

ISSN 2518-7929



№ 2(86)/2017

МАТЕМАТИКА сериясы

Серия МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS Series

---

ҚАРАҒАНДЫ  
УНИВЕРСИТЕТІНІҢ  
ХАБАРШЫСЫ

ВЕСТНИК  
КАРАГАНДИНСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN  
OF THE KARAGANDA  
UNIVERSITY

ISSN 2518-7929

Индексі 74618

Индекс 74618

ҚАРАҒАНДЫ  
УНИВЕРСИТЕТІНІҢ  
ХАБАРШЫСЫ

---

ВЕСТНИК  
КАРАГАНДИНСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN  
OF THE KARAGANDA  
UNIVERSITY

---

МАТЕМАТИКА сериясы

Серия МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS Series

№ 2(86)/2017

Сәуір–мамыр–маусым

30 маусым 2017 ж.

Апрель–май–июнь

30 июня 2017 г.

April–May–June

June, 30, 2017

1996 жылдан бастап шығады

Издается с 1996 года

Founded in 1996

Жылына 4 рет шығады

Выходит 4 раза в год

Published 4 times a year

Қарағанды, 2017

Караганда, 2017

Karaganda, 2017

*Бас редакторы*

ЖМ ХҒА академигі, заң ғыл. д-ры, профессор

**Е.Қ.Көбеев**

*Бас редактордың орынбасары* **Х.Б.Омаров**, ҚР ҰҒА корр.-мүшесі,  
техн. ғыл. д-ры, профессор

*Жауапты хатшы* **Г.Ю.Аманбаева**, филол. ғыл. д-ры, профессор

*Редакция алқасы*

<b>А.Р.Ешкеев,</b>	ғылыми редактор физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
<b>М.Отелбаев,</b>	ҚР ҰҒА акад., физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
<b>Б.Р.Ракишев,</b>	ҚР ҰҒА акад., техн. ғыл. д-ры (Қазақстан);
<b>Т.Бекжан,</b>	профессор (Қытай);
<b>Б.Пуза,</b>	профессор (Франция);
<b>А.А.Шкаликов,</b>	физ.-мат. ғыл. д-ры (Ресей);
<b>А.С.Морозов,</b>	физ.-мат. ғыл. д-ры (Ресей);
<b>Г.Акишев,</b>	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
<b>Н.А.Бокаев,</b>	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
<b>М.Т.Дженалиев,</b>	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
<b>К.Т.Искаков,</b>	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
<b>Л.К.Кусаинова,</b>	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
<b>Е.Д.Нурсултанов,</b>	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
<b>М.И.Рамазанов,</b>	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
<b>Е.С.Смаилов,</b>	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
<b>У.У.Умербаев,</b>	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
<b>Н.Т.Орумбаева,</b>	жауапты хатшы физ.-мат. ғыл. канд. (Қазақстан)

*Редакцияның мекенжайы:* 100028, Қазақстан, Қарағанды қ., Университет к-сі, 28

Тел.: (7212) 77-03-69 (ішкі 1026); факс: (7212) 77-03-84.

E-mail: [vestnick\\_kargu@ksu.kz](mailto:vestnick_kargu@ksu.kz). Сайт: [vestnik.ksu.kz](http://vestnik.ksu.kz)

*Редакторы*

Ж.Т.Нурмуханова

*Компьютерде беттеген*

Г.Қ.Қалел

**Қарағанды университетінің хабаршысы. «Математика» сериясы.**

**ISSN 2518-7929.**

Меншік иесі: «Академик Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті» РММ.

Қазақстан Республикасының Мәдениет және ақпарат министрлігімен тіркелген. 23.10.2012 ж.

№ 13104–Ж тіркеу куәлігі.

Басуға 29.06.2017 ж. қол қойылды. Пішімі 60×84 1/8. Қағазы офсеттік. Көлемі 12,25 б.т. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша. Тапсырыс № 61.

Е.А.Бөкетов атындағы ҚарМУ баспасының баспаханасында басылып шықты.

100012, Қазақстан, Қарағанды қ., Гоголь к-сі, 38. Тел. 51-38-20. E-mail: [izd\\_kargu@mail.ru](mailto:izd_kargu@mail.ru)

© **Қарағанды мемлекеттік университеті, 2017**

*Главный редактор*  
академик МАН ВШ, д-р юрид. наук, профессор  
**Е.К.Кубеев**

*Зам. главного редактора*      **Х.Б.Омаров**, чл.-корр. НАН РК,  
д-р техн. наук, профессор  
*Ответственный секретарь*      **Г.Ю.Аманбаева**, д-р филол. наук, профессор

*Редакционная коллегия*

<b>А.Р.Ешкеев,</b>	научный редактор д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
<b>М.Отелбаев,</b>	акад. НАН РК, д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
<b>Б.Р.Ракишев,</b>	акад. НАН РК, д-р техн. наук (Казахстан);
<b>Т.Бекжан,</b>	профессор (Китай);
<b>Б.Пуаза,</b>	профессор (Франция);
<b>А.А.Шкаликов,</b>	д-р физ.-мат. наук (Россия);
<b>А.С.Морозов,</b>	д-р физ.-мат. наук (Россия);
<b>Г.Акишев,</b>	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
<b>Н.А.Бокаев,</b>	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
<b>М.Т.Дженалиев,</b>	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
<b>К.Т.Искаков,</b>	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
<b>Л.К.Кусаинова,</b>	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
<b>Е.Д.Нурсултанов,</b>	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
<b>М.И.Рамазанов,</b>	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
<b>Е.С.Смаилов,</b>	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
<b>У.У.Умербаев,</b>	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
<b>Н.Т.Орумбаева,</b>	ответственный секретарь канд. физ.-мат. наук (Казахстан)

*Адрес редакции:* 100028, Казахстан, г. Караганда, ул. Университетская, 28  
Тел.: (7212) 77-03-69 (внутр. 1026); факс: (7212) 77-03-84.  
E-mail: [vestnick\\_kargu@ksu.kz](mailto:vestnick_kargu@ksu.kz). Сайт: [vestnik.ksu.kz](http://vestnik.ksu.kz)

*Редактор*  
**Ж.Т.Нурмуханова**  
*Компьютерная верстка*  
**Г.К.Калел**

**Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика».**  
**ISSN 2518-7929.**

Собственник: РГП «Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова».  
Зарегистрирован Министерством культуры и информации Республики Казахстан. Регистрационное  
свидетельство № 13104-Ж от 23.10.2012 г.

Подписано в печать 29.06.2017 г. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная. Объем 12,25 п.л. Тираж 300 экз.  
Цена договорная. Заказ № 61.

Отпечатано в типографии издательства КарГУ им. Е.А.Букетова  
100012, Казахстан, г. Караганда, ул. Гоголя, 38, тел.: (7212) 51-38-20. E-mail: [izd\\_kargu@mail.ru](mailto:izd_kargu@mail.ru)

© Карагандинский государственный университет, 2017

*Main Editor*  
Academician of IHEAS, Doctor of Law, Professor  
**Ye.K.Kubeyev**

*Deputy main Editor*     **Kh.B.Omarov**, Corresponding member of NAS RK,  
Doctor of techn. sci., Professor  
*Responsible secretary*     **G.Yu.Amanbayeva**, Doctor of phylol. sci., Professor

*Editorial board*

<b>A.R.Yeshkeyev</b> ,	Science Editor Doctor of phys.–math. sciences (Kazakhstan);
<b>M.Otelbayev</b> ,	Academician NAS RK, Doctor of phys.–math. sciences (Kazakhstan);
<b>B.R.Rakishev</b> ,	Academician of NAS RK, Doctor of techn. sciences (Kazakhstan);
<b>T.Bekjan</b> ,	Professor (China);
<b>B.Poizat</b> ,	Professor (France);
<b>A.A.Shkalikov</b> ,	Dr. of phys.–math. sciences (Russia);
<b>A.S.Morozov</b> ,	Dr. of phys.–math. sciences. (Russia);
<b>G.Akishev</b> ,	Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);
<b>N.A.Bokaev</b> ,	Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);
<b>M.T.Jenaliyev</b> ,	Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);
<b>K.T.Iskakov</b> ,	Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);
<b>L.K.Kusainova</b> ,	Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);
<b>E.D.Nursultanov</b> ,	Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);
<b>M.I.Ramazanov</b> ,	Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);
<b>E.S.Smailov</b> ,	Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);
<b>U.U.Umerbaev</b> ,	Dr. of phys.–math. sciences (Kazakhstan);
<b>N.T.Orumbayeva</b> ,	Secretary cand. of phys.–math. sciences (Kazakhstan)

*Postal address:* 28, University Str., 100028, Kazakhstan, Karaganda  
Tel.: (7212) 77-03-69 (add. 1026); fax: (7212) 77-03-84.  
E-mail: vestnick\_kargu@ksu.kz. Web-site: vestnik.ksu.kz

*Editor*  
Zh.T.Nurmukhanova  
*Computer layout*  
G.K.Kalel

**Bulletin of the Karaganda University. «Mathematics» series.**  
**ISSN 2518-7929.**

Proprietary: RSE «Academician Ye.A.Buketov Karaganda State University».

Registered by the Ministry of Culture and Information of the Republic of Kazakhstan. Registration certificate No. 13104–Zh from 23.10.2012.

Signed in print 29.06.2017. Format 60×84 1/8. Offset paper. Volume 12,25 p.sh. Circulation 300 copies. Price upon request. Order № 61.

Printed in the Ye.A.Buketov Karaganda State University Publishing house.

38, Gogol Str., 100012, Kazakhstan, Karaganda, Tel.: (7212) 51-38-20. E-mail: izd\_kargu@mail.ru

© Karaganda State University, 2017

---

# МАЗМҰНЫ

## МАТЕМАТИКА

<i>Аттаев А.Х.</i> Жүктелген толқындық теңдеу үшін шеттік есептер .....	8
<i>Балланова М.Ж., Есенбаева Г.А., Таханов Д.К.</i> Шектік кернеулілік жағдайда бүйір қысым коэффициентін анықтау .....	14
<i>Бекжан Т.Н., Дженалиев М.Т., Ысқақов С.А., Рамазанов М.И.</i> Сингулярлы біртекті емес Вольterra интегралдық теңдеуінің шешімі жайлы .....	20
<i>Букенов М., Ибраев А., Жусупова Д., Азимова Д.</i> Сымның иілмелі тербеліс есебінің сандық шешімі .....	32
<i>Букетов А.В., Шарко А.В., Зинченко Д.А., Степанчиков Д.М.</i> Эпоксидті шайыр негізінде композитті материалдардың күрделі қосындыларын оңтайландыру мәселелері .....	37
<i>Викентьев А.А.</i> Білімдегі айырып тану, құрылым және жаңа үлгілі арақашықтық, есептеулердің машиналық жүзеге асуы .....	45
<i>Есенбаева Г.А., Кутимов К.С., Сажина Ж.Р., Сәрсенбек Ә.Ж.</i> Механикадағы тербелмелі процестерді зерттеу кезінде математикалық әдістерді қолдану қосымшасы туралы .....	55
<i>Ешкеев А.Р.</i> EPSCJ теориялардың централды-орбиталды түрлерінің қасиеттері .....	64
<i>Жакулина А.Ә., Жакулин Ә.С.</i> Бәсеңдеген жылжу үшін топырақ үлгісін таңдау және оны сипаттау әдістері .....	70
<i>Тюлюбергенов Р.К.</i> Сақинадағы барлық униүшбұрышты матрицалар тобының есептелінетін ішпотоптары туралы .....	74
<i>Қоңырханова Ә.Ә., Хисамиев Н.Г.</i> Униүшбұрышты матрицалар топтарының әмбебап элементтері .....	79
<i>Макажанова Т.Х., Базылжанова А.С., Ульбрихт О.И.</i> Көпбүйірлі конустың нормаль ішкі жиындарының құрылымы туралы .....	86
<i>Нугманова Г.Н., Сагидуллаева Ж.М.</i> Векторлық потенциалы бар жалпыланған спиндік үлгі және оның шешімі .....	91
АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР .....	97

---

# СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА

<i>Аттаев А.Х.</i> Краевые задачи для нагруженного волнового уравнения .....	8
<i>Балпанова М.Ж., Есенбаева Г.А., Таханов Д.К.</i> Расчет коэффициента бокового давления в условиях предельного напряженного состояния .....	14
<i>Бекжан Т.Н., Дженалиев М.Т., Исаков С.А., Рамазанов М.И.</i> К решению сингулярного неоднородного интегрального уравнения Вольтерра .....	20
<i>Букенов М., Ибраев А., Жусупова Д., Азимова Д.</i> Численное решение задачи об изгибном колебании стержня .....	32
<i>Букетов А.В., Шарко А.В., Зинченко Д.А., Степанчиков Д.М.</i> К вопросу оптимизации ингредиентов композитных материалов на основе эпоксидной смолы .....	37
<i>Викентьев А.А.</i> О машинных реализациях вычислений новых модельных расстояний, структуризаций и распознавания в знаниях .....	45
<i>Есенбаева Г.А., Кутимов К.С., Сажина Ж.Р., Сарсенбек А.Ж.</i> О применении математических методов к исследованию колебательных процессов в механике .....	55
<i>Ешкеев А.Р.</i> Свойства центрально-орбитальных типов EPSCJ теорий .....	64
<i>Жакулина А.А., Жакулин А.С.</i> Выбор грунтовой модели для затухающей ползучести и методы их описания .....	70
<i>Тюлюбергенов Р.К.</i> О вычислимых подгруппах группы всех унитарных матриц над кольцом .....	74
<i>Коньратанова А.А., Хисамиев Н.Г.</i> Универсальные элементы групп унитарных матриц .....	79
<i>Макажанова Т.Х., Базылжанова А.С., Ульбрихт О.И.</i> О строении нормальных подмножеств многогранного конуса .....	86
<i>Нугманова Г.Н., Сагидуллаева Ж.М.</i> Обобщенная спиновая модель с векторным потенциалом и ее решение .....	91
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ .....	97

---

# CONTENTS

## MATHEMATICS

<i>Attaev A.H.</i> Boundary value problems for a loaded wave equation .....	8
<i>Balpanova M.Zh., Yessenbayeva G.A., Takhanov D.K.</i> The calculation of the side pressure coefficient in conditions of the limited stress situation .....	14
<i>Bekjan T.N., Jenaliyev M.T., Iskakov S.A., Ramazanov M.I.</i> To the solution of the singular inhomogeneous integral Volterra equation .....	20
<i>Bukenov M., Ibrayev A., Zhussupova D., Azimova D.</i> Numerical solution of a problem on bending oscillation of a rod .....	32
<i>Buketov A.V., Sharko A.V., Zinchenko D.A., Stepanchikov D.M.</i> To the problem of ingredients optimization of composite materials based on epoxy resin .....	37
<i>Vikent'ev A.A.</i> On machine implementations of calculations of new model distances, structurizations and recognition in knowledge .....	45
<i>Yessenbayeva G.A., Kutimov K.S., Sazhinova Zh.R., Sarsenbek A.Zh.</i> On the application of mathematical methods for the research of vibration processes in mechanics .....	55
<i>Yeshkeyev A.R.</i> The properties of central-orbital types of EPSCJ theories .....	64
<i>Zhakulina A.A., Zhakulin A.S.</i> The ground foundations model for an attenuation creep and methods of their description .....	70
<i>Tyulyubergenev R.K.</i> On computable subgroups of the group of all unitriangular matrices over a ring ...	74
<i>Konyrkhanova A.A., Khisamiev N.G.</i> Universal elements of unitriangular matrices groups .....	79
<i>Makazhanova T.Kh., Bazylzhanova A.S., Ulbrikht O.I.</i> The structure of normal subsets of polyhedral cone .....	86
<i>Nugmanova G.N., Sagidullayeva Zh.M.</i> Generalized spin model with vector potential and its solution ..	91
INFORMATION ABOUT AUTHORS .....	97



УДК 517.956.3

А.Х. Аттаев

*Институт прикладной математики и автоматизации — филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», Нальчик, Россия  
(E-mail: attaeв.anatoly@yandex.ru)*

## Краевые задачи для нагруженного волнового уравнения

В статье рассмотрены задачи Коши, Гурса и Дарбу для нагруженного уравнения колебания струны  $u_{xx} - u_{yy} = \lambda u(x, y)$ . Построено явное представление решения задачи Коши, которое при  $\lambda = 0$  совпадает с известным представлением решения задачи Коши для уравнения колебания струны. Описаны области зависимости, влияния и определения данных Коши. Показано их существенное отличие от аналогичных областей в случае задачи Коши для уравнения колебания струны. Сформулированы задачи Дарбу и Гурса в нелокальной постановке и предложен алгоритм построения их решений.

