтың функционалдық класы және функцияның ең жақсы M-мүшелі жуықтауы қарастырылды. Сондай-ақ бір Лоренц кеңістігіндегі функцияның басқасында жатуының жеткілікті шарты тағайындалған. Никольский-Бесов класындағы функциялардың ең жақсы M-мүшелі жуықтауларының жоғарыдан және төменнен бағалаулары алынған. Жоғарыдан бағалауды дәлелдеу үшін В.Н. Темляков құрған жаңа конструктивтік әдіс қолданылды.

Кілт сөздер: Лоренц, Никольский-Бесов класы, М-терминдердің ең жақсы жақтары, жуықтаулар, жеткілікті шарттар, бағалау.

Г. Акишев

Оценки наилучших M-членных приближений функций в пространстве Лоренца конструктивными методами

В статье рассмотрены пространство Лоренца периодических функций многих переменных с анизотропной нормой; функциональный класс Никольского-Бесова и наилучшее M-членное приближение функции. Установлены достаточные условия принадлежности функции из одного пространства Лоренца в другое. Получены оценки сверху и снизу наилучших M-членных приближений функций из класса Никольского-Бесова. Для доказательства оценки сверху использован новый конструктивный метод, разработанный В.Н. Темляковым.

Ключевые слова: Лоренц, класс Никольского-Бесова, лучшие аппроксимации М-термов, приближение, достаточные условия, оценка.

References

1 Blozinski, A.P. (1981). Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms // Transac. Amer. Math. Soc., 263, 1, 146–167.

2 Nikol'skii, S.M. (1977). *Priblizhenie funkcii mnohikh peremennykh i teoremy vlozheniia [Approximation of classes of functions of several variables and embeding theorems]*. Moscow: Nauka [in Russian].

3 Nikol'skii, S.M. (1963). Funktsii s dominiruiushchei smeshannoi proizvodnoi, udovletvoriaiushchei kratnomu usloviiu Heldera [Functions with dominant mixed derivative satisfies multi condition Hol'der]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal – Siberian Mathematical Journal, Vol. 4, 6,* 1342–1364 [in Russian].

4 Amanov, T.I. (1976). *Prostranstva differentsiruemykh funktsii s dominiruiushchei smeshannoi proizvodnoi [Spaces of differentiable functions with dominant mixed derivative].* Alma-Ata: Nauka [in Russian].

5 Lizorkin, P.I., Nikol'skii S.M. (1989). Prostranstva funktsii smeshannoi s dekompozitsionnoi tochki zreniia [Spaces of functions of mixed smoothness from the decomposition point of view]. *Trudy Matematicheskoho instituta imeni V.A.Steklova — Proceedings of the Steklov Mathematical Institute, Vol. 187*, 163–184 [in Russian].

6 Stechkin, S.B. (1955). Ob absolyutnoi skhodimosti ortohonalnykh riadov [On the absolute convergence of orthogonal series]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Reports of the Academy of Sciences of the USSR, Vol. 102, 2,* 37–40 [in Russian].

7 Ismagilov, R.S. (1974). Poperechniki mnozhestv v lineinykh normirovannykh prostranstvakh i priblizhenie funktsii trihonometricheskimi mnohochlenami [Widths of sets in linear normed spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials]. *Uspekhi matematicheskih nauk – Successes of mathematical Sciences, Vol. 29, 3,* 161–178 [in Russian].

8 Maiorov, V.E. (1986). Trihonometricheskie poperechniki sobolevskikh klassov W_p^r v prostranstve L_q [Trigonometric diametrs of the Sobolev classes W_p^r in the space L_q]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes, 40, 2,* 161–173 [in Russian].

9 Belinskii, E.S. (1984). Priblizhenie periodicheskikh funktsii «plavaiushchei» sistemoi eksponent i trihonometricheskie poperechniki [Approximation of periodic functions by a 'floating' system of exponents and trigonometric diametrs]. *Issledovaniia po teorii funktsii mnohikh veshchestvennykh peremennykh – Research on the theory of functions of many real variables,* 10-24. Yaroslavl' State University [in Russian].

10 Belinskii, E.S. (1987). Priblizhenie «plavaiushchei» sistemoi eksponent na klassakh periodicheskikh funktsii [Approximation by a 'floating' system of exponents on the classes of smooth periodic functions]. *Matematicheskii sbornik — Mathematical Collection, Vol. 132, 1,* 20–27 [in Russian].

11 Belinskii, E.S.(1988). Priblizhenie «plavaiushhei» sistemoi eksponent na klassakh periodicheskikh funktsii s ohranichennoi smeshannoi proizvodnoi [Approximation by a 'floating' system of exponentials on the classes of smooth periodic functions with bounded mixed derivative]. *Issledovaniia po teorii funktsii mnohikh veshchestvennykh peremennykh, Jaroslavl — Research on the theory of functions of many real variables Yaroslavl State University,* 16–33 [in Russian].

12 Temlyakov, V.N. (1986). Priblizhenie funktsii s ohranichennoi smeshannoi proizvodnoi [Approximation of functions with bounded mixed derivative]. *Trudy Matematicheskoho instituta imeni V.A.Steklova — Proceedings of the V.A.Steklov Mathematical Institute, 178,* 1–112 [in Russian].

13 Romanyuk, A.S. (2003). Nailuchshie M-chlennye trihonometricheskie priblizheniia klassov Besova periodicheskikh funktsii mnohih peremennykh [On the best M-term trigonometric approximations for the Besov classes of periodic functions of many variables]. *Izvestiia Rossiiskoi Akademii Nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences, Vol. 67, 2,* 61–100 [in Russian].

14 Romanyuk, A.S. (2002). Priblizhenie klassov periodicheskikh funktsii mnohikh peremennykh [Approximation of the classes of periodic functions of many variables]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes, Vol. 71, 1,* 109–121 [in Russian].

15 DeVore, R.A., Temlyakov, V.N. (1995). Nonlinear approximation by trigonometric sums // *Journal fourier analysis applications, Vol. 2,* 1, 29–48.

16 Temlyakov, V.N. (1998). Greedy algoritm and m-term trigonometric approximation // *Constructive approximation, Vol. 14,* 4, 569–587.

17 Dinh Dung. (1999). On asymptotic order of n-term approximations and non-linear n-widths // *Vietnam Journal of Mathematics, 27(4),* 363–367.

18 Kashin, B.S. (1985). Ob approksimativnykh svoistvakh polnykh ortonormirovannykh sistem [Approximation properties of complete orthonormal systems]. *Trudy matematicheskoho instituta imeni V.A.Steklova — Proceedings of the V.A.Steklov Institute of Mathematics, 172,* 187–201 [in Russian].

19 DeVore, R.A. (1998). Nonlinear approximation // Acta Numer, 7, 51–150.

20 Temlyakov, V.N. (2003). Nonlinear methods approximation // Found. Comp. Math., 3, 33–107.

21 Dinh Dung, Temlyakov, V.N. & Ullrich, T. (2016). Hyperbolic cross approximation // ArXiv: 1601. 03978v1. – 15, Januare. 1–154.

22 Temlyakov, V.N. (2015). Konstruktivnye razrezhennye trihonometricheskie priblizheniia i druhie zadachi dlia funktsii smeshannoi hladkosti [Constructive sparse trigonometric approximation and other problems for functions with mixed smoothness]. *Matematicheskii sbornik — Mathematical Collection, 206, 11,* 131–160 [in Russian].

23 Temlyakov, V.N. (2015). Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness // ArXiv: 1503.00282v1 [NA], 1–30.

24 Bazarkhanov, D.B. & Temlyakov, V.N. (2014). Nonlinear tensor product approximation of functions // ArXiv: 1409.1403v1 [stat ML], 1–23.

25 Akishev, G. (2013). On approximation of function classes in Lorentz spaces with anisotropic norm // Analysis in theory and applications, 29, 4, 358–372.

26 Akishev, G. (2010). O tochnosti otsenok nailuchsheho M-chlennoho priblizheniia klassa Besova [On the exact estimations of the best M-term approximation of the Besov class]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiia — Siberian Electronic Mathematical Reports, 7,* 255–274 [in Russian].

27 Akishev, G. (2011). O poriadkakh M-chlennoho priblizheniia klassov v prostranstve Lorentsa [On the order of the M-term approximation classes in Lorentz spaces]. *Matematicheskii zhurnal — Mathematical Journal, 11, 1,* 5–29 [in Russian].

28 Akishev, G. (2004). Neravenstva raznykh metrik dlia trihonometricheskikh polinomov [Inequalities of different metric for trigonometric polynomials]. *Ualikhanovskie chteniia — 9 – Ualikhanov reading — 9, 3–6* Kokshetau [in Russian].

29 Nursultanov, E.D. (2006). Neravenstvo raznykh metrik S.M.Nikolskoho i svoistva posledovatelnosti norm summ Fure funktsii iz prostranstva Lorentsa [S.M.Nikol'skii's inequality for different metric and properties of the sequence of norms of the Fourier sums of a function in the Lorentz space]. *Trudy Matematicheskoho instituta imeni V.A.Steklova — Proceedings of the V.A.Steklov Mathematical Institute, 255,* 1–18 [in Russian].

30 Akishev, G. (2006). O poriadkakh M-chlennoho priblizheniia klassov periodicheskikh funktsii [On orders M-term approximation classes of periodic functions]. *Matematicheskii zhurnal — Mathematical Journal, 6, 4,* 5–11 [in Russian].

31 Bary, N.K. (1961). *Trihonometricheskie riady [Trigonometric series].* Moscow: Nauka [in Russian].

32 Akishev, G. (2016). On M-term approximations of the Nikol'skii-Besov class // Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 45, 2, 297–310.

УДК 621.01; 539.3; 539.62

Е. Аринов[1], С.Ж. Карипбаев[2], К.З. Сартаев[3]

[1] *Жезказганский университет им. О.А.Байконурова, Казахстан;*
[2] *Академия гражданской авиации, Алматы, Казахстан;*
[3] *Екибастузский инженерно-технический институт им. К.И.Сатпаева, Казахстан*
(E-mail: arinov91@mail.ru)

Динамическое напряженно-деформированное состояние односекционного манипулятора

Смоделирована динамика упруго-деформируемых плоских и пространственных механизмов. Построены матрицы, описывающие инерционные, диссипативные и жесткостные свойства элементов при действии внешних сил, сил инерции, дополнительных узловых сил. Полные перемещения при этом описаны суммой деформационных и кинематических перемещений. Разработаны алгоритм и комплекс вычислительного пакета прикладных программ на основе разработанных подходов, методической основы для многовариантных компьютерных расчетов сил, динамического напряженно-деформированного состояния в элементах упругих механизмов. Используемый в работе метод конечных элементов дает возможность для многовариантных расчетов напряженно-деформированного состояния механизмов, для установления закономерности распределения упругих перемещений, внутренних усилий, напряжений в зависимости от многочисленных факторов, т.е. упругих свойств, параметров движения, внешних статических и переменных во времени сил.

Ключевые слова: манипуляторы, метод конечных элементов, динамика, сила, упругие механизмы, внутреннее напряжение.

При исследовании плоских и пространственных механизмов актуальность приобретают проблемы их напряженно-деформированного состояния (НДС) [1–3], поэтому проведение расчета и полной оценки динамического НДС механизмов с упругими звеньями на основе их конечно-элементной модели требует дальнейшего исследования.

Учет упругости звеньев плоских и пространственных механизмов является одной из наиболее сложных и требующих дальнейшего изучения проблем. Исследованию механизмов и машин с упруго-деформируемыми прямолинейными и криволинейными звеньями посвящены работы [4–6].

Неоднозначность выбора механико-математической модели динамического НДС механизмов с присущими им геометрическими и физическими характеристиками представляется существенным для поставленной задачи.

В предлагаемой работе смоделирована на ПЭВМ задача динамики упругих механизмов с различными степенями свободы. Разработаны единые методические основы, алгоритм, комплекс вычислительных объектно-ориентированных пакетов прикладных программ для исследования динамики упруго-деформируемых механизмов при действии различных сил.

Для решения задачи динамического НДС упругих механизмов применяется метод Ньюмарка [7]:

$$[S]\{U\}_{t+\Delta t} = \{R_s(t)\}_{t+\Delta t}\,, \tag{1}$$

где $\{R_s(t)\}_{t+\Delta t} = \left\{F_2^{(l)}(t)\right\} + [M]\{b_n\} + [C]\{b_m\} + \left\{F_8^{(l)}(t)\right\} + \left\{F_{:}^{(l)}(t)\right\}$ — эффективная нагрузка; $[S] = a_0[M] + a_1[C] + [K]$ — эффективная матрица жесткости; $\left\{F_B^{(l)}(t)\right\}$ — внешние динамические силы; $\left\{F^{(l)}(t)\right\}$ — узловые силы инерции; $\left\{F_K^{(l)}(t)\right\}$ — дополнительные узловые силы; $[C]$ — внутреннее трение в материале, определяемое по Релею; $[K]$ — матрица жесткости системы с учетом вида кинематических пар механизмов; коэффициенты a_0, a_1 зависят от шага по времени Δt и определяются по вычислительному эксперименту по двум значениям коэффициентов демпфирования, относящимся к двум низшим частотам колебаний механизмов; коэффициенты $\{b_n\}$, $\{b_m\}$ являются линейной комбинацией векторов упругих и кинематических перемещений, скоростей и ускорений, полученных в предыдущих шагах интегрирования. Выбор оптимального шага по времени при вычислении значений упругих перемещений

$\{U_{t+\Delta t}\}$ узлов в момент времени $t+\Delta t$ производится путем численного эксперимента и обеспечивает учет всех пиковых частей переменных нагрузок и устойчивость вычислительного процесса [2,3,7].

Для проверки эффективности метода Ньюмарка все полученные выше формулы систематизированы в последовательный алгоритм, составлены прикладные программы и реализованы на персональных компьютерах для механизмов погрузчика (рис. 1), механизма разгрузки контейнера (рис. 2) и многоконтурного параллельного манипулятора со многими степенями свободы с поступательными и вращательными парами (рис. 3); изучены изменения максимальных значений упругих динамических усилий, перемещений, напряжений в сечениях элементов манипулятора при действии различных сил; пронализировано НДС исследуемого манипулятора при полном его функционировании для других вариантов нагружения и кинематических параметров.

Механизм погрузчика [8] – устройство, обеспечивающее периодическое или непрерывное действие для погрузки, выгрузки и транспортирования грузов на небольшие расстояния. На рисунке 1 приведен механизм погрузчика для периодического перемещения и поворота ковша.

В схеме 1б) ковш загружается при перемещении всей машины. Такая кинематическая связь обеспечивает движение ковша по определенному закону при подъеме или опускании стрелы. На определенной высоте ковш наклоняется вперед и происходит выгрузка.

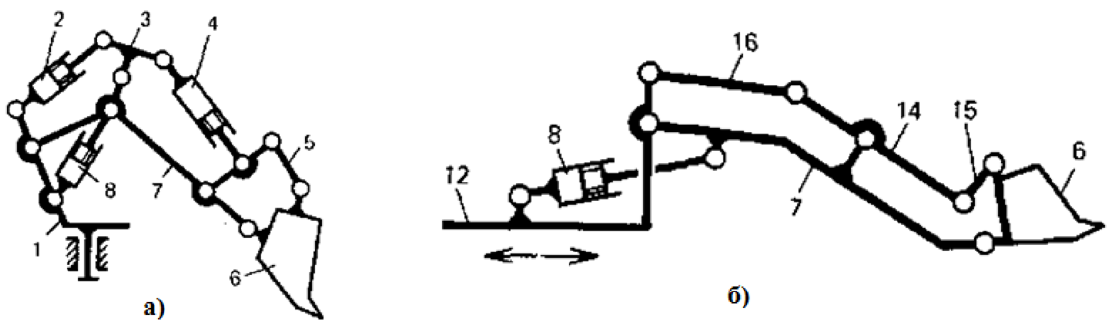

Рисунок 1. Поведение спиновой матрицы и потенциала

Механизм погрузчика можно моделировать с помощью стержневых элементов с различными геометрическими и упругими характеристиками.

Под действием внешних усилий каждая точка расчетного элемента деформируется. В каждой произвольной точке поперечного сечения пространственного расчетного стержневого элемента появляются шесть составляющих перемещения: три составляющих линейного перемещения u_ξ, v_η, w_ζ в направлении главных локальных осей $O_1\xi$, $O_1\eta$, $O_1\zeta$ системы координат $O^{'}\xi\eta\zeta$ и три составляющих угла поворота φ_ξ, φ_η, φ_ζ соответствующего сечения вокруг тех же осей.

Выписываются все основные уравнения классической теории упругости по отношению к стержню.

Расчет механизма погрузчика в целом производится известными точными или приближенными математическими методами. Метод конечных элементов (МКЭ) [2,3,7], базирующийся на рассмотрении транспортных конструкций в виде совокупности отдельных конструктивных элементов, соединенных в конечном числе узловых точек, является наиболее эффективным численным методом.

Удовлетворяя условиям равновесия во всех узловых точках механизма погрузчика, множество систем уравнений для отдельных элементов может быть объединено в одну глобальную систему уравнений для всей системы механизма погрузчика относительно составляющих перемещений узлов и углов поворота всех узлов.

Для описания конечно-элементной модели механизма погрузчика (рис. 1) разбиваем их на прямолинейные стержневые элементы, соединенные в узлах. Узлы механизма погрузчика имеют нумерацию в глобальной системе координат (ГСК), которая служит для их идентификации в перечне узлов. Элементы имеют свои номера: начальный и конечный, с помощью которых в свою очередь производится их идентификация.

Каждому элементу механизма погрузчика присваивается набор упругих постоянных материала, характеризующих их физические свойства: модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность материала.

Считается, что звенья механизма погрузчика изготовлены из стальных стержней с поперечным сечением. Задаются форма и размеры поперечного сечения. Размерами и конструкцией узлов пренебрегают.

Механизм погрузчика состоит из различных кинематических пар. Элементы и узлы нумеруются. Координаты X, Y, Z узлов расчетной модели определены в ГСК, жестко соединенной неподвижным звеном.

Механизм разгрузки контейнера [8] – устройство, обеспечивающее захват, перемещение и опрокидывание контейнера.

На рисунке 2 показан механизм разгрузки контейнера, смонтированный на раме автомобиля.

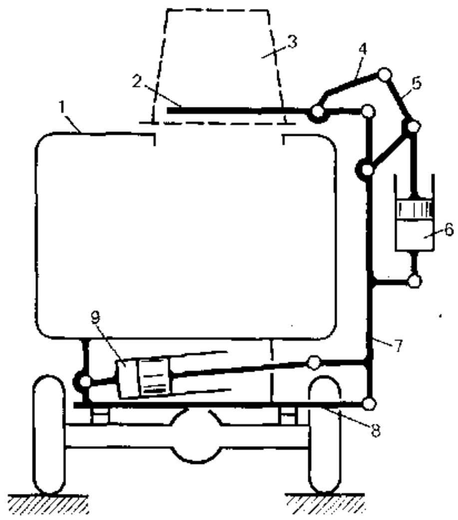

Рисунок 2. Механизм разгрузки контейнера

Для описанной выше физической модели идеально упругого тела в достаточной степени преимущественно используют сталь, а также другие металлы и их сплавы.

При конечно-элементном моделировании [2,3,7] нагрузку следует заменить системой статически эквивалентных сил, приложенных в узлах.

Стержневые элементы, являющиеся составной частью механизма разгрузки контейнера, описывают их НДС, находясь в условиях сложного сопротивления.

Расчет механизма разгрузки контейнера в целом, состоящего в основном из множества пространственных стержневых элементов с различными геометрическими и упругими характеристиками, приводит к практической возможности их решения известными точными или приближенными математическими методами: большой эффективностью при анализе поведения упругого механизма разгрузки контейнера обладает МКЭ [2,3,7]. Особые преимущества метода заключаются в удобстве формирования системы алгебраических уравнений высокого порядка и возможности представления совершенно нерегулярных и сложных объектов и условий нагружения.

При расчете статически неопределимых систем МКЭ в форме метода перемещений неизвестными являются перемещения узлов в ГСК, компонентами которых являются перемещения вдоль координатных осей OX, OY, OZ и углы поворота узловых сечений вокруг этих осей, остальные же параметры, характеризующие НДС механизма разгрузки контейнера, определяются через найденные значения узловых перемещений.

Для определения узловых перемещений получаем систему линейных уравнений, для решения которой могут быть применены различные методы решения [2,3,7]. Решением системы определяются узловые перемещения механизма разгрузки контейнера в ГСК и далее по найденному вектору перемещения определяются напряжения и деформации в любой точке любого элемента.

Далее по найденному вектору узлового перемещения для пространственного призматического стержня механизма разгрузки контейнера в любом сечении определяются внутренние силовые факторы и напряжения.

По разработанному алгоритму реализована также программа для исследования динамического НДС для упругого манипулятора параллельной структуры.

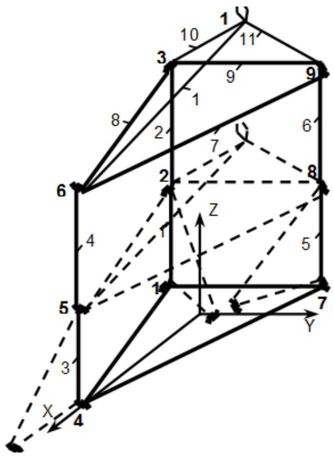

Рисунок 3. Манипулятор параллельной структуры

Многоконтурному манипулятору параллельной структуры платформенного типа со многими степенями свободы (рис. 3) соответствуют геометрические размеры звеньев $l_2 = l_4 = l_6 = \sqrt{2} \cdot l_1 <$, $l_7 = l_8 = l_9 = 1.5 l_1 / \cos 30^\circ <$. Постоянные параметры Денавита-Хартенберга позволяют записать для каждого контура в отдельности символическое уравнение манипулятора для девяти кинематических пар.

Для описания конечно-элементной модели манипулятора разбиваем его на элементы, соединенные в узлах через кинематические пары. Для манипулятора, состоящего, в основном, из отдельных стержневых звеньев, такое расчленение является естественным. Узлы манипулятора имеют нумерацию в ГСК, элементы имеют свои номера: начальный и конечный.

Каждому элементу манипулятора присваивается набор упругих постоянных материала: модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν; плотность ρ

$$E = 2 * 10^5 0, \quad \rho = 7900 \ : 3/ <^3, \quad \nu = 0,25. \tag{2}$$

Звенья манипулятора изготовлены из стальных стержней диаметром поперечного сечения 0,006 м. Формы и размеры сечения, упругие свойства материалов постоянны. Размерами и конструкцией узлов пренебрегают.

С помощью МКЭ разработаны единая методическая основа, алгоритм и составлен комплекс вычислительных объектно-ориентированных пакетов прикладных программ исследования динамического НДС упруго-деформируемого механизма погрузчика, механизма разгрузки контейнера, манипулятора параллельной структуры платформенного типа со многими степенями свободы при действии различных сил.

На рисунке 4 показаны изменения максимальных динамических упругих усилий в сечениях элементов манипулятора параллельной структуры с девятью элементами (рис. 3) от действия динамических сил, приложенных вертикально вниз в узлах 3, 4, 7 при полном его функционировании.

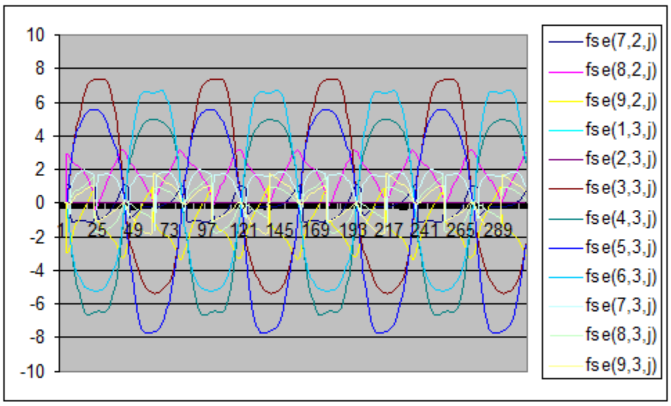

Рисунок 4. Внутренние усилия в узловых сечениях элементов
манипулятора параллельной структуры

Краткие выводы

Проведена подробная детализация всех этапов вычислений для получения значений искомых величин путем реализации разработанных программных средств по исследованию динамического НДС на профессиональной версии языка программирования на специально отобранных задачах (механизм погрузчика, механизм разгрузки контейнера, манипулятор параллельной структуры). Разработанные алгоритмы и программы позволяют произвести полный количественный анализ динамических усилий, напряжений, выявить наиболее нагруженные звенья, наихудшие положения в пространстве упругих механизмов с различными геометрическими и физическими характеристиками.

Список литературы

1 Масанов Ж.К. Анализ сил и колебаний конструкций механизмов высоких классов пространственной топологии / Ж.К. Масанов, Е.С. Темирбеков, Е.А. Биртанов // Деп. в КазГосИНТИ, №6871-КА96. Деп. от 12.04.96 г. — 254 с.

2 Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций / В.П. Агапов. — М.: АСВ, 2000. — 152 с.

3 Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М.: Мир, 1975. — 541 с.

4 Масанов Ж.К. Конечно-элементная модель движения упругих механизмов / Ж.К. Масанов, К. Сартаев, Л.А. Хаджиева, С. Жолдасов // Труды VI Междунар. конф., Санкт-Петербург, Россия (14-17 июня 2005 г.). — СПб., 2005. — С. 141–146.

5 Масанов Ж.К. Квазистатическая упругая устойчивость пространственных МВК / Ж.К.Масанов, К.З.Сартаев, Г.А.Абдраимова // Проблемы механики современных машин: материалы II Междунар. конф. (23-29 июня 2003 г.). — Улан-Удэ, 2003. — Т. 3. — С. 62–65.

6 Масанов Ж.К. Квазистатика трехмерных МВК с криволинейными упругими звеньями и силами трения в кинематических парах / Ж.К.Масанов, А.Е.Елеусинова, А.С.Тулепов // Вестн. КазНУ. Сер. математика, механика, информатика. — 2002. — № 2(30). — С. 132–138.

7 Курков С.В. Метод конечных элементов в задачах динамики механизмов и приводов / С.В. Курков. — СПб.: Политехн. ун-т, 1991. — 224 с.

8 Крайнев А.Ф. Словарь-справочник по механизмам / А.Ф.Крайнев. — М.: Машиностроение, 1987. — 560 с.

Е. Аринов, С.Ж. Карипбаев, К.З. Сартаев

Бір секциялы манипулятордың динамикалық кернеулі-деформацияланған күйі

Серпімді-деформацияланған жазық және кеңістікті механизмдердің динамикасы моделденген. Сыртқы, инерция, қосымша түйінді күштерінің әсерінен элементтердің инерциялық, диссипативті, қатаңдық қасиеттерін белгілейтін матрицалары құрылған. Бұл жағдайда толық ауысулар деформациялық және кинематикалық ауысулармен сипатталады. Күштің көпнұсқалық компьютерлік есебінің әдістемелік негізіңде серпімді элементтердің механизмдерінде динамикалық кернеулі-деформацияланған күйі үшін және құрылған амалдардың негізінде қолданбалы бағдарламалардың есептеуіш пакеттері, алгоритмі мен кешені жасалған. Жұмыста қолданылған ақырлы элементтер әдісі механизмдердің кернеулі-деформацияланған күйінің көпнұсқаулық есептеулері, ішкі күштер және серпімді ауысулардың үлестіру заңын анықтау үшін, көптеген факторларға тәуелді кернеулердің, оның ішінде серпімді қасиеттері, қозғалу параметрлері, уақыт бойынша статикалық және айнымалы күштер үшін, мүмкіндік туғызады.

Кілт сөздер: манипуляторлар, ақырлы элементтер әдісі, динамика, күш, серпімді тетіктер, ішкі кернеу.

E. Arinov, S.Zh. Karipbaev, K.Z. Sartayev

Dynamic stress-strain state of a single-section manipulator

The dynamics of elastically deformed plane and spatial mechanisms is modeled. Matrices are constructed that describe the inertial, dissipative, and stiffness properties of elements under the action of external forces, inertia forces, additional nodal forces. The total displacements are described by the sum of deformation and kinematic displacements. An algorithm and a complex of a computational package of applied programs are developed on the basis of the developed approaches, Methodical basis for multivariate computer calculations of forces, dynamic stress-strain state in the elements of elastic mechanisms. The finite element method used in the work makes it possible for multivariate calculations of the stress-strain state of the mechanisms, To establish the regularity of the distribution of elastic displacements, internal forces, stresses, depending on numerous factors: Elastic properties, motion parameters, external static and time-varying forces.

Keywords: мanipulators, finite element method, dynamics, force, elastic mechanisms, internal stress.

References

1 Masanov, Zh. K., Temirbekov, E.C. & Birtanov, E.A. (1996). Analiz sil i kolebanii konstruktsii mekhanizmov vysokikh klassov prostranstvennoi topolohii [Analysis of forces and vibrations of structures of high-class space topology]. *Dep. In KazGOCINTI. No 6871-KA96. De.12.04.96, 254* [in Russian].

2 Agapov, V.P. (2000). Metod konechnykh elementov v statike, dinamike i ustoichivosti prostranstvennykh tonkostennykh podkreplennykh konstrukcii [The finite element method in statics. Laminamics and stability of the space of thin-walled reinforced structures]. Moscow: ASV [in Russian].

3 Zenkevich, O. (1975). *Metod konechnykh elementov v tekhnike [Finite Element Method in Engineering].* Moscow: Mir [in Russian].

4 Masanov, Zh.K., Sartayev, K.S., Khadzhieva, L.A. & Zholdasov, S. (2005). Konechno-elementnaia model dvizheniia upruhikh mekhanizmov [Finite-element model of the motion of elastic mechanisms]. *VI Mezhdunarodnaia konferentsiia Sankt-Peterburg (14-17 iiunia 2005 hoda) — VI International Conference Saint Petersburg.* (pp. 141–146) [in Russian].

5 Masanov, Zh.K., Sartayev, K.Z. & Abdraimova, G.A. (2003). Kvazistaticheskaia upruhaia ustoichivost prostranstvennykh MVK [Quasistatic elastic stability of gavels of spatial MVK]. Proceedings from Problems of mechanics of modern machines: *II Mezhdunarodnaia konferentsiia (23-29 iiunia 2003 hoda) – 2nd International Scientific and Practical Conference* (Vol. 3, pp. 62–65). Ulan-Ude [in Russian].

6 Masanov, Zh.K., Eleus, A.E. & Tulepov, A.S. (2002). Kvazistatika trekhmernykh MVK s krivolineinymi upruhimi zveniami i silami treniia v kinematicheskikh parah [Quasi-statics of re-dimensional MVK with curvilinear elastic links and frictional forces in kin. Couples]. *Vestnik KazNU. Seriia matematika, mehanika, informatika – Bulletin of KazNU. Series mathematics, mechanics. Informatics, 2(30),* 132–138 [in Russian].

7 Kurkov S.V. (1991). *Metod konechnykh elementov v zadachakh dinamiki mekhanizmov i privodov [The finite element method in problems of the dynamics of mechanisms].* Saint Petersburg: Politekhnicheskii universitet [in Russian].

8 Krainev A.F. (1987). *Slovar-spravochnik po mekhanizmam [Dictionary-reference on mechanisms].* Moscow: Mashinostroenie [in Russian].

УДК 517.95

А.Х. Аттаев[1], С.А. Искаков[2], М.И. Рамазанов[2]

[1] *Институт прикладной математики и автоматизации, Нальчик, Россия;*
[2] *Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова, Казахстан*
(E-mail: isagyndyk@mail.ru)

Граничная задача для дробно-нагруженного уравнения Лаврентьева-Бицадзе

В статье исследована граничная задача для дробно-нагруженного уравнения Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области, с нелокальными граничными условиями. Подобные граничные задачи изучались в работах [1-3]. Задача, исследуемая в этой работе, отличается от рассмотренных ранее тем, что, во-первых, область в гиперболической части является не характеристической, а во-вторых, в уравнении имеются дробно-нагруженные слагаемые, что позволяет выявить некоторые особенности рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: граничная задача, нагруженные уравнения, дробная производная, метод разделения переменных.

1 Постановка задачи

Пусть $Q_1 = \{x, t \big| 0 < x < 2\pi,\ 0 < t < T\}$, $Q_2 = \{x, t \big| 0 < x < 2\pi,\ -T < t < 0\}$, $Q = Q_1 \cup Q_2$. В области Q рассматривается следующая граничная задача:

$$\begin{cases} -D_t^2 u^{(1)}(x,t) - D_x^2 u^{(1)}(x,t) + \lambda_1 D_t^{\frac{1}{2}} u^{(1)}(x,t_1) = f^{(1)}(x,t), \quad (x,t) \in Q_1; \\ D_t^2 u^{(2)}(x,t) - D_x^2 u^{(2)}(x,t) + \lambda_2 u^{(2)}(x,t_2) = f^{(2)}(x,t), \quad (x,t) \in Q_2. \end{cases} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^p u^j(0,t)}{\partial x^p} = \frac{\partial^p u^j(2\pi,t)}{\partial x^p};$$

$$\frac{\partial^p u^{(1)}(x,T)}{\partial t^p} = \mu_p \frac{\partial^p u^{(2)}(x,-T)}{\partial t^p}, p = 0, 1.$$

То есть, при $(x,t) \in Q_1$ будем иметь

$$-\frac{\partial^2 u^{(1)}(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{(1)}(x,t)}{\partial x^2} + \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u^{(1)}(x,t_1) = f^{(1)}(x,t); \tag{2}$$

$$\begin{cases} u^{(1)}(0,t) = u^{(1)}(2\pi,t) \\ \frac{\partial u^{(1)}(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u^{(1)}(2\pi,t)}{\partial x} \end{cases}; \tag{3}$$

и при $(x,t) \in Q_2$

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{(2)}(x,t)}{\partial x^2} + \alpha_2 u^{(2)}(x,t_2) = f^{(2)}(x,t), \tag{4}$$

$$\begin{cases} u^{(2)}(0,t) = u^{(2)}(2\pi,t) \\ \frac{\partial u^{(2)}(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u^{(2)}(2\pi,t)}{\partial x} \end{cases}; \tag{5}$$

также предполагаем выполнение условий

$$\begin{cases} u^{(1)}(x,T) = \mu_0 u^{(2)}(x,-T); \\ \frac{\partial u^{(1)}(x,T)}{\partial t} = \mu_1 \frac{\partial u^{(2)}(x,-T)}{\partial t}, \end{cases} \tag{6}$$

где $D_t^{\frac{1}{2}} u^{(1)}(x,t_1)$ — дробная производная в смысле Римана-Луивилля порядка $1/2$ на линии $t = t_1$.

Далее положим, что:

$$\begin{cases} T<+\infty, \quad f^{(1)}\in L_1(Q_1), \quad f^{(2)}\in L_2(Q_2), \quad \mu_0,\mu_1\in C; \\ \alpha_1,\, \alpha_2\in C, \quad t_1\in(0,T), \quad t_2\in(-T,0) \end{cases} \tag{7}$$

— заданные функции и числа.

Заданное уравнение (1) является уравнением смешанного (эллиптико-гиперболического) типа, а из-за наличия слагаемого $\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}}u^{(1)}(x,t_1)$ его называют дробно-нагруженным. Основная цель данного исследования – изучить вопросы L_2-сильной разрешимости граничных задач (2)–(6) при условиях (7).

2 Критерий однозначно сильной разрешимости

Для решения задачи (1) введем следующее обозначение:

$$s\in S=\{0,\pm1,\ \pm2,\ ...\};$$

$$\Delta_s=\begin{pmatrix} \frac{\sin sT+\mu_1 shsT}{s} & \cos sT-\mu_0 chsT & \alpha_2\cdot\frac{\cos sT-1}{s^2} & \alpha_1\cdot\frac{1-chsT}{s^2} \\ \cos sT-\mu_1 chsT & s(-\sin sT+\mu_0 shsT) & -\alpha_2\frac{\sin sT}{s} & \alpha_1\cdot\frac{shsT}{s} \\ \alpha_2\frac{\sin s(t_2+T)}{s} & \alpha_2\cos s(t_2+T) & -1-\alpha_2\frac{1-\cos s(t_2+T)}{s^2} & 0 \\ A_{41} & A_{42} & 0 & A_{44} \end{pmatrix},$$

где

$$A_{41}=\alpha_1\cdot\mu_1\left(\frac{1}{s\sqrt{\pi t_1}}\cdot shsT-\frac{1}{2\sqrt{s}}\cdot e^{s(t_1-T)}\cdot erf\sqrt{st_1}-\frac{1}{\sqrt{\pi s}}\cdot e^{sT}\cdot daw\sqrt{st_1}\right);$$

$$A_{42}=\alpha_1\cdot\mu_0\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}}\cdot chsT-\frac{\sqrt{s}}{2}\cdot e^{s(t_1-T)}\cdot erf\sqrt{st_1}+\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{sT}\cdot daw\sqrt{st_1}\right);$$

$$A_{44}=1+\frac{\alpha_1}{s^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}}+\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}}\cdot chsT--\frac{\sqrt{s}}{2}\cdot e^{s(t_1-T)}\cdot erf\sqrt{st_1}+\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{sT}daw\sqrt{st_1}\right].$$

Здесь

$$erf\ x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x\exp\left(-t^2\right)dt,\quad daw\ x=\exp(-x^2)\int\limits_0^x\exp(t^2)dt.$$

Теорема 1. Для любых f^j, μ_p, α, t_k, T, удовлетворяющих требованиям (7), граничные задачи (2)–(6) имеют единственное L_2-сильное решение тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$|\Delta_s|\neq 0;\quad s\in S. \tag{8}$$

Условие (8) в терминах данных (7) дает полное описание корректных граничных задач вида (2)–(6).

Следствие. Пусть при условиях теоремы 1 в уравнении (1) отсутствуют нагруженные слагаемые, т.е. $\alpha_k=0$, $k=1,\,2$. Тогда для того, чтобы граничные задачи (2)–(6) имели единственное L_2-сильное решение, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{vmatrix} \frac{\sin sT+\mu_1 shsT}{s} & \cos sT-\mu_0 chsT \\ \cos sT-\mu_1 chsT & s(-\sin sT+\mu_0 shsT) \end{vmatrix}\neq 0;\quad s\in S. \tag{9}$$

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы будем проводить методом разделения переменных, т.е. ищем решение задач (2)–(6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x,t)&=\sum_{s\in S}u_s^{(1)}(t)\cdot\exp\{is\cdot x\}; \\ u^{(2)}(x,t)&=\sum_{s\in S}u_s^{(2)}(t)\cdot\exp\{is\cdot x\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Учтем соответствующие разложения для правых частей уравнений (2), (4)

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x,t)&=\sum_{s\in S}f_s^{(1)}(t)\exp\{is\cdot x\}; \\ f^{(2)}(x,t)&=\sum_{s\in S}f_s^{(2)}(t)\exp\{is\cdot x\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Граничные задачи (2)–(6) можно свести к изучению краевых задач для счетной системы нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\frac{d^2u_s^{(1)}(t)}{dt^2}+s^2u_s^{(1)}(t)+\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)=f_s^{(1)}(t) \text{ при } t\in(0;T); \tag{12}$$

$$\frac{d^2u_s^{(2)}(t)}{dt^2}+s^2u_s^{(2)}(t)+\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)=f_s^{(2)}(t) \text{ при } t\in(-T;0); \tag{13}$$

$$\begin{cases} u_s^{(1)}(T)=\mu_0 u_s^{(2)}(-T) \\ \frac{du_s^{(1)}(T)}{dt}=\mu_1\frac{du_s^{(2)}(-T)}{dt}. \end{cases} \tag{14}$$

Введем системы чисел $\{\nu_s, s\in S\}$, $\{\varphi_s, s\in S\}$, пока временно неизвестные, с помощью которых вместо задач (12)–(14) будем рассматривать следующие граничные задачи:

$$\begin{cases} -\frac{d^2u_s^{(1)}(t)}{dt^2}+s^2u_s^{(1)}(t)+\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)=f_s^{(1)}(t), \quad t\in(0;T), \\ u_s^{(1)}(T)=\mu_0\nu_s \quad \frac{du_s^{(1)}(T)}{dt}=\mu_1\varphi_s, \quad s\in S. \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2u_s^{(2)}(t)}{dt^2}+s^2u_s^{(2)}(t)+\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)=f_s^{(2)}(t), \quad t\in(-T;0), \\ u_s^{(2)}(-T)=\nu_s \quad \frac{du_s^{(2)}(-T)}{dt}=\varphi_s, \quad s\in S. \end{cases} \tag{16}$$

Найдем решение уравнения (15). Перенесем нагруженное слагаемое в правую сторону, обозначим $f_s^{(1)}(t)-\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)=F_s^{(1)}(t)$ и будем считать $F_s^{(1)}(t)$ временно известной, тогда уравнение (15) будет иметь следующий вид:

$$-\frac{d^2u_s^{(1)}(t)}{dt^2}+s^2u_s^{(1)}(t)=F_s^{(1)}(t). \tag{17}$$

Решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$u_{\text{о.о.}}=C_1e^{-st}+C_2e^{st}=C_1ch\,st+C_2sh\,st.$$

Для получения частного решения неоднородного уравнения воспользуемся методом Коши:

$$K(t,\tau)=C_1(\tau)chst+C_2(\tau)shst; \tag{18}$$

$$\begin{cases} K(t,\tau)\big|_{t=\tau}=C_1(\tau)ch s\tau+C_2(\tau)sh s\tau=0; \\ K'_t(t,\tau)\big|_{t=\tau}=C_1(\tau)sh s\tau+C_2(\tau)ch s\tau=\frac{1}{s}. \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} ch s\tau & sh s\tau \\ sh s\tau & ch s\tau \end{vmatrix}=1, \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & sh s\tau \\ \frac{1}{s} & ch s\tau \end{vmatrix}=-\frac{sh s\tau}{s}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} ch s\tau & 0 \\ sh s\tau & \frac{1}{s} \end{vmatrix}=\frac{ch s\tau}{s}.$$

Найдем отсюда

$$C_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{sh s\tau}{s}, \quad C_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{ch s\tau}{s}.$$

Подставим найденные C_1, C_2 в соотношение (18), получим

$$K(t,\tau)=-\frac{1}{s}\left[shst\cdot ch s\tau-chst\cdot sh s\tau\right]=\frac{1}{s}shs(t-\tau).$$

Таким образом, частное решение будет иметь вид

$$u_s^{(1)}\text{ч.р.}(t)=\int\limits_t^T\frac{sh(t-\tau)}{s}\cdot F_s^{(1)}(\tau)d\tau.$$

Теперь запишем общее решение уравнения (17)

$$u^{(1)}_{\text{о.р.}}=C_1ch\,st+C_2sh\,st+\int\limits_t^T\frac{sh\;s(t-\tau)}{s}\cdot F_s^{(1)}(\tau)d\tau=$$

$$=C_1ch\,st+C_2sh\,st+\int\limits_t^T\frac{sh\,s(t-\tau)}{s}\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau-\int\limits_t^T\frac{sh\;s(t-\tau)}{s}\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)d\tau. \tag{19}$$

Проделаем тоже самое с уравнением (16), получим решение однородного уравнения $u_{\text{о.о.}} = \tilde{C}_1 \cos\, st + \tilde{C}_2 \sin\, st$, общее решение которого имеет вид

$$u^{(2)}_{\text{о.р.}} = \tilde{C}_1 \cos\, st + \tilde{C}_2 \sin\, st + \int\limits_{-T}^{t} \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \cdot F^{(2)}_s(\tau) d\tau = \tilde{C}_1 \cos\, st +$$

$$+\tilde{C}_2 \sin\, st + \int\limits_{-T}^{t} \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \cdot f^{(2)}_s(\tau) d\tau - \int\limits_{-T}^{t} \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \alpha_2 u^{(2)}_s(t_2) d\tau. \tag{20}$$

Теперь найдем C_1, C_2 и $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ из условий (15)–(16) $u^{(1)}_s(T) = \mu_0 \nu_s$, $\frac{du^{(1)}_s(T)}{dt} = \mu_1 \varphi_s$, $s \in S$ и $u^{(2)}_s(-T) = \nu_s$, $\frac{du^{(2)}_s(-T)}{dt} = \varphi_s$, $s \in S$.