*Ключевые слова:* уравнение колебания струны, нагруженное уравнение, задача Коши, задача Гурса, задача Дарбу, область зависимости, область влияния, область определения данных Коши.

### Введение

В этом году исполнился 41 год со дня выхода работы А.М. Нахушева [1], где было введено определение нагруженных дифференциальных уравнений.

Уравнение вида

$$\sum_{|\alpha| \leq r} D^\alpha u + A(u|_{\omega_k}) = f(x), \quad (1)$$

где  $A$  — заданный оператор (в частности, интегродифференциальный), действующий на сужении  $u|_{\omega_k}$  искомой функции  $u = u(x)$  на многообразии  $\omega_k : u|_{\omega_k} = u(x) \forall x \in \omega_k$ , называется нагруженным интегродифференциальным уравнением.

Этому предшествовало достаточно большое количество работ зарубежных математиков, посвященных в основном одномерным дифференциально-граничным операторам, то есть нагруженным дифференциальным операторам по терминологии [1]. Обширную библиографию исследований в этом направлении можно найти в работах [2, 3]. Наличие нагруженных слагаемых влияет на корректную постановку тех или иных начально-краевых задач. В этой связи можно отметить некоторые работы [4–10]. Особенно этот эффект проявляется для нагруженных как строго, так и слабо гиперболических уравнений.

В данной работе обсуждаются некоторые отличительные моменты, связанные с постановкой и исследованием основных начально-краевых задач для нагруженных гиперболических уравнений на примере нагруженного уравнения вида

$$u_{xx} - u_{yy} = \lambda u(x_0, y), \quad (2)$$

где  $\lambda, x_0$  — действительные константы.

Задача Коши

Известно, что любое регулярное решение уравнения (2) при  $\lambda = 0$  представимо в виде

$$u(x, y) = f(x - y) + g(x + y), \tag{3}$$

где  $f$  и  $g$  — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Формула (3) носит название формулы Даламбера.

Лемма 1. Любое регулярное решение уравнения (2) представимо в виде

$$u(x, y) = f(x - y) + g(x + y) + \int_0^y K(y, t)[f(x_0 - t) + g(x_0 + t)] dt, \tag{4}$$

где

$$K(y, t) = \begin{cases} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(t - y), & \lambda > 0; \\ \sqrt{-\lambda} \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}(t - y), & \lambda < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Замена

$$u(x, y) = v(x, y) + \int_0^y K(y, t)v(x_0, t) dt, \tag{5}$$

где  $K(y, t)$  есть решение задачи

$$K(y, y) = 0, \quad K'_t(y, y) = -\lambda \tag{6}$$

для обыкновенного дифференциального уравнения

$$K''_t(y, t) + \lambda K(y, t) = 0, \tag{7}$$

переводит уравнение (2) в уравнение

$$v_{xx} - v_{yy} = 0.$$

Подставляя в (5) вместо  $K(y, t)$  решение задачи (6), (7), а вместо  $v(x, y)$  — решение Даламбера, приходим к (4). Лемма доказана.

Ниже везде для определенности будем считать, что  $\lambda > 0$ .

Пусть

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x). \tag{8}$$

Теорема 1. Регулярное решение задачи Коши (8) для уравнения (2) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{\varphi(x - y) + \varphi(x + y)}{2} + \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \int_{x_0 - y}^{x_0} \sin \sqrt{\lambda}(x_0 - t - y)\varphi(t)dt + \\ & + \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \int_{x_0}^{x_0 + y} \sin \sqrt{\lambda}(t - x_0 - y)\varphi(t)dt + \frac{1}{2} \int_{x_0 - y}^{x_0} \cos \sqrt{\lambda}(x_0 - t - y)\psi(t)dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0 + y} \cos \sqrt{\lambda}(t - x_0 - y)\psi(t)dt - \frac{1}{2} \int_{x_0 - y}^{x_0 + y} \psi(t)dt + \frac{1}{2} \int_{x - y}^{x + y} \psi(t)dt. \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что функция

$$u(x, y) = v(x, y) + \sqrt{\lambda} \int_0^y \sin \sqrt{\lambda}(t - y)v(x_0, t) dt \tag{10}$$

является регулярным решением задачи Коши (8) для уравнения (2), где

$$v(x, y) = \frac{\varphi(x - y) + \varphi(x + y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x - y}^{x + y} \psi(t)dt. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), после несложных преобразований получим формулу (9).

Следуя [11; 158, 159], опишем области зависимости, влияния и определения данных Коши. Пусть носителем начальных данных является вся числовая ось  $\mathbb{R}$ . Как видно из формулы (9), область зависимости, то есть множество по заданным значениям  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , на котором вполне определяется значение решения уравнения (2), есть  $[x_0 - y, x_0 + y] \cup [x - y, x + y]$ . Следует отметить, что последние два отрезка в зависимости от выбора точки  $(x, y)$  могут пересекаться, а могут и не пересекаться. Также нужно заметить, что для вычисления  $u(x, y)$  в точке  $(x, y)$  необходимо знать значение функции  $\varphi(x)$  на отрезке  $[x_0 - y, x_0 + y]$ , а также значение  $\psi(x)$  на  $[x_0 - y, x_0 + y] \cup [x - y, x + y]$ .

Пусть теперь носителем начальных данных является некоторый отрезок  $[a, b] \in \mathbb{R}$ . Как видно из формулы (9), множество точек плоскости, на значение  $u(x, y)$  которых влияют  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , представляют собой область влияния (рис. 1).

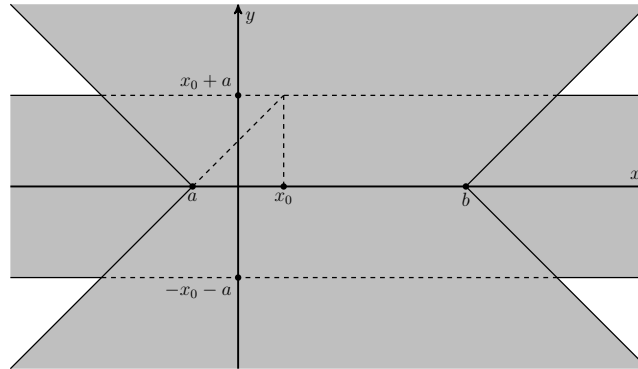


Рисунок 1. Область влияния

Множество точек  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , в которых значение  $u(x, y)$  вполне определяется по заданным значениям  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  на  $[a, b]$ , есть область определения (рис. 2).

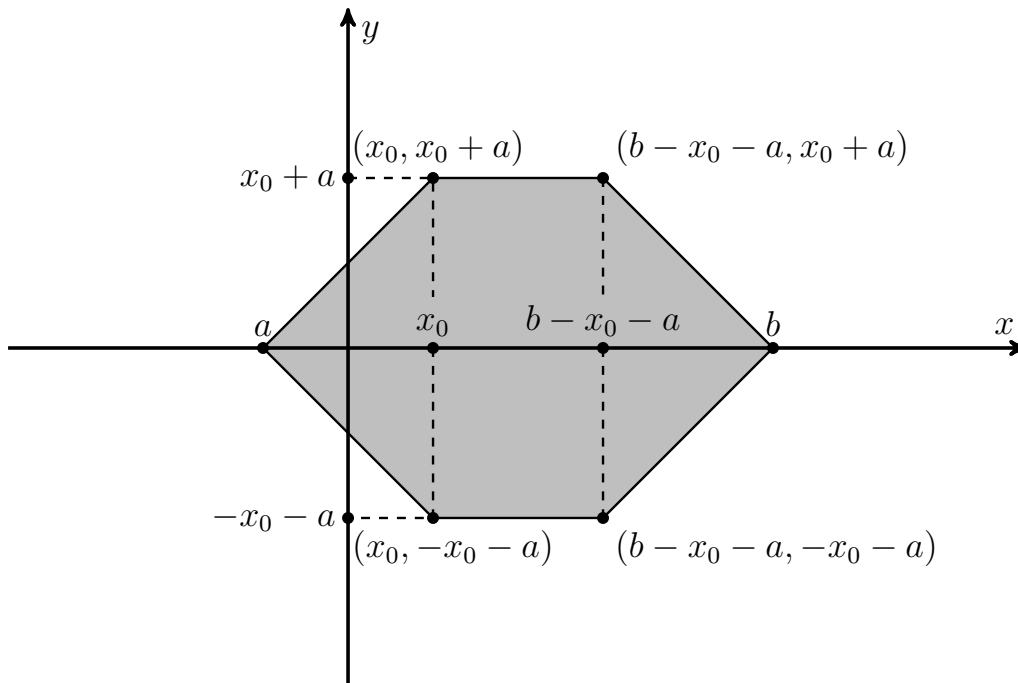


Рисунок 2. Область определения

Пусть  $\Omega$  — область, ограниченная характеристиками  $x - y = 0$ ,  $x + y = l$  и прямыми  $y = 0$  и  $y = x_0$ ,  $0 < x_0 < l$ .

Функцию  $u(x, y)$  будем называть обобщённым решением уравнения (2), если она представима в виде

$$u(x, y) = f(x - y) + g(x + y) + \sqrt{\lambda} \int_0^y \sin \sqrt{\lambda}(y - t) [f(x_0 - t) + g(x_0 + t)] dt.$$

Не нарушая общности, будем считать, что  $x_0 < l/2$ . В противном случае можно ввести точку  $x'_0 = l - x_0$ , для которой будет справедливо неравенство  $x'_0 < l/2$ .

*Аналог задачи Дарбу*

Необходимо найти обобщённое решение уравнения (2), удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 < x < l; \tag{12}$$

$$u(x, x_0) = \varphi(x), \quad x_0 \leq x \leq l - x_0; \tag{13}$$

$$u\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) + \lambda \int_0^{x/2} \left(\frac{x}{2} - t\right) u(x_0, t) dt = \psi(x), \quad 0 < x < 2x_0. \tag{14}$$

Пусть  $l = nx_0 + r$ ,  $0 < r < x_0$ . Разобьём область  $\Omega$  прямыми  $x - y = 2kx_0$  и  $x + y = (2k + 2)x_0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 2$ , на  $n - 1$  треугольных областей  $\Omega_k$  и  $\Omega_n = \{(x, y) : nx_0 \leq x + y < l, y = 0, y = x_0\}$ .

В области  $\Omega_0$  условия (2), (14) позволяют записать решение в виде

$$u(x, y) = \tau(x - y) - \psi(x - y) + \psi(x + y) + \sqrt{\lambda} \int_0^y \sin \sqrt{\lambda}(y - t) [\tau(x_0 - t) - \psi(x_0 - t) + \psi(x_0 + t)] dt. \tag{15}$$

После того, как нашли решение в области  $\Omega_0$ , в областях  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ , решение находится как решение обычной задачи Дарбу для уравнения (2), в котором правая часть уже известна.

В области  $\Omega_n$  решение находится последовательным решением трёх задач: задачи Дарбу, задачи Гурса и снова задачи Дарбу для уравнения (2) с известной правой частью (рис. 3).

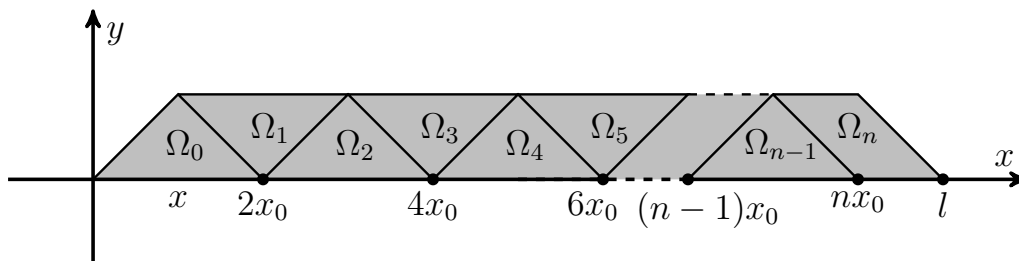


Рисунок 3. Области  $\Omega_k$ , где  $k = 0, 2, \dots, n$

Если  $l = 2x_0$ , то условие (13) автоматически отпадает, и решение задачи Дарбу в области  $\Omega$  принимает вид (15).

*Аналог задачи Гурса*

Необходимо найти обобщённое решение уравнения (2) в области  $\Omega$ , ограниченной характеристиками  $x - y = 0$ ,  $x + y = 0$ ,  $x - y = l$ ,  $x + y = l$ , а также прямыми  $y = x_0$  и  $y = -x_0$ , удовлетворяющего следующим условиям:

$$u(x, x_0) = \varphi_1(x), \quad x_0 \leq x \leq l - x_0; \tag{16}$$

$$u(x, -x_0) = \varphi_2(x), \quad x_0 \leq x \leq l - x_0; \tag{17}$$

$$u\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) + \lambda \int_0^{x/2} \sin \sqrt{\lambda} \left(\frac{x}{2} - t\right) u(x_0, t) dt = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq x_0; \tag{18}$$

$$u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) - \lambda \int_0^{-x/2} \sin \sqrt{\lambda} \left(\frac{x}{2} + t\right) u(x_0, t) dt = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq 2x_0. \quad (19)$$

Для доказательства существования и единственности решения задачи Гурса нужно проделать без особых изменений ту же процедуру, что и при доказательстве существования и единственности решения задачи Дарбу.

#### Список литературы

- 1 Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка / А.М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. — 1976. — Т. 12. — № 1. — С. 103–108.
- 2 Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применения / А.М. Нахушев. — М.: Наука, 2012. — 232 с.
- 3 Krall A.M. Differential-boundary operators / A.M. Krall // Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — 154 p.
- 4 Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19. — № 1. — С. 86–94.
- 5 Нахушев А.М. О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями / А.М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21. — № 1. — С. 92–102.
- 6 Дженалиев М.Т. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений / М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов. — Алматы: Ғылым, 2010. — 336 с.
- 7 Ломов И.С. Нагруженные дифференциальные операторы: сходимость спектральных разложений / И.С. Ломов // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19. — № 1. — С. 86–94.
- 8 Аттаев А.Х. Характеристическая задача Коши для линейного нагруженного гиперболического уравнения / А.Х. Аттаев // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2010. — Т. 12. — № 1. — С. 9, 10.
- 9 Аттаев А.Х. Задача с данными на параллельных характеристиках для нагруженного волнового уравнения / А.Х. Аттаев // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2013. — Т. 15. — № 2. — С. 25–28.
- 10 Аттаев А.Х. Задача Гурса для нагруженного гиперболического уравнения / А.Х. Аттаев // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2014. — Т. 16. — № 3. — С. 9–12.
- 11 Бицадзе А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. — М.: Наука, 1982. — 336 с.

А.Х. Аттаев

### Жүктелген толқындық теңдеу үшін шеттік есептер

Мақалада  $u_{xx} - u_{yy} = \lambda u(x_0, y)$  ішек тербелісінің жүктелген теңдеуі үшін Коши, Гурс және Дарбу есептері қарастырылды.  $\lambda = 0$  болғанда ішектің тербеліс теңдеуі үшін Коши есебі шешімінің белгілі нұсқасымен Коши есебінің шешімінің айқын берілуі ұсынылған. Коши берілгендерінің тәуелділік, әсер ету және анықталу облыстары сипатталған. Ішектің тербеліс теңдеуі үшін Коши есебі жағдайында аналогты облыстардан едәуір айырмашылық байқалады. Бейлокалды берілуде Дарбу және Гурс есептері тұжырымдалған және олардың шешімін құрудың алгоритмі ұсынылған.

*Кілт сөздер:* ішектің тербеліс теңдеуі, жүктелген теңдеу, Коши есебі, Гурс есебі, Дарбу есебі, тәуелділік облысы, әсер ету облысы, Коши берілгендерін анықтау облысы.

A.H. Attaev

## Boundary value problems for a loaded wave equation

We consider Cauchy, Goursat and Darboux problems for a loaded wave equation  $u_{xx} - u_{yy} = \lambda u(x_0, y)$ . We construct an explicit representation for solution of Cauchy problem, which coincides with the classical representation for solution of the Cauchy problem for the wave equation as  $\lambda=0$ . We describe the domains of dependence, influence and definition of Cauchy data. It is shown their essential difference from corresponding domains in the case of the Cauchy problem for the wave equation. We formulate Darboux and Goursat problems in nonlocal setting and give an algorithm for construction of their solutions.

*Keywords:* wave equation, loaded equation, Cauchy problem, Goursat problem, Darboux problem, dependence domain, influence domain, definition domain of Cauchy data.

### References

- 1 Nakhushev, A.M. (1976). O zadache Darbu dlia odnogo vyrozhdaiushchehosia nahruzhennoho intehrodifferentsialnogo uravneniia vtoroho poriadka [On the Darboux problem for a degenerate loaded second-order integrodifferential equation]. *Differentsialnye uravneniia – Differential equation, Vol. 12, 1*, 103–108 [in Russian].
- 2 Nakhushev, A.M. (2012). *Nahruzhennye uravneniia i ikh primeneniia [Loaded equations and their applications]*. Moscow: Nauka [in Russian].
- 3 Krall, A.M. (1971). Differential-boundary operators // *Transactions of the American Mathematical Society*, 154.
- 4 Nakhushev, A.M. (1983). Nahruzhennye uravneniia i ikh prilozheniia [Loaded equations and their applications]. *Differentsialnye uravneniia – Differential equation, Vol. 19, 1*, 86–94 [in Russian].
- 5 Nakhushev, A.M. (1985). O nelokalnykh kraevykh zadachakh so smeshcheniem i ikh sviazi s nahruzhennymi uravneniiami [On nonlocal boundary-value problems with displacement and their connection with the loaded equations]. *Differentsialnye uravneniia – Differential equation, Vol. 21, 1*, 92–102 [in Russian].
- 6 Jenaliyev, M.T., Ramazanov, M.I. (2010). *Nahruzhennye uravnenie kak vozmushcheniia differentsialnykh uravnenii [Loaded equations as perturbations of differential Equations]*. Almaty: Gylym [in Russian].
- 7 Lomov, I.S. (1983). Nahruzhennye differentsialnye operatory: skhodimost spektralnykh razlozhenii [Loaded differential operators: convergence of spectral decompositions]. *Differentsialnye uravneniia – Differential equation, Vol. 19, 1*, 86–94 [in Russian].
- 8 Attaev, A.H. (2010). Kharakteristicheskaia zadacha Koshi dlia lineinoho nahruzhennoho hiperbolicheskoho uravneniia [The characteristic Cauchy problem for a linear stressed hyperbolic equation]. *Adyhskaia (Cherkesskaia) Mezhdunarodnaia akademiia nauk – Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences, Vol. 12, 1, 9, 10* [in Russian].
- 9 Attaev, A.H. (2013). Zadacha s dannymi na parallelnykh kharakteristikakh dlia nahruzhennoho volnovoho uravneniia [A problem with data on parallel characteristics for the loaded wave equation]. *Adyhskaia (Cherkesskaia) Mezhdunarodnaia akademiia nauk – Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences, Vol. 15, 2*, 25–28 [in Russian].
- 10 Attaev, A.H. (2014). Zadacha Hursa dlia nahruzhennoho hiperbolicheskoho uravneniia [The Goursat problem for the loaded hyperbolic equation]. *Adyhskaia (Cherkesskaia) Mezhdunarodnaia akademiia nauk – Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences, Vol. 16, 3*, 9–12 [in Russian].
- 11 Bitsadze, A.V. (1982). *Uravneniia matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]*. Moscow: Nauka [in Russian].

M.Zh. Balpanova<sup>1</sup>, G.A. Yessenbayeva<sup>1</sup>, D.K. Takhanov<sup>2</sup><sup>1</sup>*Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan;*<sup>2</sup>*Karaganda State Technical University, Kazakhstan**(E-mail: balpanova86@mail.ru)*

## The calculation of the side pressure coefficient in conditions of the limited stress situation

In this article the method of the side pressure coefficient determining in the conditions of limited stress situation is considered. Envelopes of limited stresses circles on the strength passport and the rectilinear envelope in the region of limited extending stresses for different geological conditions are compared. The calculation-graphical method for the side pressure coefficient determining in areas of compressive and extending stresses is given and the comparative analysis of its results is done. It is obtained that the coefficients of the side pressure for the rectilinear and curvilinear envelopes in the zone of extending stresses are equal to each other.

*Keywords:* strength passport, Poisson's coefficient, lateral pressure, rock formation, Mohr's circles, side expansion, mine working.

With an increase in the depth of the underground mine working the load on it increases from the weight of the overlying strata of rocks. In deep mines this load reaches a considerable value. At a great depth of underground mining the value of the side pressure becomes significant and must be taken into account. The adhesion and friction between the particles in the rocks of the mine working walls is not sufficient for them to stand without collapsing and could serve as firm supports of the arch.

The value of the side pressure will be greater, if the rock will be weaker and mine working will have a height which will be greater. This value can be defined as the pressure on the retaining wall of the sliding prisms loaded from above.

For the case of a uniform loading of prisms the side pressure will be calculated is calculated by the formula [1]:

$$R_0 = \frac{\gamma}{2}(2h_0 + H)H \operatorname{tg}^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2},$$

where  $H$  is a height of mine working height,  $m$ ;  $h_0$  is a reduced height of loading of prisms from above,  $m$ ;  $\gamma$  is a volume weight of rocks,  $\frac{t}{m^3}$ ;  $\varphi$  is an angle of internal resistance (friction) of rocks, deg.

In mine workings of a small height  $3.5 \div 5m$ , values of the pressure  $R_0$  is small too, but in large chambers, tunnels and mine workings, which have the considerable height, with weak and medium rocks one has to take into account the magnitude of the side pressure and introduce it into calculations.

Lateral rocks serve as the arch supports of natural balance and perceive the resultant expanse of the arch and the load on the arch. The magnitude of this resultant depends mainly on a width of mine workings and a strength of rocks. The value of this resultant will be greater, if the side rocks will be loaded greater too.

Researchers (Birmaumer, Ritter, M.M. Protodyakonov, etc.), dealing with the side pressure questions [2], determine its magnitude from the conditions of sliding of the side prisms.

Ritter connects the definition of side pressure with the forces of adhesion and friction along the slipping plane of the lateral prism. According to Ritter, a span of a arch collapse in the mine working ceiling remains equal to the width of a mine working with the sliding of the side prisms. It is difficult to assume, since the lateral rocks near the upper mine workings angles seem to be the most stressed [2].

Professor M.M. Protodyakonov believes that a pressure from the ceiling of a mine working is determined by a weight of a rock in the volume of the arch collapse, having a span which is equal to a width of a mine working [3]. It is supposed, there are also loose, weak rocks in the walls of a mine workings and the semiprolet of the arch is increased by the value where is the angle of sliding of the side prisms,  $\theta = \frac{90^\circ + \varphi}{2}$ . Professor M.M. Protodyakonov gives the following formulas for determining value a side pressure

$$t = \gamma t g^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} \left[ z \left( 1 + \frac{2tg(90^\circ - \varphi)}{3f} \right) + \frac{4a}{3f} \right],$$

where  $\varphi$  is an angle of a internal friction of lateral rocks, deg.;  $f$  is a fortress coefficient of a roof rock.

In reality [2], under a parabolic load, the angle of side prisms sliding will be different, and, consequently, a side pressure will receive a different numerical value.

The problem of determining the side pressure value is reduced to finding the position of such sliding plane at which a side pressure on an enclosing plane will be the greatest.

According to Prokofiev's method the inclination angle of the slip plane determines the greatest pressure on the enclosing wall and this angle was obtained equal to  $\theta = \frac{90^\circ + \varphi}{2}$ .

It is known that with a uniformly distributed load of prisms, the point of application of a side pressure is the center of gravity of the stress diagram, which is represented in the form of a rectangular trapeze. Bases of this trapeze are following:

- the upper base –  $\gamma h_0 t g^2 = \frac{90^\circ - \varphi}{2}$ ;
- the lower base –  $\gamma(h_0 + H) t g^2 = \frac{90^\circ - \varphi}{2}$ ;

if a height is equal to  $H$ .

The center of gravity of this trapeze is at a vertical distance from the lower base which equals  $\frac{H}{3} \cdot \frac{3h_0 + 2h}{2h_0 + H}$ , where  $h_0$  is a height of a uniformly distributed load  $h_0$  equals the assumed height of the natural equilibrium arch.

A mountain pressure in underground mine workings is manifested in the form of extrusion of rocks in the direction of their outcrop. Under the influence of vertical pressure on the rock massif, this mountain pressure tends to move laterally, it creates a lateral pressure, which is usually called a side expansion.

According to [4], that the side pressure is defined by the following formula

$$\sigma_x = \frac{\mu}{1 - \mu} \gamma H, t/m^2, \quad (1)$$

where  $\frac{\mu}{1 - \mu} = m_\sigma$  is a coefficient of side expansion under deformations within elasticity

- $\mu$  is Poisson's coefficient;
- $\gamma H$  is a vertical stress,  $t/m^2$ .

The coefficient of a side expansion for the limiting and stress state is determined by the formula

$$m_\sigma = \frac{\sigma_r}{\sigma_b}, \quad (2)$$

where  $\sigma_r$  is a horizontal tension,  $t/m^2$ ;  $\sigma_b$  is a vertical stress,  $t/m^2$ .

In the paper [5] the boundaries of a deformation of a rock massif for underground development of deposits are determined by the construction of an arch of natural equilibrium above a mine working. The boundaries of an arch of collapse or an arch of natural equilibrium are defined by curved slip lines of three families.

Determination of the boundary of a displacement of an earth massive by curved lines of slip surfaces, depending on the geological conditions and the parameters of a clearing space, is given in [5] for the first time. The main carrier of information for constructing of slip lines is the rock solidity passport.

An envelope curve of limit stresses is usually adopted in the form of known from geometry curves, namely, of parabola, hyperbola or straight line, which does not always reflect the actual form that is obtained from experiments.

In the paper [5] the equation of envelopes of limiting stress circles is derived on the basis of the theory of damped oscillations, and as a result we obtain the following equation.

$$\tau_{ni} = \sigma_{cж} (0.5 \cos \rho_{cж} + \{1 - \text{Exp}[-(\sigma_{ni}/\sigma_{cж})]\}) t g \rho_{cж}, \quad (3)$$

where  $\sigma_{cж}$  is a limit of rocks strength for uniaxial compression,  $t/m^2$ ;  $\sigma_{cж}$  - Normal stress in the region of compressive stresses,  $t/m^2$ ;  $\rho_{cж}$  is an angle of internal friction under uniaxial compression, deg.;  $K = \text{exp} [0.5(1 - \sin \rho_{cж})]$ .

By the obtained equation of the envelope of the limiting stress circles, the angular, strength, linear values and the coefficients of the side extension are determined. Depending on the stressed state of rocks, the coordinates of the curves of the slip lines are determined.





In the zone of an action of tensile stresses, the envelope of Moore's limiting circles is described by the equation of the straight line [6]:

$$\tau = \sigma_{ni}tg\rho + C, \tag{14}$$

where  $\sigma_{ni}$  is a normal stress on uniaxial tension or compression,  $t/m^2$ ,  $C$  is a clutch.

The envelope of tensile forces is not tangent to the rectilinear envelope, the coefficient of a side expansion  $m_\sigma$  under uniaxial tension is zero.

From Figure 2 by graphically-analytical way, described above, it is possible to obtain respectively horizontal and vertical stresses:

$$\sigma_r = \sigma_{ni} + \tau_{ni}^p tg\varphi, t/m^2, \tag{15}$$

where the tangential stress in the zone of action of tensile stresses is defined by this formula

$$\tau_{ni}^p = C - \sigma_{ni}tg\varphi, t/m^2. \tag{16}$$

The vertical stress is found by the formula

$$\sigma_B = 2R_i - \sigma_r, t/m^2, \tag{17}$$

where the radius of the  $i$ -th limiting circle is in Figure 2 as follows

$$R_i = \tau_{ni} / \cos\rho. \tag{18}$$

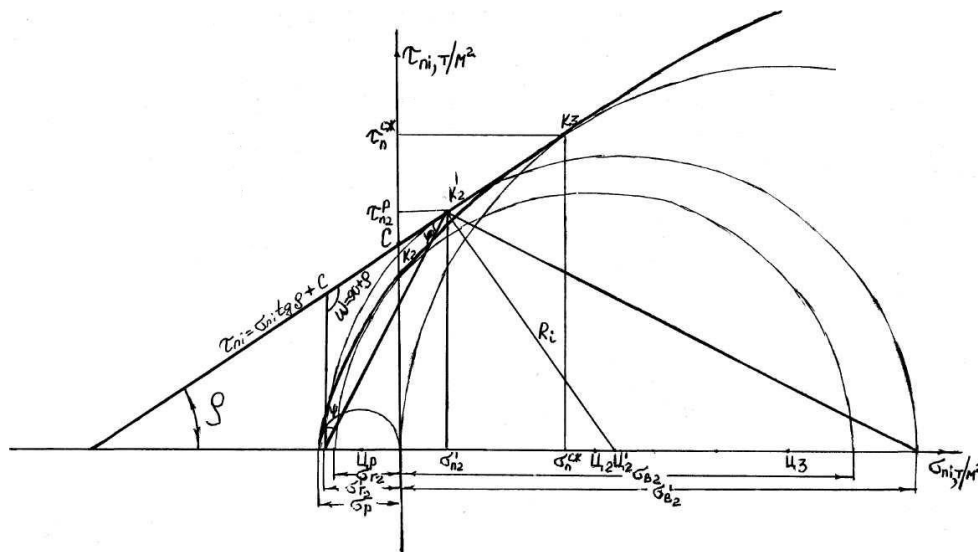


Figure 2. The straight line envelope

Then substituting (18) and (15) into (17) one can obtain a vertical stress in the region of tensile forces

$$\sigma_B = (2\tau_{ni} / \cos\rho - (\sigma_{ni} + \tau_{ni}^p tg\varphi)), t/m^2. \tag{19}$$

Knowing  $\sigma_r$  and  $\sigma_B$ , it is possible to find the formula for the coefficient of a side expansion  $m_\sigma$  in the zone of limited tensile stresses

$$m_\sigma = (\sigma_{ni} + \tau_{ni}^p tg\varphi) / (2\tau_{ni}^p / \cos\rho - (\sigma_{ni} + \tau_{ni}^p tg\varphi)). \tag{20}$$

Due to the fact that in the extension region the limit circles are described by a rectilinear envelope of the values of the internal friction angles,  $\rho$  and sliding surfaces  $\varphi$ , respectively, will be equal to the values under uniaxial compression.