Тогда

$$u^{(1)}_s(T) = C_1 ch\, sT + C_2 sh\, sT = \mu_0 \nu_s,$$

$$\frac{du^{(1)}_s(T)}{dt} = sC_1 shsT + sC_2 chsT = \mu_1 \varphi_s.$$

отсюда находим C_1, C_2

$$C_1 = \mu_0 \nu_s chsT - \frac{\mu_1 \varphi_s}{s} \cdot shsT,$$

$$C_2 = \frac{\mu_1 \varphi_s}{s} \cdot chsT - \mu_0 \nu_s \cdot shsT$$

и из соотношений

$$u^{(2)}_s(-T) = \tilde{C}_1 \cos s(-T) + \tilde{C}_2 \sin s(-T) = \nu_s,$$

$$\frac{du^{(2)}_s(-T)}{dt} = -s\tilde{C}_1 \sin s(-T) + s\tilde{C}_2 \cos s(-T) = \varphi_s$$

находим $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$

$$\tilde{C}_1 = \nu_s \cos s(-T) - \frac{\varphi_s}{s} \sin s(-T),$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{\varphi_s}{s} \cos s(-T) + \nu_s \sin s(-T).$$

Найденные C_1, C_2 и $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ подставляем в (19) и (20) соответственно, получаем следующие представления:

$$u^{(1)}_s(t) = \mu_0 \nu_s ch\, s(t-T) + \frac{\mu_1 \varphi_s}{s} sh\, s(t-T) + \int\limits_{t}^{T} \frac{sh\ s(t-\tau)}{s} \cdot F^{(1)}_s(\tau) d\tau =$$

$$= \mu_0 \nu_s ch\, s(t-T) + \frac{\mu_1 \varphi_s}{s} sh\, s(t-T) + \int\limits_{t}^{T} \frac{sh\, s(t-\tau)}{s} \cdot f^{(1)}_s(\tau) d\tau -$$

$$-\alpha_1 D^{\frac{1}{2}}_t u^{(1)}_s(t_1) \frac{1 - chs\,(t-T)}{s^2} \tag{21}$$

и

$$u^{(2)}_s(t) = \nu_s \cos s(t+T) + \frac{\varphi_s}{s} \sin s(t+T) + \int\limits_{-T}^{t} \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \cdot f^{(2)}_s(\tau) d\tau -$$

$$- \int\limits_{-T}^{t} \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \alpha_2 u^{(2)}_s(t_2) d\tau = \nu_s \cos s(t+T) + \frac{\varphi_s}{s} \sin s(t+T) +$$

$$+ \int\limits_{-T}^{t} \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \cdot f^{(2)}_s(\tau) d\tau - \alpha_2 u^{(2)}_s(t_2) \cdot \frac{1 - \cos s(t+T)}{s^2}. \tag{22}$$

В этих представлениях неизвестными являются

$$\nu_s,\ \ \varphi_s,\ \ \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1),\ \ \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2).$$

Для их нахождения используем представления (21) и (22). Вначале найдем представления для производных решений задач (15) и (16):

$$\frac{du_s^{(1)}(t)}{dt} = \int\limits_t^T f_s^{(1)}(\tau)\cdot chs\,(t-\tau)\,d\tau + \mu_1\varphi_s\cdot chs\,(t-T) +$$

$$+\mu_0\nu_s\cdot s\cdot shs\,(t-T) + \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)\frac{shs\,(t-T)}{s}. \tag{23}$$

$$\frac{du_s^{(2)}(t)}{dt} = \int\limits_{-T}^t f_s^{(2)}(\tau)\cdot \cos s\,(t-\tau)\,d\tau + \varphi_s\cdot \cos s\,(t+T) -$$

$$-\nu_s\cdot s\cdot \sin s\,(t+T) - \alpha_1 u_s^{(2)}(t_2)\frac{\sin s\,(t+T)}{s}. \tag{24}$$

Далее, используя условия сопряжения

$$\begin{cases} u_s^{(1)}(0+) = u_s^{(2)}(0-) \\ \frac{du_s^{(1)}(0+)}{dt} = \frac{du_s^{(2)}(0-)}{dt} \end{cases},$$

на линии $t=0$ в области Q получим

$$\mu_0\nu_s ch\,s\,(-T) + \frac{\mu_1\varphi_s}{s} sh\,s\,(-T) + \int\limits_0^T \frac{sh\,s(-\tau)}{s}\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau - \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)\frac{1-chs\,(-T)}{s^2} =$$

$$= \nu_s\cos sT + \frac{\varphi_s}{s}\sin sT + \int\limits_{-T}^0 \frac{\sin s(-\tau)}{s}\cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau - \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)\cdot\frac{1-\cos sT}{s^2}$$

и

$$\int\limits_0^T f_s^{(1)}(\tau)\cdot chs\,(-\tau)\,d\tau + \mu_1\varphi_s\cdot chs\,(-T) + \mu_0\nu_s\cdot s\cdot shs\,(-T) + \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)\frac{shs\,(-T)}{s} =$$

$$= \int\limits_{-T}^0 f_s^{(2)}(\tau)\cdot\cos s\,(-\tau)\,d\tau + \varphi_s\cdot\cos sT - \nu_s\cdot s\cdot\sin sT - \alpha_1 u_s^{(2)}(t_2)\frac{\sin sT}{s}.$$

Отсюда имеем

$$\mu_0\nu_s ch\,sT - \frac{\mu_1\varphi_s}{s} sh\ sT - \int\limits_0^T \frac{sh\,s\tau}{s}\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau - \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)\frac{1-chsT}{s^2} =$$

$$= \nu_s\cos sT + \frac{\varphi_s}{s}\sin sT - \int\limits_{-T}^0 \frac{\sin s\tau}{s}\cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau - \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)\cdot\frac{1-\cos sT}{s^2}$$

и

$$\int\limits_0^T f_s^{(1)}(\tau)\cdot chs\tau d\tau + \mu_1\varphi_s\cdot chsT - \mu_0\nu_s\cdot s\cdot shsT - \alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)\frac{shsT}{s} =$$

$$= \int\limits_{-T}^0 f_s^{(2)}(\tau)\cdot\cos s\tau d\tau + \varphi_s\cdot\cos sT - \nu_s\cdot s\cdot\sin sT - \alpha_1 u_s^{(2)}(t_2)\frac{\sin sT}{s}.$$

В итоге получим

$$\left(\frac{\sin sT}{s}+\mu_1\frac{shsT}{s}\right)\cdot\varphi_s+(\cos sT-\mu_0 chsT)\cdot\nu_s-\frac{1-\cos sT}{s^2}\cdot\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)+$$
$$+\frac{1-chsT}{s^2}\cdot\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)=F_s^1;$$
$$(\cos sT-\mu_1 chsT)\cdot\varphi_s+s\left(-\sin sT+\mu_0 shsT\right)\cdot\nu_s-\frac{\sin sT}{s}\cdot\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)+$$
$$+\frac{shsT}{s}\cdot\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)=F_s^2, \tag{25}$$

где

$$F_s^1=\int_{-T}^{0}\frac{\sin s\tau}{s}\cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau-\int_0^T\frac{sh\ s\tau}{s}\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau;$$
$$F_s^2=-\int_{-T}^{0}\cos s\tau\cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau+\int_0^T ch s\tau\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau. \tag{26}$$

Теперь проделываем следующее: от обеих частей равенства (21) берем дробные производные порядка $1/2$ и в полученном равенстве полагаем $t=t_1$. Тогда имеем

1. $D_t^{\frac{1}{2}}\left[\frac{shs\,(t-T)}{s}\right]_{t=t_1}=-\frac{1}{s\sqrt{\pi t_1}}\cdot shsT+\frac{1}{2\sqrt{s}}\cdot e^{s(t_1-T)}\cdot erf\sqrt{st_1}+\frac{1}{\sqrt{\pi s}}\cdot e^{sT}\cdot daw\sqrt{st_1}.$

2. $D_t^{\frac{1}{2}}\left[\mathrm{ch}\ s\,(t-T)\right]_{t=t_1}=-\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}}\cdot chsT+\frac{\sqrt{s}}{2}\cdot e^{s(t_1-T)}\cdot erf\sqrt{st_1}-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{sT}\cdot daw\sqrt{st_1}.$

3. $\left[1+\alpha_1\cdot D_t^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1-ch\,s\,(t-T)}{s^2}\right\}\right]_{t=t_1}=1+\frac{\alpha_1}{s^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}}+\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}}\cdot chsT-\frac{\sqrt{s}}{2}\cdot e^{s(t_1-T)}\cdot erf\sqrt{st_1}+\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}}\cdot\right.$ $\left.\cdot e^{sT}\cdot daw\sqrt{st_1}\right].$

4. $D_t^{\frac{1}{2}}\left\{\int\limits_t^T\frac{shs(t-\tau)}{s}\cdot f_s^{(1)}d\tau\right\}_{t=t_1}=\frac{1}{s\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\xi}}\left[\int\limits_\xi^T sh\,s(\xi-\tau)\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau\right]d\xi\right\}_{t=t_1}=$ $=\frac{1}{s\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_0^t f_s^{(1)}(\tau)d\tau\int\limits_0^\tau\frac{sh\ s(\xi-\tau)}{\sqrt{t-\xi}}d\xi+\int\limits_t^T f_s^{(1)}(\tau)d\tau\int\limits_0^t\frac{sh\,s(\xi-\tau)}{\sqrt{t-\xi}}d\xi\right\}_{t=t_1}=\frac{1}{s\sqrt{\pi}}\left\{f_s^{(1)}(t_1)\ldots\right.$ $\ldots\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\cdot erf\sqrt{st_1}+\frac{2}{\sqrt{s}}\cdot sh\,st_1\cdot daw\sqrt{st_1}\right)+\int\limits_0^{t_1}f_s^{(1)}(\tau)\left[\sqrt{s}\cdot e^{-s\tau}\cdot daw\sqrt{st_1}-\sqrt{s}\cdot daw\sqrt{s(t_1-\tau)}+\right.$ $\left.+\frac{\sqrt{\pi s}}{2}\cdot e^{s(t_1-\tau)}\left(erf\sqrt{st_1}-erf\sqrt{s(t_1-\tau)}\right)d\tau+\int\limits_{t_1}^T f_s^{(1)}(\tau)\left[\frac{\sqrt{s}\cdot\sqrt{\pi}}{2}e^{s(t_1-\tau)}\cdot erf\sqrt{st_1}-\frac{1}{\sqrt{t_1}}ch\ s\tau+\right.\right.$ $\left.\left.+\sqrt{s}\cdot e^{st_1}\cdot daw\sqrt{st_1}\right]d\tau\right\}.$

В итоге получаем

$$\alpha_1\cdot\mu_1\left(\frac{1}{s\sqrt{\pi t_1}}\cdot shsT-\frac{1}{2\sqrt{s}}\cdot e^{s(t_1-T)}\cdot erf\sqrt{st_1}-\frac{1}{\sqrt{\pi s}}\cdot e^{sT}\cdot daw\sqrt{st_1}\right)\cdot\varphi_s+$$
$$+\alpha_1\cdot\mu_0\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}}\cdot chsT-\frac{\sqrt{s}}{2}\cdot e^{s(t_1-T)}\cdot erf\sqrt{st_1}+\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{sT}\cdot daw\sqrt{st_1}\right)\cdot\vartheta_s+$$
$$+\left(1+\frac{\alpha_1}{s^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}}+\frac{1}{\sqrt{\pi t_1}}\cdot chsT-\frac{\sqrt{s}}{2}\cdot e^{s(t_1-T)}\cdot erf\sqrt{st_1}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{sT}\cdot daw\sqrt{st_1}\right]\right)\cdot\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}}u_s^{(1)}(t_1)=$$

$$= \alpha_1 \frac{1}{s\sqrt{\pi}} \Bigg\{ f_s^{(1)}(t_1) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \cdot erf\sqrt{st_1} + \frac{2}{\sqrt{s}} \cdot sh\, st_1 \cdot daw\sqrt{st_1} \right) +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1} f_s^{(1)}(\tau) \Big[\sqrt{s} \cdot e^{-s\tau} \cdot daw\sqrt{st_1} - \sqrt{s} \cdot daw\sqrt{s(t_1-\tau)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi s}}{2} \cdot e^{s(t_1-\tau)} \left(erf\sqrt{st_1} - erf\sqrt{s(t_1-\tau)} \right) \Big] d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{T} f_s^{(1)}(\tau) \left[-\frac{\sqrt{s}\cdot\sqrt{\pi}}{2} e^{s(t_1-\tau)} \cdot erf\sqrt{st_1} - \frac{1}{\sqrt{t_1}} ch\, s\tau + \sqrt{s} \cdot e^{st_1} \cdot daw\sqrt{st_1} \right] d\tau \Bigg\}. \tag{27}$$

В представлении (22) полагаем $t = t_2$, тогда будем иметь

$$\alpha_2 \cos s(t_2+T) \cdot \nu_s + \frac{\alpha_2}{s} \sin s(t_2+T) \cdot \varphi_s -$$

$$-\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2) \left(1 + \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2) \cdot \frac{1-\cos s(t_2+T)}{s^2} \right) = F_s^4, \tag{28}$$

где

$$F_s^4 = -\alpha_2 \int\limits_{-T}^{t_2} \frac{\sin s(t_2-\tau)}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau) d\tau. \tag{29}$$

Теперь из системы уравнений (25) и (28) определим неизвестные величины φ_s, v_s, $\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)$, $\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)$, $\forall s \in S$:

$$\varphi_s = \frac{|\Delta_{\varphi_s}|}{|\Delta_s|}, \;\; \nu_s = \frac{|\Delta_{\nu_s}|}{|\Delta_s|}, \;\; \alpha_1 u_s^{(1)}(t_1) = \frac{\left|\Delta_{\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)}\right|}{|\Delta_s|}, \;\; \alpha_2 u_s^{(2)}(t_2) = \frac{\left|\Delta_{\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)}\right|}{|\Delta_s|}, \tag{30}$$

где матрицы Δ_{φ_s}, Δ_{ν_s}, $\Delta_{\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)}$, $\Delta_{\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)}$ получаются из матрицы Δ_s заменой соответствующих столбцов элементами F_s^1, F_s^2, F_s^3, F_s^4.

Далее, подставляя (30) в (21) и (22), получаем окончательное представление решений граничных задач (15), (16):

$$u_s^{(1)}(t) = \frac{|\Delta_{\nu_s}|}{|\Delta_s|} \cdot \mu_0 \cdot ch\, s(t-T) + \frac{|\Delta_{\varphi_s}|}{|\Delta_s|} \cdot \mu_1 \cdot \frac{sh\, s(t-T)}{s} + \int\limits_t^T \frac{sh\, s(t-\tau)}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau) d\tau -$$

$$- \frac{\left|\Delta_{\alpha_1 D_t^{\frac{1}{2}} u_s^{(1)}(t_1)}\right|}{|\Delta_s|} \cdot \frac{1-chs(t-T)}{s^2}, \quad s \in S; \tag{31}$$

$$u_s^{(2)}(t) = \frac{|\Delta_{\nu_s}|}{|\Delta_s|} \cdot \cos s(t+T) + \frac{|\Delta_{\varphi_s}|}{|\Delta_s|} \cdot \frac{\sin s(t+T)}{s} + \int\limits_{-T}^{t} \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau) d\tau -$$

$$- \frac{\left|\Delta_{\alpha_2 u_s^{(2)}(t_2)}\right|}{|\Delta_s|} \cdot \frac{1-\cos s(t+T)}{s^2}, \quad s \in S. \tag{32}$$

Теперь обсудим вопрос об установлении L_2-оценок для решений (31)-(33), равномерных по $s \in S$, т.е. оценок вида

$$\left\| u_s^{(1)}(t) \right\|_{L_2(0,T)} \le C_1 \left\| f_s^{(1)} \right\|_{L_2(0,T)}, \;\; s \in S; \tag{33}$$

$$\left\|u_s^{(2)}(t)\right\|_{L_2(-T,0)} \le C_2 \left\|f_s^{(2)}\right\|_{L_2(-T,0)}, \quad s \in S, \tag{34}$$

где постоянные C_1, C_2 не зависят от s.

Для этого рассмотрим вначале случай отсутствия нагруженных слагаемых. Из (31), (32) получаем следующие представления для искомых решений ($s \in S$):

$$u_s^{(1)}(t) = \int_t^T \frac{sh\, s(t-\tau)}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau + \frac{\left|\tilde{\Delta}_{\varphi_s}\right|}{\left|\tilde{\Delta}_s\right|} \cdot \mu_1 \cdot \frac{sh\, s(t-T)}{s} + \frac{\left|\tilde{\Delta}_{\nu_s}\right|}{\left|\tilde{\Delta}_s\right|} \cdot \mu_0 \cdot ch\, s(t-T); \tag{35}$$

$$u_s^{(2)}(t) = \int_{-T}^t \frac{\sin s(t-\tau)}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau + \frac{\left|\tilde{\Delta}_{\varphi_s}\right|}{\left|\tilde{\Delta}_s\right|} \cdot \frac{\sin s(t+T)}{s} + \frac{\left|\tilde{\Delta}_{\nu_s}\right|}{\left|\tilde{\Delta}_s\right|} \cdot \cos s(t+T), \tag{36}$$

где из (21) имеем

$$\left|\tilde{\Delta}_s\right| = \begin{vmatrix} \frac{\sin sT}{s} + \mu_1 \frac{shsT}{s} & \cos sT - \mu_0 chsT \\ \cos sT - \mu_1 chsT & s\left(-\sin sT + \mu_0 shsT\right) \end{vmatrix} =$$

$$= -1 - \mu_0\mu_1 + (\mu_0 - \mu_1)\sin sT \cdot shsT + (\mu_0 + \mu_1)\cos sT \cdot chsT; \tag{37}$$

$$\left|\tilde{\Delta}_{\varphi_s}\right| = \begin{vmatrix} \int\limits_{-T}^{0} \frac{\sin s\tau}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau - \int\limits_0^T \frac{sh\ s\tau}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau & \cos sT - \mu_0 chsT \\ -\int\limits_{-T}^{0} \cos s\tau \cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau + \int\limits_0^T chs\tau \cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau & s\left(-\sin sT + \mu_0 shsT\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{-T}^{0} f_s^{(2)}(\tau)\left[\cos s(\tau+T) - \mu_0(\cos s\tau \cdot chsT - \sin s\tau \cdot shsT)\right]d\tau +$$

$$+ \int_0^T f_s^{(1)}(\tau)\left[\mu_0 chs(\tau-T) - chs\tau \cdot \cos sT + shs\tau \sin sT\right]d\tau; \tag{38}$$

$$\left|\tilde{\Delta}_{\nu_s}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\sin sT}{s} + \mu_1 \frac{shsT}{s} & \int\limits_{-T}^{0} \frac{\sin s\tau}{s} \cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau - \int\limits_0^T \frac{sh\ s\tau}{s} \cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau \\ \cos sT - \mu_1 chsT & -\int\limits_{-T}^{0} \cos s\tau \cdot f_s^{(2)}(\tau)d\tau + \int\limits_0^T chs\tau \cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s}\int_{-T}^{0} f_s^{(2)}(\tau)\left[-\sin s(\tau+T) + \mu_1(\sin s\tau \cdot chsT - shsT \cdot \cos s\tau)\right]d\tau +$$

$$+ \frac{1}{s}\int_0^T f_s^{(1)}(\tau)\left[\mu_1 shs(T-\tau) + shs\tau \cdot \cos sT + \sin sT \cdot chs\tau\right]d\tau. \tag{39}$$

Подставляя (37)–(39) в (35), получаем

$$u_s^{(1)}(t) = \frac{1}{s \cdot \left|\tilde{\Delta}_s\right|} \cdot \int_{-T}^{0} f_s^{(2)}(\tau)\Big\{\mu_1 shs(t-T) \cdot \cos s(\tau+T) - \mu_0 \sin s(\tau+T) \cdot chs(t-T) +$$

$$+\mu_0\mu_1\left[\cos s\tau \cdot chs(2T-t) - shst \cdot \cos s\tau\right]\Big\}d\tau +$$

$$+\frac{1}{s \cdot \left|\tilde{\Delta}_s\right|} \cdot \int_0^T f_s^{(1)}(\tau)\Big\{\mu_0\mu_1 shs(t-\tau) + \mu_0 \sin sT \cdot chs(t-T)chs\tau - \mu_1 \cos sT \cdot shs(t-T)chs\tau\Big\}d\tau +$$

$$+\frac{1}{s\cdot\left|\tilde{\Delta}_s\right|}\int\limits_t^T f_s^{(1)}(\tau)\Big\{-(1+\mu_0\mu_1)shs(t-\tau)+(\mu_0-\mu_1)\sin sT\cdot shsT\cdot sh(t-\tau)+$$

$$+(\mu_0+\mu_1)\cos sT\cdot chsT\cdot shs(t-\tau)\Big\}d\tau. \tag{40}$$

Формулы для решений (36) и (40) позволяют получить требуемые L_2-оценки для самих функций $u_s^{(1)}(t)$, $u_s^{(2)}(t)$ и для их производных $\dfrac{du_s^{(1)}(t)}{dt}$, $\dfrac{du_s^{(2)}(t)}{dt}$, $\dfrac{d^2u_s^{(1)}(t)}{dt^2}$, $\dfrac{d^2u_s^{(2)}(t)}{dt^2}$:

$$\left\|u_s^{(1)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}\le C_1\left[\left\|f_s^{(1)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|f_s^{(2)}(t)\right\|_{L_2(-T,0)}\right]; \tag{41}$$

$$\left\|u_s^{(2)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}\le C_2\left[\left\|f_s^{(1)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|f_s^{(2)}(t)\right\|_{L_2(-T,0)}\right]; \tag{42}$$

$$\left\|\frac{du_s^{(1)}(t)}{dt}\right\|_{L_2(0,T)}\le C_3\left[\left\|f_s^{(1)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|f_s^{(2)}(t)\right\|_{L_2(-T,0)}\right]; \tag{43}$$

$$\left\|\frac{d^2u_s^{(1)}(t)}{dt^2}\right\|_{L_2(0,T)}\le C_4\left[\left\|s\cdot f_s^{(1)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|s\cdot f_s^{(2)}\,(t)\right\|_{L_2(-T,0)}\right]; \tag{44}$$

$$\left\|\frac{du_s^{(2)}(t)}{dt}\right\|_{L_2(0,T)}\le C_5\left[\left\|f_s^{(1)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|f_s^{(2)}(t)\right\|_{L_2(-T,0)}\right]; \tag{45}$$

$$\left\|\frac{d^2u_s^{(2)}(t)}{dt^2}\right\|_{L_2(0,T)}\le C_6\left[\left\|s\cdot f_s^{(1)}(t)\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|s\cdot f_s^{(2)}(t)\right\|_{L_2(-T,0)}\right]. \tag{46}$$

Обсудим, например, получение (41). Для этого запишем представление (40) в виде

$$u_s^{(1)}(t)=\int\limits_{-T}^{0}G_{2s}(t,\tau)\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau+\int\limits_0^T G_{1s}(t,\tau)\cdot f_s^{(1)}(\tau)d\tau,\ \ s\in S.$$

Для получения требуемых оценок достаточно показать равномерную по s ограниченность функций G_{1s}, G_{2s}, т.е.

$$\{|G_{1s}(t,\tau)|\,,\,|G_{2s}(t,\tau)|\}\le K$$

для любых допустимых t,τ.

Для конечных s из условий теоремы эти неравенства справедливы. Остается рассматривать случаи: $s=0$, $s=\pm\infty$. Пусть $s=0$. Неравенства следуют из того факта, что в каждом слагаемом из $G_{1s}(t,\tau)$, $G_{2s}(t,\tau)$ присутствуют выражения вида $\left\{\dfrac{sh\ s\beta}{s}\right\},\left\{\dfrac{\sin s\beta}{s}\right\}$, которые ограничены при $s\to 0$. В случае $s\to\pm\infty$ ограниченность $\{|G_{1s}(t,\tau)|,G_{2s}(t,\tau)|\}$ следует из-за наличия в них гиперболических функций $\{sh,\ \ ch\}$ как в числителе, так и в знаменателе одного и того же порядка.

Аналогичное имеет место и для остальных оценок (42)-(46).

Оценки (41)-(42) остаются справедливыми в задаче (1) и при наличии нагруженных слагаемых. Для завершения доказательства теоремы теперь достаточно применить лемму из [4; 118].

Список литературы

1 Дженалиев М.Т. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений / М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов. — Алматы: Ғылым, 2010. — 334 с.

2 Кароль И.Л. О краевых задачах для уравнения смешанного типа / И.Л. Кароль // Вестн. ЛГУ. Сер. Математика, механика, астрономия. — 1956. — Т. 1, № 1. — С. 177–181.

3 Лаврентьев М.А. К проблеме уравнений смешанного типа / М.А. Лаврентьев, А.В. Бицадзе // ДАН СССР. — 1950. — Т. 70, № 3. — С. 373–376.

4 Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач / А.А. Дезин. — М.: Наука, 1980. — 207 с.

А.Х. Аттаев, С.А. Ысқақов, М.И. Рамазанов

Бөлшекті-жүктелген Лаврентьев-Бицадзе теңдеуі үшін шекаралық есеп

Мақалада тіктөртбұрышты облыста бөлшекті-жүктелген Лаврентьев-Бицадзе теңдеуі үшін локальді емес шекаралық есебі зерттелген. Осыған ұқсас шекаралық есептер [1-3] жұмыстарында қарастырылған. Бұл жұмыста зерттелетін есептің алдынғы есептерден айырмашылығы, біріншіден, гиперболалық бөліктің облысы сипаттамалық емес, екіншіден, теңдеуде бөлшекті-жүктелген қосылғыштардың бар болуы қарастырылып отырған есептің кейбір ерекшеліктерін анықтауға мүмкіндік береді.

Кілт сөздер: шекаралық есеп, жүктелген теңдеулер, бөлшек туынды, айнымалыларды бөлу әдісі.

A.Kh. Attaev, S.A. Iskakov, M.I. Ramazanov

Boundary value problem for the fractional-loaded Lavrent'ev-Bitsadze equation

In this paper we study the boundary value problem for a fractional-loaded Lavrent'ev-Bitsadze equation in a rectangular domain with nonlocal boundary conditions. Similar boundary value problems were studied in papers [1-3]. The problem studied in this paper differs from the problems considered earlier in that, firstly, the domain in the hyperbolic part is not characteristic, and secondly, there are fractional-loaded terms in the equation, which makes it possible to reveal certain features of the problem under consideration.

Keywords: boundary value problem, loaded equations, fractional derivative, method of separation of variables.

References

1 Jenaliyev, M.T. & Ramazanov, M.I. (2010). *Nahruzhennye uravneniia kak vozmushcheniia differentsialnykh uravnenii [The Loaded Equations as Perturbations of Differential Equations].* Almaty: Hylym [in Russian].

2 Karol, I.L. (1956). O kraevykh zadachakh dlia uravneniia smeshannoho tipa [On boundary-value problems for a mixed-type equation]. *Vestnik LGU. Seria Matematika, mekhanika, astronomiia — Bulletin of Leningrad State University. Series Mathematics, mechanics, astronomy, 1,* 1, 177–181 [in Russian].

3 Lavrent'ev, M.A. & Bitsadze, A.V. (1950). K probleme uravnenii smeshannoho tipa [To the problem of equations of mixed type]. *DAN SSSR, 1950, 70, 3, 373–376* [in Russian].

4 Dezin, A.A. (1980). *Obshchie voprosy teorii hranichnykh zadach [General questions of the theory of boundary value problems].* Moscow: Nauka [in Russian].

UDC 517.75, 519.911

E.A. Bakirova[1,2], Zh.M. Kadirbayeva[1,2], A.B. Tleulesova[3]

[1] *Institute of mathematics and mathematical modeling SC MES RK, Almaty, Kazakhstan;*
[2] *Kazakh State Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan;*
[3] *L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*
(E-mail: bakirova1974@mail.ru, apelman86pm@mail.ru)

On one algorithm for finding a solution to a two-point boundary value problem for loaded differential equations with impulse effect

A linear two-point boundary value problem for a system of loaded differential equations with impulse effect is investigated. The parameterization method is used to solve the problem. The essence of parameterization method is that segment, where the loaded differential equation is considered, is divided into parts by loading points, and the initial problem is reduced to the boundary value problem with a parameter. The solution to boundary value problem with parameter is defined as a limit of systems sequence, consisting of the pairs of parameter and function. Parameters are defined by a system of linear algebraic equations. System of linear algebraic equations is determined by the matrices of boundary conditions, the system of loaded differential equations, and the conditions of impulse effect. An algorithm for finding the solution to linear two-point boundary value problem for the systems of loaded differential equations with impulse effect is offered. The convergence conditions of the algorithm providing the existence and uniqueness of solution to the considered problem are established. Sufficient conditions for unique solvability of the problem in the terms of initial data are received.

Keywords: boundary value problem, parameterization method, loaded differential equation, impulse effect, algorithm.

In recent years, the interest in studying the loaded differential equations steadily increases, and these equations find numerous applications in practical problems. The intensive research of loaded differential equations with various boundary conditions is observed. The «loaded equation» term has been used in the works of A.M.Nakhushev [1, 2], where the most general definition of loaded equation is given, and various loaded equations are classified in detail, for example, the loaded differential, integral, integro-differential, functional equations, and numerous applications are described. A numerical method for solving the systems of loaded linear non-autonomous ordinary differential equations with non-separated multipoint and integral conditions is offered in [3]. Basic questions in the theory of boundary value problems for loaded differential equations are the same as in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations. However, the existence of loaded operator does not always make it possible to apply directly the known theory of boundary value problems [4-6].

Mathematical modeling the evolution of real processes with short-term perturbations, the duration of which can be neglected, leads to the necessity of investigating the differential equations with impulse effect. Various problems for such equations, as well as the methods for their solving and other problems in the theory of impulse systems are considered by many authors [7, 8]. It is known that impulse existence essentially affects the properties of solutions to ordinary differential equations.

Earlier in the works of D.S.Dzhumabaev [9], a parametrization method has been developed for the investigating and solving the two-point boundary value problems for the systems of ordinary differential equations. Parametrization method has allowed establishing the necessary and sufficient conditions for the unique solvability of the problem in the terms of initial data. Based on this method, two-parametrical families of algorithms for finding solutions to the two-point boundary value problems for the systems of ordinary differential equations have been offered. The conditions of feasibility and convergence of those algorithms simultaneously ensure the existence of a unique solution to the problem.

In work [10], the parameterization method is developed for the two-point boundary value problems for the systems of ordinary differential equations with impulse effect, the effective solvability conditions are established, and the constructive algorithms for finding a solution are constructed. Coefficient signs of unique solvability for a linear two-point boundary value problem for the systems of loaded differential equations are found in works [11–15] on the basis of parametrization method, and the algorithms for finding a solution to this problem are constructed.

The parameterization method in this paper is developed for the linear two-point boundary value problem for the system of loaded differential equations with impulse effect (1)–(3). According to the scheme of parameterization method, the algorithms constructing the approximate solutions to the considered problem are offered. Sufficient conditions for feasibility and convergence of the offered algorithms, as well as for the existence of a unique solution to the two-point boundary value problem for the system of loaded differential equations with impulse effect (1)–(3) are established. One of the basic conditions for the unique solvability of investigated problem is the invertibility of a special matrix compiled from the data of problem.

Consider the linear two-point boundary value problem for the system of loaded differential equations with impulse effect

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{j=1}^{m} A_j(t) \lim_{t\to\theta_j+0} x(t) + f(t), \quad t \in (0,T) \setminus \{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m\}; \tag{1}$$

$$B_0x(0) + C_0x(T) = d, \quad d \in R^n, \quad x \in R^n; \tag{2}$$

$$B_i \lim_{t\to\theta_i-0} x(t) - C_i \lim_{t\to\theta_i+0} x(t) = \varphi_i, \quad \varphi_i \in R^n, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

where the $(n \times n)$-matrices $A_j(t), j = \overline{0,m}$, and n–vector-function $f(t)$ are piecewise continuous on $[0,\ T]$ with possible discontinuities of first kind at the points $t = \theta_i, \quad i = \overline{1,m}$. Matrices B_j and C_j, $j = \overline{0,m}$, are $(n \times n)$ constant matrices, $0 = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_m < \theta_{m+1} = T$, $\|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$, $\|A(t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)|$.

Solution to problem (1) -(3) is a piecewise continuously differentiable on $[0,T]$ vector function $x(t)$, which satisfies the system of loaded differential equations (1) on $[0,T]$, except the points $t = \theta_i, \quad i = \overline{1,m}$, the boundary condition (2) and the conditions of impulse effect at the fixed instants of time (3).

Denote by $PC([0,T],\ \theta_i,\ R^n)$ the space of piecewise continuous functions with the norm $\|x\|_1 = \max_{i=\overline{0,m}} \sup_{t\in[\theta_i,\theta_{i+1})} \|x(t)\|$.

Definition. Problem (1)–(3) is called uniquely solvable, if for any function $f(t) \in PC([0,T], \theta_i, R^n)$ and vectors $d \in R^n$, $\varphi_i \in R^n$, $\quad i = \overline{1,m}$, it has a unique solution.

Let us consider an example showing that impulse at loading points influences significantly to the property of two-point boundary value problem investigated.

Consider the periodic boundary value problem for the loaded differential equation without impulse effect:

$$\frac{dx}{dt} = t + x\Big(\frac{1}{2}\Big), \quad x(0) = x(1), \quad t \in [0,1]. \tag{4}$$

Obviously, problem (4) has a unique solution $x(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{3}{8}$. Along with (4) we consider the periodic boundary value problem for the loaded differential equation with impulse effect

$$\frac{dx}{dt} = t + x\Big(\frac{1}{2}\Big), \quad t \in [0,1] \backslash \Big\{\frac{1}{2}\Big\}, \quad x(0) = x(1); \tag{5}$$

$$4x\Big(\frac{1}{2} + 0\Big) - x\Big(\frac{1}{2} - 0\Big) = 1. \tag{6}$$

General solution to the equation on $\Big[0, \frac{1}{2}\Big)$ has the form: $x(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t}{4} + 2Ct + C$, $x\Big(\frac{1}{2} - 0\Big) = \frac{1}{4} + 2C$. From (6) we define $x\Big(\frac{1}{2} + 0\Big)$:

$$x\Big(\frac{1}{2} + 0\Big) = \frac{1}{4}\Big[1 + x\Big(\frac{1}{2} - 0\Big)\Big] = \frac{1}{4}\Big[1 + \frac{1}{4} + 2C\Big] = \frac{5}{16} + \frac{C}{2}.$$

Then the solution on $\Big[\frac{1}{2}, 1\Big]$ takes the form: $x(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{8}t + Ct$.

Now, to make solution satisfied the periodic boundary condition, we need to choose an arbitrary constant C satisfying the equation $C = C + \frac{7}{8}$. Since there is no such number C, problem (5), (6) does not have a solution.

Let us now investigate boundary value problem (1)-(3) by the parametrization method. Divide the interval $[0,T]$ into parts by the loading points: $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{m+1} [\theta_{r-1}, \theta_r)$.

Introduce $C([0,T],\theta_r,R^{n(m+1)})$ as a space of function systems $x[t]=(x_1(t),x_2(t),...,x_{m+1}(t))$, where functions $x_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$, are continuous on $[\theta_{r-1},\theta_r)$ and have finite left-sided limits $\lim\limits_{t\to\theta_r-0} x_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$, with the norm $\|x[\cdot]\|_2=\max\limits_{r=\overline{1,m+1}}\sup\limits_{t\in[\theta_{r-1},\theta_r)}\|x_r(t)\|$.

Let $x_r(t)$ be the restriction of function $x(t)$ to the r-th interval $[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, i.e. $x_r(t)=x(t)$, for $t\in[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$. Introducing the additional parameters $\lambda_r=x_r(\theta_{r-1})$, $r=\overline{1,m+1}$ and performing the replacement $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$ on each interval $[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, we obtain the boundary value problem with parameters

$$\frac{du_r}{dt}=A_0(t)[u_r(t)+\lambda_r]+\sum_{j=1}^{m}A_j(t)\lambda_{j+1}+f(t),\quad t\in[\theta_{r-1},\theta_r);\tag{7}$$

$$u_r(\theta_{r-1})=0,\quad r=\overline{1,m+1};\tag{8}$$

$$B_0\lambda_1+C_0\lambda_{m+1}+C_0\lim_{t\to T-0}u_{m+1}(t)=d;\tag{9}$$

$$B_i\lim_{t\to\theta_i-0}u_i(t)+B_i\lambda_i-C_i\lambda_{i+1}=\varphi_i,\quad i=\overline{1,m}.\tag{10}$$

Solution to problem (7)–(10) is a pair $(\lambda,\ u[t])$ with elements $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{m+1})\in R^{n(m+1)}$, $u[t]=(u_1(t),\ u_2(t),\ ...,\ u_{m+1}(t))\in C([0,T],\theta_r,R^{n(m+1)})$, where the functions $u_r(t)$ are continuously differentiable on $[\theta_{r-1},\theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, and for $\lambda_r=\lambda_r^*$ they satisfy the system of ordinary differential equations (7) and conditions (8)–(10).

Problem (1)–(3) is equivalent to problem (7)–(10). So, if the pair $(\tilde\lambda,\ \tilde u[t])$ with elements $\tilde\lambda=(\tilde\lambda_1,\tilde\lambda_2,...,\tilde\lambda_{m+1})\in R^{n(m+1)}$, $\tilde u[t]=(\tilde u_1(t),\ \tilde u_2(t),\ ...,\ \tilde u_{m+1}(t))\in C([0,T],\theta_r,R^{n(m+1)})$ is a solution to problem (7)–(10), then the function $\tilde x(t)$ defined by the equalities $\tilde x(t)=\tilde\lambda_r+\tilde u_r(t)$, $t\in[\theta_{r-1},\ \theta_r)$, $r=\overline{1,m+1}$, $\tilde x(T)=\tilde\lambda_{m+1}+\lim\limits_{t\to T-0}\tilde u_{m+1}(t)$ is a solution to the origin boundary value problem (1)–(3). Conversely, if $x(t)$ is a solution to problem (1)–(3), then the pair $(\lambda,\ u[t])$ with elements $\lambda=$ $=(x(\theta_0),x(\theta_1),...,x(\theta_{m+1}))$, $u[t]=(x(t)-x(\theta_0),\ \ x(t)-x(\theta_1),\ ...,\ x(t)-x(\theta_{m+1}))$ is a solution to problem (7)–(10).

The appearance of initial conditions $u_r(\theta_{r-1})=0$, $r=\overline{1,m+1}$, for fixed values of the parameters $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{m+1})$ permits to find the functions $u_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$, from the Volterra integral equations of the second kind

$$u_r(t)=\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}A_0(\tau)[u_r(\tau)+\lambda_r]d\tau+\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}\Big[\sum_{j=1}^{m}A_j(\tau)\lambda_{j+1}+f(\tau)\Big]d\tau,\ t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\ r=\overline{1,m+1}.\tag{11}$$

In equation (11), replacing $u_r(\tau)$, $r=\overline{1,m+1}$, by the corresponding right-hand side and then repeating this process $\nu(\nu=1,2,...)$ times, we obtain the representation of functions $u_r(t)$, $r=\overline{1,m+1}$, in the following form:

$$u_r(t)=H^0_{\nu,r}(t)\lambda_r+\sum_{j=1}^{m}H^j_{\nu,r}(t)\lambda_{j+1}+F_{\nu,r}(t)+G_{\nu,r}(u_r,t),\quad t\in[\theta_{r-1},\theta_r),\quad r=\overline{1,m+1},\tag{12}$$

where

$$H^j_{\nu,r}(t)=\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}A_j(\tau_1)d\tau_1+\ldots+\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}A_0(\tau_1)\ldots\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A_0(\tau_{\nu-1})\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}A_j(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1,\ j=\overline{0,m};$$

$$F_{\nu,r}(t)=\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}f(\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}A_0(\tau_1)\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_1}f(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\ldots+$$

$$+\int\limits_{\theta_{r-1}}^{t}A_0(\tau_1)\ldots\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A_0(\tau_{\nu-1})\int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}f(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1;$$

$$G_{\nu,r}(u,t) = \int\limits_{\theta_{r-1}}^{t} A_0(\tau_1) \ldots \int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A_0(\tau_{\nu-1}) \int\limits_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A_0(\tau_\nu) u_r(\tau_\nu) d\tau_\nu \ldots d\tau_1, \quad r = \overline{1, m+1}.$$

By passing in the right-hand side of (12) to the limit as $t \to \theta_r - 0$, $r = \overline{1, m+1}$, and substituting the corresponding expressions into (9) and (10), we obtain the system of equations for the unknown parameters λ_r, $r = \overline{1, m+1}$

$$B_0\lambda_1 + C_0[I + H^0_{\nu,m+1}(T)]\lambda_{m+1} + C_0 \sum_{j=1}^{m} H^i_{\nu,m+1}(T)\lambda_{j+1} =$$

$$= d - C_0F_{\nu,m+1}(T) - C_0G_{\nu,m+1}(u_{m+1}, T); \tag{13}$$

$$B_i[I + H^0_{\nu,i}(\theta_i)]\lambda_i + B_i \sum_{j=1}^{m} H^j_{\nu,i}(\theta_i)\lambda_{j+1} - C_i\lambda_{i+1} = \varphi_i - B_iF_{\nu,i}(\theta_i) - B_iG_{\nu,i}(u_i, \theta_i), \quad i = \overline{1, m}, \tag{14}$$

where I is an identity matrix of dimension $(n \times n)$. Denote the matrix corresponding to the left-hand side of system (13), (14) by $Q_\nu(\theta)$ and introduce the vectors

$$F_\nu(\theta) = (d - C_0F_{\nu,m+1}(T),\ \varphi_1 - B_1F_{\nu,1}(\theta_1), \varphi_2 - B_2F_{\nu,2}(\theta_2), ..., \varphi_m - B_mF_{\nu,m}(\theta_m));$$

$$G_\nu(u,\theta) = (C_0G_{\nu,m+1}(u_{m+1}, T), B_1G_{\nu,1}(u_1, \theta_1), B_2G_{\nu,2}(u_2, \theta_2), ..., B_mG_{\nu,m}(u_m, \theta_m)).$$

Then we rewrite system (13), (14) in the form

$$Q_\nu(\theta)\lambda = F_\nu(\theta) - G_\nu(u,\theta), \quad \lambda \in R^{n(m+1)}. \tag{15}$$

Thus, we have the closed system (11), (15) to find the unknown pair $(\lambda,\ u[t])$, a solution to problem (7)–(10).

Applying the method of successive approximations, we find solution to boundary value problem (7)–(10) and, correspondingly, to boundary value problem (1)–(3). That's an essence of the parameterization method.

Pair $(\lambda,\ u[t])$, the solution to problem (7)–(10), is found as a limit of the sequence of pairs $(\lambda^{(k)},\ u^{(k)}[t])$, $k = 0, 1, 2, ...$, defined by the following algorithm:

Step 0.) We assume that for the chosen $\nu \in N$ matrix $Q_\nu(\theta)$ is invertible and find initial approximation with respect to the parameter $\lambda^{(0)} = (\lambda^{(0)}_1, \lambda^{(0)}_2, ..., \lambda^{(0)}_{m+1}) \in R^{n(m+1)}$ from the systems of equations $Q_\nu(\theta)\lambda = F_\nu(\theta)$, i.e. $\lambda^{(0)} = [Q_\nu(\theta)]^{-1}F_\nu(\theta)$. b) Using the components of vector $\lambda^{(0)} \in R^{n(m+1)}$ and solving the Cauchy problems (7), (8) for $\lambda_r = \lambda^{(0)}_r$, $r = \overline{1, m+1}$, on the intervals $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$, we obtain the functions $u^{(0)}_r(t)$, $r = \overline{1, m+1}$.

Step 1.) Substituting the found $u^{(0)}_r(t)$, $r = \overline{1, m+1}$, into the right-hand side of system (15), we determine $\lambda^{(1)} = (\lambda^{(1)}_1, \lambda^{(1)}_2, ..., \lambda^{(1)}_{m+1}) \in R^{n(m+1)}$ from $Q_\nu(\theta)\lambda = F_\nu(\theta) - G_\nu(u^{(0)}, \theta)$. b) Solving the Cauchy problems (7),(8) on the closed intervals $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$, for $\lambda_r = \lambda^{(1)}_r$, $r = \overline{1, m+1}$, we find the functions $u^{(1)}_r(t)$, $r = \overline{1, m+1}$, and so on.

Proceeding in this manner, at step k we obtain a pair $(\lambda^{(k)},\ u^{(k)}[t])$, $k = 0, 1, 2, ...$ Note that in part b), for the fixed values of parameter λ_r, $r = \overline{1, m+1}$, the solution of the Cauchy problem is found separately on each interval $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$.

Sufficient conditions for the convergence of algorithm, the existence of a unique solution to the linear two-point boundary value problem for the system of loaded differential equations with impulse effect (1)-(3), are provided by the following assertion:

Theorem. Suppose that for some $\nu \in N$, the matrix $Q_\nu(\theta) : R^{n(m+1)} \to R^{n(m+1)}$ is invertible, and the following inequalities are true:

$$\|[Q_\nu(\theta)]^{-1}\| \leq \gamma_\nu(\theta); \tag{16}$$

$$q_\nu(\theta) = \gamma_\nu(\theta) \max[1, \max_{i=\overline{1,m}} \|B_i\|, \|C_0\|]\{e^{\alpha_0 h} - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{(\alpha_0 h)^i}{i!} + h \sum_{j=1}^{m} \alpha_j [e^{\alpha_0 h} - \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha_0 h)^i}{i!}]\} < 1, \tag{17}$$

where $h = \max\limits_{r=\overline{1,m+1}} (\theta_r - \theta_{r-1})$, $\|A_i(t)\| \leq \alpha_i$, $i = \overline{0, m}$.

Then the linear two-point boundary value problem for the system of loaded differential equations with impulse effect (1)–(3) has a unique solution.

The proof of Theorem with minor changes is similar to the proof of Theorem 3.2 in [10].

To illustrate the Theorem, we consider the following example. On $[0,1]$ for the system of loaded differential equations

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{t}{4} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{8} & 0 \\ 0 & \dfrac{t}{16} \end{pmatrix} x\left(\frac{1}{2}\right) + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,\ 1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}, \tag{18}$$

we consider the linear two-point boundary value problem with impulse effect

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x\,(0) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x\,(1) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}; \tag{19}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \lim_{t \to \frac{1}{2}-0} x\,(t) - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \lim_{t \to \frac{1}{2}+0} x\,(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Divide the segment $[0,1]$ into two parts: $[0,1) = [0,1/2) \bigcup [1/2,1)$. Introducing the additional parameters $\lambda_1 = x(0)$, $\lambda_2 = x_2(1/2)$, we pass to the boundary value problem with parameters

$$\frac{du_r}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{t}{4} & 0 \end{pmatrix} [u_r + \lambda_r] + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{8} & 0 \\ 0 & \dfrac{t}{16} \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad r = \overline{1,2},$$

$$u_1(0) = 0, \quad u_2(1/2) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \lim_{t \to 1-0} u_2\,(t) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \lim_{t \to \frac{1}{2}-0} u_1\,(t) - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \lambda_2 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

For $\nu = 1$ matrix $Q_1(\theta)$ has the next form:

$$Q_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1.0625 & -0.25 \\ 0 & 1 & -0.09375 & -1.02344 \\ 1 & 0.25 & -1.9375 & -1 \\ 0.0625 & 2 & 1 & 0.01563 \end{pmatrix}.$$

Matrix $Q_1(\theta)$ is invertible and

$$[Q_1(\theta)]^{-1} = \begin{pmatrix} l2.66431 & 0.95466 & -1.64735 & -0.27141 \\ -0.9913 & -0.67168 & 0.94646 & 0.71753 \\ 1.83385 & 1.31109 & -1.80699 & -0.42967 \\ -1.13659 & -1.75349 & 1.09031 & 0.74046 \end{pmatrix}.$$

Let us verify the implementation of the Theorem conditions:

$$\|[Q_1(\theta)]^{-1}\| \leq 5.53773;$$

$$q_1(\theta) = 5.53773 \cdot \max[1, \|B_1\|, \|C_0\|] \cdot [e^{0.25} - 1 - 0.25 + 0.125 \cdot 0.5 \cdot (e^{0.25} - 1)] = 0.57345 < 1.$$

Thus, all assumptions of Theorem are true, and problem (18)-(20) has a unique solution.

References

1 Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение / А.М. Нахушев. — М.: Наука, 2012. — 232 с.

2 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. — М.: Высш. шк., 1995. — 205 с.

3 Абдуллаев В.М. О численном решении нагруженных дифференциальных уравнений / В.М. Абдуллаев, К.Р. Айда-заде // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2004. — Т. 44, № 9. — С. 1585–1595.

4 Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги грунтовых вод / А.М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. — 1982. — Т. 18, № 1. — С. 72–81.

5 Dzhenaliev M.T. Loaded Equations with Periodic Boundary Conditions. Differential Equations. — 2001. — Vol. 37, No. 1. — P. 51–57.

6 Дженалиев М.Т. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений / М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов. — Алматы: Ғылым, 2010. — 334 с.

7 Lakshmikantham V. Theory of impulsive differential equations / V. Lakshmikantham, D. Bainov, P. Simonov. — Singapore: World Scientific Publ., 1989. — 273 p.

8 Samoilenko A.M. Impulsive Differential Equations / A.M. Samoilenko, N.A. Perestyuk. — Singapore: World Scientific Publ., 1995. — 462 p.

9 Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения / Д.С. Джумабаев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1989. — Т. 29, № 1. — С. 50–66.

10 Тлеулесова А.Б. Об однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи с импульсным воздействием / А.Б. Тлеулесова // Математический журнал. — 2004. — Т. 4, № 4. — С. 93–102.

11 Бакирова Э.А. О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений / Э.А.Бакирова // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. — 2005. — № 1. — С. 95–102.

12 Джумабаев Д.С. Об одной численной реализации метода параметризации решения линейной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнений / Д.С. Джумабаев, Г.Б. Илиясова // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. — 2014. — № 2. — С. 275–280.

13 Бакирова Э.А. О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений / Э.А. Бакирова // Математический журнал. — 2005. — Т. 5, № 3. — С. 25–34.

14 Кадирбаева Ж.М. Об одном алгоритме нахождения решения линейной двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений / Ж.М. Кадирбаева // Математический журнал. — 2009. — Т. 9, № 2. —С. 64–70.

15 Akzhigitov E.A. On a solvability of two-point boundary value problem for loaded differential equations. Science review. S.Seifullin Kazakh Agro Technical University / E.A.Akzhigitov, Zh.M.Kadirbayeva. — 2012. — No. 2. — P. 35–40.

Э.А. Бакирова, Ж.М. Кадирбаева, А.Б. Тлеулесова

Импульстік әсері бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін екінүктелі шеттік есептің шешімін табудың алгоритмі туралы

Импульстік әсері бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екінүктелі шеттік есеп зерттелді. Қарастырылып отырған есепті шешу үшін параметрлеу әдісі қолданылды. Параметрлеу әдісінің маңызы жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылып отырған кесінді жіктеу нүктелерімен бөліктерге бөлінеді және бастапқы есеп параметрі бар пара пар шеттік есепке келтірілді. Параметрі бар шеттік есептің шешімі параметр және функция жұптар жүйесі тізбегінің шегі ретінде анықталды. Параметрлер шеттік шарт пен импульстік әсер шарты матрицалары және жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі арқылы анықталатын сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінен табылды. Импульстік әсері бар жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екінүктелі шеттік есептің шешімін табудың алгоритмі ұсынылды. Зерттеліп отырған есептің шешімінің бар болуы мен жалғыздығын қамтамасыз ететін ұсынылған алгоритмнің жинақтылығының шарттары тағайындалған. Есептің бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары бастапқы берілімдер терминінде алынған.

Кілт сөздер: өлкелік міндет, параметр әдісі, жүктелген дифференциалдық теңдеулер, импульстік әсері, алгоритм.

Э.А. Бакирова, Ж.М. Кадирбаева, А.Б. Тлеулесова

Об одном алгоритме нахождения решения двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

Исследована линейная двухточечная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Для решения рассматриваемой задачи был применен метод параметризации. Суть метода параметризации заключается в том, что отрезок, где рассматривается нагруженное дифференциальное уравнение, разбивается на части точками нагружения, и исходная задача сводится к эквивалентной краевой задаче с параметром. Решение краевой задачи с параметром определяется как предел последовательности систем пар параметра и функции. Параметры находятся из системы линейных алгебраических уравнений, определяемых по матрицам системы нагруженных дифференциальных уравнений, краевого условия и условия импульсного воздействия. Предложен алгоритм нахождения решения линейной двухточечной краевой задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Установлены условия сходимости предложенного алгоритма, обеспечивающие существование и единственность решения исследуемой задачи. Получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи в терминах исходных данных.

Ключевые слова: краевая задача, метод параметризации, нагруженное дифференциальное уравнение, импульсный эффект, алгоритм.

References

1 Nakhushev, A.M. (2012). *Nahruzhennye uravneniia i ikh primenenie [Loaded equations and applications].* Moscow: Nauka [in Russian].

2 Nakhushev, A.M. (1995). *Uravneniia matematicheskoi biolohii [Equations of Mathematical Biology].* Moscow: Vyschaya shkola [in Russian].

3 Abdullaev, V.M. & Aida-zade, K.R. (2004). O chislennom reshenii nahruzhennykh differentsialnykh uravnenii [On a numerical solution of loaded differential equations]. *Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoi fiziki – Journal of computational mathematics and mathematical physics, Vol. 44,* 9, 1585–1595 [in Russian].

4 Nakhushev, A.M. (1982). Ob odnom priblizhennom metode resheniia kraevykh zadach dlia differentsialnykh uravnenii i eho prilozheniia k dinamike pochvennoi vlahi hruntovykh vod [An approximation method for solving boundary value problems for differential equations with applications to the dynamics of soil moisture and groundwater]. *Differentsialnye uravneniia – Differential equations, Vol. 18,* 1, 72–81 [in Russian].

5 Dzhenaliev, M.T. (2001). Loaded Equations with Periodic Boundary Conditions. *Differential Equations, Vol. 37,* 1, 51–57.

6 Dzhenaliev, M.T. & Ramazanov, M.I. (2010). *Nahruzhennye uravneniia kak vozmushcheniia differentsialnykh uravnenii [Loaded equations are as perturbation of differential equations].* Almaty: Gylym [in Russian].

7 Lakshmikantham, V., Bainov, D. & Simonov, P. (1989). *Theory of impulsive differential equations.* Singapore: World Scientific Publ.

8 Samoilenko, A.M. & Perestyuk, N.A. (1995). *Impulsive Differential Equations.* Singapore: World Scientific.

9 Dzhumabaev, D.S. (1989). Priznaki odnoznachnoi razreshimosti lineinoi kraevoi zadachi dlia obyknovennoho differentsialnoho uravneniia [Conditions of the unique solvability of a linear boundary value problem for ordinary differential equation]. *Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoi fiziki – Journal of computational mathematics and mathematical physics, Vol. 29,* 1, 50–66 [in Russian].

10 Tleulesova, A.B. (2004). Ob odnoznachnoi razreshimosti dvukhtochechnoi kraevoi zadachi s impulsnym vozdeistviem [On an unique solvability of a two-point boundary value problem of impulse effect]. *Matematicheskii zhurnal – Mathematical Journal, Vol. 4,* 4, 93–102 [in Russian].

11 Bakirova, E.A. (2005). O priznake odnoznachnoi razreshimosti dvukhtochechnoi kraevoi zadachi dlia sistemy nahruzhennykh differentsialnykh uravnenii [On a criterion of the unique solvability of a two-point boundary value problem for loaded differential equations]. *Izvestiia NAN RK. Seria phisiko-matematicheskaia – News NAS RK. Seria physics and mathematics, 1,* 95–102 [in Russian].

12 Dzhumabaev, D.S. & Iliyassova, G.B. (2014). Ob odnoi chislennoi realizatsii metoda parametrizatsii resheniia lineinoi kraevoi zadachi dlia nahruzhennoho differentsialnoho uravneniia [On one numerical implementation of the parameterization method for solving of linear boundary value problem for loaded differential equations]. *Izvestiia NAS RK. Seriia phisiko-mathematicheskaia – News NAS RK. Seria physics and mathematics, 2,* 275–280 [in Russian].

13 Bakirova, E.A. (2005). O neobkhodimykh i dostatochnykh usloviyakh odnoznachnoi razreshimosti dvukhtochechnoi kraevoi zadachi dlia nahruzhennykh differentsialnykh uravnenii [On necessary and sufficient conditions of the unique solvability of a two-point boundary value problem for loaded differential equations]. *Matematicheskii zhurnal – Mathematical Journal, Vol. 5,* 3, 25–34 [in Russian].

14 Kadirbayeva, Zh.M. (2009). Ob odnom alhoritme nakhozhdeniia resheniia lineinoi dvukhtochechnoi kraevoi zadachi dlia nahruzhennykh differentsialnykh uravnenii [An algorithm for finding the solution of linear two-point boundary value problem for loaded differential equations]. *Matematicheskii zhurnal – Matheзmatiзcal Journal, Vol. 9,* 2, 64–70 [in Russian].

15 Akzhigitov, E.A. & Kadirbayeva, Zh.M. (2012). On a solvability of two-point boundary value problem for loaded differential equations. Science review. S.Seifullin Kazakh Agro Technical University, 2, 35–40.

UDC 510.67

A.R. Yeshkeyev

Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan
(E-mail: modth1705@mail.ru)

About central types and the cosemanticness of the Δ-PM fragment of the Jonsson set

This article is concerned with the enrichment of the signature. In own time, when studying the stability of the theory and the concept of an elementary pair of models, Mustafin T.G. had noticed that these things are related to each other and he introduced the concept T^*-stability [1]. In fact, some enrichment of the signature is considered. Generally speaking, the theories obtained in the extended language are incomplete, therefore, the number of such completions of these theories is sought. This number also determines stability in the sense of T^*-stability. It was noted by E.A.Palyutin in [2] that the concept of T^*-stability is not invariant with respect to definability of type. But we know that in the classical sense of S.Sellach the stability of the theory is invariant with respect to the definability of type. Therefore Palyutin E.A. had introduced the concept E^*-stability, which preserved the definability of type. Author of this article [3] considered this formulation of the problem for the Jonsson theories. We call it in the class of Jonsson theories or in positive Jonsson theories (Δ-PJ, Δ-PM, Δ-PR) enrichment of the signature is admissible if the stability was obtained in the considering case is invariant with respect to the definability of type. In this article, all considering enrichments are admissible. Let the enrichment be $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$, where P is unary predicate symbol with new constant symbol. In connection with admissible enrichments one of the authors of this paper introduced the notion of the central type. Many theorems which obtained before the enrichment of the signature are translated in the language of central types. In this article we will consider similarly questions for central types of positive generalizations of Jonsson fragments.

Keywords: Jonsson theory, Jonsson set, fragment of Jonsson set, central type, cosemanticness, stability.

When studying the properties of forking for Δ-PM-theory considered an axiomatic approach. A similar one was considered in [4, 5], respectively, for the Jonsson theory and Δ-PM-theory. The main result is the following theorem.

Theorem 1. Let T be a Δ-PM-Jonsson fragment, α-Jonsson, perfect, complete for $\Sigma_{\alpha+1}$ sentences. Then following conditions are equivalent:

1) the relation $PJNF$ satisfies axioms 1-7 [6] with respect to the theory T;

2) T^* is stable and for any $p \in P$, $A \in A$ $((p, A) \in PJNF \Leftrightarrow p$ does not forking over A in the sense of Shelah).

The idea of a central type appears when we consider an enriched signature.

Δ-PM-theories were determined in [7]. Such theories are a positive generalization of the generalized-Jonsson theories introduced in [8].

Let T be an arbitrary Δ-PM-Jonsson fragment in the language of the signature σ. Let C be a semantic model of the theory T. $A \subseteq C$. Let $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$, where $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$. Consider the following theory $T_\Gamma^{PM}(A) = Th_{\Pi^+_{\alpha \in A}}(C, a)_{a \in A} \cup \{P(c)\} \cup \{''P \subseteq''\}$, where $\{''P \subseteq''\}$ is an infinite set of sentences, which means that the interpretation of the symbol P is a positively existentially closed submodel in the signature σ. We denote by S_Γ^{PM} the set of all $\Sigma^+_{\alpha+1}$-completions of Jonsson fragment. T is J-P-λ-stable if $|S_\Gamma^{PM} \leq \lambda|$ for any A such that $|A| \leq \lambda$.

Consider all the completions of the center T^* of Jonsson fragment T in the new signature σ_Γ, where $\Gamma = \{c\}$. Due to the fact that Jonsson fragment T^* is Δ-PM there is its center and we will denote it as T^c. With the restriction of T^c to the signature σ Jonsson fragment T^c becomes a complete type. We will call this type the central type of Jonsson fragment T.

In the frame of the above defined definitions the following theorem is obtained.

Theorem 2. Let T be $\Sigma_{\alpha+1}$-complete, perfect, Δ-PM-Jonsson fragment. Then the following conditions are equivalent:

1) Jonsson fragment T^C is P-λ-stable in the sense of [9];

2) Jonsson fragment T^* is J-P-λ-stable.

Let we define axiomatically the concept of forking for the Δ-PM-Jonsson fragment, when it is a perfect α-Jonsson fragment. We generalized the results of [4, 5].

We introduce the following definitions.

Definition 1. Let M be $\Sigma^+_{\alpha+1}$-saturated Δ-positively $\alpha+1$-existentially closed model of cardinality κ (κ is a sufficiently large cardinal) of Δ-PM-theory T ($\Sigma^+_{\alpha+1}$-saturation means saturation with respect to $\Sigma^+_{\alpha+1}$-types in its power).

Let T be a Jonsson fragment, $S^{PM}(X)$ is the set of all positive $\Sigma^+_{\alpha+1}$-complete n-types over X which joint with T for every finite n.

Let A be a class of all subsets M, P is class of all $\Sigma^+_{\alpha+1}$-types (not necessarily complete), let $PJNF \subseteq P \times A$ be some binary relation. We impose on the $PJNF$ (positively Jonsson non-forking) following axioms:

Axiom 1. If $(p, A) \in PJNF$, $f \in Aut(M)$, $f(A) = B$, then $(f(p), B) \in PJNF$.

Axiom 2. If $(p, A) \in PJNF$, $q \subseteq p$, then $(q, A) \in PJNF$.

Axiom 3. If $A \subseteq B \subseteq C$, $p \in S^{PM}(C)$, then $(p, A) \in PJNF \Leftrightarrow (p, B) \in PJNF$ and $(p \upharpoonright B, A) \in PJNF$.

Axiom 4. If $A \subseteq B$, $dom(p) \subseteq B$, $(p, A) \in PJNF$, then $\exists q \in S^{PM}(B)$, ($p \subseteq q$ and $(q, A) \in PJNF$).

Axiom 5. There is a cardinal μ such that if $A \subseteq B \subseteq C$, $p \in S^{PM}(B)$, $(p, A) \in PJNF$ then $|\ \{q \in S^{PM}(C) : p \subseteq q$ and $(q, A) \in PJNF\}\ | < \mu$.

Axiom 6. There is a cardinal ρ such that $\forall p \in P$, $\forall A \in A$, if $(p, A) \in PJNF$, then $\exists A_1 \subseteq A$, ($|\ A_1\ | < \rho$) and $(p, A_1) \in PJNF$.

Axiom 7. If $p \in S^{PM}(A)$, then $(p, A) \in PJNF$.

The next arrangement is important. In fact, we will talk about the semantic aspect of Δ-PM-Jonsson fragment. If Δ-PM-Jonsson fragment T is α-Jonsson then with $ModT$ we work as with the class of models of some Jonsson theory. If Δ-PM-Jonsson fragment T is not α-Jonsson then as with $ModT$ we will consider the class of its positively existentially closed models $\Sigma^+_{\alpha+1}T$. Such approach for class $\Sigma^+_{\alpha+1}T$ of existentially closed models of an arbitrary universal Jonsson fragment T was considered in [10]. Since two cases are possible with respect to Jonsson fragments: perfect and imperfect, we will adhere to the following. It is well known from [6] that if Jonsson theory is perfect then the class of its existentially closed models is elementary and coincides with $ModT^*$, where T^* its center. Otherwise, i.e. if theory T is imperfect, we proceed similarly [10], only instead of $ModT$ we work with the class $\Sigma^+_{\alpha+1}T$ that considered as an extension of the class E_T of existentially closed models (both classes always exist), and depending on the perfectness and imperfectness of Jonsson fragment T model-theoretic properties of the class $\Sigma^+_{\alpha+1}T$ is of special interest. In this article, for the considered Δ considering Δ-PM-Jonsson fragments are Δ-PM-perfect, which is a natural generalization of perfectness in the Jonsson sense.

Definition 2. We say that Δ-PM-Jonsson fragment T is PM-λ-stable if for any model $A \in \Sigma^+_{\alpha+1}T$, for any subset X of the set A, $|X| \leq \lambda \Rightarrow |S^{PM}(X)| \leq \lambda$. Δ-PM-Jonsson fragment T is PM-stable if it is PM-λ-stable for some λ.

Theorem 3. Let T be Δ-PM-Jonsson fragment, α-Jonsson, perfect, complete for $\Sigma_{\alpha+1}$ sentences. Then the following conditions are equivalent:

1) the relation $PJNF$ satisfies axioms 1-7 with respect to Jonsson fragment;

2) T is stable and for any $p \in P$, $A \in A$ ($(p, A) \in PJNF \Leftrightarrow p$ does not forking over A in the sense of Shelah).

Proof. 1$\Rightarrow$2. Let $\lambda = 2^{\rho|T|\mu}$, where λ, ρ, μ are cardinals, corresponding to axioms 1-7. Now we show that T is PM-λ-stable. Then, by theorem 2.1 from [11] we will have that T^* is λ-stable. It's obvious that $\lambda^p = \lambda$. Let $|A| = \lambda$. If $p \in S^{PM}(A)$, then by axiom 7 $(p, A) \in PJNF$ and by axiom 6 there exists $A_p \subseteq A$ such that $|A_p| < p$ and $(p, A_p) \in PJNF$. Then by axiom 3 $(p \upharpoonright A_p, A) \in PJNF$. We denote by $p \upharpoonright A_p$ through $g(p)$. By axiom 5 $|\{q \in S^{PM}(A) : g(q) = g(p)\}| < \mu$. Consequently, $|S^{PM}(A)| \leq |\{g(p) : p \in S^{PM}(A)\}| \cdot \mu \leq |A^p| \cdot 2^{p|T|} \cdot \mu$ $\leq \lambda^p \cdot \lambda \cdot \lambda = \lambda^p = \lambda$.

Consequently, T is PM-λ-stable. And we conclude that T^* is λ-stable by theorem 2 from [11].

Now let $(p, A) \in PJNF$. We show that p is not forking over A. Let $B = dom(p)$. Then by axiom 4 there exists $q \in S^{PM}(B)$ such that $p \subseteq q$ and $(q, A) \in PJNF$. Let we prove that q is not forking over A (then p is not forking over A by axiom 2). Suppose the converse. Then in view of the perfect theory T and definitions 1, 2 there is a finite set of positive existential formulas Σ^+_0 such that $q \vdash \cup\{\varphi : \varphi \in \Sigma^+_0\}$ and every formula $\varphi \in \Sigma^+_0$ divided over A. Let $C = B \cup D$, D be the set of constants entering at least in one of the formulas of Σ^+_0. By axiom 4 there exists $q_0 \in S^{PM}(C)$ such that $q \in q_0$ and $(q_0, A) \in PJNF$. It's obvious that $q_0 \vdash \cup\{\varphi : \varphi \in \Sigma^+_0\}$ there is $\varphi(\overline{x}, \overline{a}) \in q_0 \cap \Sigma^+_0$. Using theorem 1, the compactness theorem and divisibility $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ over A, we can show the existence of a sequence $\overline{a_\alpha} : \alpha < \mu^+$ and elementary monomorphisms $f_\alpha, \alpha < \mu^+$ identical to A so that $\langle \overline{a}_\alpha : \alpha < \mu^+\rangle$ and $f_\alpha, \alpha < \mu^+$ is k-disjoint for some $k < \omega$.

Let $E = C \cup \{\overline{a_\alpha} : \alpha < \mu^+\}$, $q_\alpha = f_\alpha(q_0)$, $0 < \alpha < \mu^+$. By axiom 1 $(q_0, A) \in PJNF, \alpha < \mu^+$, by axiom 4 there exist $q_\alpha^{'} \in S^{PM}(E)$ such that $q_\alpha \subseteq q_\alpha^{'}$ and $(q_\alpha^{'}, A) \in PJNF$. It's clear that $\varphi(\overline{x}, \overline{a}_\alpha) \in q_\alpha^{'}, \alpha < \mu^+$. We have $|\{q_\alpha^{'} : \alpha < \mu^+\}| = \mu^+$ such that $\varphi(\overline{x}, \overline{a_\alpha}) : \alpha < \mu^+$ is k-disjoint. We obtained the contradiction with axiom 5. Consequently, q is not forking over A. Thus, we have that if $(p, A) \in PJNF$ then p is not forking over A. Prove in the opposite direction. Let P is not forking over A. Since Jonsson fragment T is perfect then T^* is model complete [11] and for us it is sufficient to work only with existential types and consider $\Sigma^+_{\alpha+1}$-saturated positive $\alpha+1$-existentially closed models of the theory T. We need to prove that $(p, A) \in PJNF$. Let $M \supseteq A, M \supseteq dom(p), | M |> 2^{\rho|T|\cdot\mu}$ and M is $\Sigma^+_{\alpha+1}$-saturated model of the theory T^*, $t \in S^{PM}(M), p \subseteq t, t$ is not forking over A. By axiom 7 $(t \restriction A, A) \in PJNF$ and by axiom 5 there exists $q \in S^{PJ}(M)$ such that $q \supseteq t \restriction A$ and $(q, A) \in PJNF$. As shown above $(q, A) \in PJNF$ implies that q is not forking over A. By Lemma 1 there exist automorphisms f of the model M identical to A such that $y = f(q)$. Then by axiom 1 $(t, A) \in PJNF$ and by axiom 2 $(p, A) \in PJNF$. Consequently, 1⇒2 is proved.

2⇒1. Since the center of Jonsson fragment T namely T^* is complete, then to it can be applied the properties of forking in the sense of Shelah. The obtained results (analogues of axioms 1-7 for complete theories) can be easily restricted to generalizations of the corresponding concepts in α-Jonsson sense.

At the moment we are ready to give a proof of the fact that the stability properties of central types as stability in the usual sense for centers with a distinguished predicate coincide with stability with a distinguished predicate in the PM-sense.

We introduce the following notation.

Let T be an arbitrary Δ-PM-Jonsson fragment in the language of the signature σ. Let C be semantical model of Jonsson fragment T. $A \subseteq C$. Let $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$, where $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$. Consider following Jonsson fragment $T^{PM}_\Gamma(A) = Th_{\Pi^+_{\alpha+2}}(C, a)_{a\in A} \cup \{P(c)\} \cup \{''P \subseteq''\}$, where $\{''P \subseteq''\}$ is an infinite set of sentences that says that the interpretation of the symbol P is a positively existentially closed submodel in the signature σ. This Jonsson fragment is not necessarily complete. Therefore it can have finite models.

Through S^{PM}_Γ we denote the set of all $\Sigma^+_{\alpha+1}$-completions of Jonsson fragment T is J-P-λ-stable if $S^{PM}_\Gamma \leq \lambda$ for any A such that $| A |\leq \lambda$. We consider all the completions of the center T^* of the Jonsson fragment T in the new signature σ_Γ, where $\Gamma = \{c\}$. By virtue of the fact that Jonsson fragment T by condition Δ-PM-Jonsson fragment then nothing will change in the enriched language. Further, due to the fact that the condition T is perfect as α-Jonsson fragment then T^* is Δ-PM-Jonsson fragment. Then there is its center and it is one of the completions of the Jonsson fragment T^* in an enriched language. This center we denote as T^c. With restriction T^c to the signature σ Jonsson fragment T^c becomes a complete type. We call this type the central type of the Jonsson fragment T.

In the frame of above definitions the following theorem is obtained.

Theorem 4. Let T be $\Sigma_{\alpha+1}$-complete, perfect, Δ-PM-Jonsson fragment. Then following conditions are equivalent:

1) the Jonsson fragment T^c is P-λ stable in the sense [9];

2) the Jonsson fragment T^c is PM-λ-stable.

Proof. From 1) to 2) the proof is trivial, since if the completions are not more than λ then $\Sigma^+_{\alpha+1}$-completions also not more than λ. We prove this from 2) to 1). Suppose that Jonsson fragment T^c is PM-λ-stable. This is equivalent to the fact that $T^{PM}_\Gamma(A)$ in the signature $\sigma_p(A) = \sigma_A \cup \{P\}$ equals the corresponding Kaiser shell T^0. Because of the completeness of Jonsson fragment T we have that $T^0 = T^*$ and $\Sigma^+_{\alpha+1}T = ModT^*$ (By virtue of perfectness) and $T^{PM}_\Gamma(A) = T^0$ will be a perfect Jonsson fragment. Suppose that the Jonsson fragment T^0 have not more than λ $\Sigma^+_{\alpha+1}$-completions. The center of Jonsson fragment T in the new signature $\sigma_p(A) = \sigma_A \cup \{P\}$ will be equal to $Th(C, a)_{a\in A} \cup \{P(c_a) \mid a \in A\}\{''P \leq''\}$. We need to show that T^* have completions no more than λ. By that T^* will be P-λ-stable (in the sense [9]). Let as clear why T^* is not complete in the new signature. The addition of constants give only non-essential extensions which does not change the number of types of existentially closed submodels of C. An essential role is played by realizations of the predicate P. In this case, realization of the predicate P will be some elementary submodel M of the model C. Since the semantic model C of α-Jonsson fragment T is existentially closed [10] then by virtue of the predicate P in $C(M \leq C)$ follows that $M \in \Sigma^+_{\alpha+1}T$. Consider an arbitrary completion $T^{'}$ in the new signature. By the definition T^* there is such a model M from $\Sigma^+_{\alpha+1}T$ such that $T^{'} = Th(C, M, a)_{a\in A}$, where M is interpretation of the predicate P in the semantic model C. We have that $T^{'} = Th(C, M, a)_{a\in A}$ is Jonsson. In this case, by virtue of the model completeness of $T^{'}$ any formula in $T^{'}$ is equivalent to some existential formula in $T^{'}$. Then by $\Sigma_{\alpha+1}$-completeness of Jonsson fragment T such completions by condition (2) are not more than λ. Thus the statement is proved.

We note that since Jonsson fragment which complete for existential sentences satisfies the joint embedding property (JEP), but the converse is not true condition of $\Sigma_{\alpha+1}$-completeness in the theorem can not be removed. Due to the fact that there is a continuum of not elementary equivalent among themselves existentially closed groups and the groups theory is Jonsson, then we can conclude that in the hypothesis of the theorem one can not be removed the requirement of perfectness.

Let T be an arbitrary $\Delta - PJ$-Jonsson fragment in the first-order language of the signature σ. Let C is semantical model of Jonsson fragment T. $A \subseteq C$. Let $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$, $T_\Gamma^{PJ}(A) = Th_{\forall\exists^+}(C, a)_{a \in A}$ $\cup \{P(c_a) \mid a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{''P \subseteq''\}$, where $\{''P \subseteq''\}$ is infinitely many sentences expressing the fact that the interpretation of the symbol P is an existentially closed submodel in the language of the signature σ. Consider all completions of Jonsson fragment T^* for Jonsson fragment T in the language of the signature σ_Γ, where $\Gamma = \{c\}$. Since T^* is Δ-PJ-Jonsson fragment has a center, we denote it by T^c. When the theory T^c is restricted to a signature σ the theory T^c becomes a complete type. This type is called the central type of Jonsson fragment T. Note that all semantic models are elementarily equivalent. Because of this and the perfectness of Jonsson fragment the definition of the central type is correct. In this article there are no statements in the language of central types for Δ-PJ-Jonsson fragment, but the central types will be considered for another class of Jonsson fragments associated with the class Δ-PJ-Jonsson fragments. In order to see how these classes are related definitions of the central type are given in both cases.

Definition 3. Let A be some infinite model of the signature σ. A is called Δ-PM-model if the set of the sentences $T_\Gamma^{PJ}(A)$ is Δ-PJ-Jonsson fragment in the enriched language.

The Jonsson fragment $T_\Gamma^{PJ}(A)$ will be denoted by $\forall\exists^+(A)$.

The following result generalizes proposition 1 from [12] and lemma 9 of [13].

Lemma 1. Let T be Δ-PJ-Jonsson fragment complete for existential sentences in enrichment $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$. Then any infinite model of Jonsson fragment of center of Jonsson fragment T is Δ-PJ-model.

Proof. If the fragment T is Jonsson then it follows from the fact that the positive Kaiser shell T^0 for T is Jonsson, where T^0 is $Th^+_{\forall\exists}(C)$, C is semantical model of the theory T and the interpretations of the symbols P and c do not influence on the Jonssonness because for the corresponding morphisms under consideration for Δ-JEP and Δ-AP realizations of the symbols P and c are transformed into the corresponding images, since the role P is played by the existentially closed submodel and the constant becomes a constant. In the case where the fragment T is not Jonsson then as a semantic model we consider the universal domain from [14, 15]. Reasoning about maximum of the positive Kaiser shell is transferred completely to the universal domain.

Definition 4. The models A and B are called Δ-PJ-equivalent if for any Δ-PJ-theory T $A \models T \Leftrightarrow B \models T$ and denoted by $A \equiv^\Delta_{PJ} B$.

Lemma 2. Let A and B models of the signature $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$. Then the following conditions are equivalent:

1) $A \equiv^\Delta_{PJ} B$;

2) $\forall\exists^+(A) = \forall\exists^+(B)$.

Proof. In the Jonsson case the proof follows from [12]. In the remaining cases with the help of lemma 1 it is easy to obtain positive generalizations of this proof.

Definition 5. Two Δ-PJ-Jonsson fragments T_1 and T_2 are called Δ-PJ-cosemantic $T_1 \bowtie^\Delta_{PJ} T_2$, if they have a general semantic model, in the case when T_1 and T_2 are Jonsson fragments we have a general universal domain in the case when they are not Jonsson.

Definition 6. Models A and B of the signature σ are called Δ-PJ-cosemantic $A \bowtie^\Delta_{PJ} B$ if for any Δ-PJ-Jonsson fragment T_1 such that $A \models T_1$, there is Δ-PJ-Jonsson fragment T_2, Δ-PJ-cosemanticness with T_1, such that $B \models T_2$. And vice versa.

For any models the following implications are true:

$$A \equiv B \Rightarrow A \equiv^\Delta_{PJ} B \Rightarrow A \bowtie^\Delta_{PJ} B.$$

The next arrangement is very important. In fact we will talk about the semantic aspect of the Δ-PJ-Jonsson fragment. If the Δ-PJ-fragment is Jonsson then with $ModT$ we work as with the class of models of some Jonsson fragment. If the Δ-PJ-fragment is not Jonsson then as $ModT$ we will consider the class of its positively existentially closed models E_T^+. Such an approach for the class E_T of existentially closed models of an arbitrary universal theory T was considered in [2]. Since two cases are possible with respect to the Jonsson fragments: perfect and imperfect, we will adhere to the following. It is well known from [3] that if Jonsson theory T is perfect then the class of its existentially closed models E_T is elementary and coincides with $ModT^*$, where T^* is its center. Otherwise, i.e. if the theory T is imperfect, we proceed as in [13], i.e. instead of $ModT$ we work with the class E_T^+. When an arbitrary Δ-PJ-fragment T is considered, then the class E_T^+ is regarded as an extension of the class E_T (both classes always exist) and depending on the perfectness and imperfectness of fragment T, the model-theoretic properties of the class E_T^+ are of particular interest.

Lemma 3. Let $T_1^{'}$ and $T_2^{'}$ are centers of Jonsson fragments T_1 and T_2 and they are Δ-PJ-Jonsson fragments in $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$. And C_1 is semantic model of T_1, C_2 is semantic model of T_2. If $(T_1^*)_{\forall^+} = (T_2^*)_{\forall^+}$ then $T_1^* \bowtie_{PJ}^{\Delta} T_2^*$. Proof. In the Jonsson case from the fact that positive universal consequences T_2 and T_1 coincide it follows that they are model-joint.

Accordingly, the semantic model of T_1 is a model of T_2 and the semantic model of T_2 is a model of T_1. Next we apply a positive generalization of the proof in [7] with the help of lemmas 1, 2. In the case of the not Jonsson case it suffices to note that if we consider universal domains as semantic models then it is easy to see that they are positively existential models in the sense of [14], [15]. And since by virtue of the remark about the semantic aspect of Δ-PJ-fragments we are working in the not Jonsson case with models of E_T^+, and since all sentences become immersions we can easily repeat the proof similarly to the Jonsson case.

Theorem 5. Let T_1^* and T_2^* as in the conditions of lemma 3 are Δ-PJ-fragments and C_1 is semantic model of T_1, C_2 is semantic model of T_2. Then the following conditions are equivalent:

1) $C_1 \bowtie_{PJ}^{\Delta} C_2$;
2) $C_1 \equiv_{PJ}^{\Delta} C_2$;
3) $C_1 = C_2$.

Proof. Similarly by lemma 3 we consider two cases. In the Jonsson case we repeat the proof from [12] only with the difference that Δ is closed with respect to positive Boolean combinations and is fixed as above. In the not Jonsson case C_1 is replaced by U_1 and C_2 replaced by U_2, where U_1 and U_2 are universal domains, respectively, for T_1 and T_2. Then the above statement follows from that $U_1 \in E_{T_1}^+$ and $U_2 \in E_{T_2}^+$. And it remains to apply the remark semantic aspect Δ-PJ-Jonsson fragments.

The following result generalizes theorem 4 of [12].

Theorem 6. Let A and B be the Δ-PJ-models of the signature $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$. Then the following conditions are equivalent:

1) $A \bowtie_{PJ}^{\Delta} B$;
2) $\forall\exists^+(A) \bowtie_{PJ}^{\Delta} \forall\exists^+(B)$.

Proof. In the Jonsson case, as in the previous theorem, it suffices to consider a positive generalization of the proof from [12] in the sense that Δ is closed with respect to positive Boolean combinations and is fixed as above. In the not Jonsson case, by the conditions of the theorem, it follows that the set of sentences $Th_{\forall\exists^+}(A)$ and $Th_{\forall\exists^+}(B)$ from $T_\Gamma^{PJ}(A) = Th_{\forall\exists^+}(C, a)_{a\in A} \cup \{P(c_a) \mid a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{''P \subseteq''\}$ in the enriched language are Δ-PJ-Jonsson fragments. Then for them it is possible to apply a remark about the semantic aspect of the Δ-PJ-Jonsson fragments.

In [13] a class of theories was introduced which in the intersection with the class of Jonsson fragments generalizes it and also contains generalized Jonsson fragments introduced in [8]. It is interesting to further transfer the results obtained to these fragments and also to see the connection with the central types in the considering enrichment.

Consider all the completions of the center T^* of Jonsson fragment T in the new signature σ_Γ, where $\Gamma = \{c\}$. The following fact allows us to work with positive generalizations of Jonsson fragments in the enriched signature. We note (*) (taken from [13]) that if the fragment T is Δ-PJ-Jonsson then in the enriched language with respect to the conditions of the theorem the center T^* will be the same, i.e. Jonsson fragment. This is achieved as follows: the constants will go into the constants images, realization of predicate into realization of image. The necessary images are obtained by means of the corresponding mappings, which are provided by the conditions Δ-JEP and Δ-AP from Δ-PM-Jonsson of the original fragment T. Further, due to the fact that the condition T is perfect as α-Jonsson fragment then T^* is Δ-PM-Jonsson fragment. Then there is its center and it is one of the completions of the Jonsson fragment T^* in the enriched language. This center we denote as T^c. With restriction T^c to the signature σ the Jonsson fragment T^c becomes a complete type. We call this type the central type of the theory T.

Let us formulate the results on the cosemantic for the positive Mustafian fragments in the enriched signature.

Let $m \leq w; \sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$.

Theorem 7. Let T_1^* and T_2^* be Δ-PM-Jonsson fragments, C_1 be semantic model of T_1, C_2 be semantic model of T_2. Then the following conditions are equivalent:

1) $C_1 \bowtie^{\Delta}_{PM} C_2$;

2) $C_1 \equiv^{\Delta}_{PM} C_2$;

3) $C_1 = C_2$.

Routine proof by induction on quantifiers with an induction length of even k, where k is the number of quantifier changes. Even, because blocks $\forall\exists$ of length 2 are considered.

Theorem 8. Let A and B be Δ-PM-models of T^c is the Jonsson fragment. Then the following conditions are equivalent:

1) $A \bowtie^{\Delta}_{PM} B$;

2) $\forall\exists^+_m(A) \bowtie^{\Delta}_{PM} \forall\exists^+_m(B)$.

Proof. It follows from the above theorems 2 and 4.

All undefined definitions, concepts and results can be found in [6, 16, 17].

References

1 Мустафин Т.Г. Новые понятия стабильности теорий // Труды советско-французского коллоквиума по теории моделей. — Караганда, 1990. — С. 112–125.

2 Палютин Е.А. E^*-стабильные теории / Е.А. Палютин // Алгебра и логика. — 2003. — № 2. — С. 194–210.

3 Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории: учеб. пособие / А.Р. Ешкеев. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. — 250 с.

4 Ешкеев А.Р. О J-форкинге совершенных йонсоновских теорий / А.Р. Ешкеев // Вестн. Караганд. ун-та. Серия Математика. — 2006. — № 3(43).

5 Ешкеев А.Р. О PJ-форкинге в классе Δ-PJ-теорий / А.Р. Ешкеев // Вестн. Казахского национ. ун-та. Серия математика, механика, информатика. — Алматы: КазНУ, 2007. — № 3(54). — С. 10–16.

6 Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории и их классы моделей: учеб. пособие / А.Р. Ешкеев, М.Т. Касыметова. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2016. — 346 с.

7 Ешкеев А.Р. Счетная категоричность Δ-PM-теорий / А.Р. Ешкеев // 12-я Межвуз. конф. по математике, механике и информатике. — Алматы, 2008.

8 Мустафин Т.Г. Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно-йонсоновских теорий булевых алгебр / Т.Г. Мустафин // Математические труды. — Новосибирск: Изд-во Института математики, 1998. — Т. 1, № 2. — С. 135–197.

9 Мустафин Т.Г. О P-стабильности полных теорий / Т.Г. Мустафин, Т.А. Нурмагамбетов // Структурные свойства алгебраических систем: сб. науч. трудов. — Караганда: Изд. КарГУ, 1990. — С. 88–100.

10 Pillay A. Forking in the category of existentially closed structures. – Connection between Model Theory and Algebraic and Analytic Geometry / A.Pillay. (A. Macintyre, ed.), Quaderni di Matematica, Vol.6, University of Naples, 2000.

11 Ешкеев А.Р. Стабильность Δ-PM-теории и её центра / А.Р. Ешкеев, Г.С. Бегетаева // Вестн. Караганд. ун-та. Серия математика. — 2009. — № 4(56). — С. 29–34.

12 Mustafin E. Jonsson equivalent and cosemantical models / E. Mustafin, E. Nurkhaidarov // Quatrieme Colloque Franco-Touranien de Theorie des Modeles. Resumes des Conferences. — Marseille, 1997. — P. 13–15.

13 Ешкеев А.Р. Классификация Δ-PJ-теорий по Δ-PJ-косемантичности и связь с их атомными и простыми моделями / А.Р. Ешкеев. — Алматы: Бюлл. КазНУ, 2008. – № 4(59). — С. 10–17.

14 Itay Ben-Yaacov. Positive model theory and compact abstract theories / Itay Ben-Yaacov // Journal of Mathematical Logic. — 2003. — Vol. 3, No. 1. — P. 85–118.

15 Itay Ben-Yaacov. Compactness and independence in non first order frameworks / Itay Ben-Yaacov // Bulletin of Symbolic logic. — 2005. — Vol. 11, No. 1. —P. 28–50.

16 Yeshkeyev A.R. On Jonsson sets and some their properties / A.R. Yeshkeyev // Bulletin of Symbolic Logic. — 2015. — Vol. 21, No. 1. — P. 99, 100.

17 Yeshkeyev A.R. Properties of central type for fragments of Jonsson sets / A.R. Yeshkeyev // Bulletin of Symbolic Logic. — 2016. — Vol. 22, No. 3. — P. 429, 430.

А.Р. Ешкеев

Йонсондық жиынының Δ-PM фрагментінің центральдік типтері мен косемантикалығы жайында

Мақалада сигнатураның байытылуы қарастырылған. Кезінде тұрақтылық туралы теориялар мен модельдердің элементарлық жұптары ұғымдарын Т.Ғ. Мұстафин қарастырған, осы ұғымдар өзара байланысты екені байқалып, ол T^*-стабильділік ұғымын енгізді. Сонымен қатар сигнатураның кейбір байытылуы зерттелді. Жалпы айтқанда, байытылған тілдегі алынған теориялар толық емес, сондықтан осы теорияларды толықтыратын сандар ізделінді. Осы сан T^*-стабильділік мағынасында стабильділік ұғымын анықтады. Е.А. Палютин T^*-стабильділік ұғымы анықталған типке қатысты инвариантты емес деп қарастырды. Бірақ біз С.Шеллахтың классикалық мағынасында стабильділік теориясы анықталған типке қатысты инвариантты болатынын білеміз. Сондықтан Е.А. Палютин типтің анықтамасын сақтайтын E^*-стабильділік ұғымын енгізді. Осы мақаланың авторы өзінің жұмыстарында осы есепті йонсондық теориялар үшін қарастырып зерттеген. Атап айтқанда, йонсондық теориялар немесе позитивті йонсондық теориялар (Δ-PJ, Δ-PM, Δ-PR) сигнатураның байытылуы рұқсат етілген, егер алынған стабильділік қарастырылған жағдайда типтің анықталуына қатысты инварианты болса. Мақалада барлық қарастырылып отырған байытулар рұқсат етіледі. Айтарлық байыту келесі $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$ түрде болсын, мұнда P – бірорынды предикат символы, жаңа константа символы. Осы байытылумен байланысты мақала авторымен центральдік тип ұғымы енгізілді. Центральдік типтердің тілінде сигнатураның байытылуына дейінгі алынған көптеген теоремалар алынды. Сонымен қатар центральдік типтер үшін йонсондық фрагменттердің позитивті байытылуының аналогиялық сұрақтары жан-жақты қарастырылған.

Кілт сөздер: йонсондық теория, йонсондық жиын, йонсондық жиынның фрагменті, центрльдік тип, косемантикалық, тұрақтылық.

А.Р. Ешкеев

О центральных типах и косемантичности Δ-PM фрагмента йонсоновского множества

Статья связана с обогащением сигнатуры. В своё время при изучении стабильности теории и понятия элементарной пары моделей Т.Г.Мустафиным было замечено, что эти вещи между собой связаны, и он ввел понятие T^*-стабильности. На самом деле при этом рассматривалось некоторое обогащение сигнатуры. Вообще говоря, полученные теории в расширенном языке неполны, поэтому стараются найти число таких пополнений этих теорий. Вот это число и определяло стабильность в смысле T^*-стабильности. Е.А.Палютиным было замечено, что понятие T^*-стабильности не инвариантно относительно определимости типа. Но мы знаем, что в классическом смысле С.Шеллаха стабильность теории инвариантна относительно определимости типа. Поэтому Е.А.Палютиным было введено понятие E^*-стабильности, которое сохраняло определимость типа. Автором данной статьи в работах неоднократно была рассмотрена данная постановка задачи для йонсоновских теорий. Назовём в классе йонсоновских теорий или в позитивных йонсоновских теориях (Δ-PJ, Δ-PM, Δ-PR) обогащение сигнатуры допустимым, если получаемая стабильность в рассматриваемом случае будет инвариантна относительно определимости типа. В статье все рассматриваемые обогащения являются допустимыми. Пусть обогащение будет следующим $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$, где P – символ одноместного предиката, символ новой константы. В связи с допустимыми обогащениями ранее автором было введено понятие центрального типа. На языке центральных типов транслируются многие теоремы, полученные до обогащения сигнатуры. Кроме того, рассмотрены аналогичные вопросы для центральных типов позитивных обобщений йонсоновских фрагментов.

Ключевые слова: йонсоновская теория, йонсоновское множество, фрагмент йонсоновского множества, центральный тип, косемантичность, стабильность.

References

1 Mustafin, T.G. (1990). Novye poniatia stabilnosti teorii [New concepts of stability theory]. *Trudy sovetsko-frantsuzkoho kollokviuma po teorii modelei – In the collection The work of the French-Soviet Symposium of the Model Theory.* (pp. 112–125). Karaganda [in Russian].

2 Palyutin, E.A. (2003). E^*-stabilnie teorii [E^*-stability theory]. *Algebra i Logika – Algebra and Logic, 2,* 194–210 [in Russian].

3 Yeshkeyev, A.R. (2009). Yonsonovskie teorii [Jonsson theory]. Karaganda: Izdatelstvo KarHU [in Russian].

4 Yeshkeyev, A.R. (2006). O J-forkinhe sovershennykh jonsonovskikh teorii [About J-forking of perfect Jonsson theories]. *Vestnik Karahandinskoho universiteta. Seriia Matematika – Bulletin of Karaganda University, Series Mathematics, 3(43)* [in Russian].

5 Yeshkeyev, A.R. (2007). O PJ-forkinhe v klasse Δ-PJ-teorii [About PJ-forking in the class Δ-PJ-theory] *Vestnik Kazakhskoho natsionalnoho universiteta. Seriia matematika, mekhanika, informatika – Bulletin of Kazakh National University. Series Mathematics, Mechanics and Computer Science, 3(54),* 10–16. Almaty: Kazakh National University [in Russian].

6 Yeshkeyev, A.R. & Kassymetova, M.T. (2016). Yonsonovskie teorii i ikh klassy modelei [Jonsson theory and its classes of models]. — Karaganda: Izdatelstvo KarHU [in Russian].

7 Yeshkeyev, A.R. (2014). Schetnaia katehorichnost Δ-PM-teorii [Countable categoricity of Δ-PM theories]. *12 Mezhvuzovskaia konferentsiia po matematike, mekhanike i informatike (10-14 sentiabria 2008 hoda) – 12th Interuniversity Conference on Mathematics, Mechanics and Computer Science.* Almaty [in Russian].

8 Mustafin, T.G. (1998). Obobshchennye usloviia Yonsona i opisanie obobshchenno-yonsonovskikh teorii bulevikh alhebr [Generalized Jonsson conditions and description generalized Jonsson theories of Boolean algebras]. *Matematicheskie trudy – Mathematical works, Vol. 1,* 2, 135–197. Novosibirsk: Publ. of Institute Mathematics [in Russian].

9 Mustafin, T.G. & Nurmagambetov, T.A. (1990). O P-stabilnosti polnykh teorii [About P-stability of complete theories]. *Structurnye svoistva alhebraicheskikh sistem. Sbornik nauchnikh trudov – Structural properties of algebraic system. Collection of scientific papers,* 88–100. Karaganda: Izdatelstvo KarHU [in Russian].

10 Pillay, A. (2000). Forking in the category of existentially closed structures. – Connection between Model Theory and Algebraic and Analytic Geometry (ed. A. Macintyre), Quaderni di Matematica, Vol. 6, University of Naples.

11 Yeshkeyev, A.R. & Begetayeva, G.S. (2009). Stabilnost Δ-PM-teorii i ee tsentra [Stability of Δ-PM-theory and its center]. *Vestnik Karahandinskoho universiteta. Seriia Matematika – Bulletin of Karaganda University. Series Mathematics, 4(56),* 29–34 [in Russian].

12 Mustafin, E. & Nurkhaidarov, E. (1997). Jonsson equivalent and cosemantical models. Quatrieme Colloque Franco-Touranien de Theorie des Modeles. Resumes des Conferences, 13–15. Marseille.

13 Yeshkeyev, A.R. (2008). Klassifikatsiia Δ-PJ-teorii po Δ-PJ-kosemantichnosti i sviaz s ikh atomnymi i prostymi mideliami [Clasification of Δ-PJ theory by Δ-PJ-cosemanticness and connection with its atomic and prime models]. Almaty: Bulletin KazNU, 4(59), 10–17 [in Russian].

14 Itay, Ben-Yaacov. (2003). Positive model theory and compact abstract theories. Journal of Mathematical Logic 3, No. 1, 85–118.

15 Itay, Ben-Yaacov. (2005). Compactness and independence in non first order frameworks. Bulletin of Symbolic logic, No. 1, 28–50.

16 Yeshkeyev, A.R. (2015). On Jonsson sets and some their properties. *Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 21,* 1, 99, 100.

17 Yeshkeyev, A.R. (2016). Properties of central type for fragments of Jonsson sets. *Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 22,* 3, 429, 430.

ӘОЖ 517.9

Қ.Н. Оспанов[1], Т.Н. Бекжан[2], Д.Р. Бейсенова[1,3]

[1] *Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан;*
[2] *Синьцзян университеті, Үрімші, Қытай;*
[3] *Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекетті университеті, Қазақстан*
(E-mail: kordan.ospanov@gmail.com)

Комплекс коэффициентті шексіз айырымдық теңдеулер жүйесінің коэрцитивті шешілу шарттары

Бұл бағалаулар жүйеге сәйкес келетін матрицалық оператордың анықталу облысын толық сипаттайды. Жүйенің коэффициенттері шенелмеген тізбектер құрайды. Ал алынған нәтижелер осы коэффициенттердің тербелісіне тәуелсіз. Соңғы факт шексіз айырымдық жүйелердің табиғаты, сингулярлы дифференциалдық теңдеулерге қарағанда, мүлдем өзгеше екенін дәлелдейді.