Analytical research of rocks properties in conditions of volume stress state were carried out by calculation for passports of the rocks strength as strong (gray sandstones  $\sigma_{сж} = 8000t/m^2$ ) as weak (siltstones  $\sigma_{сж} = 185t/m^2$ ). The envelopes of limited stress circles on the strength passport and the rectilinear envelope were compared for the most accurate determination from the mathematical expressions of  $m_6$  in figures 1 and 2 in the region of limiting tensile stresses for various geological conditions.

If formulas (11) and (20) are compared, the values of normal and tangential stresses and the angle of the slip surface and internal friction are substituted then it can be obtained that they have the same significance, and, consequently, the side pressure coefficients for rectilinear and curvilinear envelopes in the zone of limiting tensile stresses will be equal.

#### References

- 1 Слесарев В.Д. Механика горных пород / В.Д. Слесарев. — М.: Углетехиздат, 1948. — 303 с.
- 2 Цимбаревич П.М. Механика горных пород / П.М. Цимбаревич // ОНТИ-НКТП-СССР. Гос. науч.-техн. гор.-геол.-нефт. изд-во. — М.-Л.-Грозный-Новосибирск, 1934. — 170 с.
- 3 Протодьяконов М.М. Крепление горных выработок: справочник по каменноугольному делу / М.М. Протодьяконов. Изд. Донугля. — Харьков. — М.: Изд. НТУ; ВСНХ СССР, 1928. — 205 с.
- 4 Беляев Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. — М.: Наука, 1976. — 608 с.
- 5 Сәбденбекұлы Ө. Таужыныстың жылжуының физикасы / Ө. Сәбденбекұлы. — Жезқазған, 1999. — 192 б.
- 6 Ильницкая Е.И. Свойства горных пород и методы их определения / Е.И. Ильницкая, Р.И. Тедер, Е.С. Ватолин, М.Ф. Кунтыш. — М.: Недра, 1969. — 392 с.

М.Ж. Балпанова, Г.А. Есенбаева, Д.К. Таханов

### Шектік кернеулілік жағдайда бүйір қысым коэффициентін анықтау

Мақалада шектік кернеулілік күйі мақсатында бүйір қысым коэффициентінің анықтау әдісі қарастырылған. Мықтылық құжаттағы және тік бағытты орам сызықтары созылмалы кернеу шегінде әр түрлі геологиялық жағдайлар үшін, шектік кернеудің орам шеңберінде салыстырылды. Қысылған және созылған кернеу аймағында бүйір қысым коэффициентін анықтау әдісінің графикалық есебі келтірілген және нәтижелерінің салыстырмалы талдауы өткізілген. Орам сызық қисық не тік сызықты болса да, созылым күштері аймағындағы бүйір қысым коэффициентінің тең болатыны дәлелденді.

*Кілт сөздер:* беріктік паспорты, Пуассон коэффициенті, көлденең қысым, тау кені, Мор шеңберлері, бүйірлік кеңейту, шахтада жұмыс жасау.

М.Ж. Балпанова, Г.А. Есенбаева, Д.К. Таханов

### Расчет коэффициента бокового давления в условиях предельного напряженного состояния

В статье рассмотрен метод определения коэффициента бокового распора в условиях предельного напряженного состояния. Сопоставлены огибающие кругов предельных напряжений на паспорте прочности и прямолинейная огибающая в области предельных растягивающих напряжений для различных геологических условий. Приведен расчетно-графический метод определения коэффициента бокового распора в областях сжимающих и растягивающих напряжений, проведен сравнительный анализ его результатов. Доказано, что коэффициенты бокового распора для прямолинейной и криволинейной огибающих в зоне предельных растягивающих напряжений равны.

*Ключевые слова:* паспорт прочности, коэффициент Пуассона, поперечное давление, горная порода, круги Мора, боковое расширение, работа в шахте.

## References

- 1 Slesarev, V.D. (1948). *Mekhanika gornykh porod [Mechanics of rocks]*. Moscow: Ugletekhizdat [in Russian].
- 2 Tsymbarevich P.M. (1934). *Mekhanika gornykh porod [Mechanics of rocks]*. Moscow-Leningrad-Grozny-Novosibirsk: ONTI-NKTP-SSSR. Gos. nauch.-tekhn. gorno-geologo-neftianoe izdatelstvo – ONTI-NKTP-USSR. State sci. and tech. mining-geological-oil publ. House [in Russian].
- 3 Protodyakonov M.M. (1928). *Kreplenie gornykh vyrabotok: cpravochnik po kamennougolnomu delu [Mounting of mine workings: a handbook of Carboniferous]*. Publ. Donugol, Kharkov. Moscow: Izdanie NTU; VSNKh SSSR [in Russian].
- 4 Belyaev, N.M. (1976). *Soprotivlenie materialov [Resistance of materials]*. Moscow: Nauka [in Russian].
- 5 Sabdenbekuly, U. (1999). *Tauzhynystyn zhyzhuyynyn fizikasy [Rock forced physics]*. Jezkazgan [in Kazakh].
- 6 Il'nitskaya, E.I., Teder, R.I., Vatolin, E.S., Kuntyshev, M.F. (1969). *Svoistva gornykh porod i metody ikh opredeleniia [Properties of rocks and methods for their determination]*. Moscow: Nedra [in Russian].

Т.Н. Бекжан<sup>1</sup>, М.Т. Дженалиев<sup>2</sup>, С.А. Искаков<sup>3</sup>, М.И. Рамазанов<sup>3,4</sup><sup>1</sup>Синьцзянский университет, Урумчи, Китай;<sup>2</sup>Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан;<sup>3</sup>Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова, Казахстан;<sup>4</sup>Институт прикладной математики, Караганда, Казахстан

(E-mail: ramatur@mail.ru)

## К решению сингулярного неоднородного интегрального уравнения Вольтерра

В статье исследовано неоднородное сингулярное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, к которому редуцируется граничная задача теплопроводности, возникающая при решении некоторых задач со свободными границами. Найдено общее решение этого уравнения, представляющее сумму общего решения однородного и частного решений неоднородного уравнения. Дана оценка построенной резольвенты интегрального уравнения.

*Ключевые слова:* граничная задача теплопроводности, интегральное уравнение Вольтерра, резольвента, частное решение.

### Введение

При исследовании граничной задачи теплопроводности вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \{x, t\} \in G = \{x, t : 0 < x < 1, t > 0\};$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{x=t} + \left. \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} \right|_{x=t} = 0, \quad (1)$$

где  $\tilde{u}(t) = u(t, t)$ , решение которой оказывается полезным при изучении некоторых задач со свободными границами [1], возникает необходимость решения особого интегрального уравнения Вольтерра

$$\varphi(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \sqrt{\frac{t}{\tau}} \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \sqrt{\frac{t}{\tau}} \cdot \varphi(\tau) d\tau + \frac{3}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\} \sqrt{\frac{t}{\tau}} \cdot \varphi(\tau) d\tau - \frac{2}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \sqrt{\frac{t}{\tau}} \cdot \varphi(\tau) d\tau = f(t). \quad (2)$$

Соответствующее однородное интегральное уравнение было исследовано в [2], где было показано, что оно имеет ненулевое решение. Целью данной работы является решение неоднородного интегрального уравнения (2), т.е. построение резольвенты для этого уравнения.

Решение интегрального уравнения (2) ищем в классе функций

$$\sqrt{t} \cdot \exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\} \cdot \varphi(t) \in L_\infty(G);$$

$$\sqrt{t} \cdot \exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\} \cdot f(t) \in L_\infty(G).$$

Подобного рода интегральные уравнения Вольтерра были исследованы в работах [3–5].

1 Сведение интегрального уравнения (2) к разностному

Используя равенство

$$\frac{(t + \tau)^2}{4a^2(t - \tau)} = \frac{(t - \tau)^2 + 4t\tau}{4a^2(t - \tau)} = \frac{t - \tau}{4a^2} + \frac{t\tau}{a^2(t - \tau)},$$

интегральное уравнение (2) примет вид

$$\begin{aligned} \varphi(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \left[ \frac{t + \tau}{(t - \tau)^{\frac{3}{2}}} \exp \left\{ -\frac{t\tau}{a^2(t - \tau)} \right\} + \frac{3}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{t\tau}{a^2(t - \tau)} \right\} \right] \times \\ \times \sqrt{\frac{t}{\tau}} \cdot \exp \left\{ -\frac{t - \tau}{4a^2} \right\} \cdot \varphi(\tau) d\tau = f(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Замечание 1. [6; 183]. Если (частное) решение интегрального уравнения

$$y(x) + \int_a^x K(x, t)y(t)dt = f(x)$$

дается формулой

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t)f(t)dt,$$

тогда (частное) решение интегрального уравнения (с измененным ядром)

$$y(x) + \int_a^x K(x, t)y(t)dt = f(x)$$

выражается формулой

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t)\frac{g(x)}{g(t)}f(t)dt.$$

Это же самое имеет место и для решений соответствующих однородных уравнений.

С учетом замечания 1 для исследования интегрального уравнения (2) достаточно изучить интегральное уравнение

$$\varphi(t) + \int_0^t K(t, \tau) \cdot \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad (4)$$

где

$$K(t, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left[ \frac{t + \tau}{(t - \tau)^{\frac{3}{2}}} \exp \left\{ -\frac{t\tau}{a^2(t - \tau)} \right\} + \frac{3}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp \left\{ -\frac{t\tau}{a^2(t - \tau)} \right\} \right].$$

В интегральном уравнении(4) произведем замену независимой переменной и введем новые функции:

$$t = \frac{1}{t_1}, \quad \tau = \frac{1}{\tau_1}; \quad \varphi_1(t_1) = \frac{1}{\sqrt{t_1}} \varphi \left( \frac{1}{t_1} \right); \quad f_1(t_1) = \frac{1}{\sqrt{t_1}} f \left( \frac{1}{t_1} \right),$$

тогда из уравнения (4) получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_1) + \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{(\tau_1 - t_1)^{\frac{3}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\} \cdot \varphi_1(\tau_1) d\tau_1 - \\ - \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{(\tau_1 - t_1)^{\frac{1}{2}}} \left[ 5 \exp \left\{ -\frac{1}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\} - 3 \right] \cdot \frac{1}{\tau_1} \varphi_1(\tau_1) d\tau_1 = f_1(t_1). \end{aligned} \quad (5)$$

2 Сведение к операторному уравнению

Для решения уравнения (5) будем использовать преобразование Лапласа. Имеем

$$\left[1 + \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right] \cdot \widehat{\varphi}_1(p) - \frac{1}{2a\sqrt{-p}} \left[5 \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - 3\right] \cdot \int_p^\infty \widehat{\varphi}_1(q) dq = \widehat{f}_1(p). \quad (6)$$

Здесь были использованы следующие формулы преобразования Лапласа [7; 500] и [8; 158]:

$$L \left[ \int_{t_1}^\infty k(t_1 - \tau_1) \varphi_1(\tau_1) d\tau_1 \right] = \widehat{k}(-p) \cdot \widehat{\varphi}_1(p);$$

$$L \left[ \frac{1}{t_1} \cdot \varphi_1(t_1) \right] = \int_p^\infty \widehat{\varphi}_1(q) dq.$$

Перейдем от интегрального уравнения (6) к дифференциальному уравнению, вводя новую неизвестную функцию-образ:

$$\widehat{\psi}(p) = \int_p^\infty \widehat{\varphi}_1(q) dq, \text{ т.е. } \widehat{\varphi}_1(p) = -\frac{d\widehat{\psi}(p)}{dp}; \quad (7)$$

$$\left[1 + \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right] \cdot \frac{d\widehat{\psi}(p)}{dp} + \frac{1}{2a\sqrt{-p}} \left[5 \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - 3\right] \cdot \widehat{\psi}(p) = \widehat{f}_1(p)$$

или

$$\frac{d\widehat{\psi}(p)}{dp} + \frac{5 \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - 3}{2a\sqrt{-p} \left[1 + \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right]} \cdot \widehat{\psi}(p) = \frac{\widehat{f}_1(p)}{1 + \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}}. \quad (8)$$

3 Решение однородного операторного уравнения

Интегрируя однородное уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{\widehat{\psi}(p)}{C} \right) &= - \int \frac{5 \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - 3}{2a\sqrt{-p} \left[1 + \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right]} dp = \\ &= \left\| -\frac{2}{a}\sqrt{-p} = z, \quad dz = \frac{dp}{a\sqrt{-p}} \right\| = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{(5 \exp\{z\} + 5) - 8}{1 + \exp\{z\}} dz = -\frac{5}{2}z + 4 \int \frac{\exp\{-z\} dz}{1 + \exp\{-z\}} = \\ &= -\frac{5}{2}z - 4 \int \frac{d(1 + \exp\{-z\})}{1 + \exp\{-z\}} = -\frac{5}{2}z + 4 \ln(1 + \exp\{-z\}) = \\ &= \left\| z = -\frac{2}{a}\sqrt{-p} \right\| = -\frac{5}{2}\sqrt{-p} + \ln \left[ \left(1 + \exp\left\{\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^{-4} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) будем иметь ( $Re p < 0$ )

$$\widehat{\psi}_0(p) = C \cdot \frac{\exp\left\{\frac{5}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1 + \exp\left\{\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^4} = C \cdot \frac{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1 + \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^4}. \quad (10)$$

Далее для нахождения оригинала для образа  $\widehat{\psi}_0(p)$  используем следующее разложение:

$$\frac{1}{(1+z)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n z^n, \quad z = \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}, \quad |z| < 1, \quad (11)$$

где  $B_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$ .

Отметим, что если  $z = 1$ , то справедливо равенство

$$\frac{1}{(1+z)^4} \Big|_{z=1} = \frac{1}{16}.$$

Используя разложения (11), из соотношения (10) получим

$$\widehat{\psi}_0(p) = C \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \exp \left\{ -(2n+3) \frac{\sqrt{-p}}{a} \right\}, \text{ для } \forall p \in \{p : \operatorname{Re} \sqrt{-p} > 0\}. \quad (12)$$

Так как имеет место следующая формула обращения:

$$\exp \{-\beta \sqrt{q}\} \doteq \frac{\beta}{2\sqrt{\pi} t^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp \left\{ -\frac{\beta^2}{4t_1} \right\},$$

то из (12) получим функцию-оригинал  $\widehat{\psi}_0(t_1)$  для всех  $0 < t_1 < \infty$ :

$$\psi_0(t_1) = \frac{C}{2a\sqrt{\pi} t_1^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+3) B_n \exp \left\{ -\frac{(2n+3)^2}{4a^2 t_1} \right\}. \quad (13)$$

Из равенств

$$\widehat{\varphi}_1(p) = -\frac{d\widehat{\psi}(p)}{dp}; \quad -t_1 \cdot \widehat{\psi}(t_1) \doteq \frac{d\widehat{\psi}(p)}{dp}$$

получим

$$\varphi_{1,0}(t_1) = t_1 \psi_0(t_1) = \frac{C}{2\sqrt{\pi} t_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+3) B_n \exp \left\{ -\frac{(2n+3)^2}{4a^2 t_1} \right\}.$$

Возвращаясь к исходной независимой переменной  $0 < t < \infty$ , получим решение однородного уравнения (4)

$$\varphi_0(t) = \frac{C}{2\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+3) B_n \exp \left\{ -\frac{(2n+3)^2}{4a^2} \cdot t \right\}. \quad (14)$$

Решение  $\varphi_0(t)$  действительно принадлежит к классу  $L_{\infty}(G, \sqrt{t}, \exp \{ \frac{t}{4a} \})$ .