Кілт сөздер: коэрцитивті шешілу, шексіз айырымдық жүйе, шешімді бағалау, үзіліссіз қайтарымды оператор, тұйық оператор, финитті тізбек.

1 Кіріспе

$h \in (0, h_0)$ (h_0 бекітілген оң сан) санын алып, $Z_h = \{x_n, \, x_n = nh, n \in Z\}$ деп белгілейік. Алдағы уақытта нақты не комплекс $m_{x_j} = m_{jh}$ санының орнына қысқаша m_j деп жазамыз. Төменде

$$(L_0y)_j := h^{-2}\Delta^{(2)}y_j + h^{-1}r_j\Delta_+y_j + h^{-1}s_j\overline{\Delta_+y_j} + q_jy_j + p_j\overline{y}_j = f_j, j \in Z, \tag{1.1}$$

шексіз айырымдық жүйесін қарастыратын боламыз. Мұндағы r_j — берілген нақты, ал s_j, q_j, p_j, f_j — комплекс сандар, $\bar{y}_j-$ y_j-дің комплекс түйіндесі

$$\Delta_+y_j = y_{j+h} - y_j, \overline{(\Delta_+y)}_j = \overline{(y_{j+h} - y_j)}, \Delta^{(2)}y_j = y_{j+h} - 2y_j + y_{j-h} \, (j \in Z) \, .$$

Егер

$$y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}, \bar{y} = \{\bar{y}_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}, L_0y = \left\{(L_0y)_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}, f = \{f_j\}_{j=-\infty}^{+\infty};$$

$$r = diag\,\{\, r_j, \ j \in Z\}\,, s = diag\,\{\, s_j, \ j \in Z\}\,, q = diag\,\{\, q_j, \ j \in Z\}\,, p = diag\,\{\, p_j, \ j \in Z\}\,,$$

$$\Delta_+y = \{\Delta_+y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}, \overline{\Delta_+y} = \{\overline{\Delta_+y_j}\}_{j=-\infty}^{+\infty}, \Delta^{(2)}y = \left\{\Delta^{(2)}y_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$$

деп белгілеулер енгізсек, онда (1.1) теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$L_0y = h^{-2}\Delta^{(2)}y + h^{-1}r\Delta_+y + h^{-1}s\overline{\Delta_+y} + qy + p\overline{y} = f. \tag{1.2}$$

Айталық, $f \in l_2(h)$ болсын, мұндағы

$$l_2(h) = \left\{ y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} : \|y\|_{2,h} = \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |y_j|^2 \, h \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Жұмыста (1.2) айырымдық теңдеулердің шексіз жүйесінің $f \in l_2(h)$ кеңістігінде коэрцитивті шешілу мүмкіндігін зерттейтін боламыз. Егер r_j, s_j сандары нөлге тең немесе олар шенелген тізбектер құратын болса, онда (1.2) жүйесінің шешілу шарттары белгілі Штурм-Лиувилль айырымдық жүйесіне ұқсас әдіспен алынады [1]. Ал егер r мен s матрицаларының ең болмағанда біреуі шенелмеген болса, онда (1.2) нұқсанды жүйе болып табылады. Мұндай жүйелер тек симметриялы жағдайда ғана ішінара зерттелген [2]. Ал (1.2) - симметриялы емес және комплекс коэффициентті жүйе. $s = p = 0$, $q = \bar{q}$ дербес жағдайында ол [3] жұмысында қарастырылды. Бұл мақалада [3] жұмыстағы ұқсас әдіс пайдаланылса да, соңғыдан едәуір айырмашылықтары бар. Атап айтқанда, $s = p = 0$, $q = \bar{q}$ болған жағдайда, біздің мақаламыздың негізгі нәтижесі [3] жұмысындағы Теорема 3.1 нәтижесімен беттеседі, бірақ осы Теорема 3.1-дегі коэффициент тербелісіне қойылған (3.2) шарты алынып тасталды. Басқаша айтқанда, [3]-те алынған нәтижелер күрт жақсартылды. Екіншіден, (1.2) жүйесіне сәйкес матрица [3]-те қарастырылған жүйе матрица құрылымына қарағанда күрделі.

(1.2) жүйесін зерттеу тек теориялық қызығушылықтан тумаған. Бұл жүйені стохастикалық процестер мен стохастикалық дифференциалдық теңдеулер теориясында пайда болатын есептер алып келеді [4]. Ал стохастикалық дифференциалдық теңдеулерді аналитикалық зерттеу А.Н. Колмогоровтың [5] мақаласынан бастау алады. Бұл бағыттағы зерттеулер ауқымы барған сайын кеңейе түсуде. Мысалы, осы мәселеге арналған [6] монографиясында 900-ден аса әдебиетке сілтеме жасалған.

$\tilde{l}$ деп барлық финитті тізбектер жиынын белгілейік

$$\tilde{l} = \left\{ \{w_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} : \exists N, \ w_j = 0, \ \forall j : |j| \geq N \right\}.$$

Ескерту. Жоғарыда енгізілген белгілеулердің барлығы мақаланың аяғына дейін сақталады.

Анықтама 1.1 Егер $\{z_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \tilde{l}$ $(j = 1, 2, \dots)$ тізбегі табылып,

$$\|z_j - y\|_{2,h} \to 0, \|L_0 z_j - f\|_{2,h} \to 0 (j \to \infty)$$

қатыстары орындалатын болса, онда $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in l_2(h)$ элементін (1.2) жүйесінің шешімі деп атайды.

Белгілі аз бұлқыну теоремасының [7] бір салдарын келтірейік.

Лемма 1.1 $Lu = Au + Bu$ операторы берілсін. Айталық, $A: \ l_2(h) \to l_2(h)$, $D(A) \subseteq D(B)$ болсын және мына шарттар орындалсын:

1) A — тұйық және үзіліссіз қайтарымды оператор;

2) $\|Bu\|_{2,h} \leq \alpha \ \|Au\|_{2,h}$, $\forall u \in D(A)$, $0 < \alpha < 1$.

Сонда L операторы да қайтарымды және $R(L) = l_2(h)$.

2 Бір нұқсанды айырымдық теңдеулер жүйесі үшін коэрцитивті бағалаулар

$$(l_0 y)_j := h^{-2}\Delta^{(2)} y_j + h^{-1} r_j \Delta_+ y_j = f_j, j \in Z, \tag{2.1}$$

жүйесін қарастырамыз. Мұндағы $(l_0 y)_j = (l_0 y)_{x_j}$ $(j \in Z)$. Егер $l_0 y = \left\{ (l_0 y)_j \right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ деп белгілесек, онда (2.1) теңдеуі былай жазылады:

$$l_0 y = h^{-2}\Delta^{(2)} y + h^{-1} r \Delta_+ y = f. \tag{2.2}$$

Анықтама 2.1 Егер $\{z_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \tilde{l}$ тізбегі табылып,

$$\|z_j - y\|_{2,h} \to 0, \|l_0 z_j - f\|_{2,h} \to 0 \ (j \to +\infty)$$

қатыстары орындалатын болса, онда $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in l_2(h)$ элементін (2.1) жүйесінің шешімі деп атайды.

$$\tilde{l}_+ = \left\{ \{w_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l} : \ w_j = 0, j = -1, -2, \dots \right\}$$

болсын. Егер [8] жұмысында дәлелденген 2.1 леммасында $b_n = \sum_{j=n}^{+\infty} a_j$ деп алсақ, онда $\Delta_+ b_n = b_{n+1} - b_n = -a_n$ болғандықтан, мынадай тұжырымға келеміз.

Салдар 2.1 Айталық, $1 < p < +\infty$ болсын. Сонда

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n \Delta_+ b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \{b_k\}_{k=0}^{+\infty} \in \tilde{l}_+, \tag{2.3}$$

теңсіздігі орындалуы үшін

$$B_0 = \sup_{r=0,1,2,\dots} \left(\sum_{n=0}^{r} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=r}^{+\infty} |v_n|^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

болуы қажетті және жеткілікті. Мұндағы

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Сонымен бірге, егер C (2.3) бағалауы орындалатындай ең кіші тұрақты болса, онда

$$B_0 \le C \le p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}B_0.$$

$\tilde{l}_- = \left\{ \{w_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}: \; w_j = 0, j = 0,\, 1,\, 2,\, ... \right\}$ болсын.

Лемма 2.1 Айталық, $1 < p < +\infty$ болсын. Онда

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{-1} |u_n b_n|^p \, h\right)^{\frac{1}{p}} \le \tilde{C}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1} |v_n \Delta_+ b_n|^p \, h\right)^{\frac{1}{p}}, \{b_k\}_{k=-\infty}^{-1} \in \tilde{l}_-, \tag{2.4}$$

теңсіздігі орындалуы үшін

$$\tilde{B} = \sup_{\tau=-1,-2,...}\left(\sum_{n=\tau}^{0} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\tau} |v_n|^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

болуы қажетті және жеткілікті. Мұндағы

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Сонымен бірге, егер $\tilde{C}$ (2.4) орындалатындай ең кіші тұрақты болса, онда

$$\tilde{B} \le \tilde{C} \le p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}\tilde{B}.$$

Бұл лемма жоғарыдағы 2.1 салдарын пайдаланып, [8] жұмысындағы лемма 2.2 алынған әдіспен дәлелденеді.

Енді (2.2)-де берілген нұқсанды айырымдық операторды қарастырып, ол үшін априорлық бағалаулар аламыз.

Лемма 2.2 Айталық, $r_{jh} \ge \varepsilon > 0 (j \in Z)$ болсын. Онда әрбір $y \in \tilde{l}$ үшін

$$\left\| \sqrt{r}\,\frac{\Delta_+ y}{h} \right\|_{2,h} \le \left\| \frac{1}{\sqrt{r}}\, l_0 y \right\|_{2,h} \tag{2.5}$$

бағалауы орындалады.

Дәлелдеу. $y \in \tilde{l}$ болсын.

$$\frac{\Delta_+ y_j}{h} = z_j$$

деп белгілейік. Онда

$$\Delta_-\left(\Delta_+ y_j\right) = \Delta^{(2)} y_j = h^{-1}\Delta_- z_j$$

болады да, (2.1) мына түрге келеді:

$$\left(\tilde{l}_0 z\right)_j = h^{-1}\left(z_j - z_{j-h}\right) + r_j z_j = f_j, j \in Z.$$

Соңғы жүйенің екі жағын $z_j = z_{jh}$ - қа көбейтіп, нәтижесін j-лер бойынша қосындылаймыз:

$$h^{-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{jh} - z_{(j-1)h}\right) z_{jh} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} r_{jh} z_{jh}^2 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_{jh} z_{jh}. \tag{2.6}$$

Бұл өрнектегі

$$A := \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{jh} - z_{(j-1)h}\right) z_{jh}$$

қосындысы теріс емес екенін байқауға болады. Шынында да

$$A=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{jh}-z_{(j-1)h}\right)z_{jh}=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{jh}z_{jh}-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{(j-1)h}z_{jh}=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{jh}z_{jh}-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}z_{kh}z_{(k+1)h}=$$

$$=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{jh}z_{jh}-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{jh}z_{(j+1)h}=-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{jh}\left(z_{(j+1)h}-z_{jh}\right)=-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{(j-1)h}\left(z_{jh}-z_{(j-1)h}\right)=$$

$$=-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{(j-1)h}-z_{jh}\right)\left(z_{jh}-z_{(j-1)h}\right)-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{jh}\left(z_{jh}-z_{(j-1)h}\right),$$

немесе

$$2A=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{jh}-z_{(j-1)h}\right)^2.$$

Демек, $A\geq 0$. Онда (2.6)-дан

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}r_{jh}z_{jh}^2\leq\sum_{j=-\infty}^{+\infty}f_{jh}z_{jh}.$$

Лемма шартын және Гельдер теңсіздігін пайдалансақ,

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}r_{jh}z_{jh}^2\leq\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f_{jh}}{\sqrt{r_{jh}}}\right)^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{r_{jh}}z_{jh}\right)^2\right)^{\frac12},$$

осыдан

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{r_{jh}}z_{jh}\right)^2h\right)^{\frac12}\leq\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f_{jh}}{\sqrt{r_{jh}}}\right)^2h\right)^{\frac12},y\in\tilde{l}.$$

Соңғы бағалаудан $z_j=\frac{\Delta_+y_j}{h}$ екенін ескеріп, (2.5)-ке келеміз. Лемма дәлелденді.

(2.5) теңсіздігі және $r_{jh}\geq\varepsilon>0(j\in Z)$ шартынан

$$\left\|\sqrt{r}\,\frac{\Delta_+y}{h}\right\|_{2,h}\leq\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\parallel f\|_{2,h},y\in\tilde{l}, \tag{2.7}$$

бағалауы шығады.

Келесі түрдегі белгілеулерді енгізейік:

$$\alpha_{\varphi,\psi}(n)=\left(\sum_{j=0}^{n}|\varphi_j|^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\psi_j^{-2}\right)^{\frac12}(n=0,\,1,\,2,\,...);$$

$$\beta_{\varphi,\psi}(k)=\left[\left(\sum_{j=k}^{-1}|\varphi_j|^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}\psi_j^{-2}\right)^{\frac12}\right](k=-1,-2,...);$$

$$\gamma_{\varphi,\psi}=\max\left(\sup_{n=0,1,2,...}\alpha_{\varphi,\psi}(n),\sup_{k=-1,-2,...}\beta_{\varphi,\psi}(k)\right),$$

мұндағы $\varphi=\{\varphi_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ $(\varphi_j=\varphi_{x_j})$және $\psi=\{\psi_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ — берілген тізбектер.

Лемма 2.3 Айталық, $r=\{r_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ тізбегі $r_j\geq\varepsilon>0(j\in Z)$ және

$$F^*=\sup_{n=0,1,2,...}\alpha_{1,\sqrt{r}}(n)<\infty, \tag{2.8}$$

$$F^{**} = \sup_{k=-1,-2,...} \beta_{1,\sqrt{r}}(k) < \infty \tag{2.9}$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда $y \in \tilde{l}$ элементі үшін

$$\|y\|_{2,h} \leq C_0 \| \, l_0 y\|_{2,h} \tag{2.10}$$

теңсіздігі орындалады. Мұндағы

$$C_0 = 2\sqrt{\frac{F^* + F^{**}}{\varepsilon}}.$$

Лемма (2.5) бағалауынан және Салдар 2.1 мен Лемма 2.1-ден шығады.

Егер (2.10) және (2.7) теңсіздіктерін біріктірсек, онда

$$\|y\|_{2,h} + \left\| \sqrt{r}\, \frac{\Delta_+ y}{h} \right\|_{2,h} \leq C_1 \| \, l_0 y\|_{2,h}, y \in D(\tilde{l}). \tag{2.11}$$

Мұндағы

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[2\sqrt{F^* + F^{**}} + 1 \right].$$

Айталық, $\lambda \geq 0$ болсын. Келесі

$$l_{0\lambda} y := h^{-2}\Delta^{(2)} y + h^{-1}(r+\lambda)\Delta_+ y \, = \, f, f \in l_2(h), \tag{2.12}$$

теңдеуін қарастырайық.

Теорема 2.1 Егер $\{r_{jh}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ тізбегі $r_{jh} \geq \varepsilon > 0$ $(j \in Z)$, (2.8) және (2.9) шарттарын қанағаттандырса, онда (2.12) теңдеулер жүйесінің $y \in l_{2,h}$ шешімі бар және ол жалғыз. Сонымен бірге y шешімі үшін

$$\left\| h^{-2}\Delta^{(2)} y \right\|_{2,h} + \left\| h^{-1}(r+\lambda)\Delta_+ y \right\|_{2,h} \leq c_1(h) \, \|f\|_{2,h} \tag{2.13}$$

бағалауы орындалады.

Дәлелдеу. Айталық,

$$\tilde{y}_{n+m} = (y_{-m+1}, \, y_{-m+2}, \, ..., \, y_0, \, ..., \, y_{n-1}, \, y_n), \; n, m \in N,$$

элементі

$$l\tilde{y}_{n+m} = \tilde{f}_{n+m} \tag{2.14}$$

теңдігін қанағаттандырсын. Мұндағы

$$\tilde{f}_{n+m} = (\, f_{-m+1}, \, f_{-m+2}, \, ..., \, f_0, \, ..., \, f_{n-1}, \, f_n).$$

Теорема шарттары орындалғанда мұндай $\tilde{y}_{n+m}$ элементі жалғыз ғана. Шынында да, (2.14) - $(n+m) \times \times (n+m)$ өлшемді сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі. Егер $l\tilde{y}_{n+m} = 0$ болса, онда (2.10) теңсіздігінен $\tilde{y}_{n+m} = 0$ болатыны шығады. Осыдан әрбір $f \in \tilde{l}$ үшін (2.13) теңдеуінің шешімі бар және жалғыз екенін аламыз.

Айталық, $f \in l_2(h)$, ал $\left\{ \tilde{f}_s \right\} \subset \tilde{l}$ оған жинақталатын тізбек болсын: $\left\| \tilde{f}_s - f \right\|_{2,h} \to 0$, $s \to \infty$. $\tilde{y}_s$ $(s \in Z)$ деп келесі $ly = \tilde{f}_s$ жүйесінің шешімін белгілейік. Онда анықтама бойынша $\|l\tilde{y}_s - f\|_2 \to 0$,$s \to \infty$, ал (2.10)-нан

$$\|\tilde{y}_s\|_{2,h} \leq C_1 \, \|l\tilde{y}_s\|_{2,h}$$

екенін аламыз. Соңғы теңсіздіктен

$$\|\tilde{y}_k - \tilde{y}_m\|_{2,h} \leq C_1 \, \|l\tilde{y}_k - l\tilde{y}_m\|_{2,h} \to 0, \; k, m \in N,$$

орындалатыны шығады. Олай болса, $\{\tilde{y}_s\}_{s=-\infty}^{+\infty}$ — фундаментальды тізбек. $l_2(h)$ банах кеңістігі болғандықтан, $\|\tilde{y}_s - \bar{y}\|_{2,h} \to 0$ $(s \to \infty)$ орындалатындай $\bar{y} \in l_2$ элементі табылады. Сонымен,

$$\|\tilde{y}_k - \bar{y}\|_{2,h} \to 0, \|l\tilde{y}_k - f\|_{2,h} \to 0, k \to \infty.$$

Демек, 2.1 анықтамасы бойынша $\bar{y}$ — (2.12) теңдеулер жүйесінің шешімі. Ендеше әрбір $f \in l_2$ үшін (2.12) теңдеулер жүйесінің шешімі бар. Шешімнің жалғыз екені (2.10) теңсіздігінен шығады.

Енді (2.12) теңдеулер жүйесінің y шешімі үшін (2.13) бағасы орындалатынын көрсетейік.

$$h^{-1}\Delta_+ y = z$$

деп белгілейік. Онда $\lambda = 0$ жағдайында (2.12)

$$\mathbf{L}_o z = h^{-1}\Delta_- z + rz = f$$

түріне келеді. Мұндағы $rz = \{r_j z_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$.

$$\mathbf{L}_o z = h^{-1}\Delta_- z + rz \ (D(\mathbf{L}_o) = \tilde{l})$$

операторының $l_2(h)$ кеңістігіндегі тұйықталуын $\mathbf{L}$ түрінде белгілейік. Айта кетерлігі, $\mathbf{L}$ операторы теорема шарты орындалғанда $l_2(h)$-та анықталған. Себебі (2.11) теңсіздігінен әрбір $z \in \tilde{l}$ үшін

$$\|z\|_{2,h} \le C_1 \|\mathbf{L}_o z\|_{2,h}$$

екенін аламыз. Стандартты әдіс бойынша бұл теңсіздік әрбір $z \in D(L)$ үшін де орындалатынын көреміз. Демек, $D(\mathbf{L}) \subset l_2$.

Теорема шарттары орындалғанда әрбір $\lambda \ge 0$ үшін, жоғарыда көрсетілгендей, $\mathbf{L}_\lambda = \mathbf{L} + \lambda E : l_2(h) \to \to l_2(h)$ операторы қайтарымды. Мұндағы E – бірлік оператор. Енді $z \in D(\mathbf{L}_\lambda)$ үшін келесі

$$\left\|h^{-1}\Delta_+ z\right\|_{2,h} + \|(r+\lambda)z\|_{2,h} \le C \|\mathbf{L}_\lambda z\|_{2,h}$$

бағалауы орындалатынын көрсетейік.

$$\mathbf{L}_\lambda z = h^{-1}\Delta_- z + (r+\lambda) z = f \tag{2.15}$$

теңдеуін қарастырамыз. Мұндағы

$$r + \lambda = diag\{r_j + \lambda, \quad j \in Z\}.$$

Айталық, $\{z_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}$. (2.15) жүйесіндегі j-ші теңдеудің екі жағын $z_j = z_{jh}$-қа көбейтсек, онда

$$h^{-1}(z_j - z_{j-h}) z_j + (r_j + \lambda) z_j^2 = f_j z_j, j \in Z.$$

Осы теңдіктерді j-лер бойынша қосындылаймыз. Сонда

$$h^{-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(z_j - z_{j-h}) z_j + \sum_{j=-\infty}^{+\infty}(r_j+\lambda) z_j^2 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j z_j. \tag{2.16}$$

Жоғарыдағы Лемма 2.2-нің дәлелдеуінен алатынымыз

$$h^{-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{jh} - z_{(j-1)h}\right) z_{jh} = \frac{h^{-1}}{2}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{jh} - z_{(j-1)h}\right)^2 \ge 0.$$

Онда (2.16)-дан

$$\frac{h^{-1}}{2}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{jh} - z_{(j-1)h}\right)^2 h \le \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_{jh} z_{jh} h \le$$

$$\le \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_{jh}^2 h\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_{jh}^2 h\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{2,h}\|z\|_{2,h}. \tag{2.17}$$

(2.7)-ден біздің белгілеуіміз бойынша $\|z\|_{2,h} \le C_1 \|f\|_{2,h}$. Ендеше (2.17)-ден

$$\left\|h^{-2}\Delta^{(2)}y\right\|_{2,h} \le C_2 \|f\|_{2,h}$$

теңсіздігін аламыз. Онда (2.12) теңдігінен

$$\left\|h^{-1}(r+\lambda)\Delta_+ y\right\|_{2,h} = \left\|-h^{-2}\Delta^{(2)}y + f\right\|_{2,h} \le$$

$$\le \left\|h^{-2}\Delta^{(2)}y\right\|_{2,h} + \|f\|_{2,h} \le (C_2+1)\|f\|_{2,h}.$$

Соңғы екі теңсіздікті біріктірсек, онда

$$\left\|h^{-2}\Delta^{(2)}y\right\|_{2,h} + \left\|h^{-1}(r+\lambda)\Delta_+ y\right\|_{2,h} \le [2C_2+1]\ \|f\|_{2,h}, y \in \tilde{l}.$$

Бұл теңсіздік (2.12) теңдеуінің әрбір y шешімі үшін де орындалатыны оңай тексеріледі. Теорема дәлелденді.

l арқылы $\tilde{l}$ жиынында анықталған

$$ly = h^{-2}\Delta^{(2)}y + h^{-1}(r+\lambda)\Delta_+ y, \lambda \ge 0,$$

айырымдық операторының $l_2(h)$ кеңістігі нормасындағы тұйықталуын белгілейік.

3 Негізгі теорема және оның дәлелдеуні

Теорема 3.1 Айталық, $r = \{r_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ тізбегі (2.8) және (2.9) шарттарын қанағаттандырсын. $s = \{s_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ тізбегі үшін $r_j \ge \alpha|s_j| + \delta$, $\delta > 0$ $(j \in Z)$, $3A_1(h) < \alpha < 4A_1(h)$ (мұндағы $A_1(h)$- (2.13)-тегі тұрақты) шарттары орындалсын. q және p тізбектері үшін

$$\gamma_{q,r} < \infty; \tag{3.1}$$

$$\gamma_{p,r} < \infty \tag{3.2}$$

шарттары орындалсын. Онда (1.1) теңдеулер жүйесінің $y \in l_2$ (h) шешімі бар және ол жалғыз. Сонымен бірге осы y шешімі үшін

$$\left\|h^{-2}\Delta^{(2)}y\right\|_2 + \left\|h^{-1}r\Delta_+ y\right\|_2 + \left\|h^{-1}s\overline{\Delta_+ y}\right\|_2 + \|qy\|_2 + \|p\overline{y}\|_2 \le C_3\ \|L_0 y\|_2 \tag{3.3}$$

бағалауы орындалады.

Дәлелдеу. $h = k\tau$ ($k > 0$,k — тұрақты) алмастыруын жасасақ, (1.2) мына түрге келеді:

$$L_0 y = \tau^{-2}\Delta^{(2)}\tilde{y} + k\tau^{-1}\tilde{r}\Delta_+\tilde{y} + k\tau^{-1}\tilde{s}\overline{\Delta_+\tilde{y}} + k^2\tilde{q}\,\tilde{y} + k^2\tilde{p}\,\overline{\tilde{y}} = k^2\,\tilde{f},\ \tilde{f} \in l_2(\tau),$$

мұндағы

$$\tilde{y} = \{\tilde{y}_{j\tau}\}_{j=-\infty}^{+\infty} = y(k\tau); \tilde{r} = diag\{\tilde{r}_{j\tau},\ j \in Z\}_{j=-\infty}^{+\infty} = r(k\tau);$$

$$\tilde{q} = diag\{\ \tilde{q}_{j\tau},\ j \in Z\}_{j=-\infty}^{+\infty} = q(k\tau), \tilde{s} = diag\{\ \tilde{s}_{j\tau},\ j \in Z\}_{j=-\infty}^{+\infty} = s(k\tau);$$

$$\tilde{p} = diag\{\ \tilde{p}_{j\tau},\ j \in Z\}_{j=-\infty}^{+\infty} = p(k\tau), \tilde{f} = \left\{\tilde{f}_{j\tau}\right\}_{j=-\infty}^{+\infty} = f(k\tau).$$

Немесе

$$l\tilde{y} + k\tau^{-1}\tilde{s}\overline{\Delta_+\tilde{y}} + k^2\tilde{q}\,\tilde{y} + k^2\tilde{p}\,\overline{\tilde{y}} = k^2\,\tilde{f},$$

мұндағы $l = l(\tau)$

$$l(\tau)y = \tau^{-2}\Delta^{(2)}\tilde{y} + k\tau^{-1}\tilde{r}\Delta_+\tilde{y}\ \ (\tilde{y} \in D(l)) -$$

теңдігімен анықталған тұйық оператор.

$\tilde{r} = \{\tilde{r}_{j\tau}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ тізбегі 2.1 теоремасының шарттарын қанағаттандырады, сондықтан l операторы қайтарымды және кері l^{-1} операторы үзіліссіз. Ал (2.13) теңсіздігі бойынша әрбір $\tilde{y} \in D(l)$ үшін келесі бағалау орындалады:

$$\left\|\tau^{-2}\Delta^{(2)}\tilde{y}\right\|_{2,\tau} + \left\|\tau^{-1}k\tilde{r}\Delta_{+}\tilde{y}\right\|_{2,\tau} \le \tilde{A}_1(\tau)\parallel l\,\tilde{y}\|_{2,\tau}. \tag{3.4}$$

Келесі теңдіктер орынды:

$$\gamma_{\tilde{p},\tilde{r}} = \frac{1}{k}\gamma_{p,r}, \gamma_{\tilde{q},\tilde{r}} = \frac{1}{k}\gamma_{q,r}.$$

Шынында да, егер $\alpha_{\tilde{p},\tilde{r}}$, $\beta_{\tilde{p},\tilde{r}}$ және $\alpha_{\tilde{q},\tilde{r}}$, $\beta_{\tilde{q},\tilde{r}}$өрнектерінде $\tilde{q}_j = k^{-2}q_j$, $\tilde{p}_j = k^{-2}p_j$ және $\tilde{r}_j = k^{-1}r_j$ деп ауыстырулар енгізсек, алатынымыз:

$$\alpha_{\tilde{p},\tilde{r}} = \left(\sum_{j=0}^{n}\tilde{p}_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\tilde{r}_j^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=0}^{n}\left(k^{-2}p_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\left(k^{-1}r_j\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\sum_{j=0}^{n}\tilde{p}_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}r_j^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k}\alpha_{p,r};$$

$$\beta_{\tilde{p},\tilde{r}} = \left(\sum_{j=k}^{-1}\tilde{p}_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}\tilde{r}_j^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=k}^{-1}\left(k^{-2}p_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}\left(k^{-1}r_j\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\sum_{j=k}^{-1}p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}r_j^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k}\beta_{p,r}.$$

Дәл осылар сияқты $\alpha_{\tilde{q},\tilde{r}} = \frac{1}{k}\alpha_{q,r}$ және $\beta_{\tilde{q},\tilde{r}} = \frac{1}{k}\beta_{q,r}$ теңдіктері орындалады. Олай болса,

$$\gamma_{\tilde{p},\tilde{r}} = \max\left(\sup_{n=0,1,2,\dots}\alpha_{\tilde{p},\tilde{r}}, \sup_{k=-1,-2,\dots}\beta_{\tilde{p},\tilde{r}}\right) = \max\frac{1}{k}\left(\sup_{n=0,1,2,\dots}\alpha_{p,r}, \sup_{k=-1,-2,\dots}\beta_{p,r}\right) = \frac{1}{k}\gamma_{p,r};$$

$$\gamma_{\tilde{q},\tilde{r}} = \max\left(\sup_{n=0,1,2,\dots}\alpha_{\tilde{q},\tilde{r}}, \sup_{k=-1,-2,\dots}\beta_{\tilde{q},\tilde{r}}\right) = \max\frac{1}{k}\left(\sup_{n=0,1,2,\dots}\alpha_{q,r}, \sup_{k=-1,-2,\dots}\beta_{q,r}\right) = \frac{1}{k}\gamma_{q,r}.$$

(2.3), (2.4) теңсіздіктерін және(3.1), (3.2) шарттарын пайдалансақ,

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left|k^2\tilde{p}\,\tilde{y}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=-\infty}^{-1}\left|k^2\tilde{p}\,\tilde{y}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=0}^{+\infty}\left|k^2\tilde{p}\,\tilde{y}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le 2k^2\tilde{B}\left(\sum_{j=-\infty}^{-1}\left|\tilde{r}_j\Delta_{+}\,\tilde{y}_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2k^2B_0\left(\sum_{j=0}^{+\infty}||\tilde{r}_j\Delta_{+}\,\tilde{y}_j||^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le 2k^2\gamma_{\tilde{p},\tilde{r}}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}||\tilde{r}_j\Delta_{+}\,\tilde{y}_j||^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2k^2\gamma_{\tilde{p},\tilde{r}}\left\|\tilde{r}\Delta_{+}\,\tilde{y}\right\|_{2,\tau};$$

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left|k^2\tilde{q}\,\tilde{y}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=-\infty}^{-1}\left|k^2\tilde{q}\,\tilde{y}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=0}^{+\infty}\left|k^2\tilde{q}\,\tilde{y}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le 2k^2\tilde{B}\left(\sum_{j=-\infty}^{-1}\left|\tilde{r}_j\Delta_{+}\,\tilde{y}_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2k^2B_0\left(\sum_{j=0}^{+\infty}||\tilde{r}_j\Delta_{+}\,\tilde{y}_j||^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\leq 2k^2\gamma_{\tilde{q},\tilde{r}}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}||\tilde{r}_j\Delta_+\tilde{y}_j||^2\right)^{\frac{1}{2}}=2k^2\gamma_{\tilde{q},\tilde{r}}\left\|\tilde{r}\Delta_+\tilde{y}\right\|_{2,\tau},$$

немесе

$$\left\|k^2\tilde{p}\,\tilde{y}\right\|_{2,\tau}\leq 2k\tau\gamma_{\tilde{p},\tilde{r}}\left\|k\tau^{-1}\tilde{r}\Delta_+\tilde{y}\right\|_{2,\tau},\quad \left\|k^2\tilde{q}\,\tilde{y}\right\|_{2,\tau}\leq 2k\tau\gamma_{\tilde{q},\tilde{r}}\left\|k\tau^{-1}\tilde{r}\Delta_+\tilde{y}\right\|_{2,\tau}. \tag{3.5}$$

Екіншіден, теорема шартынан $\left|k\tau^{-1}\tilde{s}_{j\tau}\overline{\Delta_+\tilde{y}_{j\tau}}\right|\leq\frac{1}{\alpha}k\tau^{-1}\tilde{r}_{j\tau}\left|\Delta_+\tilde{y}_{j\tau}\right|$ және $\frac{1}{4\tilde{c}_1(\tau)}\leq\frac{1}{\alpha}\leq\frac{1}{3\tilde{c}_1(\tau)}$, мұндағы $\tilde{c}_1(\tau)$ — (3.4) теңсіздігіндегі тұрақты. Сондықтан (3.4) бойынша

$$\left\|k\tau^{-1}\tilde{s}\overline{\Delta_+\tilde{y}}\right\|_{2,\tau}\leq\frac{1}{3\tilde{c}_1}\left\|k\tau^{-1}\tilde{r}\Delta_+\tilde{y}\right\|_{2,\tau}\leq\frac{1}{3}\left\|l\tilde{y}\right\|_{2,\tau}. \tag{3.6}$$

Егер

$$k=\min\left\{\frac{1}{6\tau\gamma_{\tilde{p},\tilde{r}}\tilde{c}_1},\frac{1}{6\tau\gamma_{\tilde{q},\tilde{r}}\tilde{c}_1}\right\}$$

деп ұйғарсақ, онда (3.4) теңсіздігінен

$$\left\|k^2\tilde{p}\tilde{y}\right\|_{2,\tau}\leq\frac{1}{3}\left\|l\,\tilde{y}\right\|_{2,\tau}, \tag{3.7}$$

ал (3.5) теңсіздігінен

$$\left\|k^2\tilde{q}\tilde{y}\right\|_{2,\tau}\leq\frac{1}{3}\left\|l\,\tilde{y}\right\|_{2,\tau} \tag{3.8}$$

шығады. (3.6), (3.7) және (3.8) теңсіздіктерінен Лемма 1.1 бойынша (1.2) теңдеуінің шешімі бар және жалғыз екеніне көз жеткіземіз.

Айталық, $\tilde{y}$ (1.2) теңдеуінің шешімі болсын. Сонда (3.4), (3.7), (3.8) және (3.6) теңсіздіктерінен алатынымыз:

$$\left\|\tau^{-2}\Delta^{(2)}\tilde{y}\right\|_{2,\tau}+\left\|\tau^{-1}k\tilde{r}\Delta_+\tilde{y}\right\|_{2,\tau}+\left\|\tau^{-1}k\tilde{s}\overline{\Delta_+\tilde{y}}\right\|_{2,\tau}+\left\|k^2\tilde{q}\tilde{y}\right\|_{2,\tau}+\left\|k^2\tilde{p}\overline{\tilde{y}}\right\|_{2,\tau}\leq$$

$$\leq\left(\frac{2}{3}+A_1(\tau)\right)\left\|\,l\,\tilde{y}\right\|_{2,\tau}. \tag{3.9}$$

(3.6) және (3.7) бойынша

$$\left\|\,l\,\tilde{y}\right\|_{2,\tau}=\left\|\,l\,\tilde{y}+\tau^{-1}k\tilde{s}\overline{\Delta_+\tilde{y}}+k^2\tilde{p}\overline{\tilde{y}}\right\|_{2,\tau}+\left\|\tau^{-1}k\tilde{s}\overline{\Delta_+\tilde{y}}+k^2\tilde{p}\overline{\tilde{y}}\right\|\leq$$

$$\leq\left\|\,l\,\tilde{y}+\tau^{-1}k\tilde{s}\overline{\Delta_+\tilde{y}}+k^2\tilde{p}\overline{\tilde{y}}\right\|_{2,\tau}+\frac{2}{3}\left\|\,l\,\tilde{y}\right\|_{2,\tau},$$

осыдан

$$\left\|l\,\tilde{y}\right\|_{2,\tau}\leq 3\left\|\,L_0\,\tilde{y}\right\|_{2,\tau}. \tag{3.10}$$

(3.9) және (3.10)-нан

$$\left\|\tau^{-2}\Delta^{(2)}\tilde{y}\right\|_{2,\tau}+\left\|\tau^{-1}k\tilde{r}\Delta_+\tilde{y}\right\|_{2,\tau}+\left\|\tau^{-1}k\tilde{s}\overline{\Delta_+\tilde{y}}\right\|_{2,\tau}+\left\|k^2\tilde{q}\tilde{y}\right\|_{2,\tau}+\left\|k^2\tilde{p}\overline{\tilde{y}}\right\|_{2,\tau}\leq$$

$$\leq(2+3c_1(\tau))\left\|\,L_0\tilde{y}\right\|_{2,\tau}.$$

Осыдан $\tau=\frac{h}{k}$ алмастыруын жасап, (3.3) теңсіздігіне келеміз. Теорема дәлелденді.

Бұл мақала Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігінің 0085/ПЦФ-14 мақсатты бағдарламасы және 5132/ГФ4 грантық жобасы есебінен ішінара қаржыландырылды.

Әдебиеттер тізімі

1 Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n / М. Отелбаев // Труды МИ АН СССР. — 1983. — Т. 161. — С. 195–217.

2 Костюченко А.Г. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / Анатолий Гордеевич Костюченко. — М.: Изд-во МГУ, 1966.

3 Оспанов Қ.Н. Екінші ретті айырымдық бір теңдеулер жүйесі шешімдерінің қасиеттері жайлы / Қ.Н. Оспанов, А. Зұлхажав // Қарағанды ун-нің хабаршысы. Математика сер. — 2015. — № 2(78). — 124–136-б.

4 Prüss J., Rhandi A., Schnaubelt R. The domain of elliptic operators on $L_p(R^d)$ with unbounded drift coefficients / J. Prüss, A. Rhandi, R. Schnaubelt // Houston J. Math. — 2006. — Vol. 32, No. 2. — P. 563–576.

5 Kolmogoroff A.N. Uber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung / A.N. Kolmogoroff // Mathematische Annalen. — 1931. — Vol. 104.

6 Bogachev V.I. Fokker-Planck-Kolmogorov Equations / V.I. Bogachev, N.V. Krylov, M. Reckner, S.V. Shaposhnikov. — AMS, 2015. — Vol. 207.

7 Kato T. Perturbation theory for lenear operators. (Th. 1.1, Th. 1.16 §4) / T. Kato. — Berlin. Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1966. — 740 p.

8 Зұлхажав А. Екінші ретті айырымдық теңдеулер жүйесінің коэрцитивті шешілу шарттары / А. Зұлхажав // Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ хабаршысы. — 2015. — № 6(109). — 334–337-б.

К.Н. Оспанов, Т.Н. Бекжан, Д.Р. Бейсенова

Условия коэрцитивной разрешимости бесконечной системы разностных уравнений с комплексными коэффициентами

Эти оценки полностью описывают область определения матричного оператора, который соответствует системе. Коэффициенты системы составляют неограниченные последовательности, а полученные результаты не зависят от колебания этих коэффициентов. Последний факт доказывает, что природа бесконечно разностных систем совсем иная, чем у сингулярных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: коэрцитивные решения, бесконечная разница систем, оценка решения, непрерывный возврат оператора, замкнутый оператор, линейная цепь.

K.N.Ospanov, T.N.Bekjan, D.R.Beisenova

Coercive solvability conditions of an infinite system of difference equations with complex coefficients

These estimates completely describe definition range of the matrix operator which corresponds to system. Coefficients of system make the unlimited sequences. And the received results do not depend on fluctuation of these coefficients. The last fact shows that the nature of infinitely difference systems absolutely other than singular differential equations.

Keywords: coercive solution, infinite difference system, solution estimation, continuous return operator, closed operator, linear phinite.

References

1 Otelbaev, M. (1983). Koertsitivnye otsenki i teoremy razdelimosti dlia ellipticheskikh uravnenii v R^n [Coercive estimates and separability theorems for elliptic equations in R^n]. *Trudy MI AN SSSR — Proceedings of the USSR Academy of Sciences MI*, 161, 195–217 [in Russian].

2 Kostyuchenko, A.G. (1966). O nekotorykh spektralnykh svoistvakh differentsialnykh operatorov [On some spectral properties of differential operators]. *Doctor's thesis.* Moscow: Izdatelstvo MHU [in Russian].

3 Ospanov, K.N., Zulhazhav, A. (2015). Ekinshi retti aiyrymdyk bir tendeuler zhuiesi sheshimderinin kasietteri zhaily [On the properties of solutions of one system of second order difference equations]. *Karahandy universitetinin khabarshysy. Matematika seriiasy – Bulletin of Karaganda University. Series Mathematics, 2,* 78, 124–136 [in Kazakh].

4 Pruss, J., Rhandi, A. & Schnaubelt, R. (2006). Houston J. Math., Vol. 32, 2, 563–576.

5 Kolmogoroff, A.N. (1931). Uber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mathematische Annalen, Vol. 104.

6 Bogachev, V.I., Krylov, N.V., Reckner, M. & Shaposhnikov, S.V. (2015). Fokker-Planck-Kolmogorov Equations. AMS, Vol. 207.

7 Kato, T. (1966). Perturbation theory for lenear operators. (Th. 1.1, Th. 1.16 §4). Berlin. Heidelberg; New York: Springer-Verlag.

8 Zulhazhav, A. (2015). Ekinshi retti aiyrymdyk tendeuler zhuiesinin koertsitivti sheshilu sharttary [Conditions of Coercitive Solutions of the Second Order Differential Equations System]. *L.N.Gumilev atyndahy Euraziia ulttyk universitet khabarshysy – Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University, 6,* 109, 334–337 [in Kazakh].

UDC 517.518

G.A. Yessenbayeva[1], D.N. Yesbayeva[2]

[1] *Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan;*
[2] *Shanghai Factory-Amigo EC Technology Co., Ltd, China*
(E-mail: esenbaevagulsima@mail.ru)

Characterizations for the family of functions classes $\left\{B^r_{p,q,N}\right\}$ and their connection with Besov's spaces

In this paper we define families of classes of functions related to best approximations in harmonic intervals. These families of function classes characterize the order of approximation of functions by trigonometric polynomials with a spectrum from harmonic intervals. The article contains an investigation of various characterizations of the indicated families of function classes, introduces imbedding theorems, and shows the connection between the introduced families of functions classes and the classical Besov spaces. The article is intended for researchers specializing in the theory of approximation and functional analysis, and all those whose interests lie in these areas.

Keywords: classes of functions, harmonic intervals, best approximation of a function, theorem of embedding.

Definition 1. Let $1 \le p,q \le \infty,\ r > 0,\ f \in L_p\,[0;2\pi)$. Family of function classes $\left\{B^r_{p,q,N}\right\}_N$ is defined by the following expression

$$B^r_{p,q,N} = \left\{f : \|f\|_{B^r_{p,q,N}} < \infty\right\}, N \in \mathrm{N},$$

where

$$\|f\|_{B^r_{p,q,N}} = \left(\sum_{k=1}^{N} k^{rq-1}\left(E^N_{k-1}\,(f)_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Definition 2. Let two families of function classes are $\left\{A^N\right\}_N$ and $\left\{B^N\right\}_N$, $\left\{A^N\right\}_N \bigcap \left\{B^N\right\}_N = \emptyset,\ \ N \in \mathrm{N}$. We assume that

$$\|f\|_{A^N} \sim \|f\|_{B^N},$$

if there exist the parameters $C_1,\ C_2$ such that for any $f \in A^N$ the following expression correct

$$C_1\,\|f\|_{B^N} \le \|f\|_{A^N} \le C_2\,\|f\|_{B^N},$$

moreover the parameters $C_1,\ C_2$ are independent of$f$ and N.

In this case we assume that the families of function classes $\left\{A^N\right\}_N$ and $\left\{B^N\right\}_N$ coincide.

$$\left\{A^N\right\}_N = \left\{B^N\right\}_N.$$

Different characterizations of families of function classes $\left\{B^r_{p,q,2^m}\right\}_N$ are shown in the theorems 1 and 2.

$E^N_k\,(f)_p$ is the best approximation of the function $f \in L_p[0;2\pi)$, $1 \le p \le \infty$, in the harmonic intervals I^N_k [1] by trigonometrical polynomials with order less than or equal to k [2].

Theorem 1. Let $f \in B^r_{p,q,2^m}$, $m \in \mathrm{N}$, then for $1 \le p,\ q \le \infty,\ \ r > 0$ we have the relation of the form

$$\|f\|_{B^r_{p,q,N}} \sim \left(\sum_{k=1}^{m} 2^{rqk}\left(E^{2m}_{2^k-1}\,(f)_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Proof. Using the definition

$$\|f\|_{B^r_{p,q,N}} = \left(\sum_{k=1}^{2m} k^{rq-1}\left(E^{2m}_{k-1}\,(f)_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=2^k-1}^{2^k-1} s^{rq-1} \left(E_{s-1}^{2m} (f)_p \right)^q + 2^{m\,(rq-1)} \left(E_{2^m-1}^{2^m} (f)_p \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (1)$$

We use one of the properties of best approximation in harmonic intervals

$$E_{2^k-1}^{2^m} \le E_{2^k-2}^{2^m} \le ... \le E_{2^{k-1}}^{2^m} \le E_{2^{k-1}-1}^{2^m}, 1 \le k \le m. \quad (2)$$

Besides we have the following estimation

$$\left(2^{k-1}\right)^{rq-1} \cdot 2^{k-1} \le \sum_{s=2^{k-1}}^{2^k-1} s^{rq-1} \le \left(2^k-1\right)^{rq-1} \cdot 2^{k-1};$$

$$2^{rqk-rq} \le \sum_{s=2^{k-1}}^{2^k-1} s^{rq-1} \le 2^{rqk}. \quad (3)$$

Considering (2), (3), we get from (1)

$$2^{rq(k-1)} \left(E_{2^k-1}^{2^m} (f)_p \right)^q \le \sum_{s=2^{k-1}}^{2^k-1} s^{rq-1} \left(E_{s-1}^{2^m} (f)_p \right)^q \le 2^{rqk} \left(E_{2^{k-1}-1}^{2^m} (f)_p \right)^q;$$

$$2^{-rq} \sum_{k=1}^{m} 2^{rqk} \left(E_{2^k-1}^{2^m} (f)_p \right)^q \le \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=2^{k-1}}^{2^k-1} s^{rq-1} \left(E_{s-1}^{2^m} (f)_p \right)^q +$$

$$+2^{m(rq-1)} \left(E_{2^m-1}^{2^m} (f)_p \right)^q \le \sum_{k=1}^{m} 2^{rqk} \left(E_{2^{k-1}}^{2^m} (f)_p \right)^q + 2^{rqm} \left(E_{2^{m-1}-1}^{2^m} (f)_p \right)^q;$$

$$2^{-r} \left(\sum_{k=1}^{m} 2^{rkq} \left(E_{2^k-1}^{2^m} (f)_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \le \|f\|_{B^r_{p,q.2^m}} \le$$

$$\le \left\{ \sum_{k=1}^{m} 2^{rqk} \left(E_{2^{k-1}-1}^{2^m} (f)_p \right)^q + 2^{rqm} \left(E_{2^{m-1}-1}^{2^m} (f)_p \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}};$$

$$2^{-r} \left(\sum_{k=1}^{m} 2^{rqk} \left(E_{2^k-1}^{2^m} (f)_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \le \|f\|_{B^r_{p,q,2^m}} \le$$

$$\le \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} 2^{rq(k+1)} \left(E_{2^k-1}^{2^m} (f)_p \right)^q + 2^{rqm} \left(E_{2^{m-1}-1}^{2^m} (f)_p \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(2^{1+rq} \sum_{k=0}^{m-1} 2^{rqk} \left(E_{2^k-1}^{2^m} (f)_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

As a result, we obtain the required inequality

$$2^{-r} \left(\sum_{k=1}^{m} 2^{rqk} \left(E_{2^k-1}^{2^m} (f)_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \le \|f\|_{B^r_{p,q,2^m}} \le 2^{\frac{1}{q}+r} \left(\sum_{k=0}^{m-1} 2^{rqk} \left(E_{2^k-1}^{2^m} (f)_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

The theorem is proved.

Theorem 2. Let $f \in B^r_{p,q,2^m}$, $m \in \mathrm{N}$, *then the following relation holds for* $1 \le p,\ q \le \infty$, $r > 0$

$$\|f\|_{B^r_{p,q,N}} \sim \left(\sum_{k=1}^{m} 2^{rqk} \left(\delta_k^{2m} (f)_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

where

$$\delta_k^{2m}(f)_p = \left\| \sum_{s\in Z} \sum_{\tau=2^k-1}^{2^k-1} a_\tau + s\cdot 2^m \cdot e^{i(\tau+s\cdot 2^m)x} \right\|_p .$$

Proof. According to the boundedness of the partial sum over the harmonic interval [1] and Theorem 1, we have

$$\delta_k^{2m}(f)_p \le C \left\| \sum_{s\in Z} \sum_{\tau=2^k-1}^{2^m-1} a_\tau + s\cdot 2^m \cdot e^{i(\tau+s\cdot 2^m)x} \right\|_p \sim E_{2^k-1}^{2^m}(f)_p ,$$

therefore, using Theorem 1, we obtain

$$\left(\sum_{k=1}^{m} 2^{rqk} \left(\delta_k^{2m}\ (f)_p\right)\ q\right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\sum_{k=1}^{m} 2^{rqk} \left(E_{2^k-1}^{2^m}(f)_p\right)\ q\right)^{\frac{1}{q}} \sim C\left\|f\right\|_{B^r_{p,q,2^m}} .$$

Let us prove the reverse inequality. As

$$E_{2^k-1}^{2^m}(f)_p \le \sum_{\tau=k}^{m} \delta_\tau^{2^m}(f)_p ,$$

then by Theorem 1, the Holder inequality for numerical sequences the following inequality holds

$$\|f\|_{B^r_{p.q.2^m}} \le C \left(\sum_{k=1}^{m} 2^{rqk}\cdot \left(E_{2^k-1}^{2^m}(f)_p\right)\ q\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C\left(\sum_{k=1}^{m} 2^{rqk}\cdot \left(\sum_{\tau=k}^{m}\delta_\tau^{2^m}(f)_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = C\left\{\sum_{k=1}^{m} 2^{rqk}\left(\sum_{\tau=k}^{m} 2^{\lambda\tau}2^{-\lambda\tau}\delta_\tau^{2^m}(f)_p\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C\left\{\sum_{k=1}^{m} 2^{rqk}\left[\left(\sum_{\tau=k}^{m} 2^{-\lambda\tau q/}\right)^{\frac{1}{q/}}\cdot\left(\sum_{\tau=k}^{m}\left(2^{\lambda\tau}\delta_\tau^{2^m}(f)_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]^q\right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= C\left\{\sum_{k=1}^{m} 2^{rqk}\left(\sum_{\tau=k}^{m} 2^{-\lambda\tau q/}\right)^{\frac{q}{q/}}\cdot\sum_{\tau=k}^{m}\left(2^{\lambda\tau}\delta_\tau^{2^m}(f)_p\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}} \le C\left\{\sum_{k=1}^{m} 2^{rqk}2^{-\lambda qk}\cdot\sum_{\lambda=k}^{m}\left(2^{\lambda\tau}\delta_\tau^{2^m}(f)_p\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$= C\left\{\sum_{\lambda=1}^{m} 2^{\lambda q\tau}\left(\delta_\tau^{2^m}(f)_p\right)^q\sum_{k=1}^{m}2^{(r-\lambda)qk}\right\}^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C\left\{\sum_{\tau=1}^{m} 2^{\lambda q\tau}\left(\delta_\tau^{2^m}(f)_p\right)^q\cdot 2^{(r-\lambda)q\tau}\right\}^{\frac{1}{q}} = C\left\{\sum_{\tau=1}^{m} 2^{rq\tau}\left(\delta_\tau^{2^m}(f)_p\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}} ,$$

$$\Rightarrow \|f\|_{B^r_{p.q.2^m}}\ \left(\sum_{k=1}^{m} 2^{rqk}\left(\delta_k^{2^m}(f)_p\right)q\right)^{\frac{1}{q}} .$$

So the theorem is proved.
Note that in the Theorems 1 and 2 consecutive constants are independent of f and m.

Definition 3. Let two function classes A^N and B^N dependent on the parameter N are given. We say that a class of functions A^N is embedded in a class of functions B^N and denote $A^N\ B^N$, if the following conditions hold:

1) $A^N \subset B^N$;

2) there exists the parameter C such for any $f \in A^N$ the relation holds

$$\|f\|_{B^N} \le C\|f\|_{A^N}$$

and the parameter C is independent of$f$ and N.

Theorem 3. Let $N \in \mathrm{N}$, $1 \le p, q, q_1 \le \infty$, $r > 0$, *then the following embedding holds for* $q < q_1$

$$B^r_{p,q,N} \longrightarrow B^r_{p,q_1,N}.$$

Proof. Applying Theorem 2, we obtain

$$\|f\|^q_{B^r_{p,q_1,N}} \le C \left(\sum_{k=1}^{[\log_2 N]} 2^{rq_1 k} \cdot \left(\delta_k (f)_p \right)^{q_1} \right)^{\frac{q}{q_1}},$$

where the parameter C is independent of f and N.

Since $\frac{q}{q_1} < 1$ and $2^{rq_1 k} \cdot \left(\delta_k (f)_p \right)^{q_1} \ge 0$, then, taking into account [3], that

$$\left(\sum_{k=m}^{n} a_k \right)^{\delta} \le \sum_{k=m}^{n} a_k^{\delta}$$

for $0 \le \delta \le 1$, $a_k \ge 0$, $0 \le m \le k \le n \le \infty$, we get

$$\|f\|^q_{B^r_{p,q_1,N}} \le C \sum_{k=1}^{[\log_2 N]} 2^{rqk} \cdot \left(\delta_k (f)_p \right)^q \le C \|f\|^q_{B^r_{p,q,N}}.$$

Thus, the theorem is proved.

Theorem 4. Let $N \in \mathrm{N}$, $1 \le p, q, q_1 \le \infty$, $r > 0$, *then for any* $\varepsilon > 0$ *the following embedding holds*

$$B^r_{p,q,N} \longrightarrow B^{r-\varepsilon}_{p,q_1,N}.$$

Proof. It suffices to show that

$$B^r_{p,\infty,N} \longrightarrow B^{r-\varepsilon}_{p,q_1,N}.$$

Let $f \in B^r_{p,\infty,N}$. Using Theorem 1, we obtain

$$\|f\|_{B^{r-\varepsilon}_{p,q_1 N}} = \left(\sum_{k=1}^{[\log_2 N]} 2^{(r-\varepsilon) q_1 k} \left(E^N_{2^k-1} (f)_p \right)^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \le$$

$$\le \sup_{1 \le k \le [\log_2 N]} 2^{rk} \cdot E^N_{2^k-1} (f)_p \cdot \left(\sum_{k=1}^{[\log_2 N]} 2^{-\varepsilon q_1 k} \right)^{\frac{1}{q_1}} \le \|f\|_{B^r_{p,\infty,N}} \cdot C (q, \varepsilon).$$

$$\Rightarrow B^r_{p,\infty,N} \longrightarrow B^{r-\varepsilon}_{p,q_1,N}.$$

On the other hand,

$$B^r_{p,q,N} \to B^r_{p,\infty,N}$$

for any q such that $1 \le q \le \infty$. The theorem is proved.

Definition 4. Let $r > 0$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. Suppose that $B^r_{p,\theta} [0; 2\,\pi) = B^r_{p,\theta} \left(B^r_{p,\infty} = H^r_p \right)$. We say that a function $f \in L_p [0; 2\,\pi)$ belongs to the Besov space $B^r_{p,\theta}$,if the norm is finite

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \|f\|_p + \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{s\theta r} \cdot E_{2^s} (f)^{\theta}_p \right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Here the expression $\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{s\theta r} \cdot E_{2^s} (f)^{\theta}_p \right)^{\frac{1}{\theta}}$ for $\theta = \infty$ is understood as $\sup\limits_{s>0} 2^{sr} \cdot E_{2^s} (f)_p$ [4].

The following statement shows the relationship of families of functions classes $\left\{ B^r_{p,q,N} \right\}_N$ and classical Besov spaces.

Theorem 5. Let $N \in \mathrm{N}$, $1 \le p, q, \le \infty$, $r > 0$, *then we have the following relation*

$$\bigcap_{N-1}^{\infty} B^r_{p,q,N} = B^r_{p,q}.$$

Proof. By definition, we have

$$\|f\|_{\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} B^r_{p,q,N}} = \sup_{1 \le N \le \infty} \|f\|_{B^r_{p,q,N}}.$$

Since the following inequality

$$\|f\|_{B_{p,q,N}} \le C \cdot \|f\|_{B^r_{p,q}}$$

holds for any $N \in \mathrm{N}$, then relation

$$\sup_{1 \le N \le \infty} \|f\|_{B^r_{p,q,N}} = \|f\|_{\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} B^r_{p,q,N}} \le \|f\|_{B^r_{p,q}},$$

holds. From which it immediately follows that

$$B^r_{p,q} \longrightarrow \bigcap_{N=1}^{\infty} B^r_{p,q,N}.$$

On the other hand, for a partial sum $S_{2^m}(f)$, where $m \in \mathrm{N}$, we have

$$\|S_{2^m}(f)\|_{B^r_{p,q}} = \|S_{2^m}(f)\|_{B^r_{p,q,2^m}} \le C(p,q,r) \cdot \|f\|_{B^r_{p,q,2^m}} \le$$

$$\le C(p,q,r) \sup_{1 \le N \le \infty} \|f\|_{B^r_{p,q,N}} = C(p,q,r) \cdot \|f\|_{\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} B^r_{p,q,N}}.$$

From the last relation by the Banach-Steinhaus theorem [4] we obtain the required inequality

$$\|f\|_{B^r_{p,q}} \le C(p,q,r) \cdot \|f\|_{\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} B^r_{p,q,N}},$$

i.e.

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} B^r_{p,q,N} \longrightarrow B^r_{p,q}.$$

As a result, the theorem is proved.

References

1 Нурсултанов Е.Д. Сетевые пространства и их приложения к задачам гармонического анализа: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.01 / Ерлан Даутбекович Нурсултанов. — СПб., 1999. — С. 171–179.

2 Есенбаева Г.А. О свойствах наилучших приближений функций тригонометрическими полиномами со спектром из гармонических интервалов / Г.А. Есенбаева // Вестн. Караганд. ун-та. Серия Математика. — 2005. – № 1(37). — С. 44–49.

3 Кокилашвили В.М. О приближении периодических функций / В.М. Кокилашвили // Тр. Тбилисского матем. ин-та. — 1968. — С. 51–81.

4 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. — М.: Наука, 1977. — 456 с.

Г.А. Есенбаева, Д.Н. Есбаева

$\left\{B^r_{p,q,N}\right\}$ функция кластары үйірінің сипаттамасы және олардың Бесов кеңістіктерімен байланысы

Мақалада гармоникалық интервалдар бойынша ең жақсы жуықтаулармен байланысты функция кластарының үйірі анықталған. Функция кластарының үйірі деректері функцияның гармоникалық интервалдарда спектрі бар тригонометриялық көпмүшеліктермен жуықтау ретін сипаттайды. Авторлармен көрсетілген функция кластары үйірінің түрлі сипаттамаларының зерттемелері баяндалған, енгізу теориясы берілген және енгізілген функция кластарының үйірі мен классикалық Бесов кеңістіктері арасындағы байланыс көрсетілген.

Кілт сөздер: функция кластары, гармоникалық интервалдар, функцияның ең жақсы жуықталуы, енгізу теоремасы.

Г.А. Есенбаева, Д.Н. Есбаева

Характеризации семейства классов функций $\left\{B^r_{p,q,N}\right\}$ и их связь с пространствами Бесова

В статье определены семейства классов функций, связанные с наилучшими приближениями по гармоническим интервалам. Данные семейства классов функций характеризуют порядки приближения функций тригонометрическими полиномами со спектром из гармонических интервалов. В статье изложено исследование различных характеризаций указанных семейств классов функций, даны теоремы вложения и показана связь введенных семейств классов функций и классических пространств Бесова.

Ключевые слова: классы функций, гармонические интервалы, наилучшее приближение функции, теорема вложения.

References

1 Nursultanov, E.D. (1999). Setevye prostranstva i ikh prilozheniia k zadacham harmonicheskoho analiza [Net spaces and their applications to the problems of harmonic analysis]. *Doctor's thesis.* Saint Petersburg [in Russian].

2 Yessenbayeva, G.A. (2005). O svoistvakh nailuchshikh priblizhenii funktii trihonometricheskimi polinomami so spektrom iz harmonicheskikh intervalov [On the properties of best approximation of functions by trigonometric polynomials with a spectrum of harmonic intervals]. *Vestnik Karahandinskoho universiteta. Seriya Matematika – Bulletin of Karaganda University. Mathematics series, 1(37),* 44–49 [in Russian].

3 Kokilashvili, V.M. (1986). O priblizhenii periodicheskikh funktsii [On the approximation of periodic functions]. *Trudy Tbilisskoho matematicheskoho instituta – Proceedings of the Tbilisi Mathematical Institute,* 51–81 [in Russian].

4 Nikolsky, S.M. (1977). *Priblizhenie funktsii mnohikh peremennykh i teoremy vlozheniia [Approximation of functions of several variables and embedding theorems].* Moscow: Nauka [in Russian].

UDC 519.852 (420)

K. Zhetpisov, N.G. Karbenova

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
(E-mail: jetpisov_k54@mail.ru)

Analytical and graphical methods for the solution of one problem of transport logistics

This article shows the way to solve a specific problem of transport logistics using the potential method. The first support plan is constructed by the method of the north-western corner. The article also shows a graphical method for solving the problem. The article shows the optimal method for solving the problem of transport logistics using the example of the real economy of the Kostanay region (Arkalyk).

Keywords: Logistics, transport task, potencial, northwest corner, count, bipartite count, value, volume.

Logistics transportation — a system for organizing the movement of goods, with the choice of the optimal route, reducing the time and costs money.

Cargo transportation takes over the entire range of organizational issues in the field of transport logistics related to the transportation and safety products [1].

Logistics — the science of the movement of goods, controlled by a material flow and information [2].

Transport logistics — all steps from planning to organization and control of cargo transportation from getting to the final place of delivery of the item and from the source to consumer [3].

transport logistics tasks consist of:

– choosing the type and mode of transport;
– planning of transport processes;
– ensuring the unity of the whole process;
– preparation of optimal transportation routes.

To determine the total cost of transportation (S), it is necessary to know:

1) Fuel consumption for 1 liter;
2) The salary of the driver;
3) Amortization.

In this paper, we solve the problem of logistics below these farms, Kostanay region, Arkalyk city. Name of farms, the volume of the harvest and transportation, and storage in the following table (Table 1, 2). It also indicated the distance between farms and granaries (Table 3). Fuel consumption depends on the distance and type (load) technology.

Table 1

Volumes of goods at the points of departure

Title grain farms	Square crop (sown) (ha)	Collected wheat (T)	Productivity per hectare (c)	Number of flights
Aiman A_1	800	400	5	17
Sharipa A_2	500	250	5	11
Lina A_3	100	50	5	2
Kakim A_4	208	100	5	4

Table 2

Capacity elevators (silos)

Elevators	Capacity (t)
I B_1	250
II B_2	250
III B_3	300

Table 3

Distance from the point of departure to a point on the matter

Distance (km) (there and back)	Fuel consumption (L)	The point of departure A_i and destination B_j	The cost of fuel for 1 flight (y_x 115) tg	Total transportation costs for 1 flight 1)+2)+3)
56	22,4	$A_3\ B_1$	2587	$7191 \approx 72$
60	24	A_1B_1 and A_4B_3	2760	$7374 \approx 74$
62	24,8	A_4B_1 and A_3B_3	2842	$7456 \approx 75$
66	26,4	A_1B_2 and A_3B_2	3036	$7650 \approx 77$
68	27,2	A_2B_2	3128	$7742 \approx 77$
70	28	A_1B_3 and A_2B_3	3225	$7839 \approx 78$
72	28,8	A_2B_1	3312	$7926 \approx 79$
74	29,4	A_4B_2	3404	$8018 \approx 80$

$$(A) = \begin{cases} |A_1B_1| = 30\ km, \\ |A_1B_2| = 33\ km, \\ |A_1B_3| = 35\ km. \end{cases} \qquad (S) = \begin{cases} |A_2B_1| = 36\ km, \\ |A_2B_2| = 34\ km, \\ |A_2B_3| = 35\ km. \end{cases}$$

$$(L) = \begin{cases} |A_3B_1| = 28\ km, \\ |A_3B_2| = 33\ km, \\ |A_3B_3| = 32\ km. \end{cases} \qquad (K) = \begin{cases} |A_4B_1| = 28\ km, \\ |A_4B_2| = 37\ km, \\ |A_4B_3| = 30\ km. \end{cases}$$

Transportation cost:

$$C = \begin{pmatrix} 74 & 77 & 78 \\ 79 & 77 & 78 \\ 72 & 77 & 75 \\ 75 & 80 & 74 \end{pmatrix}.$$

Volume of cargo at points of departure.

For transportation of used Kamaz trailer with a load capacity of 12 + 12 = 24 m.

This kind of transport for 1 km consumes 0.4 liters of fuel.

The cost (price) of fuel (kerosene) per 1 liter 115 tenge.

Depreciation and driver's salary for one flight (round trip) is 4614 tenge.

There is fuel consumption table depending on the distance from the A_i to B_j to and from B_j to A_i (back and forth) and determination the cost of transportation for one flight (Table 4).

Table 4

The first reference transportation plan by building a north-west corner

Suppliers	Consumers (granary)			Stock
	$I_{(\beta_1)}\beta_1$		$III_{(\beta_3)}\beta_3$	
Aiman A_1 α_1	10,5 p. 74 250	6,5 p. 77 150	78	400
Sharipa A_2 α_2	79	4 p. 77 100	6,5 p. 78 150	250
Lina A_3 α_3	72	77	2 p. 78 50	50
Kakim A_4 α_4	75	80	4 p. 74 100	100
Needs	250	250	300	800

Total cost of transportation:

$$\sum_{i=1,j=1}^{4.3} c_{ij}.$$

$x_{ij} = 10,5\cdot 74+6,5\cdot 77+4\cdot 77+6,5\cdot 78+2\cdot 78+4\cdot 74 = 777+500,5+308+507+156+296 = 2544,5(254450\ tg).$

We verify the plan for optimality. To determine the true value of potential we have to decide the following uncertain system.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 74; \\ \alpha_1 + \beta_2 = 77; \\ \alpha_2 + \beta_2 = 77; \\ \alpha_2 + \beta_3 = 78; \\ \alpha_3 + \beta_3 = 78; \\ \alpha_4 + \beta_3 = 74. \end{cases}$$

$$\alpha_1 = 0; \quad \beta_1 = 74;$$

$$\alpha_2 = 0; \quad \beta_2 = 77;$$

$$\alpha_3 = 0; \quad \beta_3 = 78;$$

$$\alpha_4 = -4.$$

Defining the potential indirect value.

$$c'_{13} = \alpha_1 + \beta_3 = 78 = 78 = c_{13} \quad +$$

$$c'_{21} = \alpha_2 + \beta_1 = 74 < 79 = c_{21} \quad +$$

$$c'_{31} = \alpha_3 + \beta_1 = 74 > 72 = c_{31} \quad -$$

$$c'_{32} = \alpha_3 + \beta_2 = 77 = 77 = c_{32} \quad +$$

$$c'_{41} = \alpha_4 + \beta_1 = -4 + 77 = 70 < 75 = c_{41} \quad +$$

$$c'_{42} = \alpha_4 + \beta_3 = -4 + 77 = 73 < 80 = c_{42} \quad +$$

This plan is not optimal, because the cell (A_3B_1) indirect value potential c'_{31} greater than the true value c_{31}. $(c'_{31} > c_{31})$

Building optimal plan transport method of potentials [1].

Building the cycle.

$x_{31}x_{33}x_{23}x_{22}x_{12}x_{11}x_{31}$

$+ - + - + - +$

Defining element:

$x = min\{x_{33}, x_{22}, x_{11}\} = min\{50, 100, 250\} = 50.$

Then,

$x'_{31} = x_{31} + x = 0 + 50 = 50.$

$x'_{33} = x_{33} - x = 50 - 50 = 0.$

$x'_{23} = x_{23} + x = 150 + 50 = 200.$

$x'_{22} = x_{22} - x = 100 - 50 = 50.$

$x'_{12} = x_{12} + x = 150 + 50 = 200.$

$x'_{11} = x_{11} - x = 250 - 50 = 200.$

The new transportation plan Table 5 is as follows:

Table 5

Transportation plan

Suppliers	Consumers (granary)			Stock
	I β_1	*II* β_2	*III* β_3	
Aiman A_1 α_1	8 p. 74 200	8,5 p. 77 200	78	400
Sharipa A_2 α_2	79	2 p. 77 50	2,5 p. 78 200	250
Lina A_3 α_3	2 p. 72	77	78	50
Kakim A_4 α_4	75	80	4 p. 74 100	100
Needs	250	250	300	800

Verify the plan for optimality.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 74; \\ \alpha_1 + \beta_2 = 77; \\ \alpha_2 + \beta_2 = 77; \\ \alpha_2 + \beta_3 = 78; \\ \alpha_3 + \beta_3 = 78; \\ \alpha_4 + \beta_3 = 74. \end{cases}$$

$$\alpha_1 = 0; \quad \beta_1 = 74;$$

$$\alpha_2 = 0; \quad \beta_2 = 77;$$

$$\alpha_3 = 0; \quad \beta_3 = 78;$$

$$\alpha_4 = -4.$$

We verify the plan for optimality and define the potential indirect value.

$$c_{13}^{'} = \alpha_1 + \beta_3 = 78 = 78 = c_{13} \quad +$$

$$c_{21}^{'} = \alpha_2 + \beta_1 = 74 < 79 = c_{21} \quad +$$

$$c_{31}^{'} = \alpha_3 + \beta_1 = 74 > 72 = c_{31} \quad -$$

$$c_{32}^{'} = \alpha_3 + \beta_2 = 77 = 77 = c_{32} \quad +$$

$$c_{41}^{'} = \alpha_4 + \beta_1 = -4 + 77 = 70 < 75 = c_{41} \quad +$$

$$c_{42}^{'} = \alpha_4 + \beta_3 = -4 + 77 = 73 < 80 = c_{42} \quad +$$

In all unoccupied cells indirect value potential greater than the true value, $c_{ij}^{'} \leq c_{ij}$.
Total cost of transportation.

$$S = 8 \cdot 74 + 8,5 \cdot 77 + 2 \cdot 77 + 2,5 \cdot 78 + 2 \cdot 72 + 4 \cdot 74 = 592 + 654,5 + 154 + 195 + 144 + 296 = 2035,5(203550\ tg).$$

Potential method improved the original plan, and the total cost of transportation decreased by 254450-203550 = 50900 tg. Comment.

The volume of cargo at points of departure are A_i and capacity of elevators, we used to build Tables (1 and 2) distribution transportation. To determine the total cost of transportation have used the number of flights from A_i in B_j and transportation cost.

$$S = \sum_{i=1,j=1}^{3,4} c_{ij} \cdot k_{ij},$$

where k_{ij} — the number of flights from A_i в B_j (roundtrip); c_{ij} — cost per flight (roundtrip) Graphic illustration of this problem can be given with the help of graphs. Then the method of «bypassing Count» can be used to solve this problem. (Tarry algorithm). (Fig. 1-3).

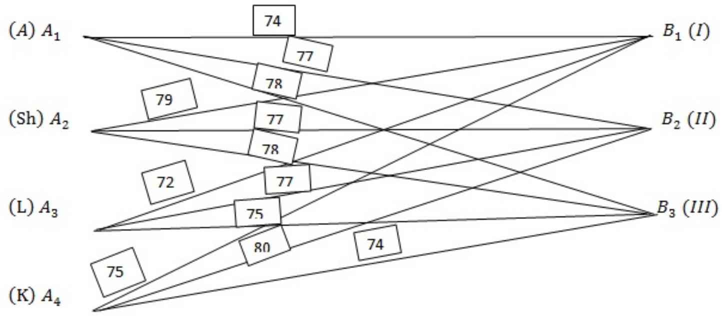

Figure 1. Count the total distribution of transportation, where A_1, A_2, A_3, A_4 - the points of departure (grain farms), B_1, B_2, B_3- Destinations (granary)

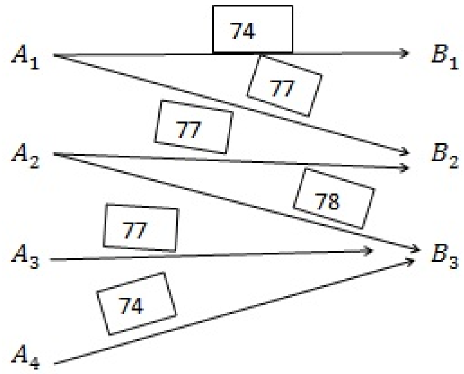

Figure 2. The graph corresponding to the first reference plane

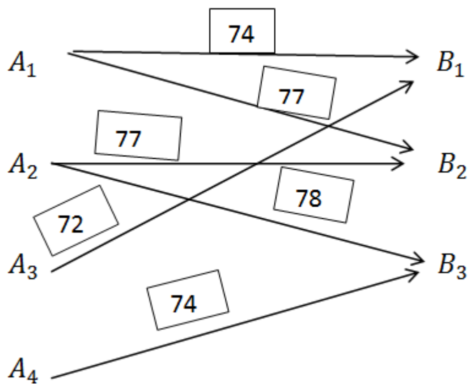

Figure 3. The graph corresponding to the second (optimal) distribution plan

These graphs are determined by the composition of graphs K_4 and K_3.

$$K_4 \cdot K_3 = G.$$

As a result, we obtain a bipartite graph with weights.
The vertices K_4 - A_1, A_2, A_3, A_4 — manufacturers.
The vertices — manufacturers.
The vertices K_3 - B_1, B_2, B_3 — consumers.
The vertices — consumers.
Count $G = K_4 \cdot K_3$ is also a weighted graph, where the weights are the elements of S.
Each arc $A_i B_j$ directed graph G corresponds to the weight $c_i j \in C_0$

References

1 Song Qiang, Gao Xuexia, Santos Emmanuel T. International Journal Of Bifurcation And Chaos. — 2015. — Vol. 25, No. 14. — P. 1540031.

2 Щербаков В.В. Основы логистики (теория и практика) / В.В. Щербаков, И.Л.Киппер, Л.А.Мясникова. — СПб.: Питер Пресс, 2009. — 426 с.

3 Просветов Г.И. Математические методы в логистике: задачи и решения: учеб.-практ. пособие / Г.И.Просветов. — М.: Альфа-Пресс, 2008. — 302 с.

4 Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л.Акулич. — М.: Высш. шк., 1986. — 317 с.

Қ. Жетпісов, Н.Г. Карбенова

Транспорттық логистиканың бір проблемасын шешудің аналитикалық және графиктік әдістері

Мақалада нақты транспорттық логистика есебін потенциалдар әдісімен шешудің жолы көрсетілген. Алғашқы тірек жоспары солтүстік-батыс бұрышы әдісімен құрылған. Сонымен қатар есептік графиктердің көмегімен шешу әдісі де берілген. Авторлармен Қостанай облысы (Арқалық қ.) шаруа қожалығы мысалында көліктік логистика есебінің оңтайлы шешімі көрсетілген.

Кілт сөздер: логистика, көліктік тапсырма, потенциал, солтүстік-батыс бұрышы, санау, екі жақты санау, құндылық, көлем.

К. Жетписов, Н.Г. Карбенова

Аналитический и графический методы решения одной проблемы транспортной логистики

В статье показан способ решения конкретной задачи транспортной логистики методом потенциалов. Первый опорный план построен методом северо-западного угла. Кроме того, показан графический способ решения задачи. Авторами дан оптимальный метод решения задачи транспортной логистики на примере реального хозяйства Костанайской области (г. Аркалык).

Ключевые слова: логистика, транспортная задача, потенциальный, северо-западный угол, подсчет, двухсторонний счет, стоимость, объем.

References

1 Song Qiang, Gao, Xuexia & Santos, Emmanuel T. (2015). International Journal Of Bifurcation And Chaos. Vol. 25, 14.

2 Sherbakov, V.V., Kipper, I.L. & Miasnikova, L.A. (2009). *Osnovy lohistiki (teoriia i praktika) [Fundamentals of Logistics (theory and practice)].* Saint Petersburg: Piter Press [in Russian].

3 Prosovetov, G.I. (2008). *Matematicheskie metody v lohistike: zadachi i resheniia: uchebno-prakticheskoe posobie [Mathematical Methods in Logistics: Challenges and Solutions teaching practical manual].* Moscow: Alfa–Press [in Russian].

4 Akulich, I.L. (1986). *Matematicheskoe prohrammirovanie v primerakh i zadachakh [Mathematical programming examples and problems].* Moscow: Vysshaia shkola [in Russian].

УДК 512.554.31

Ш.Ш. Ибраев

Университет «Болашак», Кызылорда, Казахстан;
Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан
(E-mail: ibrayevsh@mail.ru)

О когомологии алгебры Джекобсона-Витта

Изучение когомологии классических модулярных алгебр Ли с помощью методов теории представлений соответствующих алгебраических групп позволяет получить много интересных результатов. В последнее время такую тенденцию можно наблюдать в исследованиях когомологии простых алгебр Ли картановских типов, в которых результаты приводят к изучению когомологии алгебр Ли некоторых редуктивных алгебраических групп. В работе дано полное описание когомологии алгебры Джекобсона–Витта $W_3(1)$ над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 3$ с коэффициентами в алгебре разделенных степеней $O_3(1)$ с помощью вычисления когомологии классической алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3(k)$.

Ключевые слова: алгебра Джекобсона–Витта, алгебра Ли, алгебра Ли картановского типа, когомология, условия коцикличности.

1 Введение

1.1 Обобщенная алгебра Джекобсона-Витта. Пусть k – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$.

Пусть $\varepsilon_i = (\delta_{i1}, \cdots, \delta_{in})$, где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера, $m_1, \cdots, m_n$ – целые положительные числа. Алгебра разделенных степеней $O_n(\mathbf{m})$ высоты $\mathbf{m} = \sum_{i=1}^n m_i\varepsilon_i$ определяется так:

$$O_n(\mathbf{m}) = \langle x^{(\alpha)} := \prod_{i=1}^n x^{(\alpha_i)} \, : \, \alpha \in \Gamma_n(\mathbf{m}), \, x^{(\alpha)}x^{(\beta)} = \prod_{i=1}^n C_{\alpha_i}^{\alpha_i+\beta_i} x^{(\alpha+\beta)} \rangle_k;$$

$$\Gamma_n(\mathbf{m}) = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i\varepsilon_i \, : \, \alpha_i \in \mathbb{Z}_0, \, 0 \leq \alpha_i < p^{m_i}, \, i = 1, \cdots, n\},$$

где $\mathbb{Z}_0$ — множество неотрицательных целых чисел.

Для $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \Gamma_n(\mathbf{m})$ пусть $\mid \alpha \mid = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Определим дифференцирования D_i, $i = 1, \cdots, n$, алгебры $O_n(\mathbf{m})$ по формуле

$$D_i x^{(\alpha)} = x^{(\alpha-\varepsilon_i)}.$$

Тогда пространство

$$W = W_n(\mathbf{m}) = \{\sum_{j=1}^n a_j D_j \, : \, a_j \in O_n(\mathbf{m}), \, i = 1, \cdots, n\}$$

с умножением

$$[\sum_{j=1}^n a_j D_j, \sum_{j=1}^n b_j D_j] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_j D_j(b_i) - b_j D_j(a_i)) D_i$$

является алгеброй Ли и называется общей алгеброй Ли картановского типа или обобщенной алгеброй Джекобсона–Витта. Она является алгеброй Ли специальных дифференцирований $O_n(\mathbf{m})$, и в $O_n(\mathbf{m})$ естественным образом можно ввести структуру $W_n(\mathbf{m})$-модуля с помощью формулы

$$(\sum_{j=1}^n a_j D_j) x^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^n a_j D_j(x^{(\alpha)}) = \sum_{j=1}^n a_j x^{(\alpha-\varepsilon_j)}, \, \sum_{j=1}^n a_j D_j \in W_n(\mathbf{m}), \, x^{(\alpha)} \in O_n(\mathbf{m}).$$

Полагая $W_i = \langle x^{(\alpha)} D_j \,:\mid \alpha \mid = i+1,\ j = 1, \cdots, n\rangle_k$, получаем естественную градуировку $W = \bigoplus_{i\geq -1} W_i$ глубины 1. Алгебра Ли W является простым, кроме случая, когда $n = 1$ и $p = 2$. Линейное отображение $x^{(\varepsilon_j)} D_i \mapsto E_{ij}$ определяет изоморфизм между подалгеброй Ли W_0 и общей линейной алгеброй Ли $\mathfrak{gl}_n(k)$, где $E_{i,j}$ – квадратная матрица n-го порядка с элементами $e_{l,q} = \delta_{il}\delta_{jq}$.

1.2 Формулировка основных результатов. Рассмотрим обобщенную алгебру Джекобсона–Витта $W_n(\mathbf{m})$. Если $\mathbf{m} = (1, \cdots, 1)$, то $W_n(\mathbf{m})$ – ограниченная алгебра Ли. Ее называют алгеброй Джекобсона–Витта и обозначают через $W_n(\mathbf{1})$. В данной работе исследуются когомологии $W_3(\mathbf{1})$ с коэффициентами в $O_3(\mathbf{1})$. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $L = W_3(\mathbf{1})$ – алгебра Джекобсона–Витта над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 3$ и $V = O_3(\mathbf{1})$ – L-модуль. Тогда $H^m(L, V) = 0$, за исключением следующих случаев:

$$H^0(L,V) \cong H^{12}(L,V) \cong k,\ H^1(L,V) \cong H^{11}(L,V) \cong k^4,\ H^2(L,V) \cong H^{10}(L,V) \cong k^6,$$

$$H^3(L,V) \cong H^4(L,V) \cong H^8(L,V) \cong H^9(L,V) \cong k^5,\ H^5(L,V) \cong H^7(L,V) \cong k^7,\ H^6(L,V) \cong k^8.$$

Согласно теореме 1,

$$\dim H^*(W_3(\mathbf{1}), O_3(\mathbf{1})) = \dim \sum_{m\geq 0} H^m(W_3(\mathbf{1}), O_3(\mathbf{1})) = 2\cdot 1 + 2\cdot 4 + 2\cdot 6 + 4\cdot 5 + 2\cdot 7 + 8 = 64.$$

Когомологии алгебр Ли картановских типов изучались в работах [1–5], где результаты получены с помощью вычисления когомологии алгебр Ли некоторых редуктивных алгебраических групп. Когомология $H^1(W_1(\mathbf{m}), O_1(\mathbf{m}))$ вычислена в [6], а когомология $H^2(W_2(\mathbf{m}), O_2(\mathbf{m}))$ – в работе [7].

2 Доказательство результатов

2.1. Когомологии $\mathfrak{gl}_n(k)$. В данном пункте доказывается, что вычисления когомологии $\mathfrak{gl}_n(k)$ с коэффициентами в тривиальном одномерном $\mathfrak{gl}_3(k)$-модуле k можно привести к вычислению когомологии классической алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n(k)$. Такой результат ранее был получен в [5, предложение 1.2]. Применение результата, полученного авторами этой работы, требует дополнительных вычислений. Мы даем более простую формулу.

Предложение 2. Пусть $\mathfrak{gl}_n(k)$ – общая линейная алгебра Ли степени n над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$. Тогда

$$H^m(\mathfrak{gl}_n(k), k) \cong H^m(\mathfrak{sl}_n(k), k) \oplus H^{m-1}(\mathfrak{sl}_n(k), k). \tag{1}$$

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{gl}_n(k) \cong \mathfrak{sl}_n(k) \oplus k$. Рассматривая k как идеал алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(k)$ и как $\mathfrak{gl}_n(k)$-модуль, мы можем использовать спектральную последовательность Серра-Хохшильда $\{E_r^{lq}\}$. В частности, для $H^m(\mathfrak{gl}_n(k), k)$ получаем

$$E_2^{lq} = H^l(\mathfrak{gl}_n(k)/k, H^q(k,k)) \cong H^l(\mathfrak{sl}_n(k), H^q(k,k)).$$

Очевидно, что $H^0(k,k) \cong H^1(k,k) \cong k$ и $H^q(k,k) = 0$, если $q \geq 2$. Поэтому $E_2^{lq} = 0$, если $q \geq 2$. Так как $l + q = m$, то $E_2^{m,0} \cong H^m(\mathfrak{sl}_n(k), k)$, $E_2^{m-1,1} \cong H^{m-1}(\mathfrak{sl}_n(k), k)$ и $E_2^{lq} = 0$ в других целочисленных точках первого квадранта. Следовательно,

$$H^m(\mathfrak{gl}_n(k), k) \cong E_2^{m,0} \oplus E_2^{m-1,1} \cong H^m(\mathfrak{sl}_n(k), k) \oplus H^{m-1}(\mathfrak{sl}_n(k), k).$$

Предложение 2 доказано.

Таким образом, вычисление когомологии $H^m(\mathfrak{gl}_n(k), k)$ приведено к вычислениям когомологии $H^m(\mathfrak{sl}_n(k), k)$ и $H^{m-1}(\mathfrak{sl}_n(k), k)$.

2.2. Когомологии $\mathfrak{sl}_3(k)$ и $\mathfrak{gl}_3(k)$. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{sl}_3(k)$ над полем k характеристики $p > 0$. Выберем в $\mathfrak{sl}_3(k)$ базис Шевалле $\{e_1, e_2, e_3, h_1, h_2, f_1, f_2, f_3\}$, где $e_i = e_{\alpha_i}, f_i = e_{-\alpha_i}, \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_2, i = 1, 2, 3$, и положим $h_3 = h_1 + h_2$. Тогда $[e_i, f_i] = h_i$, $[h_i, e_i] = 2e_i$, $[h_i, f_i] = -2f_i$ для $i = 1, 2, 3$. Нетривиальные умножения задаются следующими равенствами:

$$[e_1, e_2] = e_3;\ \ [e_3, f_1] = -e_2;\ \ [e_3, f_2] = e_1;\ \ [f_1, f_2] = -f_3;$$

$$[e_1, f_3] = -f_2;\ \ [e_2, f_3] = f_1.$$

Разложим пространства коцепей $C^*(\mathfrak{sl}_3(k), V)$, где V — $\mathfrak{sl}_3(k)$-модуль, на прямую сумму весовых подпространств относительно максимального тора T группы $G = SL_3(k)$:

$$C^*(\mathfrak{sl}_3(k), V) = \bigoplus_{\mu \in X(T)} C^*_\mu(\mathfrak{sl}_3(k), V).$$

Пусть $P(M)$ — множество весов пространства M относительно T. Тогда

$$H^m(\mathfrak{sl}_3(k), V) = \bigoplus_{\mu \in P(H^m(\mathfrak{sl}_3(k), V))} H^m_\mu(\mathfrak{sl}_3(k), V).$$

В сопряженном пространстве $\mathfrak{sl}_3(k)^*$ выберем сопряженный базис $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*, h_1^*, h_2^*, f_1^*, f_2^*, f_3^*\}$ и отождествим пространства $C^m(\mathfrak{sl}_3(k), V)$ с пространством $\bigwedge^n \mathfrak{g}^* \otimes V$.

Хорошо известно, что $P(H^m(\mathfrak{sl}_3(k), V)) \subseteq pX(T) \cap P(\bigwedge^m \mathfrak{sl}_3(k)^* \otimes V)$. Тогда мы можем работать только с элементами подпространства $\overline{C}^m(\mathfrak{sl}_3(k), V) \subset C^m(\mathfrak{sl}_3(k), V)$, вес которого принадлежит множеству $pX(T) \cap P(\bigwedge^m \mathfrak{sl}_3(k)^* \otimes V)$. Соответствующие подпространства коциклов и когомологии обозначаются через $\overline{Z}^m(\mathfrak{sl}_3(k), V)$ и $\overline{H}^m(\mathfrak{sl}_3(k), V)$. Очевидно, что $H^m(\mathfrak{sl}_3(k), V) = \overline{H}^m(\mathfrak{sl}_3(k), V)$. Следующие формулы хорошо известны:

$$\dim H^m(\mathfrak{sl}_3(k), V) = \dim \overline{Z}^m(\mathfrak{sl}_3(k), V) + dim\, \overline{Z}^{m-1}(\mathfrak{sl}_3(k), V) - \dim \overline{C}^{m-1}(\mathfrak{sl}_3(k), V); \tag{2}$$

$$\dim H^m(\mathfrak{sl}_3(k), V) = \dim H^{dim\, \mathfrak{sl}_3(k) - m}(\mathfrak{sl}_3(k), V^*). \tag{3}$$

Весовые подпространства инвариантны относительно действия кограничного оператора, поэтому формула выполняется и для весовых подпространств:

$$\dim H^m_\mu(\mathfrak{sl}_3(k); V) = \dim Z^m_\mu(\mathfrak{sl}_3(k), V) + \dim Z^{m-1}_\mu(\mathfrak{sl}_3(k), V) - \dim C^{m-1}_\mu(\mathfrak{sl}_3(k), V). \tag{4}$$

Предложение 3. Имеют место следующие утверждения:
(a) если $p > 3$, *то* $H^m(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 0$, *кроме следующих случаев:*

$$H^0(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong H^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong H^5(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong H^8(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong k;$$

(b) если $p = 3$, *то* $H^m(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 0$, *кроме следующих случаев:*

$$H^0(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong H^2(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong H^6(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong H^8(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong k,\ H^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong H^5(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong k^7;$$

(c) если $p = 2$, *то* $H^m(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 0$, *кроме следующих случаев:*

$$H^0(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong H^8(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong k,\ H^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong H^5(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong k^9.$$

Доказательство. (a) Изоморфизм $H^0(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong k$ очевиден. А также хорошо известно, что $H^1(\mathfrak{sl}_3(k), k) = H^2(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 0$ [8, 9].

Теперь докажем, что $H^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong k$. Подпространство $\overline{C}^3(\mathfrak{sl}_3(k), k)$ восьмимерно и порождается векторами

$$h_1^* \wedge e_1^* \wedge f_1^*,\ h_2^* \wedge e_1^* \wedge f_1^*,\ h_1^* \wedge e_2^* \wedge f_2^*,\ h_2^* \wedge e_2^* \wedge f_2^*;$$

$$h_1^* \wedge e_3^* \wedge f_3^*,\ h_2^* \wedge e_3^* \wedge f_3^*,\ e_3^* \wedge f_1^* \wedge f_2^*,\ e_1^* \wedge e_2^* \wedge f_3^*.$$

Предположим, что линейная комбинация этих векторов с коэффициентами b_i, $i = 1, \cdots, 8$, является 3-коциклом. Тогда из условия коцикличности следует, что

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_5 + b_7 - b_8 = 0; \\ b_2 + b_3 - b_7 + b_8 = 0; \\ b_3 + b_4 + b_6 + b_7 - b_8 = 0; \\ 2b_4 + 2b_7 - 2b_8 = 0; \\ 2b_5 + 2b_6 + 2b_7 - 2b_8 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Пространство решений этой линейной системы относительно b_i, $i = 1, \cdots, 8$, 3-мерно. Следовательно,

$$\dim\, Z^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 3.$$

Подпространство $\overline{C}^2(\mathfrak{sl}_3(k), k)$ 4-мерно и порождается векторами $h_1^* \wedge h_2^*$, $e_1^* \wedge f_1^*$, $e_2^* \wedge f_2^*$, $e_3^* \wedge f_3^*$. Если $a_1 h_1^* \wedge h_2^* + a_2 e_1^* \wedge f_1^* + a_3 e_2^* \wedge f_2^* + a_4 e_3^* \wedge f_3^* \in \overline{Z}^2(\mathfrak{sl}_3(k), k)$, то, согласно условию коцикличности,

$$\begin{cases} a_1 = 0; \\ a_4 = a_2 + a_3. \end{cases} \tag{6}$$

Следовательно, $\dim\, \overline{Z}^2(\mathfrak{sl}_3(k), V) = 2$.

Таким образом, по формуле (2)

$$\dim\, H^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = \dim\, \overline{Z}^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) + \dim\, \overline{Z}^2(\mathfrak{sl}_3(k), k) - \dim\, \overline{C}^2(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

Выполнив аналогичное вычисление, легко показать, что $H^4(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 0$. Далее, используя формулу (3), получаем

$$\dim\, H^0(\mathfrak{sl}_3(k), k) = \dim\, H^5(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 1 \text{ и } \dim\, H^7(\mathfrak{sl}_3(k), k) = \dim\, H^6(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 0.$$

Наконец, заметим, что $H^m(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 0$, когда $m > 8 = \dim\, \mathfrak{sl}_3(k)$. Таким образом, доказано утверждение (a) предложения 3.

(b) Согласно предложению 6.2 работы [8] $H^1(\mathfrak{sl}(3,k), k) = 0$ и предложению 4.1 работы [9]

$$H^2(\mathfrak{sl}(3,k), k) \cong k.$$

Докажем, что $\dim\, H^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 7$. Выполнив соответствующие вычисления, получим

$$P(\overline{C}^3(\mathfrak{sl}_3(k), k)) = \{0,\ \pm 3\lambda_1,\ \pm 3(-\lambda_1 + \lambda_2),\ \pm 3\lambda_2\}.$$

Доминантными являются 0, $3\lambda_1$, $3\lambda_2$. Вычислим размерности соответствующих весовых подпространств 3-когомологии.

Над полем характеристики $p = 3$ размерности пространств решений систем (5) и (6) совпадают с соответствующими размерностями случая $p > 3$. Поэтому $\overline{H}_0^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 1$.

Весовые подпространства $\overline{C}^3_{3\lambda_1}(\mathfrak{sl}_3(k), k)$, $\overline{C}^3_{3\lambda_2}(\mathfrak{sl}_3(k), k)$ двумерны и порождаются соответственно с 3-коцепями: $h_1^* \wedge f_1^* \wedge f_3^*$, $h_2^* \wedge f_1^* \wedge f_3^*$, и $h_1^* \wedge f_2^* \wedge f_3^*$, $h_2^* \wedge f_2^* \wedge f_2^*$. Выполнив соответствующие вычисления, получим $\dim\, \overline{Z}^3_{3\lambda_1}(\mathfrak{sl}_3(k), k) = \dim\, \overline{Z}^3_{3\lambda_2}(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 1$.