Действительно, если  $f(t_1) = \widehat{f}(p)$ , то справедливо равенство

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \widehat{f}(p) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} f(t_1),$$

отсюда, из равенства  $\widehat{\psi}'(\sqrt{p}) = -\varphi_1(\sqrt{p})$ , имеем

$$\widehat{\varphi}_1(\sqrt{p}) = \frac{1}{a\sqrt{-p}} \cdot \left[ -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \exp \left\{ -\frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\} \right] \cdot \frac{\exp \left\{ -\frac{3}{a} \sqrt{-p} \right\}}{(1 + \exp \left\{ -\frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\})^5};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \sqrt{p} \cdot \widehat{\varphi}_1(\sqrt{p}) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \varphi_1(t_1), \quad \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \varphi_1(t_1) = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \cdot \varphi_0(t) = \frac{1}{32a}.$$

#### 4 Решение неоднородного операторного уравнения

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения (8)

$$\widehat{\psi}(p) = \frac{\exp \left\{ -\frac{3}{a} \sqrt{-p} \right\}}{(1 + \exp \left\{ -\frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\})^4} \cdot \int_{-\infty}^p \exp \left\{ \frac{3}{a} \sqrt{-q} \right\} \cdot \left( 1 + \exp \left\{ -\frac{2}{a} \sqrt{-q} \right\} \right)^3 \cdot \widehat{f}_1(q) dq,$$

( $\operatorname{Re} p < 0, \operatorname{Re} q < 0$ ).



Учитывая, что  $\widehat{f}_1(q) = \int_0^{\infty} \exp\{q\tau_1\} f_1(\tau_1) d\tau_1$ , получим

$$\widehat{\psi}(p) = \int_0^{\infty} f_1(\tau_1) \left\{ \frac{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1 + \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^4} \int_{-\infty}^p \exp\{\tau_1 q\} \cdot \left(\exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-q}\right\} + \exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-q}\right\}\right)^3 dq \right\} d\tau_1 \quad (15)$$

или

$$\widehat{\psi}(p) = \int_0^{\infty} \widehat{R}(p) f_1(\tau_1) d\tau_1, \quad (15')$$

где

$$\widehat{R}(p) = \widehat{M}(p) \cdot \exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\} \cdot \widehat{N}(p).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\widehat{M}(p) = \frac{1}{\left(1 + \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^4};$$

$$\widehat{N}(p) = \int_{-\infty}^p \exp\{\tau_1 q\} \cdot \left(\exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-q}\right\} + \exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-q}\right\}\right)^3 \cdot \widehat{f}_1(q) dq.$$

Для нахождения решения  $\psi(t_1)$  необходимо найти оригинал для  $\widehat{R}(p)$ . Это произведем в несколько этапов.

Предварительно вычислим интеграл, стоящий в фигурной скобке (15):

$$\begin{aligned} \widehat{N}(p) &= \int_{-\infty}^p \exp\{\tau_1 q\} \cdot \left(\exp\left\{\frac{3}{a}\sqrt{-q}\right\} + \exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-q}\right\} + 3 \exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-q}\right\} + 3 \exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-q}\right\}\right) dq = \\ &= \left\| \begin{array}{l} \sqrt{-q} = \eta \\ q = -\eta^2; \quad dq = -2\eta d\eta \end{array} \right\| = 2 \int_{\sqrt{-p}}^{\infty} \eta \cdot \exp\{-\tau_1 \eta^2\} \cdot \left(\exp\left\{\frac{3}{a}\eta\right\} + \right. \\ &\quad \left. + \exp\left\{-\frac{3}{a}\eta\right\} + 3 \exp\left\{\frac{1}{a}\eta\right\} + 3 \exp\left\{-\frac{1}{a}\eta\right\}\right) d\eta. \end{aligned}$$

При вычислении этих интегралов используем формулу

$$\begin{aligned} 2 \int_{\sqrt{-p}}^{\infty} \eta \cdot \exp\{-\tau_1 \eta^2 + \alpha \eta\} d\eta &= \left\| \begin{array}{l} u = \exp\{\alpha \cdot \eta\}; \quad du = \alpha \cdot \exp\{\alpha \eta\} d\eta \\ dv = 2\eta \cdot \exp\{-\tau_1 \eta^2\} d\eta; \quad v = -\frac{1}{\tau_1} \exp\{-\tau_1 \eta^2\} \end{array} \right\| = \\ &= -\frac{1}{\tau_1} \exp\{-\tau_1 \eta^2 + \alpha \eta\} \Big|_{\sqrt{-p}}^{\infty} + \frac{\alpha}{\tau_1} \int_{\sqrt{-p}}^{\infty} \exp\{-\tau_1 \eta^2 + \alpha \eta\} d\eta = \\ &= -\frac{1}{\tau_1} \exp\left\{\left(\frac{\alpha}{2\tau_1}\right)^2\right\} \cdot \exp\left\{-\left(\sqrt{\tau_1} \cdot \eta - \frac{\alpha}{2\tau_1}\right)^2\right\} \Big|_{\sqrt{-p}}^{\infty} + \exp\left\{\left(\frac{\alpha}{2\tau_1}\right)^2\right\} \cdot \frac{\alpha}{\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \\ &\quad \times \int_{\sqrt{-p}}^{\infty} \exp\left\{-\left(\sqrt{\tau_1} \cdot \eta - \frac{\alpha}{2\tau_1}\right)^2\right\} d\left(\sqrt{\tau_1} \cdot \eta - \frac{\alpha}{2\sqrt{\tau_1}}\right) = \\ &= \frac{1}{\tau_1} \exp\{\tau_1 p + \alpha \sqrt{-p}\} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\alpha}{\tau_1^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{\frac{\alpha^2}{4\tau_1}\right\} \cdot \operatorname{erfc}\left\{\sqrt{-\tau_1 p} - \frac{\alpha}{2\tau_1}\right\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\widehat{N}(p) = \widehat{N}_0(p) + \widehat{N}_3^-(p) - \widehat{N}_3^+(p) + \widehat{N}_1^-(p) - \widehat{N}_1^+(p), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{N}_0(p) &= \frac{1}{\tau_1} \exp\{\tau_1 p\} \cdot \left( \exp\left\{\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\} + \exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\} \right) + \\ &+ \frac{3}{\tau_1} \exp\{\tau_1 p\} \cdot \left( \exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-p}\right\} + \exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-p}\right\} \right); \\ \widehat{N}_3^-(p) &= \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{\frac{9}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \operatorname{erfc}\left\{\sqrt{-\tau_1 p} - \frac{3}{2a\sqrt{\tau_1}}\right\}; \\ \widehat{N}_3^+(p) &= \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{\frac{9}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \operatorname{erfc}\left\{\sqrt{-\tau_1 p} + \frac{3}{2a\sqrt{\tau_1}}\right\}; \\ \widehat{N}_1^-(p) &= \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{\frac{1}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \operatorname{erfc}\left\{\sqrt{-\tau_1 p} - \frac{1}{2a\sqrt{\tau_1}}\right\}; \\ \widehat{N}_1^+(p) &= \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{\frac{1}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \operatorname{erfc}\left\{\sqrt{-\tau_1 p} + \frac{1}{2a\sqrt{\tau_1}}\right\}. \end{aligned}$$

Теперь представим выражение  $\widehat{R}(p)$  в следующем виде:

$$\widehat{R}(p) = \widehat{R}_1^*(p) + \widehat{R}_2(p), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{R}_1^*(p) &= \widehat{M}(p) \cdot \exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\} \cdot \widehat{N}_0(p); \\ \widehat{R}_2(p) &= \widehat{M}(p) \cdot \exp\{\tau_1 p\} \cdot \exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \cdot \widehat{N}_3^- - \\ &- \widehat{M}(p) \cdot \exp\left\{\tau_1 p - \frac{6}{a}\sqrt{-p}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{3}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \cdot \widehat{N}_3^+ + \\ &+ \widehat{M}(p) \cdot \exp\left\{\tau_1 p - \frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \cdot \widehat{N}_1^- - \\ &- \widehat{M}(p) \cdot \exp\left\{\tau_1 p - \frac{4}{a}\sqrt{-p}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \cdot \widehat{N}_1^+. \end{aligned} \quad (17^*)$$

Вначале найдем оригинал для первого слагаемого из (17), представив его в виде

$$\begin{aligned} \widehat{R}_1^*(p) &= \widehat{M}(p) \cdot \exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\} \cdot \widehat{N}_0(p) = \frac{\exp\{-\tau_1(-p)\}}{\tau_1 (1 + \exp\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\})^4} \times \\ &\times \left\{ \left( 1 + \exp\left\{-\frac{6}{a}\sqrt{-p}\right\} \right) + 3 \cdot \left( \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} + \exp\left\{-\frac{4}{a}\sqrt{-p}\right\} \right) \right\} = \\ &= \frac{\exp\{-\tau_1(-p)\}}{\tau_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \cdot \exp\left\{-n\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} \times \\ &\times \left[ 1 + 3 \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} + 3 \exp\left\{-\frac{4}{a}\sqrt{-p}\right\} + \exp\left\{-\frac{6}{a}\sqrt{-p}\right\} \right]. \end{aligned}$$

В последнем равенстве слагаемое при  $n = 0$  запишем отдельно, затем после перехода к оригиналу внесем его обратно под знак суммы, тогда получим

$$\widehat{R}_1^*(p) = \frac{\exp\{-\tau_1(-p)\}}{\tau_1} \cdot \left\{ 1 + 3 \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} + 3 \exp\left\{-\frac{4}{a}\sqrt{-p}\right\} + \exp\left\{-\frac{6}{a}\sqrt{-p}\right\} \right\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n \cdot \left\{ \exp \left\{ -n \frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\} + 3 \exp \left\{ -(n+1) \frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\} + 3 \exp \left\{ -(n+2) \frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\} + \right. \\ \left. + \exp \left\{ -(n+3) \frac{2}{a} \sqrt{-p} \right\} \right\}.$$

Опять, используя формулы [7; 525]

$$\exp\{-p\tau\} \doteq \delta(t - \tau); \quad \exp\{-k\sqrt{s}\} \doteq \frac{k}{2\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} \exp\left\{-\frac{k^2}{4t}\right\},$$

будем иметь

$$\exp\{-\tau_1(-p)\} \doteq \delta(\tau_1 - t_1); \quad \exp\left\{-\frac{\alpha}{a}\sqrt{-p}\right\} \doteq \frac{\alpha}{2a\sqrt{\pi}(\tau_1 - t_1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{4a^2(\tau_1 - t_1)}\right\}.$$

Значит, оригинал для первого слагаемого из (17) будет иметь следующее представление:

$$R_1^*(t_1, \tau_1) = \frac{1}{\tau_1} \delta(\tau_1 - t_1) + R_1(t_1, \tau_1), \quad (18)$$

где

$$R_1(t_1, \tau_1) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}(\tau_1 - t_1)^{\frac{3}{2}}\tau_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \cdot \left[ n \cdot \exp\left\{-\frac{n^2}{a^2(\tau_1 - t_1)}\right\} + 3(n+1) \cdot \exp\left\{-\frac{(n+1)^2}{a^2(\tau_1 - t_1)}\right\} + \right. \\ \left. + 3(n+2) \cdot \exp\left\{-\frac{(n+2)^2}{a^2(\tau_1 - t_1)}\right\} + (n+3) \cdot \exp\left\{-\frac{(n+3)^2}{a^2(\tau_1 - t_1)}\right\} \right]. \quad (19)$$

Прежде чем найти оригинал для  $\hat{R}_2(p)$  в соотношении (17), найдем оригиналы для выражений вида

$$\exp\left\{\frac{\alpha}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \cdot \hat{N}_{\alpha}^{\mp}(p), \quad (\alpha = \pm 3; \pm 1),$$

при этом будем использовать формулу [9; 311]

$$\exp\{\beta \cdot p\} \cdot \operatorname{erfc}\sqrt{\beta \cdot p} \doteq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\beta}{t}} \cdot \frac{1}{t + \beta}.$$

Рассмотрим четыре случая:

1.  $\alpha = -3$ ,

$$\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \cdot \hat{N}_3^-(p) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{\frac{9}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \times \\ \times \operatorname{erfc}\left\{\sqrt{-\tau_1 p} - \frac{3}{2a\sqrt{\tau_1}}\right\} = \left\| \begin{array}{l} \sqrt{-\tau_1 p} - \frac{3}{2a\sqrt{\tau_1}} = \sqrt{-\tau_1 q}; \quad \sqrt{-p} = \sqrt{-q} + \frac{3}{2a\tau_1}; \\ (-p) = (-q) + \frac{3}{a\tau_1}\sqrt{-q} + \frac{9}{4a^2\tau_1^2} \end{array} \right\| = \\ = \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{\frac{9}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-q} - \frac{9}{2a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{3}{a}\sqrt{-q} + \frac{9}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\{-\tau_1 q\} \cdot \operatorname{erfc}\{\sqrt{-\tau_1}\} = \\ = \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\{-\tau_1 q\} \cdot \operatorname{erfc}\{\sqrt{-\tau_1 q}\} \doteq \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\tau_1}{t_1}} \cdot \frac{1}{\tau_1 + t_1} = \frac{3}{2a\sqrt{\pi}\tau_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_1}(\tau_1 + t_1)}.$$

2.  $\alpha = 3$ ,

$$\exp\left\{\frac{3}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \cdot \hat{N}_3^+(p) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{\frac{9}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{3}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \times \\ \times \operatorname{erfc}\left\{\sqrt{-\tau_1 p} + \frac{3}{2a\sqrt{\tau_1}}\right\} = \left\| \begin{array}{l} \sqrt{-\tau_1 p} + \frac{3}{2a\sqrt{\tau_1}} = \sqrt{-\tau_1 q}; \quad \sqrt{-p} = \sqrt{-q} - \frac{3}{2a\tau_1}; \\ (-p) = (-q) - \frac{3}{a\tau_1}\sqrt{-q} + \frac{9}{4a^2\tau_1^2} \end{array} \right\| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{\frac{9}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-q} - \frac{9}{2a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{3}{a}\sqrt{-q} + \frac{9}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\{-\tau_1 q\} \cdot \operatorname{erfc}\{\sqrt{-\tau_1 q}\} = \\
 &= \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\{-\tau_1 q\} \cdot \operatorname{erfc}\{\sqrt{-\tau_1 q}\} \doteq \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\tau_1}{t_1}} \cdot \frac{1}{\tau_1 + t_1} = \frac{3}{2a\sqrt{\pi}\tau_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_1}(\tau_1 + t_1)}.
 \end{aligned}$$