Так как $\dim k = 1$, $\dim H^0(\lambda_1) = \dim H^0(\lambda_1) = 3$, то $\dim H^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 1 + 3 + 3 = 7$.

Наконец, рассуждая как в предыдущем случае, убедимся в справедливости остальных утверждений случая (b).

(c) Доказательство всех утверждений аналогично случаю (a), кроме изоморфизма $H^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) \cong k^9$. В этом случае $P(\overline{C}^3(\mathfrak{sl}_3(k), k)) = \{0,\ \pm 2(\lambda_1 + \lambda_2),\ \pm 2(2\lambda_1 - \lambda_2),\ \pm 2(-\lambda_1 + 2\lambda_2)\}$. Доминантным является 0, $2(\lambda_1 + \lambda_2)$. Вычислим размерности соответствующих весовых подпространств 3-когомологии.

Как и в предыдущем случае, над полем характеристики $p = 2$ размерность пространства решений системы (6) совпадает с соответствующими размерностями случая $p \geq 3$. В характеристике $p = 2$ пространство решений системы (5) равно 5. Поэтому согласно (2) $\dim\, \overline{H}_0^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 5 + 2 - 4 = 3$.

Все остальные весовые подпространства $\overline{C}^3_\mu(\mathfrak{sl}_3(k), k)$, $\mu \in P(\overline{C}^3(\mathfrak{sl}_3(k), k)) \backslash \{0\}$, одномерны, и соответствующие весовые подпространства $\overline{C}^2_\mu(\mathfrak{sl}_3(k), k)$ – нулевые подпространства в $C^2(\mathfrak{sl}_3(k), k)$. Кроме того, согласно условию коцикличности, любой ненулевой элемент каждого из этих весовых подпространств $\overline{C}^3_\mu(\mathfrak{sl}_3(k), V)$ является 3-коциклом. Следовательно, $\dim\, \overline{C}^3_\mu(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 1$, если $\mu \in P(\overline{C}^3(\mathfrak{sl}_3(k), k)) \setminus \{0\}$. Тогда $\dim H^3(\mathfrak{sl}_3(k), k) = 3 + 6 = 9$.

Доказательство предложения 3 завершено.

Теперь рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{gl}_3(k)$.

Предложение 4. Пусть $\mathfrak{gl}_3(k)$ *— общая линейная алгебра Ли степени* 3 *над алгебраически замкнутым полем* k *характеристики* $p > 3$. *Тогда* $H^m(\mathfrak{gl}_3(k), k) \cong k$, *если* $m \leq 9$ *и* $m \neq 2, 7$. *В остальных случаях когомологии* $H^m(\mathfrak{gl}_3(k), k)$ *тривиальны.*

Доказательство. Согласно предложению 2 вычисление когомологии $H^m(\mathfrak{gl}_3(k),k)$ приводится к вычислениям когомологии $H^m(\mathfrak{sl}_n(k),k)$ и $H^{m-1}(\mathfrak{sl}_n(k),k)$. Они вычислены в предложении 3. Согласно предложению 3, $H^m(\mathfrak{sl}_n(k),k)\cong k$, если $m=0,3,5,8$. В остальных случаях когомологии $H^m(\mathfrak{sl}_n(k),k)$ тривиальны. Тогда утверждение предложения 4 следует из (1).

2.2 Доказательство теоремы 1. Согласно теореме 0.2 работы [5], для любого $m\in\mathbb{Z}_0$, $H^m(W_3(\mathbf{1}), O_3(\mathbf{1}))\cong\bigoplus_{i=0}^m(\bigwedge^i(k^3)\bigotimes_k H^{m-i}(\mathfrak{gl}_3(k),k))$. Используя предложения 2 для когомологии алгебры Ли $\mathfrak{gl}_3(k)$, получим

$$H^m(W_3(\mathbf{1}),O_3(\mathbf{1}))\cong\bigoplus_{i=0}^m(\bigwedge^i(k^3)\bigotimes_k(H^{m-i}(\mathfrak{sl}_3(k),k)\bigoplus H^{m-i-1}(\mathfrak{sl}_3(k),k))).$$

Тогда утверждения теоремы 1 следуют из последней формулы и из утверждения (a) предложения 3. Доказательство теоремы 1 завершено.

Замечание. Согласно предложению 2, предыдущая формула верна и в общем случае

$$H^m(W_n(\mathbf{1}),O_n(\mathbf{1}))\cong\bigoplus_{i=0}^m(\bigwedge^i(k^3)\bigotimes_k(H^{m-i}(\mathfrak{sl}_n(k),k)\bigoplus H^{m-i-1}(\mathfrak{sl}_n(k),k))).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 0828/ГФ4 Министерства образования и науки Республики Казахстан по теме «Алгебры, близкие к Лиевым: когомологии, тождества и деформации».

Список литературы

1 Chiu S. Cohomology of graded Lie algebras of Cartan type of characteristic p / S.Chiu, G.Yu.Shen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1987. — Vol. 51. — P. 139–156.

2 Chiu S. Cohomology of graded Lie algebras of Cartan type $S(n,\mathbf{m})$ / S.Chiu // Chinese Ann. Math. Ser. B**10**. — 1989. — No 1. — P. 105–114.

3 Chiu S. Central extensions and $H^1(L,L^*)$ of the graded Lie algebras of Cartan type / S.Chiu // J. of Algebra. – 1992. – Vol. 149. – P. 46–67.

4 Chiu S. Derivations of the graded Lie algebras of Cartan type / S.Chiu // Chin. Ann. of Math. Ser. 13**B** — 1992. — No. 2. — P. 196–204.

5 Shi Bin. On cohomology of a class of nonclassical restricted simple Lie algebras / Shi Bin, Yu-Feng Yao // J. of Algebra and Its Appl. — Vol. 16, No. 5(2017), 1750157 (13 p.).

6 Джумадильдаев А.С. О когомологии модулярных алгебр Ли / А.С.Джумадильдаев // Математический сборник. – 1982. — Т. 119(161). — No. 9. — С. 132–149.

7 Джумадильдаев А.С. Нерасщепляемые расширения общей алгебры Ли картановского типа $W_n(\overline{m})$ / А.С.Джумадильдаев, У.У.Умирбаев // Математический сборник. — 1995. — Т. 186. — № 4. — С. 61–88.

8 Jantzen J.C. First cohomology groups for classical Lie algebras / J.C.Jantzen // Progress in Math. — 1991. — Vol. 95. — P. 291–300.

9 Van der Kallen W.L.J. Infinitesimally central extensions of Chevalley groups. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1973.

Ш.Ш. Ыбыраев

Джекобсон-Витт алгебрасының когомологиясы туралы

Классикалық модуляр Ли алгебраларының когомологияларын сәйкесті алгебралық группалардың көріністер териясы әдістерімен зерттеу көптеген қызықты нәтижелер алуға мүмкіндік береді. Соңғы кездері осындай беталысты, нәтижелері қайсыбір редуктивті алгебралық группалардың когомологияларын зерттеуге әкелетін, картан түріндегі жай Ли алгебраларының когомологияларын зерттеулерде де байқауға болады. Мақалада $\mathfrak{sl}_3(k)$ классикалық Ли алгебрасының когомологияларын есептеу арқылы сипаттамасы $p > 3$ алгебралық тұйық k өрісіндегі $W_3(1)$ Джекобсон-Витт алгебрасының коэффициенттері, $O_3(1)$ бөліктенген дәрежелі алгебрасына тиісті болатын когомологиялары толық сипатталды.

Кілт создер: Джекобсон-Витт алгебрасы, Ли алгебрасы, картан түріндегі Ли алгебрасы, когомология, коциклділік шарттары.

Sh.Sh. Ibraev

On the cohomology of the Jacobson–Witt algebra

The investigating cohomology of the classical modular Lie algebras by using the methods of representation theory of algebraic groups allows to get a lot of interesting results. Now this trend observed in the studying cohomology of the Lie algebras of Cartan type in which results lead to study the cohomology of certain reductive groups. In this paper we give a complete description the cohomology of the Jacobson–Witt algebra $W_3(1)$ over an algebraical closed field k of characteristic $p > 3$ with coefficients in the divided power algebra $O_3(1)$ by calculating the cohomology of the classical Lie algebra $\mathfrak{sl}_3(k)$.

Keywords: Jacobson-Witt algebra, Lie algebra, Lie algebra of Cartan type, cohomology, cocyclic conditions.

References

1 Chiu, S. & Shen, G.Yu. (1987). Cohomology of graded Lie algebras of Cartan type of characteristic *p. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg., Vol. 51,* 139–156.

2 Chiu, S. (1989). Cohomology of graded Lie algebras of Cartan type $S(n, m)$ *Chinese Ann. Math. Ser. B10, No. 1,* 105–114.

3 Chiu, S. (1992). Central extensions and $H^1(L, L^*)$ of the graded Lie algebras of Cartan type *J. Algebra, Vol. 149,* 46–67.

4 Chiu, S. (1992). Derivations of the graded Lie algebras of Cartan type *Chin. Ann. of Math. Ser. 13B, No. 2,* 196–204.

5 Shi Bin & Yu-Feng Yao. (2017). On cohomology of a class of nonclassical restricted simple Lie algebras *J. of Algebra and Its Appl., Vol. 16,* 5, 1750157 (13 p.).

6 Dzhumadil'daev, A.S. (1982). O kohomolohii moduliarnykh alhebr Li [On the cohomology of modular Lie algebras]. *Matematicheskii sbornik – Mathematical collection, 119(161),* 9, 132–149 [in Russian].

7 Dzhumadil'daev, A.S. & Umirbaev, U.U. (1995). Nerasshchepliaemye rasshireniia obshchei alhebry Li kartanovskoho tipa $W_n(\overline{m})$ [Non-splittable extensions of a general Lie algebras of Cartan type $W_n(\overline{m})$]. *Matematicheskii sbornik – Mathematical collection, 186,* 4, 61–88 [in Russian].

8 Jantzen, J.C. (1991). First cohomology groups for classical Lie algebras *Progress in Mathematics, Vol. 95,* 291–300.

9 Van der Kallen, W.L.J. (1973). *Infinitesimally central extensions of Chevalley groups.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

УДК 519.688

К.Т. Искаков, А.Т. Кусаинова, З.Т. Хасенова

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
(E-mail: kazizat@mail.ru)

Алгоритм численного решения многомерной обратной задачи электродинамики

В статье рассмотрена обратная коэффициентная задача для многомерного уравнения электродинамики в линейном приближении. Для решения коэффициентной обратной задачи по определению проводимости среды, зависящей от двух переменных, использован оптимизационный метод. Получена формула для вычисления градиента функционала. Сформулированы соответствующие сопряженные задачи.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение электродинамики, сопряженная задача, оптимизационный метод, проводимость среды, диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, уравнение Максвелла, линеаризация.

1 Линейное приближение обратной задачи

Распространение электромагнитных волн описывается системой уравнений Максвелла [1]

$$\begin{cases} \varepsilon\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} - rot\overrightarrow{H} + \sigma\overrightarrow{E} + \overrightarrow{j}^{\,cm} = 0, \;\; x_3 \neq 0, x \in \Re; \\ \mu\frac{\partial\overrightarrow{H}}{\partial t} + rot\,\overrightarrow{E} = 0, \text{ t } > \text{ 0}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\overrightarrow{E} = (E_1, E_2, E_3)^T, \overrightarrow{H} = (H_1, H_2, H_3)^T$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей; ε,μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; σ — проводимость среды; $\overrightarrow{j}^{\,cm}$ — плотность сторонних токов.

Зададим начальные условия

$$(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{H})\Big|_{t<0} = 0; \qquad \overrightarrow{\mathrm{j}}^{\,cm}\Big|_{t<0} = 0. \tag{2}$$

Тангенционные компоненты векторов $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{H}$ удовлетворяют условиям непрерывности

$$(E_j|_{x_3=-0} = E_j|_{x_3=+0}\,; \quad H_j|_{x_3=-0} = H_j|_{x_3=+0}\,, \quad j = 1,\ 2. \tag{3}$$

Для определения коэффициента $\sigma(x_1, x_2)$ зададим дополнительную информацию (отклик среды)

$$E_j|_{x_3=0} = \chi_j(x_1, x_2, t); \quad H_j|_{x_3=0} = \eta_j(x_1, x_2, t); \quad j = 1, 2. \tag{4}$$

Пусть коэффициент проводимости среды представим в виде

$$\sigma(x_1, x_2) = \sigma_0(x_3) + \sigma_1(x_1, x_3). \tag{5}$$

Предположим, что коэффициенты $\sigma_1(x_1, x_3)$ малы относительно коэффициента $\sigma_0(x_3)$, тогда возможно использовать метод линеаризации [2].

Представим векторы электрической и магнитной напряженностей в виде

$$\overrightarrow{E} = E^0 + E^1, \;\; \overrightarrow{H} = H^0 + H^1, \tag{6}$$

где (E^0, H^0) — решение задачи (7). Здесь и в дальнейшем считаем, что $\overrightarrow{E}^0 = E^0$; $\overrightarrow{H}^0 = H^0$; $\overrightarrow{E}^1 = E^1$; $\overrightarrow{H}^1 = H^1$; $\overrightarrow{j}^{\,cm} = j^{cm}$; тогда

$$\begin{cases} \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E^0 - rotH^0 + \sigma_0 E^0 + j^{cm} = 0; \\ \mu\frac{\partial}{\partial t}H^0 + rotE^0 = 0; \\ (E_0, H_0)_{|t<0} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Пренебрегая величиной $\sigma_1 E^1$, получим для (E^1, H^1), следующую задачу:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E^1 - rot H^1 + \sigma_0 E^1 = -\sigma_1 E^0; \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} H^1 + rot E^1 = 0; \\ (E^1, H^1)_{|t<0} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

На плоскости $x_3 = 0$ тангенциальные компоненты векторов (E^0, H^0), (E^1, H^1) удовлетворяют условиям

$$[E_j^0]_{x_3=0} = [H_j^0]_{x_3=0} = 0; \quad [E_j^1]_{x_3=0} = [H_j^1]_{x_3=0} = 0. \tag{9}$$

Дополнительная информация (4) примет вид

$$\left(E^1\right)_j \Big|_{x_3=0} = \chi_j^1(\overline{x}, t); \quad \left(H^1\right)_{j|_{x_3=0}} = \eta_j^1(\overline{x}, t), \quad j = 1, 2, \ \overline{\mathrm{x}} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2). \tag{10}$$

Здесь

$$\chi_j^1 = \chi_j - E_j^0\big|_{x_3=0}, \ \ \eta_j^1 = \eta_j - H_j^0\big|_{x_3=0}, \quad j = 1, 2. \tag{11}$$

Пусть функции $\sigma_0(x_3)$, $\sigma_1(x_1, x_3)$ удовлетворяют условиям:

1. $\sigma_0 \in C^2(\Re)$.

2. Существуют M_1,M_2,$M_3 \in \Re$ такие, что при всех $x_3 \in \Re$ имеет место неравенства

$$0 < M_1 \leq \sigma_0(x_3) \leq M_2, \quad \|\sigma_0\|_{C^2(\Re)} \leq M_3.$$

3. Функция $\sigma_1(x_1, x_3)$ отлична от нуля в области $(x_1, x_3) \in (0, h) \times K(D_1)$,

$$K(D_1) = \{x_1 \in \Re; |x_j| < D_1, j = 1, 3\},$$

где h, $D_1 \in \Re_T$ — фиксированные числа.

4. $\sigma_1(x_1 x_3) \in C^2((0, h) * K(D_1))$, $\alpha = \|\sigma_1\| \, C^2((0, h) * K(D_1)) \leq M_1$.

На основании этих условий и предположения (5) минимальное время, за которое возмущение достигнет глубины h при всех $x_1 \in \Re$ и вернется на поверхность $x_3 = 0$, равно $T_h = 2h/(M_1 - \alpha)$.

В силу этого имеет место следующее граничное условие:

$$E_j^0\big|_{x_1=\pm D_1} = 0. \tag{12}$$

В связи с тем, что коэффициент $\sigma_0(x_3)$ зависит от одной переменной x_3, достаточно задать одну горизонтальную компоненту

$$E_2^0\big|_{x_3=0} = f_{(1)}(x_1, t). \tag{13}$$

Выпишем условие для компоненты H_1^0. Для этого, полагая условия (13) как граничные условия в области $x_3 < 0$, где $\sigma = 0$, а $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, и решив систему (7), определим вектор H^0, тем самым будет известно условие

$$\mathrm{H}^0\big|_{x_3=0} = f_{(2)}(x_1, t). \tag{14}$$

Таким образом, общий алгоритм решения обратной задачи в линейном приближении состоит из следующих шагов:

1. В плоскости $x_3 < 0$ (в воздухе), в котором известны $\sigma = 0$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, решив задачу (1), находим (E, H). Используем при этом дополнительную информацию (10), (13), (14) применяются как граничные условия.

2. Далее вычисляем граничные условия

$$\begin{cases} \mathrm{H}_1|_{x_3=0} = f_2(x_1, t); \\ (\mathrm{H}^1)_{j|_{x_3=0}} = \eta_j^1(\bar{x}, t); \quad j = 1, 2; \\ (\mathrm{H}_j^0)_{|x_3=0}, j = 1, 2. \end{cases} \tag{15}$$

3. В плоскости $x_3 \geq 0$ решаем обратную задачу об определении $\sigma_0(x_3)$, Полагаем, что $E(x_3)$ в $x_3 \geq 0$ известны, а $\mu = 1$.

Зададим граничное условие

$$\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{E}_2}{\partial x_3}\right)\Big|_{x_3=0} = \frac{\partial}{\partial\, t} f_2(x_1, t). \tag{16}$$

4. Определяем правую часть системы (8), т.е. вычислим $\sigma_1 E^0$.

5. Определяем дополнительную информацию (10).

6. Используем метод наискорейшего спуска для определения коэффициента $\sigma_1(x_1, x_3)$ как решение системы (8).

2 Алгоритм решения обратной задачи об определении $\sigma_1(x_1, x_3)$

Пусть $p(\overline{x})$ — приближенное решение обратной задачи, где обозначено $\overrightarrow{x} = (x_1, x_3)$.

Введем функционал

$$\left\{\begin{array}{l} J(p(\overline{x})) = \int_0^T \left(\sum_{j=1}^2 \left[\mathrm{E}_j^1(\overline{x}, 0, t; p) - \chi_j^1(\overline{x}, t)\right]^2 d\, t\right) + \\ + \int_0^T \left(\sum_{j=1}^2 \left[\mathrm{H}_j^1(\overline{x}, 0, t, p) - \eta_j^1(\overline{x}, t)\right]^2 d\, t\right). \end{array}\right. \tag{17}$$

Формулу для вычисления градиента функционала (17) получим по аналогии с изложенной в [3]:

$$J(p) = \int_0^T \int_{-D_2}^{D_2} (E^0)\varphi(\overline{x}, x_2, t) dx_2 dt, \tag{18}$$

где ϕ, ψ — решения соответствующих задач.

Покажем это, зададим приращение $p(\overline{x}) + \delta p(\overline{x})$, тогда $\delta\, \mathrm{E}^1 = \mathrm{E}^1(\overline{x}, x_3, t; p + \delta p) - \mathrm{E}^1(\overline{x}, x_3, t; p)$; $\delta\, \mathrm{H}^1 = \mathrm{H}^1(\overline{x}, x_3, t; p + \delta p) - H^1(\overline{x}, x_3, t; p)$. Пренебрегая членом второго порядка, получим следующую систему:

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \delta E^1 - rot \delta H^1 + \sigma_0 \delta E^1 = -p\sigma E^0 - E^0 \sigma p,; \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} \delta H^1 + rot \delta E^1 = 0. \end{array}\right. \tag{19}$$

Обе части системы (19) умножим скалярно на вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$. $\left\langle \mu \frac{\partial}{\partial t} \delta\, \mathrm{H}^1, \psi\right\rangle + \left\langle rot\, \delta\, \mathrm{E}^1, \psi\right\rangle = 0$.

Распишем покомпонентно вторую подсистему системы (19):

$$\left\{\begin{array}{l} \mu \frac{\partial}{\partial\, t} \delta \mathrm{H}_1^1\, \psi_1 + \left(\frac{\partial}{\partial\, x_2} \delta \mathrm{E}_3^1 - \frac{\partial}{\partial\, x_3} \delta \mathrm{E}_2^1\right) \psi_1 = 0; \\ \mu \frac{\partial}{\partial\, t} \delta \mathrm{H}_2^1\, \psi_2 + \left(\frac{\partial}{\partial\, x_1} \delta \mathrm{E}_3^1 - \frac{\partial}{\partial\, x_3} \delta \mathrm{E}_1^1\right) \psi_2 = 0; \\ \mu \frac{\partial}{\partial\, t} \delta \mathrm{H}_3^1\, \psi_3 + \left(\frac{\partial}{\partial\, x_1} \delta \mathrm{E}_2^1 - \frac{\partial}{\partial\, x_2} \delta \mathrm{E}_1^1\right) \psi_3 = 0. \end{array}\right. \tag{20}$$

Распишем покомпонентно первую подсистему системы (19):

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \delta E_1^1 \psi_1 - (\frac{\partial}{\partial x_2} \delta H_3^1 - \frac{\partial}{\partial x_3} \delta H_2^1)\psi_1 + \sigma_0 \delta E_1^1 \psi_1 = -p\delta E_1^0 \psi_1 - \delta p E_1^0 \psi_1; \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \delta E_2^1 \psi_2 - (\frac{\partial}{\partial x_1} \delta H_3^1 - \frac{\partial}{\partial x_3} \delta H_1^1)\psi_2 + \sigma_0 \delta E_2^1 \psi_2 = -p\delta E_2^0 \psi_2 - \delta p E_2^0 \psi_2; \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \delta E_3^1 \psi_3 - (\frac{\partial}{\partial x_1} \delta H_2^1 - \frac{\partial}{\partial x_2} \delta H_1^1)\psi_3 + \sigma_0 \delta E_3^1 \psi_3 = -p\delta E_3^0 \psi_3 - \delta p E_3^0 \psi_3. \end{array}\right. \tag{21}$$

Проинтегрируем обе части каждого уравнения системы (20) в области $t \in (0, T_h), \overline{x} \in \Gamma D$, отсюда имеем

$$J^{(1)} = \int_0^T \int_{\overline{x}\in D} \left[\mu \left(\frac{\partial}{\partial\, t} \delta \mathrm{H}_1^1\right) \psi_1 + \left(\frac{\partial}{\partial\, x_2} \delta \mathrm{E}_3^1 - \frac{\partial}{\partial\, x_3} \delta \mathrm{E}_2^1\right) \psi_1\right] d\overline{x} d\, t =$$

$$= \int_{\overline{x}\in D} \left[\mu\, \delta \mathrm{H}_1^1 \psi_1 \big|_0^T - \int_0^T \delta \mathrm{H}_1^1 \frac{\partial}{\partial, t} \psi_1 d\, t\right] d\overline{x} +$$

$$+ \int_0^T \left[\int_{-D_1}^{D_1} \int_{-D_3}^{D_3} \int_{-D_2}^{D_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta \mathrm{E}_3^1 \psi_1 d\, x_2 d\, x_3 d\, x_1 - \int_{-D_1}^{D_1} \int_{-D_3}^{D_3} \int_{-D_2}^{D_2} \frac{\partial}{\partial\, x_3} \delta \mathrm{E}_2^1 \psi_1 d\, x_3 d\, x_2 d\, x_1\right] d\, t = \tag{22}$$

$$= J_1 + \int_0^T \left[\int_{-D_1}^{D_1} \int_{-D_3}^{D_3} \left\{ \delta \mathrm{E}_3^1 \psi_1 \Big|_{-D_2}^{D_2} - \int_{-D_2}^{D_2} \delta \mathrm{E}_3^1 \frac{\partial}{\partial x_2} \psi_1 d\, x_2 \right\} d\, x_3 d\, x_1 \right] d\, t -$$

$$- \int_0^T \left[\int_{-D_1}^{D_1} \int_{-D_2}^{D_2} \left\{ \delta \mathrm{E}_2^1 \psi_1 \Big|_{-D_3}^{D_3} - \int_{-D_3}^{D_3} \delta \mathrm{E}_2^1 \frac{\partial}{\partial x_3} \psi_1 d\, x_3 \right\} d\, x_2 d\, x_1 \right] d\, t.$$

Обозначим первый интеграл через J_1. Предположим, что

$$\psi_1(x_1, x_2, x_3, T) = 0; \tag{23}$$

$$\psi_1(x_1, x_2, x_3, t)\big|_{x_2 = \pm D_2} = 0;$$
$$\psi_1(x_1, x_2, x_3, t)\big|_{x_3 = \pm D_3} = 0. \tag{24}$$

Граничное и начальное условия для системы (19) имеют вид

$$\delta\, \mathrm{E}^1\big|_{x = \Gamma D} = 0; \tag{25}$$

$$(\delta \mathrm{E}^1, \delta \mathrm{H}^1)_{|t=0} = 0. \tag{26}$$

Где ΓD — граница области $D = D_{\pm 1} \times D_{\pm 2} \times D_{\pm 3}$. Далее, с учетом условий (25), (26) и принятых условий (23), (26), в соотношении (22), для J^1 останутся

$$J^1 = \int_0^T \int_{\overline{x} \in D} \left[-\delta \mathrm{H}_1^1 \left(\mu \frac{\partial}{\partial\, t} \psi_1 \right) - \delta \mathrm{E}_3^1 \left(\frac{\partial}{\partial\, x_2} \psi_1 \right) + \delta \mathrm{E}_2^1 \left(\frac{\partial}{\partial\, x_3} \psi_1 \right) \right] d\, \overline{x} d\, t = 0. \tag{27}$$

Проинтегрировав по частям второе и третье уравнения системы (20) с условиями (25), (26) и предполагая, что

$$\psi_j(x_1, x_2, x_3, T) = 0, j = 2, 3;$$
$$\psi_j(x_1, x_2, x_3, t)\big|_{x_k = \pm D_k} = 0, j = 2, 3; k = 1, 2, 3; \tag{28}$$

имеем

$$J^2 = \int_0^T \int_{\overline{x} \in D} \left[-\delta \mathrm{H}_2^1 \left(\mu \frac{\partial}{\partial\, t} \psi_2 \right) + \delta \mathrm{E}_3^1 \left(\frac{\partial}{\partial\, x_1} \psi_2 \right) - \delta \mathrm{E}_1^1 \left(\frac{\partial}{\partial\, x_3} \psi_2 \right) \right] d\, \overline{x} d\, t = 0; \tag{29}$$

$$J^3 = \int_0^T \int_{\overline{x} \in D} \left[-\delta \mathrm{H}_3^1 \left(\mu \frac{\partial}{\partial\, t} \psi \quad 3 \right) - \delta \mathrm{E}_2^1 \left(\frac{\partial}{\partial\, x_1} \psi_3 \right) + \delta \mathrm{E}_1^1 \left(\frac{\partial}{\partial\, x_2} \psi_3 \right) \right] d\, \overline{x} d\, t = 0. \tag{30}$$

Из соотношений (27), (29), (30) имеем

$$-\delta \mathrm{H}_1^1 \left(\mu \frac{\partial}{\partial\, t} \psi_1 \right) - \delta \mathrm{H}_2^1 \left(\mu \frac{\partial}{\partial\, t} \psi_2 \right) - \delta \mathrm{H}_3^1 \left(\mu \frac{\partial}{\partial\, t} \psi_2 \right) +$$

$$+ \delta \mathrm{E}_3^1 \left[\frac{\partial}{\partial\, x_1} \psi_2 - \frac{\partial}{\partial\, x_2} \psi_1 \right] - \delta \mathrm{E}_2^1 \left[-\frac{\partial}{\partial\, x_3} \psi_1 + \frac{\partial}{\partial\, x_1} \psi_3 \right] + \delta \mathrm{E}_1^1 \left[\frac{\partial}{\partial\, x_2} \psi_3 - \frac{\partial}{\partial\, x_3} \psi_2 \right] = 0. \tag{31}$$

Из (31) вытекает, что

$$-\left\langle \delta \mathrm{H}^1, \mu \frac{\partial}{\partial\, t} \psi \right\rangle + \left\langle \delta \mathrm{E}^1, rot \psi \right\rangle = 0; \tag{32}$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \psi + rot \psi = 0. \tag{33}$$

По аналогии проведем аналогичные выкладки с первым уравнением системы (22), т.е. рассмотрим соотношение

$$\left\langle \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \delta E^1, \psi \right\rangle - \left\langle rot\, \delta\, H^1, \psi \right\rangle + \left\langle \sigma_0 \delta E^1, \psi \right\rangle = -\left\langle p E^0, \psi \right\rangle - \left\langle \delta p E^0, \psi \right\rangle, \tag{34}$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$.

Как и в предыдущем случае, получим

$$-\left\langle \delta E^1, \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\psi \right\rangle - \left\langle \delta_0 H^1, rot\psi \right\rangle + \left\langle \delta_0 E^1, \sigma\psi \right\rangle = -\left\langle E^1, p\psi \right\rangle - \left\langle \delta p E^0, \psi \right\rangle. \quad (35)$$

Объединив равенства (32), (35), окончательно получим постановки сопряженных задач

$$\begin{cases} -\mu\frac{\partial}{\partial t}\psi + rot\varphi = p\frac{\partial}{\partial t}\varphi; \\ -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\varphi - rot\varphi + \sigma_0\varphi = -\sigma_1 E^0; \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{array}{l} \psi_j(x_1, x_2, x_3, T) = 0, \quad j = 2, 3; \\ \psi_j(x_1, x_2, x_3, t)|_{x_k = \pm D_k} = 0, \quad j = 2, 3; k = 1, 2, 3; \\ \phi_j(x_1, x_2, x_3, T) = 0, \quad j = 2, 3; \\ \phi_j(x_1, x_2, x_3, t)|_{x_k = \pm D_k} = 0, \quad j = 2, 3; k = 1, 2, 3; \end{array} \quad (37)$$

$$(\psi_j)_{x_3|x_3=0} = 2\sum_{j=1}^{2}\left[\mathrm{H}_j^1(\overline{x}, 0, t, p) - \eta_{j1}(\overline{x}, t)\right];$$

$$(\phi_j)_{x_3|x_3=0} = 2\sum_{j=1}^{2}\left[\mathrm{E}_j^1(\overline{x}, 0, t, p) - \chi_{j1}(\overline{x}, t)\right]. \quad (38)$$

Таким образом, мы получили алгоритм решения обратной задачи об определении $\sigma_1(x_1, x_3)$. Алгоритм определения диэлектрической проницаемости оптимизационным методом для задачи (1) в линеаризованной постановке изложен в работе [4].

Работа поддержана грантом МОН РК по договору № 266 от 09.03.2017 г.

Список литературы

1 Романов В.Г. Обратные задачи математической физики / В.Г.Романов. — М.: Наука, 1984. — 264 с.

2 Романов В.Г. Обратные задачи геоэлектрики / В.Г.Романов, С.И.Кабанихин. — М.: Наука, 1991. — 303 с.

3 Романов В. Г. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач / В.Г.Романов, С.И.Кабанихин. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2001. — 316 с.

4 Искаков К.Т. Оптимизационный метод решения обратной задачи электродинамики в линеаризованной постановке / К.Т.Искаков, А.Т.Кусаинова // Вестн. Караганд. ун-та. Серия математика. — 2014. — № 4(76). — С. 42–49.

Қ.Т. Искаков, А.Т. Кусаинова, З.Т. Хасенова

Электрдинамиканың көпөлшемді кері есебін сандық шешу алгоритмі

Мақалада сызықтық жуықтаудағы электрдинамиканың көпөлшемді теңдеу үшін кері коэффициенттік есеп қарастырылды. Екі айнымалыға тәуелді орта өткізгіштігін анықтау бойынша кері коэффициенттік есепті шешу үшін оңтайландыру әдісі қолданылды. Функционал градиентін есептеуге формула алынды. Сәйкесінше түйіндес есептер тұжырымдалды.

Кілт сөздер: кері есептер, электрдинамика теңдеуі, түйіндес есептер, тиімді әдіс, орта өткізгіштігі, диэлектрлік өтімділік, магниттік өтімділік, Максвелл теңдеуі, линеаризациялау.

K.T. Iskakov, A.T. Kussainova, Z.T. Khassenova

Algorithm of the numerical solution of the multidimensional inverse problem of electrodynamics

In this article, we consider the inverse coefficient problem for the multidimensional equation of electrodynamics in the linear approximation. To solve the coefficient inverse problem for determining the conductivity of a medium that depends on two variables, an optimization method is used. A formula is obtained for calculating the gradient of the functional. The corresponding conjugate problems are formulated.

Keywords: Inverse problem, electrodynamic equation, conjugate problem, optimization method, medium conductivity, dielectric constant, magnetic permeability, Maxwell equation, linearization.

References

1 Romanov, V.G. (1984). *Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki [Inverse problems of mathematical physics].* Moscow: Nauka [in Russian].

2 Romanov, V.G. & Kabanihin, S.I. (1991). *Obratnye zadachi heoelektriki [Inverse problems of geoelectric].* Moscow: Nauka [in Russian].

3 Romanov, V.G. & Kabanihin, S.I. (2001). *Optimizatsionnye metody resheniia koeffitsientnykh obratnykh zadach [Optimization methods for solving inverse problems].* Novosibirsk: Izdatelstvo NSU [in Russian].

4 Iskakov, K.T. & Kussainova, A.T. (2014). Optimizatsionnyi metod resheniia obratnoi zadachi elektrodinamiki v linearizovannoi postanovke [Optimization method for solving the inverse problem of electrodynamics in a linearized formulation]. *Vestnik Karahandinskoho Universiteta. Seriia matematika – Bulletin of Karaganda University, Mathematics Series, 4(76),* 42–49 [in Russian].

УДК 521.1

М.Дж. Минглибаев[1,2], Т.М. Жумабек[1], Г.М. Маемерова[1]

[1] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;*
[2] *Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Алматы, Казахстан*
(E-mail: mayemerova@gmail.com)

Исследование ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат

В статье аналитически исследована пространственная классическая ограниченная задача трех тел. Введена новая специальная неинерциальная центральная система координат. Начало введенной системы координат совпадает с центром сил исследуемой задачи. Получены новые базовые дифференциальные уравнения движения ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат. В новой системе координат найдено аналитическое выражение инварианта центра сил. Во введенной системе координат ограниченная задача трех тел разделена на две отдельные задачи и получены различные базовые дифференциальные уравнения этих двух задач. Корректность такого разделения исследуемой задачи на два в специальной неинерциальной системе координат обеспечивается инвариантом центра сил, найденным в этой же системе координат. Первая – треугольная ограниченная задача трех тел, когда три тела во все время движения образуют треугольник. Вторая – коллинеарная ограниченная задача трех тел, когда три тела во все время движения лежат на одной и той же прямой. Отдельно выведены дифференциальные уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат в пульсирующих переменных. Также получены дифференциальные уравнения коллинеарной ограниченной задачи трех тел в неинерциальной центральной системе координат. Полученные новые формы дифференциальных уравнений ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной системе координат открывают новые перспективы в исследовании этой задачи.

Ключевые слова: ограниченная задача трех тел, неинерциальная система координат, инварианты центра сил, равнобедренные решения, точки либрации.

Введение

Движение малого естественного или искусственного небесного тела в поле тяготения двух больших небесных тел (далее основные тела) хорошо описывается математической моделью в широко известной ограниченной задаче трех тел [1–6]. При произвольных значениях масс основных тел задача имеет пять точек либрации — точные частные решения. Два из них — решения Лагранжа, когда три тела во все время движения образуют равносторонний *треугольник*. Три *коллинеарных* решения Эйлера, когда три тела во все время движения расположены на одной и той же прямой. Известны также решения в форме равнобедренного треугольника при условии, что массы основных тел, расположенные у основания равнобедренного треугольника, равны между собой [7–9]. В связи с отсутствием общего аналитического решения в конечном виде многие аспекты задачи изучены различными качественными и численными методами [1–9]. Поиск новых точных частных аналитических решений представляется актуальным.

В настоящей работе аналитически исследуется пространственная ограниченная задача трех тел в новой специальной неинерциальной центральной системе координат с началом в центре сил [7]. Специальная неинерциальная центральная система координат обобщает инерциальную барицентрическую прямоугольную декартовую систему координат в неинерциальную систему координат.

В начале введена новая специальная неинерциальная центральная система координат и выведено новое основное дифференциальное уравнение движения рассматриваемой задачи. Исходя из свойств неинерциальной центральной системы координат, получены *инварианты центра сил* ограниченной задачи трех тел в этой же системе координат. Изложена суть предложенного метода исследования проблемы. Исследована *треугольная* ограниченная задача трех тел. Выведены дифференциальные уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат в пульсирующих переменных. Выделена и отдельно исследуется *коллинеарная* ограниченная задача трех тел. Получены дифференциальные уравнения движения коллинеарной ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат с учетом инварианта центра сил.

1 Различные уравнения движения ограниченной задачи трех тел и инварианты центра сил

1.1 Классические уравнения движения ограниченной задачи трех тел в абсолютной системе координат

Рассмотрим движение малого тела с исчезающей малой массой m_2 (далее безмассовое тело) в поле тяготения двух основных тел с постоянными массами m_1 и m_3. При этом тела рассматривается как материальные точки. Математические условия ограниченной постановки задачи трех тел [1–4] могут быть написаны в виде

$$m_2 << m_1, \quad m_2 << m_3, \quad m_2 \approx 0. \tag{1}$$

Дифференциальные уравнения движения этих трех тел в абсолютной системе координат $OXYZ$ имеют известный вид

$$\ddot{\vec{R}}_1^* = \vec{F}_1^* = f m_3 \frac{\vec{R}_3^* - \vec{R}_1^*}{R_{13}^{*3}}, \quad \ddot{\vec{R}}_3^* = \vec{F}_3^* = f m_1 \frac{\vec{R}_1^* - \vec{R}_3^*}{R_{31}^{*3}}, \tag{2}$$

$$\ddot{\vec{R}}_2^* = \vec{F}_2^* = f\left(m_1 \frac{\vec{R}_1^* - \vec{R}_2^*}{R_{21}^{*3}} + m_3 \frac{\vec{R}_3^* - \vec{R}_2^*}{R_{23}^{*3}}\right), \tag{3}$$

где $\vec{R}_i^*$ — радиус-векторы тел, $\vec{R}_{ij}^*$ $(i \neq j)$ — расстояния между телами. Точкой в этих уравнениях и далее обозначается дифференцирование по времени t. Из системы дифференциальных уравнений (2) получим известное соотношение

$$m_1\vec{R}_1^* + m_3\vec{R}_3^* = \vec{a}^* t + \vec{b}^*; \quad \vec{a}^* = \overrightarrow{const}, \quad \vec{b}^* = \overrightarrow{const}. \tag{4}$$

Отсюда получим хорошо известное аналитическое выражение радиус-вектора точки G_0 — барицентра двух основных тел в абсолютной системе координат

$$\vec{R}_{G_0}^* = \frac{m_1\vec{R}_1^* + m_3\vec{R}_3^*}{m_1 + m_3} = \frac{\vec{a}^*}{m_1 + m_3} t + \frac{\vec{b}^*}{m_1 + m_3}. \tag{5}$$

Система дифференциальных уравнений (2) описывает задачу двух тел. Из (5) следует $\ddot{\vec{R}}_{G_0}^* = 0$, то есть барицентрическая система координат инерциальная.

Уравнения движения (3) описывают движение безмассового тела в ньютоновском поле тяготения двух основных тел m_1, m_3 — классическую ограниченную задачу трех тел.

1.2 Специальная неинерциальная система координат. Дифференциальные уравнения ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат

Часто ограниченная задача трех тел изучается в барицентрической системе координат с началом в барицентре двух основных тел m_1 и m_3 [1–4]. Естественно, что барицентр находится все время на прямой, соединяющей два основных тела m_1 и m_3, при этом положение барицентра на прямой точно определено. Как было отмечено ранее, барицентрическая система координат, согласно (5), инерциальная.

Обобщая инерциальную барицентрическую систему координат, мы переходим на новую специальную неинерциальную систему координат с началом в точке G. Точку G определим следующим образом. Линия действия суммарной силы притяжения двух основных тел $\vec{F}_2^*$ пересекает прямую R_{13}^* (соединяющую два тела m_1 и m_3) только в одной точке. Эту точку обозначим через G. В этой точке линии действия трех сил $\vec{F}_1^*$, $\vec{F}_2^*$, $\vec{F}_3^*$ все время пересекаются. Поэтому эту точку называют *центром сил* [7]. В общем случае эта точка подвижная, обладает ускорением, не равным нулю, и ее движение неизвестно.

Таким образом, новая специальная система координат *неинерциальная*, в этой системе координат сила $\vec{F}_2^*$ *центральная*, то есть направленная к началу системы координат. Радиус-вектор безмассового тела в новой системе координат и сила $\vec{F}_2^*$ лежат на одной и той же прямой, но направлены в противоположные стороны.

В частном случае, когда начало новой системы координат совпадает с барицентром двух тел, имеем $G \equiv G_0$ и получаем инерциальную барицентрическую систему координат.

Учитывая свойства введенной системы координат, новую систему координат назовем *специальной неинерциальной центральной* системой координат.

Переходим в новую специальную неинерциальную центральную систему координат по формулам

$$\vec{R}_i^* = \vec{R}_G + \vec{r}_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{6}$$

где $\vec{R}_G$ — радиус-вектор центра сил G в абсолютной системе координат, $\vec{r}_i$ — радиус-векторы тел в специальной системе координат. Пусть оси новой системы координат $Gxyz$ параллельны соответствующим осям абсолютной системы координат $OX^*Y^*Z^*$ (см. рис.).

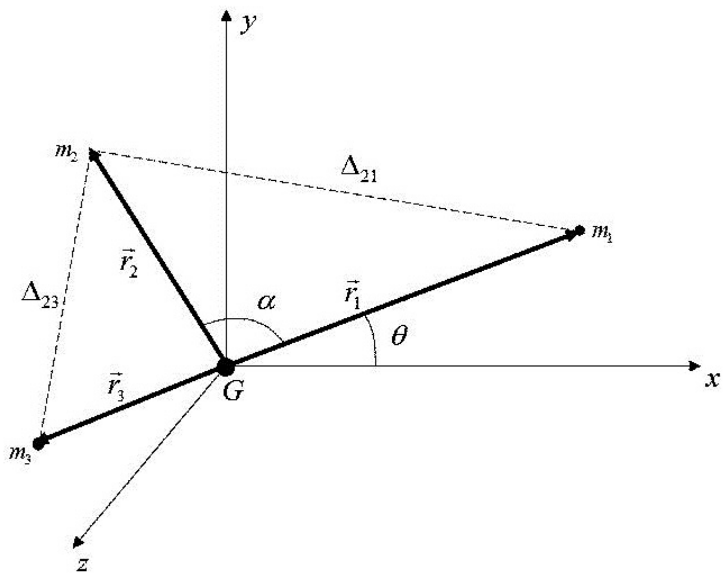

Рисунок. Пространственная ограниченная задача трех тел
в неинерциальной системе координат с началом в центре сил

Преобразованные уравнения движения (2) и (3) имеют вид

$$\ddot{\vec{R}}_G + \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1, \quad \vec{F}_1 = fm_3\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{r_{13}^3}, \quad \vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1, \tag{7}$$

$$\ddot{\vec{R}}_G + \ddot{\vec{r}}_3 = \vec{F}_3, \quad \vec{F}_3 = fm_1\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{r_{31}^3}, \quad \vec{r}_{31} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3, \tag{8}$$

$$r_{31} = [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2]^{1/2} = r_{13},$$

$$\ddot{\vec{R}}_G + \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2, \tag{9}$$

$$\vec{F}_2 = f\left(m_1\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\Delta_{21}^3} + m_3\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\Delta_{23}^3}\right), \tag{10}$$

где Δ_{ij} — расстояния между безмассовым и основным телами

$$\Delta_{21} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} = \Delta_{12};$$

$$\Delta_{23} = [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2]^{1/2} = \Delta_{32}.$$

Соотношения (4) преобразуются к виду

$$(m_1 + m_3)\,\vec{R}_G + m_1\vec{r}_1 + m_3\vec{r}_3 = \vec{a}^*t + \vec{b}^*, \tag{11}$$

Из уравнений (7), (8) и (9) получим

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \vec{F}_1 = \ddot{\vec{r}}_2 - \vec{F}_2, \quad \ddot{\vec{r}}_3 - \vec{F}_3 = \ddot{\vec{r}}_1 - \vec{F}_1, \quad \ddot{\vec{r}}_2 - \vec{F}_2 = \ddot{\vec{r}}_3 - \vec{F}_3. \tag{12}$$

Очевидно, что из этих трех уравнений независимые только два. Из этих уравнений следует

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2 + \left(\ddot{\vec{r}}_1 - \vec{F}_1\right); \tag{13}$$

$$\ddot{\vec{r}}_{31} = -f\frac{m_3 + m_1}{r_{31}^3}\vec{r}_{31}. \tag{14}$$

Уравнения (14) есть хорошо известные уравнения классической задачи двух тел в специальной неинерциальной центральной системе координат. Из интеграла

$$\vec{r}_{31} \times \dot{\vec{r}}_{31} = \vec{c}_{31} = \overrightarrow{const}$$

следует, что орбита плоская, без потери общности можно считать, что орбита лежит на основной плоскости Gxy.

Таким образом, *дифференциальные уравнения движения ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат* могут быть написаны в виде

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2 + \vec{W}; \tag{15}$$

$$\vec{W} = \ddot{\vec{r}}_1 - \vec{F}_1. \tag{16}$$

При этом выражение (16) находится из решений задачи двух основных тел (14), описанной в специальной неинерциальной центральной системе координат.

1.3 Инвариант центра сил в специальной неинерциальной центральной системе координат

Согласно выбору новой системы координат, сила $\vec{F}_2$ все время направлена к центру силы, G — к началу новой системы координат. Поэтому всегда в специальной неинерциальной центральной системе координат имеет место (см. рис.)

$$\vec{F}_2 \times \vec{r}_2 = 0. \tag{17}$$

В раскрытом виде равенство (17) имеет вид

$$\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\left(\vec{r}_3 \times \vec{r}_2\right) + \frac{m_1}{\Delta_{21}^3}\left(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\right) = 0.$$

Последнее равенство перепишем в виде

$$\left(\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\vec{r}_3 + \frac{m_1}{\Delta_{21}^3}\vec{r}_1\right) \times \vec{r}_2 = 0. \tag{18}$$

Полученное соотношение (18) назовем *инвариантом центра сил* ограниченной задачей трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат *в векторной форме.* Далее, учитывая соотношения (см. рис.)

$$\vec{r}_3 = r_3\vec{e}_3 = r_3\left(-\vec{e}_1\right), \quad \vec{e}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{r}_3}{r_3}, \tag{19}$$

можно перейти к скалярному равенству

$$\left(\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}r_3 - \frac{m_1}{\Delta_{21}^3}r_1\right) r_2 \sin\alpha = 0, \tag{20}$$

где α есть угол между векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ (рис. 1). Соотношение (20) назовем *инвариантом центра сил* ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат *в скалярной форме.*

Равенство (20) формально-математически выполнимо в двух случаях:

$$\frac{m_3}{\Delta_{23}^3} r_3 - \frac{m_1}{\Delta_{21}^3} r_1 = 0, \quad r_2 \sin\alpha \neq 0; \tag{21}$$

$$r_2 \sin\alpha = 0, \quad \left(\frac{m_3}{\Delta_{23}^3} r_3 - \frac{m_1}{\Delta_{21}^3} r_1 \right) \neq 0. \tag{22}$$

В первом случае (21) во все время движения три тела образуют треугольник. Размеры, форма и ориентация треугольника со временем меняются. Таким образом, соотношение (21) имеет место в *треугольной* ограниченной задаче трех тел. Этот случай рассмотрен во второй части работы.