3.  $\alpha = -1$ ,

$$\begin{aligned}
 &\exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \cdot \widehat{N}_1^-(p) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{\frac{1}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \times \\
 &\times \operatorname{erfc}\left\{\sqrt{-\tau_1 p} - \frac{1}{2a\sqrt{\tau_1}}\right\} = \left\| \begin{array}{l} \sqrt{-\tau_1 p} - \frac{1}{2a\sqrt{\tau_1}} = \sqrt{-\tau_1 q}; \sqrt{-p} = \sqrt{-q} + \frac{1}{2a\tau_1}; \\ (-p) = (-q) + \frac{1}{a\tau_1}\sqrt{-q} + \frac{1}{4a^2\tau_1^2} \end{array} \right\| = \\
 &= \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{\frac{1}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-q} - \frac{1}{2a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-q} + \frac{1}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\{-\tau_1 q\} \cdot \operatorname{erfc}\{\sqrt{-\tau_1 q}\} = \\
 &= \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\{-\tau_1 q\} \cdot \operatorname{erfc}\{\sqrt{-\tau_1 q}\} \doteq \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\tau_1}{t_1}} \cdot \frac{1}{\tau_1 + t_1} = \frac{3}{2a\sqrt{\pi}\tau_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_1}(\tau_1 + t_1)}.
 \end{aligned}$$

4.  $\alpha = 1$ ,

$$\begin{aligned}
 &\exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \cdot \widehat{N}_1^+(p) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{\frac{1}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \times \\
 &\times \operatorname{erfc}\left\{\sqrt{-\tau_1 p} + \frac{1}{2a\sqrt{\tau_1}}\right\} = \left\| \begin{array}{l} \sqrt{-\tau_1 p} + \frac{1}{2a\sqrt{\tau_1}} = \sqrt{-\tau_1 q}; \sqrt{-p} = \sqrt{-q} - \frac{1}{2a\tau_1}; \\ (-p) = (-q) - \frac{1}{a\tau_1}\sqrt{-q} + \frac{1}{4a^2\tau_1^2} \end{array} \right\| = \\
 &= \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{\frac{1}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-q} - \frac{1}{2a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-q} + \frac{1}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\{-\tau_1 q\} \cdot \operatorname{erfc}\{\sqrt{-\tau_1 q}\} = \\
 &= \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\{-\tau_1 q\} \cdot \operatorname{erfc}\{\sqrt{-\tau_1 q}\} \doteq \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\tau_1}{t_1}} \cdot \frac{1}{\tau_1 + t_1} = \frac{3}{2a\sqrt{\pi}\tau_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_1}(\tau_1 + t_1)}.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что оригиналы «подчеркнутых» выражений в (17\*) совпадают, нам необходимо найти оригинал выражения

$$\begin{aligned}
 &\widehat{M}(p) \cdot \exp\{\tau_1 p\} \cdot \left[1 - \exp\left\{-\frac{6}{a}\sqrt{-p}\right\} + \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - \exp\left\{-\frac{4}{a}\sqrt{-p}\right\}\right] = \\
 &= \left\| \widehat{M}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \cdot \exp\left\{-n\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} \right\| = \\
 &= \exp\{\tau_1 p\} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \times \left[\exp\left\{-n\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} + \exp\left\{-(n+1)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} + \right. \\
 &\quad \left. + \exp\left\{-(n+2)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - \exp\left\{-(n+3)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right] = \\
 &= \exp\{\tau_1 p\} \cdot \left[1 + \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - \exp\left\{-\frac{4}{a}\sqrt{-p}\right\} - \exp\left\{-\frac{6}{a}\sqrt{-p}\right\}\right] + \\
 &+ \exp\{\tau_1 p\} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n \cdot \left[\exp\left\{-n\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} + \exp\left\{-(n+1)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - \exp\left\{-(n+2)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - \right. \\
 &\quad \left. - \exp\left\{-(n+3)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right] \doteq \delta(\tau_1 - t_1) + \frac{1}{a\sqrt{\pi}(\tau_1 - t_1)^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n \left[n \cdot \exp\left\{-\frac{n^2}{a^2(\tau_1 - t_1)}\right\} + \right.
 \end{aligned}$$

$$+(n+1) \cdot \exp \left\{ -\frac{(n+1)^2}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\} - (n+2) \cdot \exp \left\{ -\frac{(n+2)^2}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\} - (n+3) \exp \left\{ -\frac{(n+3)^3}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\} \Bigg].$$

Здесь опять были использованы формулы [9; 248]

$$\exp \{-k\sqrt{s}\} \doteq \frac{1}{2\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} \cdot \exp \left\{ -\frac{k^2}{4t} \right\}; \quad 0 < t < \infty, \quad \exp\{p\tau\} \doteq \delta(\tau - t), \quad \operatorname{Re} p < 0.$$

Остается теперь найти свёртку данной функции с выражением

$$\frac{3}{2a\sqrt{\pi}\tau_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_1(\tau_1 + t_1)}},$$

которую обозначим

$$\begin{aligned} R_2(\tau_1, \tau_1 - t_1) &= \int_{t_1}^{\tau_1} \frac{3}{2a\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\tau_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\eta - t_1}} \cdot \frac{1}{\tau_1 + (\eta - t_1)} \left\{ \delta(\tau_1 - \eta) + \frac{1}{a\sqrt{\pi}(\tau_1 - \eta)^{\frac{3}{2}}} \times \right. \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n \left[ n \cdot \exp \left\{ -\frac{n^2}{a^2(\tau_1 - \eta)} \right\} + (n+1) \cdot \exp \left\{ -\frac{(n+1)^2}{a^2(\tau_1 - \eta)} \right\} - \right. \\ &\quad \left. \left. - (n+2) \cdot \exp \left\{ -\frac{(n+2)^2}{a^2(\tau_1 - \eta)} \right\} - (n+3) \cdot \exp \left\{ -\frac{(n+3)^2}{a^2(\tau_1 - \eta)} \right\} \right] \Bigg\} d\eta = \\ &= \frac{3}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{\tau_1 \sqrt{\tau_1 - t_1} (2\tau_1 - t_1)} + \frac{3}{2a^2\pi\tau_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n \cdot \int_{t_1}^{\tau_1} \frac{1}{\sqrt{\eta - t_1} (\tau_1 - \eta)^{\frac{3}{2}} (\tau_1 - t_1 + \eta)} \times \\ &\quad \times \left[ n \cdot \exp \left\{ -\frac{n^2}{a^2(\tau_1 - \eta)} \right\} + (n+1) \cdot \exp \left\{ -\frac{(n+1)^2}{a^2(\tau_1 - \eta)} \right\} - \right. \\ &\quad \left. - (n+2) \cdot \exp \left\{ -\frac{(n+2)^2}{a^2(\tau_1 - \eta)} \right\} - (n+3) \cdot \exp \left\{ -\frac{(n+3)^2}{a^2(\tau_1 - \eta)} \right\} \right] d\eta. \end{aligned}$$

Вначале необходимо вычислить интеграл вида

$$\begin{aligned} r_m(\tau_1, t_1) &= \int_{t_1}^{\tau_1} \frac{m \cdot \exp \left\{ -\frac{m^2}{a^2(\tau_1 - \eta)} \right\}}{\sqrt{\eta - t_1} (\tau_1 - \eta)^{\frac{3}{2}} (\tau_1 - t_1 + \eta)} d\eta = \\ &= \left\| \begin{array}{l} \frac{\eta - t_1}{\tau_1 - \eta} = z^2, \quad \eta - t_1 = z^2(\tau_1 - \eta), \quad \eta = \frac{\tau_1 z^2 + t_1}{1 + z^2}, \\ \eta - t_1 = \frac{(\tau_1 - t_1)z^2}{1 + z^2}, \quad \tau_1 - \eta = \frac{\tau_1 - t_1}{1 + z^2}, \quad d\eta = \frac{2z(\tau_1 - t_1)dz}{1 + z^2} \end{array} \right\| = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{m \cdot \sqrt{1 + z^2} (1 + z^2)^{\frac{3}{2}} (\tau_1 - t_1) \cdot 2z}{\sqrt{\tau_1 - t_1} z (\tau_1 - t_1)^{\frac{3}{2}} \left( \tau_1 + (\tau_1 - t_1) \frac{z^2}{z^2 + 1} \right) (1 + z^2)^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{m^2}{a^2} \cdot \frac{(1 + z^2)}{\tau_1 - t_1} \right\} dz = \\ &= \frac{2m}{\tau_1 - t_1} \int_0^{\infty} \frac{\exp \left\{ -\frac{m^2(1 + z^2)}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\}}{\left( \tau_1 + (\tau_1 - t_1) \frac{z^2}{z^2 + 1} \right)} dz = \\ &= \frac{2m}{\tau_1 - t_1} \exp \left\{ -\frac{m^2}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1 + z^2}{\tau_1 + (2\tau_1 - t_1)z^2} \exp \left\{ -\frac{m^2 z^2}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\} dz = \\ &= \frac{2m}{\tau_1 - t_1} \exp \left\{ -\frac{m^2}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\} \cdot \frac{1}{(2\tau_1 - t_1)} \int_0^{\infty} \frac{1 + z^2}{z^2 + \frac{\tau_1}{2\tau_1 - t_1}} \exp \left\{ -\frac{m^2 z^2}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\} dz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2m}{\tau_1 - t_1} \exp \left\{ -\frac{m^2}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\} \cdot \frac{1}{(2\tau_1 - t_1)} \left[ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2\tau_1 - t_1}}{\sqrt{\tau_1}} \exp \left\{ \frac{m^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\tau_1 - t_1} \cdot \frac{\tau_1}{2\tau_1 - t_1} \right\} \times \right. \\
 &\times \operatorname{erfc} \left\{ \frac{m}{a} \sqrt{\frac{\tau_1}{(\tau_1 - t_1)(2\tau_1 - t_1)}} \right\} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{a}{m} \cdot \sqrt{\tau_1 - t_1} - \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{\tau_1}{2\tau_1 - t_1}} \exp \left\{ \frac{m^2}{a^2} \cdot \frac{\tau_1}{(\tau_1 - t_1)(2\tau_1 - t_1)} \right\} \times \\
 &\times \operatorname{erfc} \left\{ \frac{m}{a} \sqrt{\frac{\tau_1}{(\tau_1 - t_1)(2\tau_1 - t_1)}} \right\} \left. \right] = \frac{2m}{\tau_1 - t_1} \cdot \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{a}{m} \cdot \sqrt{\tau_1 - t_1} \frac{1}{2\tau_1 - t_1} \exp \left\{ -\frac{m^2}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\} + \right. \\
 &+ \frac{\pi}{2(2\tau_1 - t_1)} \exp \left\{ -\frac{m^2}{a^2(2\tau_1 - t_1)} \right\} \cdot \operatorname{erfc} \left\{ \frac{m}{a} \sqrt{\frac{\tau_1}{(\tau_1 - t_1)(2\tau_1 - t_1)}} \right\} \cdot \left( \sqrt{\frac{2\tau_1 - t_1}{\tau_1}} - \sqrt{\frac{\tau_1}{2\tau_1 - t_1}} \right) \left. \right] = \\
 &= \frac{2m}{\tau_1 - t_1} \cdot \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{a}{m} \cdot \sqrt{\tau_1 - t_1} \frac{1}{2\tau_1 - t_1} \exp \left\{ -\frac{m^2}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\} + \right. \\
 &+ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau_1 - t_1}{\sqrt{\tau_1}(2\tau_1 - t_1)^{\frac{3}{2}}} \exp \left\{ -\frac{m^2}{a^2(2\tau_1 - t_1)} \right\} \cdot \operatorname{erfc} \left\{ \frac{m}{a} \sqrt{\frac{\tau_1}{(\tau_1 - t_1)(2\tau_1 - t_1)}} \right\} \left. \right] = \\
 &= \frac{a\sqrt{\pi}}{(\tau_1 - t_1)^{\frac{1}{2}}(2\tau_1 - t_1)} \exp \left\{ -\frac{m^2}{a^2(\tau_1 - t_1)} \right\} + \frac{m\pi}{\sqrt{\tau_1}(2\tau_1 - t_1)^{\frac{3}{2}}} \exp \left\{ -\frac{m^2}{a^2(2\tau_1 - t_1)} \right\} \times \\
 &\times \operatorname{erfc} \left\{ \frac{m}{a} \sqrt{\frac{\tau_1}{(\tau_1 - t_1)(2\tau_1 - t_1)}} \right\}. \tag{20}
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 R_2(t_1, \tau_1) &= \frac{3}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{\tau_1\sqrt{\tau_1 - t_1}(2\tau_1 - t_1)} + \frac{3}{2a^2\pi\tau_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n \times \\
 &\times [r_n(t_1, \tau_1) + r_{n+1}(t_1, \tau_1) - r_{n+2}(t_1, \tau_1) - r_{n+3}(t_1, \tau_1)], \tag{21}
 \end{aligned}$$

где  $r_m(\tau_1, t_1)$  определяется из равенства (20).

Значит, для функции  $\psi(t_1)$  получили следующее представление:

$$\psi(t_1) = \frac{1}{t_1} f_1(t_1) + \int_{t_1}^{\infty} [R_1(t_1, \tau_1) + R_2(t_1, \tau_1)] \cdot f_1(\tau_1) d\tau_1 + \psi_0(t_1).$$

Здесь справедлива оценка

$$\begin{aligned}
 |R_1(t_1, \tau_1) + R_2(t_1, \tau_1)| &\leq C \cdot \left[ \frac{1}{\tau_1(\tau_1 - t_1)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{a^2(\tau_1 - t_1)}} + \frac{1}{\sqrt{\tau_1 - t_1}\tau_1[\tau_1 + (\tau_1 - t_1)]} \right] \times \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{t - \tau}{4a^2} \right\}. \tag{22}
 \end{aligned}$$

Функцию  $\varphi_1(t_1)$  найдем из условия  $\varphi_1(t_1) = t_1 \cdot \psi(t_1)$ :

$$\varphi_1(t_1) = f_1(t_1) + t_1 \cdot \int_{t_1}^{\infty} [R_1(t_1, \tau_1) + R_2(t_1, \tau_1)] \cdot f_1(\tau_1) d\tau_1 + \psi_{1,0}(t_1).$$

Возвращаясь к старым переменным

$$\tau = \frac{1}{\tau_1}, \quad t = \frac{1}{t_1}, \quad f_1(t_1) = \sqrt{t} \cdot f(t), \quad \varphi_1(t_1) = \sqrt{t} \cdot \varphi(t),$$

получим

$$\sqrt{t} \cdot \varphi(t) = \sqrt{t} \cdot f(t) + \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \left[ R_1 \left( \frac{1}{t}, \frac{1}{\tau} \right) + R_2 \left( \frac{1}{t}, \frac{1}{\tau} \right) \right] \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\tau^2} f(\tau) d\tau + C \cdot \sqrt{t} \cdot \varphi_0(t).$$

Или, учитывая замечание 1, окончательно будем иметь

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \left[ R_1 \left( \frac{1}{t}, \frac{1}{\tau} \right) + R_2 \left( \frac{1}{t}, \frac{1}{\tau} \right) \right] \cdot \frac{1}{\tau^2} f(\tau) d\tau + C \cdot \varphi_0(t),$$

или

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t R(t, \tau) f(\tau) d\tau + C \cdot \varphi_0(t),$$

где

$$R(t, \tau) = \frac{1}{t \cdot \tau^2} \left[ R_1 \left( \frac{1}{t}, \frac{1}{\tau} \right) + R_2 \left( \frac{1}{t}, \frac{1}{\tau} \right) \right].$$

Для резольвенты справедлива следующая оценка:

$$|R(t, \tau)| \leq C \cdot \left[ \frac{\sqrt{\tau} \cdot \sqrt{t}}{(t - \tau)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}} + \frac{\sqrt{\tau} \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{t-\tau}(2t-\tau)} \right] \cdot e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}}.$$

Таким образом, справедлива

*Теорема 1.* Интегральное уравнение (2) для любой

$$\sqrt{t} \cdot f(t) \in L_\infty(0, \infty)$$

имеет общее решение  $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t R(t, \tau) f(\tau) d\tau + C \cdot \varphi_0(t),$$

где  $C = const$ ,  $t^{\frac{3}{2}-\omega} \cdot \varphi(t) \in L_\infty(0, \infty)$ , и для резольвенты

$$R(t, \tau) = R_1(t, \tau) + R_2(t, \tau),$$

которая определяется из равенств (19), (21), справедлива оценка (22).

#### Список литературы

- 1 Solonnikov V.A. One-dimensional parabolic problem arising in the study of some free boundary problems / V.A. Solonnikov, A. Fasano // Notes of scientific seminars PDMI. — 2000. — Vol. 269. — P. 322–338.
- 2 Jenaliyev M.T. On a homogeneous parabolic problem in an in nite corner domain / M.T. Jenaliyev, M.I. Ramazanov // AIP Conference Proceedings. — 1759. — 2016. — 020085, doi: 10.1063/1.4959699.
- 3 Jenaliev M.T. On a Volterra equation of the second kind with ‘incompressible‘ kernel / M.T. Jenaliev, M.M. Amangaliyeva, M.T. Kosmakova, M.I. Ramazanov // Advances in Difference Equations. — 2015. — Vol. 2015: 71. — P. 14.
- 4 Amangaliyeva M.M. About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain / M.M. Amangaliyeva, M.T. Jenaliev, M.T. Kosmakova, M.I. Ramazanov // Boundary Value Problems. — 2014. — P. 21.
- 5 Amangaliyeva M.M. On one homogeneous problem for the heat equation in an in nite angular domain / M.M. Amangaliyeva, M.T. Jenaliyev, M.T. Kosmakova, M.I. Ramazanov // Siberian Mathematical Journal. — 2015. — Vol. 56. — No. 6. — P. 1234–1248.
- 6 Polyanin A.D. Handbook of integral equations / A.D. Polyanin, A.V. Manzhirov. Moscow: FML, 2003. — P. 608.
- 7 Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. — М.: Наука, 1965. — 716 с.
- 8 Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию / М.Л. Краснов. — М.: Наука, 1975. — 302 с.

- 9 Диткин В.А. Справочник по операционному исчислению / В.А. Диткин, А.П. Прудников. — М.: Высш. шк., 1965. — 466 с.

Т.Н. Бекжан, М.Т. Дженалиев, С.А. Ысқақов, М.И. Рамазанов

## Сингулярлы біртекті емес Вольтерра интегралдық теңдеуінің шешімі жайлы

Мақалада біртекті емес сингулярлы екінші текті Вольтерра теңдеуі зерттелген. Бұндай теңдеуге кейбір еркін шекаралы есептерді шешкенде пайда болатын шекаралық жылуөткізгіштік есептері редуцияланады. Бұл теңдеудің жалпы шешімі табылған, ол біртекті теңдеудің жалпы шешімінің және біртекті емес теңдеудің дербес шешімінің қосындысы түрінде алынған. Интегралдық теңдеудің резольвентасы құрылып, оның бағасы берілген.

*Клт сөздер:* жылуөткізгіштіктің шекаралық есебі, Вольтерраның интегралдық теңдеуі, резольвента, дербес шешім.

T.N. Bekjan, M.T. Jenaliyev, S.A. Iskakov, M.I. Ramazanov

## To the solution of the singular inhomogeneous integral Volterra equation

In the article the inhomogeneous singular Volterra integral equation of the second kind is investigated, to which the boundary value problem of heat conduction is reduced, that arises at solving some problems with free boundaries. A general solution of this equation is found that represents the sum of the general solution to the homogeneous equation and the particular solution to the inhomogeneous equation. An estimate of the constructed resolvent for the integral equation is given.

*Keywords:* the boundary value problem of heat conduction, the Volterra integral equation, the resolvent, private solution.

### References

- 1 Solonnikov, V.A., Fasano, A. (2000). One-dimensional parabolic problem arising in the study of some free boundary problems. *Notes of scientific seminars PDMI, Vol. 269*, 322–338.
- 2 Jenaliyev, M.T., Ramazanov, M.I. (2016). On a homogeneous parabolic problem in an infinite corner domain. *AIP Conference Proceedings*. 1759. — 020085, doi: 10.1063/1.4959699.
- 3 Jenaliyev, M.T., Amangaliyeva, M.M., Kosmakova, M.T., Ramazanov M.I. (2015). On a Volterra equation of the second kind with ‘incompressible’ kernel. *Advances in Difference Equations, Vol. 2015*, 71, 14.
- 4 Amangaliyeva, M.M., Jenaliyev, M.T., Kosmakova, M.T., Ramazanov, M.I. (2014). About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain. *Boundary Value Problems*, 21.
- 5 Amangaliyeva, M.M., Jenaliyev, M.T., Kosmakova, M.T., Ramazanov, M.I. (2015). On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain. *Siberian Mathematical Journal, Vol. 56*, 6, 1234–1248.
- 6 Polyanin, A.D., Manzhirov, A.V. (2003). *Handbook of integral equations*. Moscow: FML.
- 7 Lavrent'ev, M.A., Shabat, B.V. (1965). *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of function of complex variable]*. Moscow: Nauka [in Russian].
- 8 Krasnov, M.L. (1975). *Integralnye uravneniya. Vvedenie v teoriyu [Integral equations. Introduction in theory]*. Moscow: Nauka [in Russian].
- 9 Ditkin, V.A., Prudnikov, A.P. (1965). *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu [Handbook of operator calculus]*. Moscow: Visshaya shkola [in Russian].



M. Bukenov, A. Ibrayev, D. Zhussupova, D. Azimova

*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan  
(E-mail: zhus.dinara@yandex.kz)*

## Numerical solution of a problem on bending oscillation of a rod

In article considered the problem of curved rod fluctuation with JungbT<sup>TM</sup>s module. Shown the civility of the problem formulation. For solution used integro – interpolation method. Constructed implicit differential scheme, which realized by five – point sweep method. Conducted numerical calculations showed coincidence of theoretical calculation values of solution. Calculations conducted on the system of computer algebra Wolfram Mathematica. Results of calculations are given for two cases of fixing ends of the rod: both ends are fixed and one end is fixed other is free.

*Keywords:* difference scheme, pentadiagonal sweep method, oscillations of a rod, YoungbT<sup>TM</sup>s module, integro-interpolation method.

Let us consider a rod with length  $l$  with rectilinear axis of variable, but not swirling cross-section, executing bending oscillations in plane  $Oxyz$  ( $Ox$  axis is directed along rod axis and passes through centers of gravity of cross-sections;  $Oy$  and  $Oz$  are main axes, so  $\int_F yz dF = \int_F y dF = \int_F z dF = 0$ ). Let us suppose that cross at deformation stay flat and perpendicular to deformed axes of the rod, while normal stresses on areas parallel to the axle are small to negligible. Essential of tensor components of stress and deformation are  $\sigma_{11}$  and  $\varepsilon_{11}$ . Axle elongation is neglected. Potential energy of deformation and kinetic energy relate to rod bend as follows:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx,$$

where  $J = \int_F z^2 dF$  – is a moment of inertial of cross section relative to  $Oy$ . Bending rod oscillations are described by equations [1, 2]:

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + S \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q(x, t), \quad (1)$$

initial conditions

$$w|_{t=0} = u_0(x); \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x), \quad (2)$$

boundary conditions:

$$w|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) |_{x=l} = 0; \quad E \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} |_{x=l} = 0, \quad (4)$$

i.e. left end is fixed, right end is free.  $E = E(x)$  is YoungbT<sup>TM</sup>s module,  $\rho$  is density, and  $l$  bT<sup>TM</sup> is rod length.

Let  $D = [0, l]$ ,  $D_T = D \times [0, T]$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Generalized solution of problem (1)–(4) let we name function  $w \in W_2^{2,2}(D_T)$ , for which an integral identity is made:

$$\begin{aligned} & -\rho \int_0^T \left( \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_D dt + \rho(u_1(x); \Phi_t(x, 0))_D + \rho(u_0(x), \Phi(x, 0))_D + \\ & + -\rho \int_0^T \left( \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_D dt + \rho(u_1(x); \Phi_t(x, 0))_D + \rho(u_0(x), \Phi(x, 0))_D + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^T \left( a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_D dt = \int_0^T (q, \Phi)_D dt, \quad (5)$$

$(u, v)_D = \int_D u(x, t)v(x, t)dx$ ,  $a(x) = E(x)$ , with any function  $\Phi(x, t) \in W_2^{2,2}(D_T)$ . It is easy to see that if  $q(x, t) \in L_2(0, T; L_2(D))$ ,  $u_0(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1$ ,  $u_1(x) \in L_2(D)$ , , then problem (1)–(4) has only generalized solution, following [3]. To solve (1)–(4) using integro – interpolation method [4] construct implicit conservative scheme:

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, M, M = [T/\tau]\};$$

$$\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N, h = l/N\};$$

$$\rho_i \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} + S \left( a_{i+2} \frac{u_{i+2}^{n+1} - u_{i+1}^{n+1}}{h^4} - 3a_{i+1} \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h^4} + 3a_i \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h^4} - a_{i-1} \frac{u_{i-1}^{n+1} - u_{i-2}^{n+1}}{h^4} \right) = q_i^n, i = 2, \dots, N - 2, \quad n = 1, \dots, M - 1. \quad (6)$$

Let us add approximation of initial and boundary conditions

$$u_i^0 = 0, \quad u_i^1 = u_i^0 + \frac{\tau(\Lambda u_i^0 - q_i^0)}{2}; \quad (7)$$

$$u_0^n = 0, -u_2^n - 4u_1^n + 5u_0^n = 0, u_N^n - 2u_{N-1}^n + u_{N-2}^n = 0;$$

$$a_{N-1}u_N^n - (a_{N-2} + 2a_{N-1})u_{N-1}^n + (a_{N-1} + 2a_{N-2})u_{N-2}^n - a_{N-2}u_{N-3}^n = 0; \quad (8)$$

$$a_i = a(x_i - 0.5h);$$

$$\Lambda u^n = S \left( a_{i+2} \frac{u_{i+2}^n - u_{i+1}^n}{h^4} - 3a_{i+1} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h^4} + 3a_i \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h^4} - a_{i-1} \frac{u_{i-1}^n - u_{i-2}^n}{h^4} \right).$$

Scheme (6)–(8) has an error  $O(\tau^2 + h^2)$ . Following (4), let us bring scheme (6) to canonical form

$$Bu_i + \tau^2 Ru_{it} + \Lambda u = \varphi, \quad (9)$$

where  $B = 0$ ,  $R = E/\tau^2$ , then from (9), following [4] we establish that scheme (6)–(8) is stable on the right part and initial data; using different analogs of embedding theorems [5], it is easy to see that if  $z = U - W$  – error between  $U$  – difference solution of problem (6)–(8) and solution  $W$  – of differential problem (1)–(4) then there is a convergence, namely

$$\|z\|_{W_{2,h}^{2,2}(D_h)} \leq C(\tau^2 + h^2). \quad (10)$$

To solve difference scheme (6)–(8) pentadiagonal sweep method [6]. To this end in (6) let us transfer elements on layer  $n + 1$  to the first part, then we get the following system

$$a_i y_{i-2} - b_i y_{i-1} + c_i y_i - d_i y_{i+1} + e_i y_{i+2} = f_i, \quad i = 2, \dots, N - 2. \quad (11)$$

We will solve it using pentadiagonal sweep method algorithm. Here we attach graphs of bend behavior on different time steps, which demonstrate quality conformity with practical results.

The values of steps in the construction of the graphs given above are as follows

$$\tau = h = 0.001.$$

In Figure 1 is a graph of the flexural oscillations of the rod, one end of which is fixed, and the second is free for various time steps. Constant coefficients and functions in equation (1) were taken as follows

$$\rho = 1.0, J = 1.0; F = 1.0, a(x) = 1.0; q(x, t) = \delta(x - v_0t); v_0 = 20.0,$$

where  $\delta$  – delta-function;  $v_0$  – speed of acting force  $F$ .

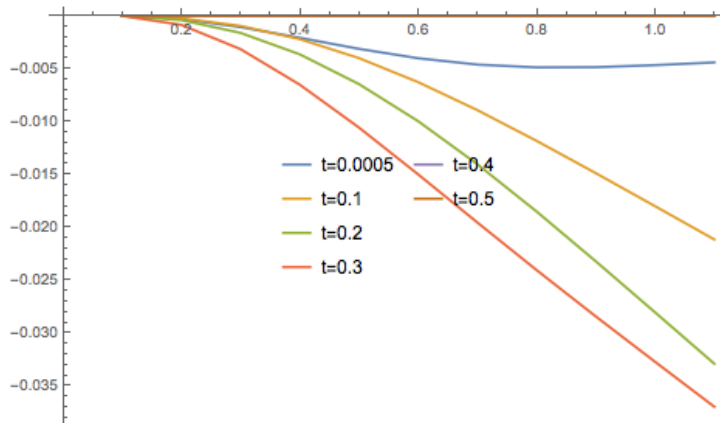


Figure 1. Graph of flexural oscillations of the rod, one end of which is fixed and the second is free

In Figure 2 is a graph of the flexural oscillations of the rod, both ends of which are fixed, for different time steps. Constant coefficients and functions in equation (1) were taken as follows:

$$\rho = 7800.0, J = 400.0; F = 1.0, a(x) = 10000.0; q(x, t) = \delta(x - v_0t); v_0 = 20.0.$$

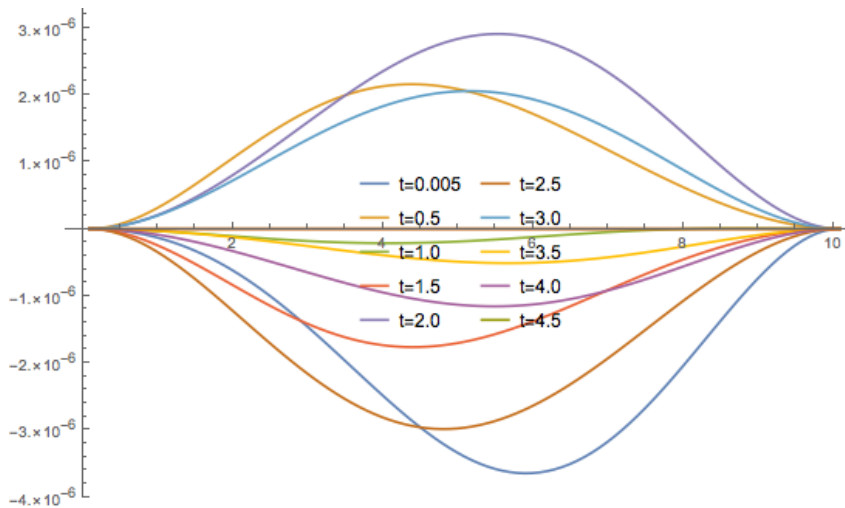


Figure 2. The graph of the flexural oscillations of the rod, both ends of which are fixed

Checked comparison with the test solution. The results showed qualitative coincidence of the numerical solution with the test solution on different grids. Conclusion: the proposed algorithm showed its practical effectiveness for the numerical solution of the original problem.