Во втором случае (22) три тела во все время движения находятся на одной и той же прямой, то есть имеем *коллинеарную* ограниченную задачу трех тел. Коллинеарная ограниченная задача трех тел рассмотрена в третьей части настоящей работы.

Первое равенство условия (21) перепишем в виде

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{m_1}{m_3} \left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{21}} \right)^3. \tag{23}$$

Таким образом, в специальной неинерциальной центральной системе координат, независимо от значения масс основных тел и свойства треугольника, образованного тремя телами, равенство (23) имеет место во все время движения в треугольной ограниченной задаче трех тел.

Соотношение (23) назовем *инвариантом центра сил* треугольной ограниченной задачи трех тел в скалярной форме. В векторной форме *инвариант центра сил* треугольной ограниченной задачи трех тел можно написать в виде

$$m_1 \Delta_{23}^3 \vec{r}_1 + m_3 \Delta_{21}^3 \vec{r}_3 = 0. \tag{24}$$

1.4 Определение начала специальной неинерциальной центральной системы координат

Обозначим важный безразмерный параметр задачи

$$\frac{r_3}{r_1} = k = k(t) > 0. \tag{25}$$

Для однозначного определения начала специальной неинерциальной системы координат нужно знать безразмерную величину k. Если известно k, тогда с учетом (19) получим

$$\vec{r}_{31} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 = \vec{r}_1 - r_3 \left(-\vec{e}_1 \right) = \vec{r}_1 - \left(k r_1 \right) \left(-\vec{e}_1 \right) = \vec{r}_1 + k \vec{r}_1 = \left(1 + k \right) \vec{r}_1.$$

Следовательно, можно написать

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{1+k} \vec{r}_{31}; \quad \vec{r}_3 = -\frac{k}{1+k} \vec{r}_{31}. \tag{26}$$

Поэтому из уравнений (11) можно определить начало специальной неинерциальной центральной системы координат

$$\left(m_1 + m_3 \right) \vec{R}_G = \vec{a}^* t + \vec{b}^* - \left(m_1 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_3 \right) = \vec{a}^* t + \vec{b}^* - \frac{m_1 - k m_3}{1+k} \vec{r}_{31}. \tag{27}$$

Таким образом, определение начала специальной неинерциальной центральной системы координат сводится к определению параметра k. Если этот параметр определен, тогда инвариант центра сил треугольной ограниченной задачи трех тел (23) можно написать в виде

$$\left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{21}} \right)^3 = k \frac{m_3}{m_1}. \tag{28}$$

1.5 Преобразование $\vec{W}$ с использованием решений задачи двух основных тел

Решение дифференциального уравнения движения задачи двух основных тел (14) в специальной неинерциальной центральной системе координат запишем в виде [10, 11]

$$r_{31} = r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \quad r^2\dot{\theta} = c_{31} = c = const \neq 0; \tag{29}$$

$$p = a\left(1 - e^2\right), \quad c^2 = \mu p, \quad \mu = f\left(m_1 + m_3\right); \tag{30}$$

$$x_{31} = r\cos\theta, \quad y_{31} = r\sin\theta, \quad z_{31} = 0, \quad r_{31}^2 = r^2. \tag{31}$$

В случае $c_{31} = c = 0$ имеем прямолинейную ограниченную задачу трех тел, и этот частный случай будет исследован в отдельной работе. В настоящей работе исследован наиболее интересный случай

$$c_{31} \neq 0. \tag{32}$$

Далее, используя первое равенство из соотношения (26), преобразуем аналитическое выражение (16) для $\vec{W}$:

$$\vec{W} = \ddot{\vec{r}}_1 - \vec{F}_1 = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\vec{r}_{31}}{1+k}\right) - \vec{F}_1 = \frac{1}{1+k}\left[\left(\ddot{\vec{r}}_{31} + \vec{F}_{31}\right) - \vec{F}_{31} - (1+k)\vec{F}_1\right] +$$
$$+\frac{1}{1+k}\left(2\dot{\vec{r}}_{31}\left(-\frac{\dot{k}}{1+k}\right) + \vec{r}_{31}\left(-\frac{\ddot{k}}{1+k} + \frac{2\dot{k}^2}{(1+k)^2}\right)\right).$$

Учитывая соотношения

$$\ddot{\vec{r}}_{31} + \vec{F}_{31} = 0, \quad \vec{F}_{31} = f\frac{m_1 + m_3}{r_{31}^3}\vec{r}_{31}, \quad \vec{F}_1 = fm_3\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{r_{13}^3} = fm_3\frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} = -fm_3\frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3};$$

окончательно получим

$$\vec{W} = -f\frac{(m_1 - km_3)}{k+1}\frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3} + 2\dot{\vec{r}}_{31}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+k}\right) + \vec{r}_{31}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1+k}\right). \tag{33}$$

1.6 Дифференциальное уравнение ограниченной задачи трех тел с учетом определения начала специальной неинерциальной центральной системы координат

Учитывая выражения (10) и (33), дифференциальное уравнение ограниченной задачи трех тел (13) напишем в следующем виде:

$$\ddot{\vec{r}}_2 - \vec{F}_2 = \vec{W}, \tag{34}$$

$$\vec{F}_2 = f\left(m_1\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\Delta_{21}^3} + m_3\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\Delta_{23}^3}\right); \tag{35}$$

$$\vec{W} = -f\frac{(m_1 - km_3)}{k+1}\frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3} + 2\dot{\vec{r}}_{31}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+k}\right) + \vec{r}_{31}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1+k}\right). \tag{36}$$

Полученное дифференциальное уравнение движения (34) открывает новые возможности в исследовании ограниченной задачи трех тел. Уравнение (34) назовем *основным дифференциальным уравнением ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат с началом в центре сил.* Из этого уравнения движения можно получить различные оригинальные виды уравнений движения для исследования различных частных случаев ограниченной задачи трех тел.

2 Треугольная ограниченная задача трех тел

2.1 Базовая форма дифференциальных уравнений движения треугольной ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат

Используя инвариант центра сил (28) и соотношение (25), преобразуем аналитическое выражение (35) для $\vec{F}_2$:

$$\vec{F}_2 = fm_3\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{\Delta_{23}^3} + fm_1\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\Delta_{21}^3} = f\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\left\{\vec{r}_3 - \vec{r}_2 + \left[\frac{m_1}{m_3}\frac{\Delta_{23}^3}{\Delta_{21}^3}\right](\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right\} =$$
$$= f\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\left\{-\left[\vec{r}_2 + \left(\frac{r_3}{r_1}\right)\vec{r}_2\right] + \vec{r}_3 + \left(\frac{r_3}{r_1}\right)\vec{r}_1\right\} = -f\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}(1+k)\,\vec{r}_2 + f\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\left(\frac{r_1\vec{r}_3 + r_3\vec{r}_1}{r_1}\right).$$

Согласно соотношениям (19) имеем (рис. 1)

$$r_1\vec{r}_3 + r_3\vec{r}_1 = r_1r_3(-\vec{e}_1) + r_3r_1\vec{e}_1 = (-r_1r_3 + r_3r_1)\vec{e}_1 = 0.$$

Таким образом, окончательно получим

$$\vec{F}_2 = -f\frac{m_3\,(1+k)}{\Delta_{23}^3}\vec{r}_2. \tag{37}$$

Поэтому дифференциальное уравнение движения треугольной ограниченной задачи трех тел (34) в специальной неинерциальной центральной системе координат с учетом преобразованного выражения (37) может быть написано в виде

$$\ddot{\vec{r}}_2 + f\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}\,(1+k)\,\vec{r}_2 = \vec{W}. \tag{38}$$

Далее, используя теорему Стюарта [12], выразим Δ_{23}^3 через r_2, r_{31}, m_1, m_3, k. Аналитическое выражение теоремы Стюарта в наших обозначениях (рис. 1) имеет вид

$$r_2^2 = \Delta_{21}^2\frac{r_3}{r_{31}} + \Delta_{23}^2\frac{r_1}{r_{31}} - r_3r_1. \tag{39}$$

Инвариант центра сил треугольной ограниченной задачи трех тел (28) перепишем в виде

$$\Delta_{21} = \left(\frac{m_1}{m_3k}\right)^{1/3}\Delta_{23}. \tag{40}$$

Из формул (26) следуют модули радиус-векторов

$$r_1 = \frac{1}{1+k}r_{31}, \quad r_3 = \frac{k}{1+k}r_{31}. \tag{41}$$

Подставляя (40), (41) в правые части равенства (39), получим

$$r_2^2 = \left[\left(\frac{m_1}{m_3}\right)^{2/3}k^{1/3} + 1\right]\frac{\Delta_{23}^2}{1+k} - \frac{k}{(1+k)^2}r_{31}^2.$$

Отсюда следует

$$\Delta_{23}^3 = \frac{(k+1)^{3/2}}{\left(1 + (m_1/m_3)^{2/3}\,k^{1/3}\right)^{3/2}}\left(r_2^2 + \frac{k}{(k+1)^2}r_{31}^2\right)^{3/2}. \tag{42}$$

С учетом последнего выражения (42) уравнения движения (38) окончательно имеют вид

$$\ddot{\vec{r}}_2 + \frac{\mu_2}{(r_2^2 + \sigma_2^2 r_{31}^2)^{3/2}}\vec{r}_2 = \vec{W}; \tag{43}$$

$$\mu_2 = f\frac{\left(m_3^{2/3} + m_1^{2/3}k^{1/3}\right)^{3/2}}{(1+k)^{1/2}}; \quad \sigma_2^2 = \frac{k}{(k+1)^2}. \tag{44}$$

Уравнения (40), (43)-(44) и (36), где нет никаких ограничений относительно параметра k выбранного, согласно (25), назовем *базовой формой* дифференциальных уравнений движения *треугольной ограниченной задачи трех тел* в специальной неинерциальной центральной системе координат. Причем из (31) следует, что $\vec{W} = \vec{W}\,(W_x,\, W_y,\, 0)$.

Полученные уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел отличаются от известных форм уравнений движения ограниченной задачи трех тел и могут быть исследованы различными известными методами. Эти уравнения получены без ограничения при решении (29)-(31) дифференциального уравнения задачи двух основных тел (14). Поэтому они могут быть использованы при исследовании эллиптической, параболической и гиперболической ограниченной задач трех тел.

В скалярной форме базовые дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}_2 + \frac{\mu_2}{\left(r_2^2 + \sigma_2^2 r_{31}^2\right)^{3/2}} x_2 = W_x, \quad \ddot{y}_2 + \mu_2 \frac{y_2}{\left(\sigma_2^2 r_{31}^2 + r_2^2\right)^{3/2}} = W_y, \quad \ddot{z}_2 + \mu_2 \frac{z_2}{\left(\sigma_2^2 r_{31}^2 + r_2^2\right)^{3/2}} = 0; \tag{45}$$

$$\begin{aligned} W_x &= -f\frac{(m_1 - km_3)}{k+1}\frac{x_{31}}{r_{31}^3} + 2\dot{x}_{31}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+k}\right) + x_{31}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1+k}\right); \\ W_y &= -f\frac{(m_1 - km_3)}{k+1}\frac{y_{31}}{r_{31}^3} + 2\dot{y}_{31}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+k}\right) + y_{31}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1+k}\right). \end{aligned} \tag{46}$$

Инвариант центра сил (40) перепишем в виде

$$\left(x_2 - \frac{1}{1+k}x_{31}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{1}{1+k}y_{31}\right)^2 + z_2^2 =$$

$$= \left(\frac{m_1}{km_3}\right)^{2/3}\left[\left(x_2 + \frac{k}{1+k}x_{31}\right)^2 + \left(y_2 + \frac{k}{1+k}y_{31}\right)^2 + z_2^2\right]. \tag{47}$$

Система уравнений (45)-(46) и (47) содержит четыре неизвестные скалярные величины x_2, y_2, z_2, k, поэтому эти четыре скалярные уравнения представляют собой замкнутую систему уравнений.

2.2 Дифференциальные уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат в пульсирующих переменных

В общем случае $\vec{r}_2 = \vec{r}_2\,(x_2,\, y_2,\, z_2)$. Рассмотрим уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел (45)-(47) в специальной неинерциальной центральной системе координат в общем случае, когда

$$k = k\,(t) \neq const. \tag{48}$$

2.2.1 Уравнения движения во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат

Обозначим

$$D_2 = 2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+k}\right), \quad E_2 = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1+k}\right), \quad B_2 = -f\frac{m_1 - km_3}{k+1}. \tag{49}$$

Из (46) следует

$$\begin{aligned} W_x &= B_2\frac{x_{31}}{r_{31}^3} + D_2\dot{x}_{31} + E_2 x_{31}; \\ W_y &= B_2\frac{y_{31}}{r_{31}^3} + D_2\dot{y}_{31} + E_2 y_{31}. \end{aligned} \tag{50}$$

С учетом этих обозначений из дифференциальных уравнений движения (45) получим

$$\ddot{x}_2 + \frac{\mu_2 x_2}{(r_2^2 + \sigma_2^2 r_{31}^2)^{3/2}} = B_2\frac{x_{31}}{r_{31}^3} + D_2\dot{x}_{31} + E_2 x_{31}, \quad \ddot{y}_2 + \frac{\mu_2 y_2}{(r_2^2 + \sigma_2^2 r_{31}^2)^{3/2}} = B_2\frac{y_{31}}{r_{31}^3} + D_2\dot{y}_{31} + E_2 y_{31}; \tag{51}$$

$$\ddot{z}_2 + \frac{\mu_2 z_2}{(r_2^2 + \sigma_2^2 r_{31}^2)^{3/2}} = 0. \tag{52}$$

Эти уравнения, согласно решению задачи двух тел (29)–(31) описывают эллиптическую (в частности, круговую), гиперболическую, параболическую треугольную ограниченную задачу трех тел.

Переходим к вращающейся системе координат $G\xi_{вр}\eta_{вр}\zeta_{вр}$. Переход к вращающейся системе координат определяется формулами [1, 2, 9]

$$x_2 = \xi_{вр}\cos\theta - \eta_{вр}\sin\theta, \quad y_2 = \xi_{вр}\sin\theta + \eta_{вр}\cos\theta, \quad z_2 = \zeta_{вр}; \tag{53}$$

$$r_2^2 = \xi_{вр}^2 + \eta_{вр}^2 + \zeta_{вр}^2 = \rho_{вр}^2,$$

где $\theta = \theta\,(t)$ определяется решением задачи двух тел (29)-(31). Вычисляя, получим

$$\ddot{x}_2 = \left(\ddot{\xi}_{вр} - 2\dot{\theta}\dot{\eta}_{вр} - \dot{\theta}^2\xi_{вр} - \ddot{\theta}\eta_{вр}\right)\cos\theta - \left(\ddot{\eta}_{вр} + 2\dot{\theta}\dot{\xi}_{вр} - \dot{\theta}^2\eta_{вр} + \ddot{\theta}\xi_{вр}\right)\sin\theta;$$

$$\ddot{y}_2 = \left(\ddot{\eta}_{вр} + 2\dot{\theta}\dot{\xi}_{вр} - \dot{\theta}^2\eta_{вр} + \ddot{\theta}\xi_{вр}\right)\cos\theta + \left(\ddot{\xi}_{вр} - 2\dot{\theta}\dot{\eta}_{вр} - \dot{\theta}^2\xi_{вр} - \ddot{\theta}\eta_{вр}\right)\sin\theta,$$

$$\ddot{z}_2 = \ddot{\zeta}_{вр}.$$

Пусть новая ось $G\xi_{вр}$ все время проходит через точки с массами m_1 и m_3.

В результате получим уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел *во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат* в виде

$$\begin{aligned} &\ddot{\xi}_{вр} - 2\dot{\theta}\dot{\eta}_{вр} - \dot{\theta}^2\xi_{вр} - \ddot{\theta}\eta_{вр} + \frac{\mu_2}{\left(\rho_{вр}^2 + r^2\sigma_2^2\right)^{3/2}}\xi_{вр} = \frac{B_2}{r^2} + D_2\dot{r} + E_2 r; \\ &\ddot{\eta}_{вр} + 2\dot{\theta}\dot{\xi}_{вр} - \dot{\theta}^2\eta_{вр} + \ddot{\theta}\eta_{вр} + \frac{\mu_2}{\left(\rho_{вр}^2 + r^2\sigma_2^2\right)^{3/2}}\eta_{вр} = D_2 r\dot{\theta}; \end{aligned} \tag{54}$$

$$\ddot{\zeta}_{вр} + \frac{\mu_2}{\left(\rho_{вр}^2 + r^2\sigma_2^2\right)^{3/2}}\zeta_{вр} = 0. \tag{55}$$

Инвариант центра сил (47) преобразуется к виду

$$\left(\xi_{вр} - \frac{1}{1+k}r\right)^2 + \eta_{вр}^2 + \zeta_{вр}^2 = \left(\frac{m_1}{km_3}\right)^{2/3}\left[\left(\xi_{вр} + \frac{k}{1+k}r\right)^2 + \eta_{вр}^2 + \zeta_{вр}^2\right]. \tag{56}$$

2.2.2 Уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел в безразмерных пульсирующих переменных во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат

Переходим к пульсирующим координатам ξ, η, ζ с новой независимой переменной θ по формулам [1, 2, 9]

$$\xi = \frac{\xi_{вр}}{r}, \quad \eta = \frac{\eta_{вр}}{r}, \quad \zeta = \frac{\zeta_{вр}}{r}, \quad d\theta = \frac{c}{r^2}dt, \tag{57}$$

$$\rho_{вр}^2 = r^2\rho^2, \quad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

где $r = r\,(t)$ и $\theta = \theta\,(t)$ определяются решением задачи двух тел (29)–(31). Вычисляя, получим

$$\dot{\xi}_{вр} = \dot{\theta}\left(r'\xi + r\xi'\right), \quad \ddot{\xi}_{вр} = \dot{\theta}\left(\dot{\theta}'\left(r'\xi + r\xi'\right) + \dot{\theta}\left(r''\xi + 2r'\xi' + r\xi''\right)\right);$$

$$\dot{\eta}_{вр} = \dot{\theta}\left(r'\eta + r\eta'\right), \quad \ddot{\eta}_{вр} = \dot{\theta}\left(\dot{\theta}'\left(r'\eta + r\eta'\right) + \dot{\theta}\left(r''\eta + 2r'\eta' + r\eta''\right)\right);$$

$$\ddot{\zeta}_{вр} = \dot{\theta}\left(\dot{\theta}'\left(r'\zeta + r\zeta'\right) + \dot{\theta}\left(r''\zeta + 2r'\zeta' + r\zeta''\right)\right).$$

В этих аналитических выражениях и далее штрихом обозначается дифференцирование по переменной θ.

Учитывая соотношения

$$2r'\dot{\theta} + \dot{\theta}'r = 0, \quad \dot{\theta}r'' + \dot{\theta}'r' - \dot{\theta}r = -\frac{c}{p},$$

получим преобразованные *дифференциальные уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел в пульсирующих переменных во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат*

$$\xi'' - 2\eta' - \frac{1}{1+e\cos\theta}\left(1 - \frac{A}{\left(\rho^2 + \sigma_2^2\right)^{3/2}}\right)\xi = \frac{1}{1+e\cos\theta}B + s''; \tag{58}$$

$$\eta'' + 2\xi' - \frac{1}{1+e\cos\theta}\left(1 - \frac{A}{\left(\rho^2 + \sigma_2^2\right)^{3/2}}\right)\eta = 2s'; \tag{59}$$

$$\zeta'' + \frac{1}{1+e\cos\theta}\left(e\cos\theta + \frac{A}{(\rho^2+\sigma_2^2)^{3/2}}\right)\zeta = 0, \tag{60}$$

где обозначены безразмерные величины

$$A = \frac{\mu_2}{\mu} = \frac{\left[m_3^{2/3} + m_1^{2/3}k^{1/3}\right]^{3/2}}{(1+k)^{1/2}(m_1+m_3)} = \frac{\left[1+\nu^{2/3}k^{1/3}\right]^{3/2}}{(1+k)^{1/2}(1+\nu)} = \frac{\left(s^{1/3}+\nu^{2/3}(1-s)^{1/3}\right)^{3/2}}{1+\nu} > 0; \tag{61}$$

$$B = \frac{B_2}{\mu} = \frac{km_3 - m_1}{(k+1)(m_1+m_3)} = \frac{k-\nu}{(k+1)(1+\nu)} = \frac{1-s(1+\nu)}{1+\nu}, \tag{62}$$

$$s = \frac{1}{1+k}, \quad \nu = \frac{m_1}{m_3} = const > 0, \quad \sigma_2^2 = s - s^2. \tag{63}$$

Инвариант центра сил треугольной ограниченной задачи трех тел (56) в пульсирующих переменных ξ, η, ζ, с учетом обозначения (63), можно написать в виде

$$(\xi-\xi_1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\nu s}{1-s}\right)^{2/3}\left[(\xi-\xi_3)^2+\eta^2+\zeta^2\right]; \tag{64}$$

$$\xi_1 = s \neq const, \quad \xi_3 = -(1-s) \neq const.$$

Полученная форма инварианта центра сил треугольной ограниченной задачи трех тел (64), записанная в пульсирующих переменных, удобна для качественных исследований треугольной ограниченной задачи трех тел.

Отметим, что выведенные три дифференциальные уравнения (58)–(60) и одно алгебраическое уравнение (64) могут содержать четыре переменные ξ, η, ζ и s, поэтому система замкнутая.

Полученные дифференциальные уравнения движения (58)–(60) треугольной ограниченной задачи трех тел, соответствующие параметру $k = k(t) \neq const$, в специальной неинерциальной центральной системе координат в пульсирующих переменных (57) и алгебраическое уравнение (64) удобны для установления точных частных решений. В эти уравнения входит массовый параметр ν, согласно обозначению (63).

Как показывает анализ уравнений (27), (45)–(47), для исследования полученных базовых дифференциальных уравнений движения треугольной ограниченной задачи трех тел в новой специальной неинерциальной центральной системе координат удобно различать случаи $k = m_1/m_3 = const$, $k = const \neq m_1/m_3$ и $k = k(t)$.

3 Коллинеарная ограниченная задача трех тел

3.1 Базовое дифференциальное уравнение движения коллинеарной ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат

Рассмотрим случай (22)

$$r_2\sin\alpha = 0, \quad \left(\frac{m_3}{\Delta_{23}^3}r_3 - \frac{m_1}{\Delta_{21}^3}r_1\right) \neq 0. \tag{65}$$

Из первого равенства следует, что в этом случае три тела все время движения лежат на одной и той же прямой. Эта прямая все время движения находится на фиксированной плоскости движения основных двух тел (31). Поэтому $z_2 = 0$, то есть *коллинеарная ограниченная задача трех тел плоская.* В случае

$$r_2 = 0 \tag{66}$$

безмассовое тело лежит в начале системы координат. Если

$$r_2 \neq 0, \quad \sin\alpha = 0, \tag{67}$$

то возможно три комбинации расположения трех тел на одной прямой. Используя соотношения (26)

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{1+k}\vec{r}_{31}; \quad \vec{r}_3 = -\frac{k}{1+k}\vec{r}_{31},$$

преобразуем аналитическое выражение (35) для $\vec{F}_2$. В результате получим

$$\vec{F}_2 = -f\left(\frac{m_3}{\Delta_{23}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{21}^3}\right)\vec{r}_2 - f\left(\frac{km_3}{(1+k)\Delta_{23}^3} - \frac{m_1}{(1+k)\Delta_{21}^3}\right)\vec{r}_{31}. \tag{68}$$

Таким образом, дифференциальные уравнения движения ограниченной задачи трех тел (34)-(36) в специальной неинерциальной центральной системе координат в случае *коллинеарной ограниченной задачи трех тел* имеет вид

$$\ddot{\vec{r}}_2 + f\left(\frac{m_3}{\Delta_{23}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{21}^3}\right)\vec{r}_2 + f\left(\frac{km_3}{(1+k)\Delta_{23}^3} - \frac{m_1}{(1+k)\Delta_{21}^3}\right)\vec{r}_{31} = \vec{W}; \tag{69}$$

$$\vec{W} = -f\frac{(m_1 - km_3)}{k+1}\frac{\vec{r}_{31}}{r_{31}^3} - \frac{2}{1+k}\left(\frac{\dot{k}}{1+k}\right)\dot{\vec{r}}_{31} - \frac{1}{1+k}\left(\frac{\ddot{k}}{1+k} - 2\frac{\dot{k}^2}{(1+k)^2}\right)\vec{r}_{31}. \tag{70}$$

Полученное дифференциальное уравнение движение (69) назовем *базовым дифференциальным уравнением* движения коллинеарной ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат.

Заключение

В настоящей работе аналитически исследована пространственная ограниченная задача трех тел в новой специальной неинерциальной центральной системе координат с началом в центре сил. Получены новые результаты:

1. Выведено новое основное дифференциальное уравнение движения ограниченной задачи трех тел. В новой системе координат найдено аналитическое выражение инварианта центра сил.

2. Исходя из свойства инварианта центра сил ограниченной задачи трех тел, в новой системе координат на уровне дифференциальных уравнений движения задача разделена на две отдельные задачи: *треугольная* ограниченная задача трех тел и *коллинеарная* ограниченная задача трех тел. Получены различные базовые дифференциальные уравнения движения этих двух задач.

3. Выведены дифференциальные уравнения движения треугольной ограниченной задачи трех тел во вращающейся специальной неинерциальной центральной системе координат в пульсирующих переменных.

4. Выведены дифференциальные уравнения *коллинеарной* ограниченной задачи трех тел в неинерциальной центральной системе координат с использованием инварианта центра сил.

Полученные новые дифференциальные уравнения движения ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной центральной системе координат могут быть эффективно использованы при исследовании этой задачи и открывают новые перспективы.

Предложенный метод может быть модифицирован для исследования неограниченной и ограниченной задачи $n\,(n \geq 3)$ тел. Полученные результаты также могут быть использованы в гомографической динамике [4].

В перспективе планируются детальный анализ полученных новых дифференциальных уравнений движения ограниченной задачи трех тел и установление новых точных частных решений этой задачи. Основная идея настоящей работы и предварительные результаты были изложены в работах [13–17].

Список литературы

1 Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел / В.Себехей. — М.: Наука, 1982. — 656 с.

2 Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике / А.П.Маркеев. — М.: Наука, 1978. — 312 с.

3 Dvorak R. Celestial Dynamics. Chaoticity and Dynamics of Celestial Systems / R.Dvorak, Ch.Lhotka. — Germany: Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2013. — 309 p.

4 Гребеников Е.А. Математические проблемы гомографической динамики / Е.А.Гребеников. — М.: МАКС Пресс, 2010. — 256 с.

5 Морбиделли А. Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы / А.Морбиделли. — М.-Ижевск: Институт комплексных исследований, 2014. — 432 с.

6 Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты / А.Д.Брюно. — М.: Наука, 1990. — 295 с.

7 Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики / А.Уинтнер. — М.: Наука, 1967. — 524 с.

8 Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы / Г.Н.Дубошин. — 2-е изд. — М.: Наука, 1978. — 456 с.

9 Маршал К. Задача трех тел / К.Маршал. — М.-Ижевск: Институт комплексных исследований, 2004. — 640 с.

10 Лукьянов Л.Г. Лекции по небесной механике / Л.Г.Лукьянов, Г.И.Ширмин. — Алматы: Эверо, 2009. — 277 с.

11 Холшевников К.В. Задача двух тел / К.В.Холшевников, В.Б.Титов. — СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2007. — 180 с.

12 Атанасян Л.С. Геометрия / Л.С.Атанасян, В.Ф Бутузов, Ю.А.Глазков. — 5-е. изд. — М.: Вита-Пресс, 2005. — 176 с.

13 Минглибаев М.Дж. К равнобедренной ограниченной задаче трех тел / М.Дж.Минглибаев, Т.М.Жумабек // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. — 2016. — № 6(310). — С. 67–73.

14 Жумабек Т.М. Об одном частном случае плоской ограниченной задачи трех тел / Т.М.Жумабек, М.Дж.Минглибаев // Математический журнал. Институт математики и математического моделирования. — 2016. — Т. 16, № 4(62). — С. 99-120.

15 Минглибаев М.Дж. Новые точные частные решения ограниченной задачи трех тел / М.Дж.Минглибаев, Т.М.Жумабек // Актуальные проблемы математики и информатики: тезисы докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения академика НАН РК К.А. Касымова. — Алматы, 2015. — С. 86–88.

16 Минглибаев М.Дж. Новые уравнения движения ограниченной задачи трех тел в специальной неинерциальной системе координат / М.Дж.Минглибаев, Т.М.Жумабек // Вестн. КазНПУ им.Абая. Серия физ.-мат. науки. — 2015. — № 1(49). — С. 62–68.

17 Минглибаев М.Дж. Новые уравнения движения неограниченной и ограниченной задачи трех тел и их точные решения / М.Дж.Минглибаев, Т.М.Жумабек // Актуальные проблемы математики и математического моделирования: тезисы докл. Междунар. науч. конф. — Алматы, 2015. — С. 347–349.

М.Ж. Минглибаев, Т.М. Жұмабек, Г.М. Маемерова

Арнайы инерциалды емес центрлік координата жүйесінде шектелген үш дене мәселесін зерттеу

Мақалада кеңістікте классикалық шектелген үш дене мәселесі аналитикалық түрде зерттелген. Жаңа арнайы инерциалды емес центрлік координата жүйесі енгізілген. Бұл координата жүйесінің бас нүктесі зерттеліп жатқан мәселенің күш центрімен сәйкес келеді. Арнайы инерциалды емес центрлік координата жүйесінде шектелген үш дене мәселесінің жаңа базалық дифференциалдық теңдеулері алынды. Жаңа координата жүйесінде күш центрі инвариантының аналитикалық өрнегі табылды. Енгізілген координата жүйесінде шектелген үш дене мәселесі екі бөлек мәселе ретінде қарастырылған және осы екі мәселенің базалық дифференциалдық теңдеулері алынды. Арнайы инерциалды емес центрлік координата жүйесінде қарастырылып жатқан мәселені бұлай екіге бөлудің дұрыстығы осы координата жүйесінде табылған күш центрінің инвариантымен дәлелденеді. Біріншісі – үш дене қозғалыстың барлық кезінде үшбұрыш жасайтын үшбұрышты шектелген үш дене мәселесі. Екіншісі – үш дене қозғалыстың барлық мезетінде бір түзудің бойында жататындай коллинеарлы шектелген үш дене мәселесі. Айналмалы арнайы инерциалды емес центрлік координата жүйесінде пульсациялаушы айнымалыларда үшбұрышты шектелген үш дене мәселесінің дифференциалдық қозғалыс теңдеулері алынды. Сондай инерциалды емес центрлік координата жүйесінде коллинеарлы шектелген үш дене мәселесінің дифференциалдық теңдеулері табылды. Арнайы инерциалды емес центрлік координата жүйесінде алынған шектелген үш дене мәселесінің дифференциалдық теңдеулердің жаңа түрлері бұл мәселені зерттеуде жаңа мүмкіндіктер ашады.

Кілт сөздер: шектелген үш дене есебі, инерциалды емес координата жүйесі, күштер центрінің инварианттары, тең бүйірлі шешімдер, либрация нүктелері.

M.Zh. Minglibayev, T.M. Zhumabek, G.M. Mayemerova

Investigation of the restricted three-body problem in a special non-inertial central coordinate system

In this work we analytically investigated the spatial classical restricted three-body problem. A new special non-inertial central coordinate system has been introduced. The origin of the introduced coordinate system coincides with center of forces of the investigated problem. In the special non-inertial central coordinate system are obtained new basic differential equations of motions of the restricted three-body problem. In the new coordinate system is found the analytic expression for the invariant of the center of forces. In the introduced coordinate system the restricted three-body problem is divided into two separate problems, and various basic differential equations of these two problems are obtained . The correctness of such division of the investigated problem into two is provided by the invariant of the center of force finding in the same coordinate system. The first is a triangular restricted three-body problem when three bodies form a triangle at all time of motion. The second is a collinear restricted three-body problem when three bodies lie on the same line at all time of motion. The differential equations of motion of the triangular restricted three-body problem in the rotational special non-inertial central coordinate system in pulsating variables are derived separately. Also the differential equations of the collinear restricted three-body problem in the non-inertial central coordinate system are obtained separately. The new obtained forms of differential equations of the restricted three-body problem in the special non-inertial coordinate system open the new perspectives in the investigation of this problem.

Keywords: restricted three-body problem, non-inertial coordinate system, invariant of the center of forces, isosceles solutions, libration points.

References

1 Shebehely, V. (1982). *Teoriya orbit. Ohranichennaia zadacha treh tel [The theory of orbits. The limited three-body problem].* Moscow: Nauka [in Russian].

2 Markeev, A.P. (1978). *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike [Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics].* Moscow: Nauka [in Russian].

3 Dvorak, R. & Lhotka, Ch. (2013). *Celestial Dynamics. Chaoticity and Dynamics of Celestial Systems.* Germany: Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA.

4 Grebenikov, Ye.A. (2010). *Matematicheskiie problemy homohraficheskoi dinamiki [Mathematical problems of homographic dynamics].* Moscow: MAX Press [in Russian].

5 Morbidelli, A. (2014). *Sovremennaia nebesnaia mekhanika. Aspekty dinamiki Solnechnoi sistemy [Modern celestial mechanics. Aspects of the dynamics of the solar system].* Moscow-Izhevsk: Institut kompleksnykh issledovanii [in Russian].

6 Bryuno, A.D. (1990). *Ohranichennaia zadacha trekh tel. Ploskiie periodicheskiie orbity [The limited three-body problem. Flat periodic orbits].* Moscow: Nauka [in Russian].

7 Wintner, A. (1967). *Analiticheskiie osnovy nebesnoi mekhaniki [Analytical Foundations of Celestial Mechanics].* Moscow: Nauka [in Russian].

8 Duboshin, G.N. (1978). *Nebesnaia mekhanika. Analiticheskiie i kachestvennyie metody [Celestial mechanics. Analytical and qualitative methods].* Moscow: Nauka [in Russian].

9 Marshal, K. (2004). *Zadacha trekh tel [The three-body problem].* Moscow-Izhevsk: Institut kompleksnykh issledovanii [in Russian].

10 Luk'yanov L.G. & Shirmin G.I. (2009). *Lektsii po nebesnoy mekhanike [Lectures on celestial mechanics].* Almaty: Evero [in Russian].

11 Kholshevnikov, K.V. & Titov, V.B. (2007). *Zadacha dvukh tel [The two-body problem].* Sankt-Peterburg: Izdatelstvo Sankt Peterburhskoho Universiteta [in Russian].

12 Atanasyan, L.S., Butuzov, V.F., & Glazkov, Iu.A. (2005). *Heometriya [Geometry].* Moscow: Vita-Press [in Russian].

13 Minglibayev, M.Zh. & Zhumabek, T.M. (2016). K ravnobedrennoi ohranichennoi zadache trekh tel [To an isosceles bounded three-body problem]. *Izvestiia NAN RK. Seriia fiziko-matematicheskaia – Proceedings of NAS RK. Physics and mathematics series, 6(310),* 67–73 [in Russian].

14 Minglibayev, M.Zh. & Zhumabek, T.M. (2016). Ob odnom chastnom sluchae ploskoi ogranichennoi zadachi trekh tel [On a particular case of a plane bounded three-body problem]. *Matematicheskii zhurnal. Institut matematiki i matematicheskoho modelirovaniia – Matematicheskii zhurnal. Institute of Mathematics and Mathematical Model- tion, 16,* 4(62), 99–120 [in Russian].

15 Minglibayev, M.Zh. & Zhumabek, T.M. (2015). Novye tochnye chastnye resheniia ohranichennoi zadachi trekh tel [New exact particular solutions of the restricted three-body problem]. Proceedings from Actual problems of mathematics and computer science '15: *Mezhdunarodnaia nauchnaia konferentsiia, posvyashchennaya 80-letiyu so dnya rozhdeniya akademika NAN RK K.A. Kasymova* (pp. 86–88). Almaty [in Russian].

16 Minglibayev, M.Zh. & Zhumabek, T.M. (2015). Novye uravneniia dvizheniia ohranichennoi zadachi trekh tel v spetsialnoi neinertsialnoi sisteme koordinat [New equations of motion for a bounded three-body problem in a special noninertial coordinate system]. *Vestnik KazNPU imeni Abaia. Seriia Fiziko-matematicheskie nauki – Bulletin of Abay KazNPU. Series of Physics and Mathematics, 1(49),* 62–68 [in Russian].

17 Minglibayev, M.Zh. & Zhumabek, T.M. (2015). Novye uravneniia dvizheniia neohranichennoi i ohranichennoi zadachi trekh tel i ikh tochnye resheniia [New equations of motion for an unbounded and bounded three-body problem and their exact solutions]. Proceedings from Actual problems of mathematics and mathematical modeling: *Mezhdunarodnaia nauchnaia konferentsiia.* (pp. 347–349). Almaty [in Russian].

UDC 539.3 (043.3)

A.Zh. Seytmuratov[1], B.M. Nurlanova[2], N.K. Medeubaev[2]

[1] *Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kazakhstan;*
[2] *Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan*
(E-mail: angisin_@mail.ru)

Equations of vibration of a two-dimensionally layered plate strictly based on the decision of various boundary-value problems

In this paper, the theory of oscillation of laminated plates of building structures is developed, which is rigorously grounded in the formulation of various boundary-value oscillation problems. When studying the oscillation of plates, the exact three-dimensional problem is replaced by a simpler, two-dimensional problem for the points of the middle plane of the plate, which imposes restrictions on the external conditions. These limitations boil down to the fact that external forces can not be high-frequency. Since the general equations of plate oscillation, the resulting wound contain derivatives of any order in terms of coordinates x, y and time t, are structured and therefore not suitable for solving applied problems and performing engineering calculations. For this, it is necessary to formulate approximate boundary-value oscillation problems.

Keywords: vibrations, a plate, a deformable medium, an elastic and viscoelastic medium.

Introduction. Materials used in building structures have elastic and viscoelastic properties, are anisotropic, multilayered and with other mechanical characteristics. Flat elements are components of many designs. The construction of general and approximate equations of oscillation of various types of flat elements presents an actual problem in the development of the theoretical foundations for calculating building structures and construction in general. Such problems include the problems of improving the models of the nonstationary nature of structures and their elements, the materials of which exhibit complex mechanical, rheological properties inherent in various building structures under the influence of various external factors.

In this paper, the theory of oscillation of laminated plates of building structures is developed, which is rigorously grounded in the formulation of various boundary-value oscillation problems.

Main part. Suppose that an infinite plate in thickness $2h_1$ is under the surface of a semi-infinite medium at depth $(h_0 - h_1)$. Plane XY will be placed in the middle plane of the plate at $z = 0$. The axis OZ is directed toward the outer surface of the outer layer. Denote the parameters of the layer by the index «1» , the upper layer $[-\infty < (x, y) < \infty; h_1 \leq z \leq (h_0 - h_1)]$ will be denoted by the index «2», and the lower half-space $[-\infty < (x, y) < \infty; -h_1 \leq z \leq 0]$ by the index «3».

We assume that the materials of the upper layer, plates and bases are homogeneous, isotropic, exhibit viscous properties.

We introduce the potentials $\Phi^{(l)}$ and $\Psi^{(l)}$ of longitudinal transverse waves in accordance with the well-known formulas

$$\vec{u}^{(l)} = grad\Phi^{(l)} + rot\vec{\Psi}^{(l)}, \tag{1}$$

where $\vec{u}^{(l)}$ — vectors of displacement of points in a layer, plates and bases.

In the potentials $\Phi^{(l)}$ and $\Psi^{(l)}$, the equations of motion of the layer, the plate and the base take the form:

$$N_l(\triangle\Phi^{(l)}) = \rho_l \frac{\partial^2 \Phi^{(l)}}{\partial t^2}, \quad M_l(\triangle\vec{\Psi}^{(l)}) = \rho_l \frac{\partial^2 \Psi^{(l)}}{\partial t^2}, \tag{2}$$

where the operator N_l is:

$$N_l = L_l + 2M_l.$$

$\triangle$-three-dimensional Laplace operator

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

L_l, M_l — viscoelastic operators.

By the Helmholtz theorem, in the absence of internal sources, the vector potential $\vec{\Psi}$ of transverse waves must satisfy the condition:

$$div\vec{\Psi}^{(l)} = 0, \tag{3}$$

which is the closing equation for finding four unknown potentials $\Phi^{(l)}, \Psi_1^{(l)}, \Psi_2^{(l)}, \Psi_3^{(l)}$.

The displacements $u,\ v,\ w$, deformations ε_{ij} and stresses in Cartesian coordinates through the potentials Φ and $\vec{\Psi}$ of longitudinal and transverse waves are determined from known formulas.

In [1] it is shown that the boundary problem oscillation plate located beneath the surface, reduces to a solution of integro-differential equations (2) at the boundary and initial conditions: the outer surface ($z = h_0$)

$$\sigma_{zz}^{(2)} = f_z^{(2)}(x,y,t); \quad \sigma_{jz}^{(2)} = f_{zj}^{(2)}(x,y,t); \tag{4}$$

at the contact boundary, the top layer-plate ($z = h_1$)

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}; \quad \sigma_{jz}^{(1)} = 0; \quad \sigma_{jz}^{(2)} = 0; \quad w^{(1)} = w^{(2)}; \tag{5}$$

at the plate boundary, the base ($z = -h_1$)

$$\begin{gathered} \sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(3)} + f_{3z}^{(3)}(x,y,t); \\ \sigma_{jz}^{(1)} = 0; \quad \sigma_{ij}^{(3)} + f_{zj}^{(3)}(x,y,t) = 0; \\ w^{(1)} = w^{(3)} + f_0^{(3)}(x,y,t) \quad (j = x,y). \end{gathered} \tag{6}$$

In addition, the damping conditions at infinity must be satisfied, i.e. $z \to -\infty \quad \Phi^{(3)} = 0$;

$$\Psi_1^{(3)} = \Psi_2^{(3)} = \Psi_3^{(3)} = 0. \tag{7}$$

The initial conditions are zero, i.e.

$$\Phi^{(l)} = \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\Psi}_j^{(l)}}{\partial t} = \vec{\Psi} = 0, \quad (l = \bar{1,3}), \quad t = 0 \quad (j = 1,2,3). \tag{8}$$

The problem of oscillation of a plate in a differentiable medium is reduced to the study of equation (2), which satisfies the boundary conditions (4), (5), (6) and the initial conditions (8).

When studying the oscillation of plates, the exact three-dimensional problem is replaced by a simpler, two-dimensional problem for the points of the middle plane of the plate, which imposes restrictions on the external conditions. These limitations boil down to the fact that external forces can not be high-frequency.

The problem formulated above is solved by applying Fourier transforms in X and Y and Laplace transforms in t.

The general solution formulated by the three-dimensional problem with zero initial conditions was found in [1], and general expressions for displacements and stresses were obtained.

$$u^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\left(\lambda_2^{(n)} + C_1 Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)U^{(l)} + C_1 Q_{1n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V^{(l)}}{\partial y} + W^{(l)}\right)\right]\frac{z^{2n}}{(2n)!}\right\} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\left(\lambda_2^{(n)} - D_1 Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)U_1^{(l)} - D_1 Q_{1n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_1^{(l)}}{\partial y} + \lambda_2^{(l)} W_1^{(l)}\right)\right]\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\};$$

$$v^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\left(\lambda_2^{(n)} + C_1 Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)V^{(l)} + C_1 Q_{1n}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U^{(l)}}{\partial x} + W^{(l)}\right)\right]\frac{z^{2n}}{(2n)!}\right\} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\left(\lambda_2^{(n)} - D_1 Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)V_1^{(l)} - D_1 Q_{1n}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_1^{(l)}}{\partial x} + \lambda_2^{(l)} W_1^{(l)}\right)\right]\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\};$$

$$w^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\left(\lambda_2^{(n)} + C_1 Q_{1n}\lambda_1^{(1)}\right)W^{(l)} + C_1 Q_{1n}\lambda_1^{(l)}\left(\frac{\partial U^{(l)}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(l)}}{\partial y}\right)\right]\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\left(\lambda_2^{(n)}-D_1Q_{1n}\lambda_2^{(1)}\right)W_1^{(l)}-D_1Q_{1n}\left(\frac{\partial U_1^{(l)}}{\partial x}+\frac{\partial V_1^{(l)}}{\partial y}\right)\right]\frac{z^{2n}}{(2n)!}\right\}; \tag{9}$$

$$C_1=1-\frac{N_1}{M_1};$$

$$Q_{1n}=\sum_{m=0}^{n-1}\lambda_1^{(n-m-1)}\cdot\lambda_2^{(m)};$$

$$D_1=1-\frac{M_1}{N_1},$$

where the operators $\lambda_1^{(1)}$ and $\lambda_2^{(1)}$ are equal

$$\lambda_1^{(1)}=\left[\rho_1N_1^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\triangle\right];$$

$$\lambda_2^{(1)}=\left[\rho_1M_1^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\triangle\right];$$

$$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{10}$$

$$\sigma_{xx}^{(l)}=M_1\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[(1-C_1)\lambda_2^{(n)}+C_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-2\lambda_2^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial U^{(l)}}{\partial x}+\right.\right.$$

$$\left.+\left[C_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-2\lambda_2^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-(1+C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\left(\frac{\partial V^{(l)}}{\partial y}+W^{(l)}\right)\right\}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[2D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+(1+\alpha D_1)\lambda_1^{(n)}\right]\frac{\partial U^{(l)}}{\partial x}+\right.$$

$$\left.\left.+\left[(1+\alpha D_1)\lambda_1^{(n)}-2D_1Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\left(\frac{\partial V_1^{(l)}}{\partial y}+\lambda_2^{(1)}W_1^{(l)}\right)\right\}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right];$$

$$\sigma_{yy}^{(l)}=M_1\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[(1+C_1)\lambda_2^{(n)}+C_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-2\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial V^{(l)}}{\partial y}+\right.\right.$$

$$\left.+\left[C_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-2\lambda_1^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-(1+C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\left(\frac{\partial V^{(l)}}{\partial x}+W^{(l)}\right)\right\}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[1+2D_1\lambda_1^{(n)}+2D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(n)}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right]\frac{\partial V^{(l)}}{\partial y}+\right.$$

$$\left.\left.+\left[(1+D_1)\lambda_1^{(n)}-2D_1Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\left(\frac{\partial U_1^{(l)}}{\partial x}+\lambda_2^{(1)}W_1^{(l)}\right)\right\}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right];$$

$$\sigma_{zz}^{(l)}=M_1\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[C_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-\Delta\right)-(1+C_1)\lambda_2^{(n)}\right]\left(\frac{\partial U^{(l)}}{\partial x}+\frac{\partial V^{(l)}}{\partial y}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\left[(1+C_1)\lambda_2^{(n)}+C_1Q_{1n}(\lambda_2^{(1)}-\Delta)W^{(1)}\right\}\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{-\left[2D_1Q_{1n}\lambda_2^{(1)}+\lambda_1^{(n)}\right]\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{\partial U_1^{(l)}}{\partial x}+\frac{\partial V_1^{(l)}}{\partial y}\right)+\lambda_2^{(1)}\left[\lambda_1^{(n)}+2D_1Q_{1n}\Delta\right]W_1^{(1)}\right\}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right];$$

$$\sigma_{xy}^{(l)}=M_1\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[2C_1Q_{1n}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda_2^{(n)}\right]\frac{\partial V_1^{(l)}}{\partial y}+\left[\lambda_2^{(n)}+2C_1Q_{1n}\frac{\partial^2W^{(1)}}{\partial x\partial y}\right]\right\}\times\right.$$

$$\times\frac{z^{(2n)}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\lambda_1^{(n)}+D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial U_1^{(l)}}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\left[D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\lambda_1^{(n)}\right]\frac{\partial V_1^{(l)}}{\partial x}-2D_1Q_{1n}\lambda_2^{(1)}\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial x\partial y}\right\}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\Bigg];$$

$$\sigma_{xz}^{(l)}=M_1\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[C_1\left[2\lambda_1^{(1)}Q_{1n}+\lambda_2^{(n)}\right]\frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x\partial y}+\left[2C_1Q_{1n}\lambda_1^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.+\lambda_2^{(n)}\left[(1-C_1)\lambda_1^{(1)}-C_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]V^{(1)}+\left[(1+C_2)\lambda_2^{(n)}+2C_1Q_{1n}\lambda_1^{(1)}\right]\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x}\right\}\times$$

$$\times\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\Bigg]+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)D_1Q_{1n}+\lambda_1^{(n)}\right]V_1^{(1)}-\right.$$

$$\left.-2D_1Q_{1n}\frac{\partial^2 V_1^{(1)}}{\partial x\partial y}-\left[D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-\Delta\right)-\lambda_1^{(n)}\right]\frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial x}\right\}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\Bigg];$$

$$\sigma_{yz}^{(l)}=M_1\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[C_1\left[2\lambda_1^{(1)}Q_{1n}+\lambda_2^{(n)}\right]\frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial x\partial y}+\left[2C_1Q_{1n}\lambda_1^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.+\lambda_2^{(n)}\left[(1-C_1)\lambda_1^{(1)}-C_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]V^{(1)}+\left[2C_1Q_{1n}\lambda_1^{(1)}+(1+C_2)\lambda_2^{(n)}\right]\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x}\right\}\times$$

$$\times\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\Bigg]+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)D_1Q_{1n}+\lambda_1^{(n)}\right]V_1^{(1)}-\right.$$

$$\left.-2D_1Q_{1n}\frac{\partial^2 V_1^{(l)}}{\partial x\partial y}-\left[D_1Q_{1n}\left(\lambda_2^{(1)}-\Delta\right)-\lambda_1^{(n)}\right]\frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial x}\right\}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\Bigg],\qquad(11)$$

where the unknowns $U^{(1)},V^{(1)},W_1^{(1)}$ are the tangents and normal displacements of the points of the plane $z=0$ and the points of the middle plane of the plate, $U_1^{(1)},V_1^{(1)},W^{(1)}$ — the values of the derivatives along Z the transverse displacement or the values of the strain type (the deformation at $Z=0$).

In this case, the operators $\lambda_1^{(2)}$, $\lambda_2^{(1)}$ are two-dimensional integro-differential, describing the propagation of longitudinal and transverse waves in the plane $z=0$.

To find the unknowns $U^{(1)}$, $V^{(1)}$, $W_1^{(1)}$, $U_1^{(1)}$, $V_1^{(1)}$, $W^{(1)}$ we have the boundary conditions (4)–(6).

Using expressions (9) and (11) for stresses and displacements, substituting these expressions into the boundary conditions (4)–(6), equations are obtained for determining the unknown functions that are general solutions of the formulated problem and describing the vibrations of the three-dimensional medium.

To study the oscillations of rectangular plates in the plan, it is necessary to formulate boundary value problems.

Under the boundary-value problems of oscillation of a bounded plate in a plane located below the surface, we mean the derivation of the oscillation equation for the plates; the formulation of the boundary conditions along the edges of the plate and the initial conditions for the functions.

Since the general equations of plate oscillations obtained by the author [2] contain derivatives of any order in coordinates x,y and time t, are structured and therefore not suitable for solving applied problems and performing engineering calculations. For this, it is necessary to formulate approximate boundary-value oscillation problems.

In [3] an approximate equation of the transverse vibration of the plate was obtained for the transverse displacement $W_1^{(1)}$ of the middle plane of the plate in the form

$$A_1\left(\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial t^2}\right)+A_2\left(\frac{\partial^4 W_1^{(1)}}{\partial t^4}\right)+A_3\left(\Delta\ \frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial t^2}\right)+A_4(\Delta^3\ W_1^{(1)})+P(W_1^{(1)})=\Phi(x,y,t),\qquad(12)$$

where $A_j,P,\Phi(x,y,t)$ are equal

$$A_1=\rho_1M^{-1}h_1+\rho_2N_2^{-1}(h_0-h_1);$$

$$A_2 = \rho_1^2 M_1^{-1}(N_1^{-1} + 3M_1^{-1})\frac{h_1^3}{6} + \rho_2 N_2^{-1}\left[\rho_2 N_2^{-1}\frac{(h_0-h_1)^3}{6} - \rho_1 N_1^{-1}\frac{h_1^2(h_0-h_1)}{2}\right];$$

$$A_3 = \left[(3-4M_2N_2^{-1})\frac{(h_0-h_1)^3}{6} - (2M_1N_1^{-1})\frac{h_1^2(h_0-h_1)}{2}\right]\rho_2 N_2^{-1} - 2\rho_1(3M_1^{-1} - 2N_1^{-1})\frac{h_1^3}{3};$$

$$A_4 = 4(1-M_1N_1^{-1})\frac{h_1^3}{3} - 4(1-M_2N_2^{-1})(M_2N_2^{-1})\frac{(h_0-h_1)^3}{6};$$

$$P = \frac{S}{2}\rho_1 M_1\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \frac{h_1^2}{2}\left[\rho_1(M_1^{-1}+3N_1^{-1})\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3}\right) - 4\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\triangle\right] + 2(M_1N_1^{-1})(\rho_2N_2^{-1})\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3}\right)h_1(h_0-h_1)\right\};$$

$$\Phi(x,y,t) = \left[1-(3-2M_1N_1^{-1})\frac{h_1^2}{2}\triangle + (\rho_1M_1^{-1})\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{h_1^2}{2}\right]\times$$

$$\times\left\{F_3 + M_2^{-1}f_z^{(3)}\left[(M_1N_1^{-1})(\rho_2N_2^{-1})\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3}\right)(h_0-h_1)h_1\right]\right\}. \qquad (13)$$

The reaction of the base P, is determined by the formula (13), contains both the velocity of the transverse displacements of the plane $z=0$ and the odd time derivatives.

Thus, the law of resistance $P(W_1^{(1)})$ (13) explicitly contains the parameters of the plate, the base and the upper layer.

Despite the fact that equation (12) is approximate, it is rather complicated. The operators (13) contain all the parameters and operators that characterize both the mechanical and rheological properties of the materials of the plates, the layers and the base and their thickness.

We derive the boundary conditions along the edges of the rectangular plate. For simplicity, let us consider a plane boundary $x = const$, for boundary conditions $y = const$, it is easy to write from the conditions for $x = const$, and for an arbitrary curvilinear boundary, using known formulas, through the boundary conditions at $x = const$, $y = const$.

The boundary conditions will be derived from the theory of thick plates or plates. Based on their boundary conditions on the surface of the plate $z = h$ or $z = -h$ obtain the dependence of the quantities $u_1^{(1)}, V_1^{(1)}$ on the transverse displacement $W_1^{(1)}$.

$$u_1^{(1)} = -\frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial x}; \qquad V_1^{(1)} = -\frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial y}. \qquad (14)$$

Hard edge fixing $x = const$. As is known from the theory of thick plates, there are two possible types of such fixation

$$u_1^{(1)} = v_1^{(1)} = w_1^{(1)} = 0 \qquad (15)$$

or

$$u_1^{(1)} = w_1^{(1)} = \sigma_{xy}^{(1)} = 0. \qquad (16)$$

Hingelessly supported edge $x = const$.

There are also two types of fastening for this fastening.

$$u_1^{(1)} = w_1^{(1)} = \sigma_{xx}^{(1)} = 0 \qquad (17)$$

or

$$w_1^{(1)} = \sigma_{xx}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(1)} = 0. \qquad (18)$$

A stress-free edge.

For a free edge, the strict conditions have the form

$$\sigma_{xx}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(1)} = 0. \qquad (19)$$

The rigid and hinged fastening is fairly simple and, using approximate expressions (13) and (15), for transverse displacement we obtain the boundary conditions:
for rigid fixing

$$W_1^{(1)} = \frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial x} = 0, \qquad (20)$$

for articulation

$$W_1^{(1)} = \frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial x^2} = 0. \tag{21}$$

Consider a free edge. Using the first two conditions (19) and approximate expressions for the displacements u, v, w and the stresses σ_{ij} obtained in [6], we obtain

$$(2+3D_1)\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial x^2} + (1+D_1)\left[2\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial y^2} - \rho M^{-1}\left(\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial t^2}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2\triangle W_1^{(1)} - \rho M^{-1}\left(\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial t^2}\right)\right] = 0. \tag{22}$$

Substituting the second derivative of $W_1^{(1)}$ with respect to time from the first expression (22) to the second, we obtain

$$(2+3D_1)\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial x^2} + (1+D_1)\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial y^2} - \rho(1+D_1)M^{-1}\left(\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial t^2}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial^3 W_1^{(1)}}{\partial x^3} = 0. \tag{23}$$

The third of the conditions (19) gives $\frac{\partial^3 W_1^{(1)}}{\partial x^3} = F(t)$, that is, in the first approximation $\frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial x}$ does not depend on y and is determined after solving a particular problem.

The first term in (23) differs from the classical one, and the second term coincides. The first condition (23) takes into account the deformability of the edge over time and is analogous to the d'Alembert principle for the dynamics of a material point.

The general initial conditions for a plate as a three-dimensional body have the form:

$$u^{(1)} = v^{(1)} = w^{(1)} = 0; \qquad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial w^{(1)}}{\partial t} = 0; \quad (t=0). \tag{24}$$

Using the relations (14) for displacements, we have

$$u^{(1)} = -\frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial x} z + D_1 \frac{\partial}{\partial x}\triangle W_1^{(1)} \frac{z^3}{6};$$

$$v^{(1)} = -\frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial y} z + D_1 \frac{\partial}{\partial y}\triangle W_1^{(1)} \frac{z^3}{6}; \tag{25}$$

$$w^{(1)} = W_1^{(1)} + \left[(2D_1 - 1)\triangle W_1^{(1)} + (1-D_1)\rho M^{-1}\frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial t^2}\right]\frac{z^2}{2}.$$

In the beginning, we consider the initial conditions from (24) for the displacements themselves. Then from expressions (25) we obtain

$$\frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial x}\triangle W_1^{(1)} = 0;$$

$$\frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\triangle W_1^{(1)} = 0; \tag{26}$$

$$W_1^{(1)} = 0; \qquad \frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial t^2} = 0. \tag{27}$$

Differentiating (25) with respect to u, using the second triple of initial conditions (24), we similarly obtain

$$\frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial^3 W_1^{(1)}}{\partial t^3} = 0. \tag{28}$$

The initial conditions (26) and (27) give the necessary number of initial conditions for the transverse displacement $W_1^{(1)}$ of the fourth-order coordinate and time satisfying the hyperbolic equation.

Conclusions. The derivation of the boundary and initial conditions for the plate under the surface completely coincides with the analogous boundary initial conditions for the free plate, obtained in [2].

Thus, in formulating boundary value problems, the boundary conditions do not depend on the presence of the upper layer and the lower base.

References

1 Филиппов И.Г. Динамическая теория устойчивости стержней / И.Г.Филиппов, С.И.Филиппов // Теоретические основы строительства: Труды Российско-Польского семинара. — Варшава, 1995. — С. 63–69.

2 Brunelle E.J. Buskling of transversely isotopic Mindlen plates / E.J.Brunelle // AIAA 1977, Vol. 9, No. 6. — P. 1018–1022.

3 Сейтмуратов А.Ж. Определение частоты собственных колебаний пластинки / А.Ж.Сейтмуратов // Вестн. Казахского национального ун-та. Серия математика, механика, информатика. — 2010. — № 4(67).

А.Ж. Сейтмуратов, Б.М. Нурланова, Н.К. Медеубаев

Әртүрлі шеттік есептердің қойылымымен қатаң негізделген екі өлшемді қатпарлы пластинканың тербеліс теңдеулері

Мақалада тербелістің әртүрлі шеттік есептерінің қойылымымен қатаң негізделген құрылыс конструкцияларындағы қатпарлы пластинкалардың тербеліс теориясы қарастырылды. Пластина тербелісін зерттегенде дәл үш өлшемді есеп пластинканың орта жазықтығының нүктелері үшін сыртқы әсерлерге шектеулер қоятын аса қарапайым, екі өлшемді есепке алмастырылды. Бұл шектеулер сыртқы әсерлердің жоғары жиілікте бола алмайтындығына келтіріледі. Алдында алынған пластина тербелісінің жалпы теңдеулерінің x, y координаталары және t уақыт бойынша кез келген ретті туындылары бар болғандықтан, құрылымы бойынша күрделі болып табылады. Сондықтан қолданбалы есептерді шығару және инженерлік есептеулер жүргізу үшін олар қажет емес. Ол үшін тербелістің жуық шеттік есептерін тұжырымдау керек.

Кілт сөздер: жоғары жиілік, қолданбалы есеп, өзгеріске ұшырайтын, серпімді орта, тербеліс теориясы.

А.Ж. Сейтмуратов, Б.М. Нурланова, Н.К. Медеубаев

Уравнения колебания двумерной слоистой пластинки, строго обоснованные постановкой различных краевых задач

В статье развита теория колебания слоистых пластинок строительных конструкций, строго обоснованая постановкой различных краевых задач колебания. При исследовании колебания пластин точная трехмерная задача заменяется более простой, двумерной для точек срединной плоскости пластинки, что накладывает ограничения на внешние условия. Эти ограничения сводятся к тому, что внешние усилия не могут быть высокочастотными. Так как общие уравнения колебания пластин, полученные ранее, содержат производные любого порядка по координатам x, y и времени t , сложны по структуре и потому не пригодны для решения прикладных задач и проведения инженерных расчетов. Для этого необходимо сформулировать приближенные краевые задачи колебания.

Ключевые слова: вибрации, пластины, деформируемая среда, теория колебания слоистых пластинок.

References

1 Filippov, I.G. & Filippov, S.I. (1995). Dinamicheskaia teoriia ustoichivosti sterzhnei [The dynamic stability theory of rods]. *Teoreticheskie osnovy stroitelstva – Theoretical fundamentals of construction,* 63–69. Warsaw [in Russian].

2 Brunelle, E.J. (1977). Buskling of transversely isotopic Mindlen plates. *AIAA, Vol. 9,* 6, 1018–1022.

3 Seytmuratov, A.Zh. (2010). Opredelenie chastoty sobstvennykh kolebanii plastinki [Determination of the natural frequency of the plate]. *Vestnik Kazakhskoho natsionalnoho universiteta. Seriia matematika, mekhanika, informatika – Bulletin of the Kazakh National University. Series mathematics, mechanics, computer science, 4(67)* [in Russian].

UDC 512.552

U. Turusbekova, G. Azieva

Kazakh University of Economics, Finance and International Trade, Astana, Kazakhstan
(E-mail: umut.t@mail.ru)

The automorphism group of Poisson algebras on $k\,[x, y]$

Poisson algebras play a key role in the Hamiltonian mechanics, symplectic geometry and also are central in the study of quantum groups. At present, Poisson algebras are investigated by the many mathematicians of Russia, France, the USA, Brazil, Argentina, Bulgaria etc. The purpose of the present paper is to describe the automorphism groups of polynomial algebras endowed with additional structure, namely, with Poisson brackets. For any $f \in k\,[x, y]$ one can transform associative-commutative algebra $k\,[x, y]$ into a Poisson algebra P_f by defining a Poisson bracket by the rule $\{x, y\} = f$. Obviously, a structure of the automorphism group G_f of Poisson algebra P_f depends on the element f. A complete description of group G_f is given for the polynomial f of rank less or equals to 1. In present paper all algebras are considered over any field k of characteristic 0.

Keywords: Poisson algebras, polynomial algebras, automorphisms, additional structure.

Introduction

It is known [1–4] that the automorphisms of polynomial algebras $k\,[x, y]$ and free associative algebras $k\,\langle x, y\rangle$ in two variables are products of affine automorphisms

$$\varphi = (\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \beta_1, \alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \beta_2)\,, \alpha_{ij}, \beta_j \in k,$$

and triangular automorphisms

$$\psi = (\alpha_1 x + f\,(y)\,, \alpha_2 y + \beta_2)\,, \alpha_1, \alpha_2 \in k^*, f\,(y) \in k\,[y]\,, \beta_2 \in k$$

i.e are *tame*.

In work [5] is proved that the automorphisms of two-generated free Poisson algebras $k\,\{x, y\}$ over a field k of characteristic 0 are time. Moreover [1, 4, 5], the automorphism groups of algebras $k\,[x, y]$, $k\,\langle x, y\rangle$, $k\,\{x, y\}$ are isomorphic, i.e.

$$Aut\,k[x_1, x_2] \cong Aut\,k < x_1, x_2 > \cong Aut\,k\{x_1, x_2\}.$$

The purpose of the present paper is to describe the automorphism groups of polynomial algebras endowed with additional structure, namely, with Poisson brackets. For any $f \in k\,[x, y]$ one can transform associative-commutative algebra $k\,[x, y]$ into a Poisson algebra P_f by defining a Poisson bracket by the rule $\{x, y\} = f$. Obviously, a structure of the automorphism group G_f of Poisson algebra P_f depends on the element f. A complete description of group G_f is given for the polynomial f of rank less or equals to 1.

In section 2 we introduce the basic definitions, examples of Poisson algebras and collect the informations necessary for the further work. In section 3 we study the automorphism group of Poisson algebra P_f.

In present paper all algebras are considered over any field k of characteristic 0.

Poisson brackets on $k\,[x, y]$

Recall that a vector space P over a field K endowed with two bilinear operations $x \cdot y$ (a multiplication) and $\{x, y\}$ (a Poisson bracket) is called *a Poisson algebra* if P is a commutative associative algebra under $x \cdot y$, P is a Lie algebra under $\{x, y\}$, and P satisfies the following identity

$$\{x, y \cdot z\} = \{x, y\} \cdot z + y \cdot \{x, z\}.$$

There are two important classes of Poisson algebras.

1. Symplectic algebras S_n. For each n the algebra S_n is a polynomial algebra $k[x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n]$, endowed with the Poisson bracket defined by $\{x_i, y_j\} = \delta_{ij}$, $\{x_i, x_j\} = 0$, $\{y_i, y_j\} = 0$, where δ_{ij} is the Kronecker symbol and $1 \leq i, j \leq n$.

2. Symmetric Poisson algebras $PS(L)$. Let L be a Lie algebra with a linear basis $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots$. Then $PS(L)$ is the usual polynomial algebra $K[e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots]$ endowed with the Poisson bracket defined by $\{e_i, e_j\} = [e_i, e_j]$ for all i, j, where $[x, y]$ is the multiplication of the Lie algebra L.

Let's consider the algebra $k\left[x, y\right]$. Let $f \in k\left[x, y\right]$. For any $a, b \in k\left[x, y\right]$ we put

$$\{a, b\} = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}\right) f. \tag{1}$$

Lemma 1. The bracket $\{\cdot, \cdot\}$ sets up the structure of Poisson algebra on polynomial algebra $k\left[x, y\right]$.

Proof. For any $a, b, c \in k\left[x, y\right]$ it's enough to verify the Leibniz identity and Jacobi identity:

$$\{a \cdot b, c\} = \{a, c\}\, b + a\, \{b, c\},$$

$$\{\{a, b\}, c\} + \{\{b, c\}, a\} + \{\{c, a\}, b\} = 0.$$

Initially we verify the implementation of the Leibniz identity. Using a formula (1) we have

$$\{a \cdot b, c\} = \left(\frac{\partial\left(ab\right)}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial\left(ab\right)}{\partial y}\right) f = \left(\left(\frac{\partial a}{\partial x}b + a\frac{\partial b}{\partial x}\right)\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial x}\left(\frac{\partial a}{\partial y}b + a\frac{\partial b}{\partial y}\right)\right) f =$$

$$= \left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y}b + a\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}b - a\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}\right) f =$$

$$= \left(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}\right) fb + a\left(\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}\right) f = \{a, c\}\, b + a\, \{b, c\}.$$

Now we verify the implementation of the Jacobi identity. If $a \in k$ then the equation is obvious. If $a = x$ then using a formula (1) we get

$$\{\{x, b\}, c\} + \{\{b, c\}, x\} + \{\{c, x\}, b\} = \left\{\frac{\partial b}{\partial y}f, c\right\} + \left\{\left(\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial x}\right) f, x\right\} -$$

$$- \left\{\frac{\partial c}{\partial y}f, b\right\} = \left\{\frac{\partial b}{\partial y}f, c\right\} + \left\{\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y}f, x\right\} - \left\{\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial x}f, x\right\} - \left\{\frac{\partial c}{\partial y}f, b\right\} =$$

$$= \left\{\frac{\partial b}{\partial y}f, c\right\} + \left\{\frac{\partial b}{\partial x}, x\right\}\frac{\partial c}{\partial y}f + \frac{\partial b}{\partial x}\left\{\frac{\partial c}{\partial y}f, x\right\} - \left\{\frac{\partial b}{\partial y}, x\right\}\frac{\partial c}{\partial x}f - \frac{\partial b}{\partial y}\left\{\frac{\partial c}{\partial x}f, x\right\} -$$

$$- \left\{\frac{\partial c}{\partial y}f, b\right\} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial b}{\partial y}f\right)\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial b}{\partial y}f\right)\frac{\partial c}{\partial x}\right) f - \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y}\frac{\partial c}{\partial y}f^2 - \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y}f\right) f +$$

$$+ \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}\frac{\partial c}{\partial x}f^2 + \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial x}f\right) f - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial y}f\right)\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y}f\right)\frac{\partial b}{\partial x}\right) f =$$

$$= \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y}\frac{\partial c}{\partial y}f^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial y}f - \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}f^2 - \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial y}f - \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y}\frac{\partial c}{\partial y}f^2 -$$

$$- \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}f^2 - \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial y}f + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}\frac{\partial c}{\partial x}f^2 + \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y}f^2 + \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial x}f -$$

$$- \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y}\frac{\partial b}{\partial y}f^2 - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial y}f + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\frac{\partial b}{\partial x}f^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial x}f = 0.$$

Suppose that $deg\left(a\right) \geq 2$. Then can be considered that $a = a^{'} \cdot x$, $deg\left(a^{'}\right) < deg\left(a\right)$. We have

$$\left\{\left\{a^{'} \cdot x, b\right\}, c\right\} + \left\{\{b, c\}, a^{'} \cdot x\right\} + \left\{\left\{c, a^{'} \cdot x\right\}, b\right\} = \left\{\left\{a^{'}, b\right\} x + a^{'}\, \{x, b\}, c\right\} +$$

$$+\left\{\{b,c\},a^{'}\right\}x+a^{'}\{\{b,c\},x\}+\left\{\left\{c,a^{'}\right\}x+a^{'}\{c,x\},b\right\}=\left\{\left\{a^{'},b\right\}x,c\right\}+$$

$$+\left\{a^{'}\{x,b\},c\right\}+\left\{\{b,c\},a^{'}\right\}x+a^{'}\{\{b,c\},x\}+\left\{\left\{c,a^{'}\right\}x,b\right\}+\left\{a^{'}\{c,x\},b\right\}=$$

$$=\left\{\left\{a^{'},b\right\},c\right\}x+\left\{a^{'},b\right\}\{x,c\}+\left\{a^{'},c\right\}\{x,b\}+a^{'}\{\{x,b\},c\}+\left\{\{b,c\},a^{'}\right\}x+$$

$$+a^{'}\{\{b,c\},x\}+\left\{\left\{c,a^{'}\right\},b\right\}x+\left\{c,a^{'}\right\}\{x,b\}+\left\{a^{'},b\right\}\{c,x\}+a^{'}\{\{c,x\},b\}=$$

$$=\left(\left\{\left\{a^{'},b\right\},c\right\}+\left\{\{b,c\},a^{'}\right\}+\left\{\left\{c,a^{'}\right\},b\right\}\right)x+$$

$$+a^{'}\left(\{\{x,b\},c\}+\{\{b,c\},x\}+\{\{c,x\},b\}\right)=0.\ \square$$

Poisson algebra on $k[x,y]$ given by the Poisson bracket (1) we denote by P_f. Note that

$$\{x,y\}=f. \tag{2}$$

The automorphism group

The element g of polynomial algebra $k[x_1,x_2,...,x_n]$ has the *rank* r (see the definition, for example in [6]) if the next two conditions are implemented:

1) there exists the automorphism φ of the algebra $k[x_1,x_2,...,x_n]$ such that $\varphi(g)\in k[x_1,x_2,...,x_r]$;

2) $\varphi(g)\notin k[x_1,x_2,...,x_{r-1}]$ not for any automorphism φ of the algebra $k[x_1,x_2,...,x_n]$.

The rank of the element g we denote by $rank\,(g)$. If $f\in k[x,y]$ then $rank\,(f)$ might receive the values 0, 1, 2. The rank of the algebra P_f is called the number $rank\,(f)$.

Note that $rank\,(f)=0$ if and only if $f\in k$. 2 cases are possible:

1) $f=0$; 2) $f\neq 0$.

If $f=0$ then Poisson bracket is zero. Therefore

$$Aut_kP_0\cong Aut_kk[x,y].$$

If $0\neq f=\alpha\in k$ then having exchanged the variables $x^{'}=\alpha^{-1}x$, $y^{'}=y$ can be considered that

$$\{x,y\}=1,$$

i.e. $P_\alpha\cong P_1$. Note that P_1 is symplectic algebra, i.e. isomorphic to the algebra S_1.

If φ – automorphism of algebra $k[x,y]$ then

$$\{\varphi(x),\varphi(y)\}=J(\varphi)\cdot\{x,y\},$$

where

$$J(\varphi)=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} & \frac{\partial\varphi(x)}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi(y)}{\partial x} & \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\end{vmatrix}$$

– Jacobian φ.

Therefore $\varphi\in Aut_kP_1$ if and only if

$$J(\varphi)=1.$$

Thus Aut_kP_1 consists subgroup $Aut_kk[x,y]$ with Jacobian 1. It is known [7] that such group isomorphic to the automorphism group of Weyl algebra W_1, i.e.

$$Aut_kP_1\cong Aut_kW_1.$$

Recall that Weyl algebra W_1 is associative algebra (with unit 1) with generators x,y and defining relation $[x,y]=1$.

Suppose that $rank\,(f)=1$. Then, by the rank definition, there exists the automorphism φ of the algebra $k[x,y]$ such that $\varphi(f)=g(x)\notin k$. Let's denote $x^{'}=\varphi^{-1}(x)$, $y^{'}=\varphi^{-1}(y)$. Therefore

$$\left\{x^{'},y^{'}\right\}=J\left(\varphi^{-1}\right)\cdot\{x,y\}=\gamma f(x,y)=\gamma\varphi^{-1}(g(x))=\gamma g\left(\varphi^{-1}(x)\right)=\gamma g\left(x^{'}\right)=g^{'}\left(x^{'}\right).$$

Thus $\left\{x^{'}, y^{'}\right\} = g^{'}\left(x^{'}\right)$. Having exchanged the variables $x^{'} = x$, $y^{'} = y$, can be considered that $\{x, y\} = = f(x) \notin k$.

Further we fix the polynomial $f \in k[x]$, $n = deg(f) \geq 1$.

Lemma 2. The map

$$\sigma_{\alpha,\beta,\gamma} : \begin{array}{l} x \rightarrow \alpha x + \beta \\ y \rightarrow \gamma y \end{array}$$

is automorphism of the algebra P_f if and only if the next conditions are implemented:

1) $\alpha \in k^*$, $\gamma = \alpha^{n-1}$;

2) *the set of roots of the polynomial $f(x)$ is invariant concerning the affine map*

$$\varphi_{\alpha,\beta} : z \mapsto \frac{z - \beta}{\alpha}$$

of the space $\bar{k}$, where $\bar{k}$ – algebraic closure of the field k.

Proof. The map $\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$ sets up the automorphism of algebra P_f if and only if $\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$ is the automorphism of polynomial algebra $k[x, y]$ and $\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$ retains the unique relation (2), i.e.

$$\{\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(x), \sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(y)\} = \sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(f).$$

Thus the map $\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$ is the automorphism if and only if $\alpha, \gamma \in k^*$ and

$$\alpha\gamma f(x) = f(\alpha x + \beta). \tag{3}$$

Let

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n, \quad a_n \neq 0.$$

Using the ratio (3) we get

$$\alpha\gamma\left(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n\right) = a_0 + a_1(\alpha x + \beta) + ... + a_n(\alpha x + \beta)^n.$$

Comparing the leading coefficients, from here we get $\alpha\gamma a_n = a_n \alpha^n$, i.e. $\gamma = \alpha^{n-1}$.

Let

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot ... \cdot (x - \alpha_n),$$

where $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \bar{k}$ – the roots of polynomial $f(x)$.

Then from the equation (3) follows that

$$a_n \alpha^n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot ... \cdot (x - \alpha_n) =$$

$$= a_n(\alpha x + \beta - \alpha_1)(\alpha x + \beta - \alpha_2) \cdot ... \cdot (\alpha x + \beta - \alpha_n) =$$

$$= a_n \alpha^n \left(x - \frac{\alpha_1 - \beta}{\alpha}\right)\left(x - \frac{\alpha_2 - \beta}{\alpha}\right) \cdot ... \cdot \left(x - \frac{\alpha_n - \beta}{\alpha}\right).$$

Therefore the affine map

$$\varphi_{\alpha,\beta} : z \mapsto \frac{z - \beta}{\alpha}$$

of the space $\bar{k}$ leaves the set of roots of the polynomial $f(x)$ is invariant. $\square$

Corollary 1. If the map $\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$ from the formulation of Lemma 2 is the automorphism of the algebra P_f then β, γ are uniquely determined by $\alpha \in k^*$.

Proof. Lemma 2 gives $\gamma = \alpha^{n-1}$. Comparing the coefficients at x^{n-1} from the equation (3) we get

$$\alpha\gamma a_{n-1} = \alpha^{n-1} a_{n-1} + n\alpha^{n-1}\beta a_n,$$

i.e.

$$\beta = \frac{(\alpha - 1) a_{n-1}}{n a_n}. \square$$

Since the automorphism $\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$ from Lemma 2 is uniquely determined by α then this automorphism further we denote by σ_α. By H we denote a subgroup of the group G_f, which consists all automorphisms σ_α, where $\alpha \in k^*$.

Lemma 3.

a) If the polynomial $f(x)$ has at least two different roots then the group H is finite.

b) If the polynomial $f(x)$ has a unique root then $H \cong k^*$.

Proof. By Lemma 2 the mapping $\varphi_{\alpha,\beta}$ commutes the roots of polynomial $f(x)$. Since $f(x)$ has no more than n different roots then there exists m such that $m \leq n$ and $\varphi^m_{\alpha,\beta}$ leaves all roots of polynomial $f(x)$ immobile. Direct calculations give

$$\varphi^m_{\alpha,\beta}(z) = \frac{z - \beta\left(1 + \alpha + ... + \alpha^{m-1}\right)}{\alpha^m}.$$

If the polynomial $f(x)$ has at least two different roots then from here follows $\varphi^m_{\alpha,\beta} = id$. Therefore $\alpha^m = 1$. Thus α might receive a finite set of values, i.e. the group H is finite.

Suppose that the polynomial $f(x)$ has a unique root α_1. Then

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1)^n.$$

By Viete formula we have

$$n\alpha_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Since the field k has a characteristic 0 then we get $\alpha_1 \in k$.

Show that

$$\alpha \in k^* \to \sigma_\alpha \in H$$

is isomorphism. It is sufficient to show that the equality $\sigma_{\alpha\alpha'} = \sigma_\alpha \sigma_{\alpha'}$ is implemented. Considering Corollary 1 we have

$$\sigma_{\alpha\alpha'}(x) = \alpha\alpha' x + \frac{\left(\alpha\alpha' - 1\right) a_{n-1}}{na_n},$$

$$\sigma_\alpha\sigma_{\alpha'}(x) = \sigma_\alpha\left(\alpha' x + \frac{\left(\alpha' - 1\right) a_{n-1}}{na_n}\right) = \alpha\alpha' x + \frac{\alpha\left(\alpha' - 1\right) a_{n-1}}{na_n} + \frac{(\alpha - 1) a_{n-1}}{na_n} =$$

$$= \alpha\alpha' x + \frac{\left(\alpha\alpha' - 1\right) a_{n-1}}{na_n},$$

i.e. $\sigma_{\alpha\alpha'}(x) = \sigma_\alpha\sigma_{\alpha'}(x)$. Also

$$\sigma_{\alpha\alpha'}(y) = (\alpha\alpha')^{n-1} y = \alpha^{n-1}\alpha'^{n-1} y,$$

$$\sigma_\alpha\sigma_{\alpha'}(y) = \sigma_\alpha\left(\alpha'^{n-1} y\right) = \alpha^{n-1}\alpha'^{n-1} y,$$

i.e. $\sigma_{\alpha\alpha'}(y) = \sigma_\alpha\sigma_{\alpha'}(y)$. $\square$

Let's consider the map

$$\tau: \begin{array}{l} x \to x \\ y \to y + h(x), \quad h(x) \in k[x]. \end{array}$$

The map τ is the automorphism of algebra P_f, since τ retains the unique relation (2), i.e.

$$\{\tau(x), \tau(y)\} = \tau(f).$$

We have

$$\{x, y + h(x)\} = f(x),$$

i.e.

$$\{x, y\} = f(x).$$

By T we denote a subgroup of the group G_f, which consists all automorphisms τ.

Theorem 1. The automorphism group G_f of Poisson algebra P_f, where $f = f(x)$ – a polynomial of rank 1, is a semi-direct product of H and T, i.e.

$$G_f \cong H \leftthreetimes T.$$

Proof. Initially we show that the group G_f is generated by automorphisms $\sigma_\alpha \in H$ and $\tau \in T$. Let's consider «commutator» ideal $C(P_f)$ of algebra P_f. Note that $C(P_f) = f(x) \cdot P_f$. The ideal $C(P_f)$ is characteristic, i.e. is invariant concerning all endomorphisms. Therefore for any $\varphi \in G_f$ we have

$$\varphi(f(x)) = f(x) \cdot b(x,y), \ \varphi^{-1}(f(x)) = f(x) \cdot c(x,y).$$

Then

$$f(x) = \varphi^{-1}(\varphi(f(x))) = \varphi^{-1}(f(x) \cdot b(x,y)) = \varphi^{-1}(f(x)) \cdot \varphi^{-1}(b(x,y)) =$$
$$= f(x) \cdot c(x,y) \cdot \varphi^{-1}(b(x,y)).$$

From here $c(x,y) \cdot \varphi^{-1}(b(x,y)) = 1$, i.e. $c(x,y), b(x,y) \in k^*$. Therefore

$$\varphi(f(x)) = \lambda f(x), \ \lambda \in k^*.$$

Thus $f(\varphi(x)) = \lambda f(x)$. From here we get $deg(\varphi(x)) = 1$, i.e.

$$\varphi(x) = \alpha x + \beta, \ \alpha \in k^*, \ \beta \in k.$$

Let

$$\varphi(y) = \sum_{i \geq 0} y^i g_i(x) = g_0(x) + \sum_{i \geq 1} y^i g_i(x).$$

Using the ratio $\{\varphi(x), \varphi(y)\} = \varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$ we get

$$\left\{\alpha x + \beta, g_0(x) + \sum_{i \geq 1} y^i g_i(x)\right\} = \sum_{i \geq 1} \alpha \left\{x, y^i\right\} g_i(x) = f(\alpha x + \beta).$$

We have

$$\left\{x, y^i\right\} = i f(x) y^{i-1}.$$

Therefore

$$\sum_{i \geq 1} i \alpha f(x) y^{i-1} g_i(x) = f(\alpha x + \beta),$$

i.e. $i \alpha f(x) g_i(x) = 0$ at $i > 1$ and $\alpha f(x) g_1(x) = f(\alpha x + \beta)$.

From here we get $g_i(x) = 0$ at $i > 1$. Therefore

$$\varphi(y) = g_0(x) + \gamma y,$$

where $\gamma = g_1(x) \in k^*$. Thus we have

$$\varphi: \begin{array}{l} x \to \alpha x + \beta \\ y \to \gamma y + g(x), \quad g(x) \in k[x]. \end{array}$$

From here it is easy to derive that φ is represented in the form $\varphi = \sigma_\alpha \tau$, where $\sigma_\alpha \in H$ and $\tau \in T$.

Now for any $\sigma_\alpha \in G_f$ and $\tau \in T$ we have

$$\sigma_\alpha \tau \sigma_\alpha^{-1}(x) = \sigma_\alpha \tau \left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right) = \sigma_\alpha \left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right) = x \in T;$$

$$\sigma_\alpha \tau \sigma_\alpha^{-1}(y) = \sigma_\alpha \tau \left(\frac{y}{\gamma}\right) = \sigma_\alpha \left(\frac{y}{\gamma} + h(x)\right) = y + h'(x) \in T;$$

i.e. T – a normal subgroup of the group G_f.

Obviously $H \cap T = id$. Thus G_f is a semi-direct product of the groups H and T. □

References

1 Czerniakiewicz A.G. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2 / A.G.Czerniakiewicz; I, II, Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — 160. — P. 393–401; 1972. — 171. —P. 309–315.

2 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene / H.W.E.Jung // J. reine angew. Math. — 1942. — 184. — P. 161–174.

3 Van der Kulk W. On polynomial rings in two variables, Nieuw Archief voor Wiskunde / W.Van der Kulk. — 1953. — No. (3)1. — P. 33–41.

4 Макар-Лиманов Л.Г. Об автоморфизмах свободной алгебры с двумя образующими / Л.Г.Макар-Лиманов // Функциональный анализ и его приложения. — 1970. — Т. 4, № 3. — С. 107, 108; English translation: in Functional. Anal. Appl. — 1970. Vol. 4. — P. 262, 263.

5 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables / L.Makar-Limanov, U.Turusbekova, U.Umirbaev // Journal of Algebra. — 2009. — No. 322. — P. 3318–3330.

6 Makar–Limanov L. Equivalence of polynomials under automorphisms of $k[x, y]$ / L.Makar–Limanov, V.Shpilrain, J.–T.Yu. // J. Pure Appl. Algebra. — 2007. — Vol. 209, No. 1. — P. 71–78.

7 Makar–Limanov L. On automorphisms of Weyl algebra / L.Makar–Limanov // Bulletin de la SMF. — 1984. — Vol. 112. — P. 359–363.

Ү.Тұрысбекова, Г.Азиева

$k[x, y]$ көпмүшеліктер алгебрасындағы Пуассон алгебраларының автоморфизмдер тобы

Пуассон алгебралары Гамильтон механикасында, симплектикалық геометрияда, сонымен қатар кванттық топтарды зерттеуде маңызды рөл атқарады. Қазіргі уақытта Пуассон алгебраларын Ресей, Франция, АҚШ, Бразилия, Аргентина, Болгария және тағы басқа елдердің көптеген математиктері зерттеуде. Мақаланың мақсаты қосымша құрылымды, яғни Пуассон жақшасы берілген $k[x, y]$ көпмүшеліктер алгебрасынң автоморфизмдері тобын, зерттеу болып табылады. Кез келген $f \in k\,[x, y]$ үшін $k\,[x, y]$ ассоциативті-коммутативті алгебрасын, $\{x, y\} = f$ ережесі арқылы Пуассон жақшасын анықтай отырып, P_f Пуассон алгебрасына айналдыруға болады. P_f Пуассон алгебрасының G_f автоморфизмдері тобының құрылымын f-ке тәуелділігін зерттейміз. G_f тобының толық сипаттамасы рангі 1-ден кіші немесе тең f көпмүшелігі үшін келтірілген. Бұл жұмыста барлық алгебралар сипаттаушысы 0 болатын кез келген k өрісінде қарастырылды.

Кілт сөздер: Пуассон алгебралары, көпмүшеліктер алгебралары, автоморфизмдер, қосымша құрылым.

У.Турусбекова, Г.Азиева

Группа автоморфизмов алгебры Пуассона на $k[x, y]$

Алгебры Пуассона играют ключевую роль в гамильтоновой механике, симплектической геометрии и также являются центральными в изучении квантовых групп. В настоящее время алгебры Пуассона исследуются многими математиками России, Франции, США, Бразилии, Аргентины, Болгарии и т.д. Целью настоящей работы является исследование группы автоморфизмов алгебры многочленов $k[x, y]$ с дополнительной структурой, со скобкой Пуассона. Для любого $f \in k\,[x, y]$ ассоциативно-коммутативную алгебру $k\,[x, y]$ можно превратить в алгебру Пуассона P_f, определяя скобку Пуассона правилом $\{x, y\} = f$. Мы изучили строение группы автоморфизмов G_f алгебры Пуассона P_f в зависимости от f. Полное описание группы G_f приведено для многочлена f ранга меньше или равно 1. Все алгебры в данной работе рассмотрены над произвольным полем k характеристики 0.

Ключевые слова: алгебры Пуассона, алгебры многочленов, автоморфизмы, дополнительная структура.

References

1 Czerniakiewicz, A.G. (1971). *Automorphisms of a free associative algebra of rank 2*, I, II, Trans. Amer. Math. Soc., 160, 393–401; 1972, 171, 309–315.

2 Jung, H.W.E. (1942). Uber ganze birationale Transformationen der Ebene. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 184,* 161–174.

3 Van der Kulk, W. (1953). *On polynomial rings in two variables, Nieuw Archief voor Wiskunde, (3)1,* 33–41.

4 Makar-Limanov, L.G. (1970). Ob avtomorfizmakh svobodnoi alhebry s dvumia obrazuiushchimi [On automorphisms of a free algebra with two generators]. *Funktsionalnyi analiz i ego prilozheniia – Functional analysis and its applications, Vol. 4,* 3, 107, 108 [in Russian].

5 Makar-Limanov, L., Turusbekova, U. & Umirbaev, U. (2009). Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables. *Journal of Algebra, 322,* 3318–3330.

6 Makar–Limanov, L., Shpilrain, V. & Yu, J.–T. (2007). Equivalence of polynomials under automorphisms of $k[x, y]$. *J. Pure Appl. Algebra, Vol. 209,* 1, 71–78.

7 Makar–Limanov, L. (1984). On automorphisms of Weyl algebra. *Bulletin de la SMF, Vol. 112,* 359–363.

АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛIМЕТТЕР
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
INFORMATION ABOUT AUTHORS

Aitenova, M.S. — Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Karaganda Economical University of Kazpotrebsoyuz, Kazakhstan.

Akishev, G. — Doctor of physical and mathematical science, Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan; Institute of Mathematics and mathematical modeling SC MES RK, Almaty, Kazakhstan.

Arinov, E. — Candidate of physical and mathematical sciences, Doctor of physical and mathematical sciences, Professor of «Nature Science» Department, O.A.Baikonurov Zhezkazgan University, Kazakhstan.

Attaev, A.Kh. — Candidate of physical and mathematical sciences, Head of department computer-aided design mixed systems and control, Scientific research institute of applied mathematics and automation, Kabardino-Balkar scientific centre of the Russian academy of sciences, Nal'chik, Russia.

Azieva, G. — Master, Senior teacher of Department «Informatics and applied Economics», Kazakh University of Economics, Finance and International Trade, Astana, Kazakhstan.

Bakirova, E.A. — Candidate of physical and mathematical sciences, Leading Researcher, Associate Professor, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling SC MES RK, Almaty; Kazakh State Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan.

Beisenova, D.R. — Doctoral student, Faculty of Mechanics and Mathematics, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana; Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Bekjan, T.N. — Professor, Xinjiang University, Urumchi, China.

Fazylov, K.K. — PhD, Regional Cultural and Educational Center, Morden, Canada.

Ibraev, Sh.Sh. — Candidate of physical and mathematical science, Head of the department of Mathematics, Computer science, Information Systems and Design, «Bolashak» University, Kyzylorda, Kazakhstan; Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the SC MES RK, Almaty, Kazakhstan.

Iskakov, K.T. — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Iskakov, S.A. — PhD students of the 1st year of study, Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Iskakova, G.Sh. — Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department «Mathematical Analysis and Differential Equations», Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Kadirbayeva, Zh.M. — Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor, Leading Researcher, Senior teaching, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling SC MES RK, Almaty, Kazakh State Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan.

Karbenova, N.G. — Undergraduate, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Karipbaev, S.Zh. — PhD, Academy of Civil Aviation, Head of the Department, Aviation Technology and Technology, Almaty, Kazakhstan.

Khassenova, Z.T. — Doctoral student, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Kussainova, A.T. — Doctoral student, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Mayemerova, G.M. — PhD, Senior teacher, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.

Medeubaev, N.K. — Master of mathematics, Senior lecturer of the Chair of Professor T.G.Mustafin algebra, mathematical logic and geometry, Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Minglibayev, M.Zh. — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty; V.G.Fessenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan.

Nurlanova, B.M. — Master of engineering and technology, Senior lecturer of the Chair of Professor T.G.Mustafin algebra, mathematical logic and geometry, Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Ospanov, K.N. — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor of the department of fundamental mathematics, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Ramazanov, M.I. — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Sartayev, K.Z. — Higher Doctorate Technical sciences, Professor in the Department «Transport», K.I.Satpayev Ekibastuz engineering-technical institute, Kazakhstan.

Seytmuratov, A.Zh. — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Dean of the Pedagogical Faculty, Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kazakhstan.

Tleulesova, A.B. — Candidate of physical and mathematical sciences, Senior teaching, Associate Professor, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Turusbekova, U. — PhD, Senior teacher of Department «Informatics and applied Economics», Kazakh University of Economics, Finance and International Trade, Astana, Kazakhstan.

Yesbayeva, D.N. — Research assistant and translator for business development management, «Shanghai Factory-Amigo EC Technology» Co., Ltd, China.

Yeshkeyev, A.R. — Doctor of physical and mathematical science, Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Yessenbayeva, G.A. — Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Chair of Professor T.G.Mustafin algebra, mathematical logic and geometry, Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Zhetpisov, K. — Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of Information Systems, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Zhumabek, T.M. — Master student of the second course, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.