## References

- 1 Бидерман В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. — М.: Наука, 1980. — 408 с.
- 2 Пановко Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. — М.: Наука, 1987. — 352 с.
- 3 Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. — М.: Наука, 1973. — 407 с.
- 4 Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. — М.: Наука, 1977. — 657 с.
- 5 Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений / В.Б. Андреев, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1976. — 354 с.
- 6 Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений / Е.С. Николаев, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1978. — 592 с.

М. Буkenov, А. Ибраев, Д. Жусупова, Д. Азимова

### Сымның иілмелі тербеліс есебінің сандық шешімі

Мақалада Юнг модулі айнымалы болатын сымның иілмелі тербелістері туралы есеп қарастырылды. Есептің қисындылығы дәлелденді. Есепті шешуде интегралдық-интерполяциялық әдіс қолданылған. Айқындалмаған айырымдық схема құрастырылып, беснүктелі қуалау әдісімен шешілген. Жүргізілген есептеулер нәтижелердің теориялық мәндерімен беттесетіні көрсетілді. Барлық есептеулер Wolfram Mathematica компьютерлік алгебра жүйесінде жіргізілді. Есептеулердің нәтижелері сымның екі ұшына екі түрлі әдіспен бекітілген (екі ұшы қатаң бекітілген және бір ұшы қатаң бекітілген, ал екіншісі – бос) жағдайы үшін келтірілген.

*Кілт сөздер:* айырымды схема, беснүктелі қуалау әдісі, сымның тербелістері, Юнг модулі, интегралдық-интерполяциялық әдіс.

М. Буkenov, А. Ибраев, Д. Жусупова, Д. Азимова

### Численное решение задачи об изгибном колебании стержня

В статье рассмотрена задача изгибных колебаний стержня с переменным модулем Юнга. Показана корректность постановки задачи. Для решения задачи использовался интегро-интерполяционный метод. Построена неявная разностная схема, которая реализована методом пятиточечной прогонки. Проведенные численные расчеты показали качественное совпадение теоретических расчетных значений решения. Вычисления выполнялись в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Результаты вычислений приведены для двух случаев закрепления концов стержня: два конца закреплены жестко и один конец – заделка, а второй – свободный.

*Ключевые слова:* разностная схема, метод пятиточечной прогонки, колебания стержня, модуль Юнга, интегро-интерполяционный метод.

## References

- 1 Biderman, V.L. (1980). *Teoriia mekhanicheskikh kolebaniy [Theory of mechanical oscillations]*. Moscow: Nauka [in Russian].
- 2 Panovko, Ya.G., Gubanova, I.I. (1987). *Ustoichivost i kolebaniia upruhikh sistem [Stability and fluctuations of elastic systems]*. Moscow: Nauka [in Russian].
- 3 Ladizhenskaya, O.A. (1973). *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki [Boundary problems of mathematical physics]*. Moscow: Nauka [in Russian].

- 4 Samarskii, A.A. (1977). *Teoriia raznostnykh skhem [Theory of differential schemes]*. Moscow: Nauka [in Russian].
- 5 Andreev, V.B., Samarskii, A.A. (1976). *Raznostnye metody dlia ellipticheskikh uravnenii [Differential methods for the elliptic equations]*. Moscow: Nauka [in Russian].
- 6 Nikolaev, E.S., Samarskii, A.A. (1978). *Metody resheniia setochnykh uravnenii [Methods of the solution of the net equations]*. Moscow: Nauka [in Russian].

А.В. Букетов<sup>1</sup>, А.В. Шарко<sup>1</sup>, Д.А. Зинченко<sup>1</sup>, Д.М. Степанчиков<sup>2</sup><sup>1</sup>Херсонская государственная морская академия, Украина;<sup>2</sup>Херсонский национальный технический университет, Украина

(E-mail: denim102@bk.ru)

## К вопросу оптимизации ингредиентов композитных материалов на основе эпоксидной смолы

Разработан алгоритм многокритериальной оптимизации содержания ингредиентов защитных покрытий на основе анализа изменений показателей разрушающих напряжений, модуля упругости при изгибе, теплостойкости, термостойкости и температурного коэффициента линейного расширения. Методом отбора через упорядочение объектов по образцу определено наиболее оптимальное содержание двухкомпонентного дисперсного наполнителя в эпоксидном композитном материале. Установлено, что введение двух наполнителей разной дисперсности улучшает физико-механические и теплофизические свойства материалов. Доказано, что для разработанной матрицы на основе эпоксидного олигомера ЕД-20 (100 масс. ч.) и отвердителя ПЕПА (10 масс. ч.) оптимальное содержание двухкомпонентного наполнителя составляет дисульфид молибдена – 80 масс. ч., микроталька – 80 масс. ч., карбоната серебра – 0,5 масс. ч.

*Ключевые слова:* эпоксидный композит, ударная вязкость, модуль упругости, деструкция, оптимизация, компонентный наполнитель.

*Постановка проблемы.* На сегодня важной проблемой является создание конструкционных материалов, в том числе и полимерных, с необходимым комплексом улучшенных свойств [1]. Решают данную проблему за счет выбора диапазона содержания наполнителей в материалах, что достигается использованием метода многокритериальной оценки показателей физико-механических и теплофизических свойств материалов и методом скаляризации векторных оценок (метод отбора через упорядочение объектов по образцу).

*Анализ последних исследований и публикаций.* Одним из методов улучшения свойств композитных материалов (КМ) на основе эпоксидной матрицы является введение в связующее различных по природе и дисперсности наполнителей. Предварительно нами было исследовано влияние наполнителей различной природы и дисперсности на физико-механические и теплофизические свойства КМ [2–5]. Установлено оптимальное содержание микродисперсных (7...10 мкм) и нанодисперсных (100...500 нм) частиц наполнителей различной природы для формирования покрытий разного функционального назначения с повышенными эксплуатационными характеристиками. В плане оптимизации содержания двухкомпонентного наполнителя необходимой является многокритериальная оценка состава ингредиентов КМ (эпоксидная смола+отвердитель+ нанонаполнитель+микронаполнитель), так как содержание и тип ингредиентов существенно влияют на характеристики КМ. Для такой оптимизации предлагается использование алгоритмов нечеткой логики на примере создания материалов с повышенными показателями исследуемых свойств [5–7].

*Цель работы* — определить наиболее оптимальную массовую часть наполнителя, используя многокритериальные методы выбора для его каждого типа.

### *Обсуждение экспериментальных результатов исследования*

В результате проведенных ранее экспериментов получены наборы дискретных значений физико-механических ( $W$  — ударная вязкость;  $\sigma_{\text{изг}}$  — разрушающие напряжения при изгибе;  $E$  — модуль упругости при изгибе) и теплофизических свойств ( $T$  — теплостойкость по Мартенсу;  $\alpha$  — термический коэффициент линейного расширения,  $T_0$  — температура начала деструкции) при различных массовых частях наполнителя. Рассматривали три наполнителя: дисульфид молибдена (ДМ), карбонат серебра (КС), микротальк (МТ). Исходные данные представлены в таблице 1. С точки зрения прикладного применения полезным является максимизация следующих параметров:  $W$ ,  $\sigma_{\text{изг}}$ ,  $E$ ,  $T$ ,  $T_0$  и минимизация параметра  $\alpha$ .

**Дискретные значения параметров физико-механических и теплофизических свойств композитных материалов, наполненных дисульфидом молибдена, микротальком, карбонатом серебра**

Содержание наполнителей $q_1, q_2, q_3$ , масс.ч.	$\sigma_{изг.}$ , МПа	$E$ , ГПа	$T$ , К	$W$ , кДж/м <sup>2</sup>	$\alpha^\circ \times 10^{-5}$ , К <sup>-1</sup>	$T_0$ , К
Приоритет	1(max)	2(max)	3(max)	4(max)	5(min)	6(max)
<b>Дисульфид молибдена (<math>q_1</math>)</b>						
0	48,00	2,9	341	7,27	10,3	615,7
5	39,48	2,98	361	14,27	10,1	593,0
10	38,34	3,09	372	13,16	10,2	591,8
15	35,65	3,28	373	13,08	9,82	586,8
20	33,80	3,47	373	8,56	9,76	583,2
30	31,47	3,56	373	8,38	9,37	585,7
40	29,78	3,72	374	7,92	8,40	583,0
50	29,61	3,8	374,5	7,47	8,08	578,6
60	29,58	3,9	376	7,45	7,11	555,9
80	29,46	3,98	379	7,07	6,94	568,4
<b>Микротальк (<math>q_2</math>)</b>						
5	46,12	3,47	362	8,71	11,02	617,9
10	39,11	3,89	364	9,35	9,52	615,7
15	35,09	4,22	365	10,04	9,64	610,2
20	33,06	4,52	367	9,42	9,39	612,2
30	31,46	4,87	369	8,02	9,73	614,5
40	30,07	5,25	371,5	7,51	9,93	613,1
50	30,02	5,71	372,5	7,03	9,69	620,8
60	30,02	5,94	375	6,53	7,97	621,1
80	29,99	6,63	382	6,01	8,25	621,4
<b>Карбонат серебра (<math>q_3</math>)</b>						
0,025	33,63	3,34	358	7,48	7,78	611,8
0,050	34,88	3,21	358	7,49	8,03	595,7
0,100	69,42	3,11	359	7,90	8,49	618,1
0,250	63,20	3,17	358	9,51	7,87	624,3
0,500	60,10	3,39	358	15,30	6,84	610,4
1,000	120,41	2,51	360	6,60	6,9	615,6

*Теоретические основы решения*

Для решения поставленной задачи применяется один из методов скаляризации векторных оценок – метод отбора через упорядочение объектов по образцу [8]. При этом необходимо перейти от векторных к скалярным оценкам объектов. Простейшей скалярной функцией, обеспечивающей получение линейного порядка объектов, является функция штрафов, формируемая относительно экстремальных значений признаков:

$$F(y_i) = \sum_{j=1}^n \Delta y_{ij}, \quad (1)$$

где под отклонением  $\Delta y_{ij}$  от идеальной цели по  $j$ -му признаку понимается абсолютное значение разности  $\Delta y_{ij} = |y_i - c_{j,extr}|$ , в которой идеальная цель при максимизации  $j$ -го признака определяется как  $c_{j,extr} = y_{j,max}$ , а при его минимизации – как  $c_{j,extr} = y_{j,min}$ . Условием правильного применения функции (1) является использование общей шкалы (в общем случае – абсолютной) для измерения всех признаков.

Под образцом понимается класс объектов, характеризуемый обобщённой целью  $h = (c_1, \dots, c_1, \dots, c_n)$ . Введем меру обобщенного отклонения от цели, которая позволяет не только найти объект, ближайший к образцу, но и упорядочить по удаленности от цели. Рассмотрим образец, чьи свойства формируются ограничениями по равенству ( $y_j = c_j$ ). Отклонение  $j$ -го признака в любую сторону от точки  $c_j$  ( $c_j \pm \Delta y + j$ ) определяет меру удаленности по этому признаку объекта от цели. Определим относительное отклонение  $j$ -го признака от цели как

$$\delta y_{ij} = \begin{cases} \frac{|y_{ij} - c_j|}{y_{j,\max} - c_j}; & y_{ij} > c_j; \\ \frac{|y_{ij} - c_j|}{c_j - y_{j,\min}}; & y_{ij} < c_j, \end{cases} \quad (2)$$

где  $i$  — номер строки;  $j$  — номер столбца в матрице (3).

В качестве параметров  $c_j$  можно выбрать максимальные значения экспериментальных физико-механических параметров (ударная вязкость, разрушающие напряжения, модуль упругости, теплостойкость, температура начала деструкции) и минимальные значения экспериментальных физико-механических параметров (ТКЛР) из таблицы 1. При таком подходе формула (2) переведет размерные величины в относительные в пределах шкалы (0, 1). Однако при таком выборе параметров  $c_j$  обязательно будут наблюдаться совпадения элементов анализируемой матрицы с величиной  $c_j$ , что будет соответствовать  $\delta y_{ij} = 0$ . При использовании аддитивной свертки (4) это приводит к исключению соответствующего признака из общей оценки объекта, а при использовании мультипликативных сверток (5, 6) — к их обнулению. Очевидным способом исключения таких ситуаций является расширение верхней (для максимума) и нижней (для минимума) границы каждого признака  $c_j$  в одинаковом процентном соотношении [8]. Ниже максимальные (минимальные) значения каждого из шести экспериментальных физико-механических параметров  $c_j$  были увеличены (уменьшены) на 1 % (табл. 2).

Таблица 2

**Увеличенные (уменьшенные) на 1 % дискретные значения физико-механических и теплофизических параметров композитных материалов**

	$W$ , кДж/м <sup>2</sup>	$\sigma_{\text{изг}}$ , МПа	$E$ , ГПа	$T$ , К	$\alpha \times 10^{-5}$ , К <sup>-1</sup>	$T_0$ , К
extr	15,30	120,41	6,63	382,00	6,84	624,30
$c_j$	15,45	120,61	6,70	385,82	6,77	630,54

В результате применения формулы (2) для каждого типа наполнителя получаем матрицы вида

$$R = \left( \begin{array}{c|cccc} & P_1 & P_2 & \dots & P_n \\ \hline q_1 & \delta y_{11} & \delta y_{12} & \dots & \delta y_{1n} \\ q_2 & \delta y_{21} & \delta y_{22} & \dots & \delta y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_m & \delta y_{m1} & \delta y_{m2} & \dots & \delta y_{mn} \end{array} \right), \quad (3)$$

где  $q_1, \dots, q_i, \dots, q_m$  — массовое число наполнителя;  $P_1, \dots, P_j, \dots, P_n$  — физико-механические параметры.

Для выполнения скалярной оптимизации требуются дополнительные знания о свойствах обобщающих функций, шкалах признаков и их весовых коэффициентах. Поскольку эти знания являются экспертными, упорядочение объектов в  $n$ - мерном пространстве не может быть однозначным. Поэтому важным является изучение влияния на результаты оптимизации свойств обобщающих функций, шкал признаков и весовых коэффициентов.

При теоретическом анализе были использованы следующие обобщающие многокритериальные функции полезности.

Аддитивная свертка [8]:

$$\delta y_i = \sum_{j=1}^n \omega_j \delta y_{ij}, \quad (4)$$

где  $\omega_j$  — важность (весовой коэффициент)  $j$ -го признака,  $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$ .



Степенная мультипликативная свертка [8]:

$$\delta y_i = \prod_{j=1}^n (\delta y_{ij})^{\omega_j}. \quad (5)$$

Дополнительная мультипликативная свертка [8]:

$$\delta y_i = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - \omega_j \delta y_{ij}). \quad (6)$$

Наилучшим считается объект, обладающий минимальным значением функций (4–6).  
Критерий Сэвиджа (Вальда) (минимальный максимум) [9, 10]:

$$Z_v = \min_i \max_j \delta y_{ij}. \quad (7)$$

Критерий Лапласа (минимальный минимум) [9, 10]:

$$Z_L = \min_i \min_j \delta y_{ij}. \quad (8)$$

Критерий Гурвица [9, 10]:

$$Z_{hw} = \min_i \left\{ \rho \min_j \delta y_{ij} + (1 - \rho) \max_j \delta y_{ij} \right\}, \quad (9)$$

где  $0 \leq \rho \leq 1$  — показатель пессимизма, при расчетах полагали равным 0,5.

Аддитивная обобщающая функция (4) синтезирует «объемный» показатель объекта. Он отражает суммарную величину частных показателей с учетом важности. Прямая мультипликативная функция (5) отдает предпочтение объектам с равномерными оценками по всем показателям, т.е. отражает равномерность частных показателей. Дополнительная мультипликативная функция (6) имеет обратное свойство. Критерий Сэвиджа (7) является перестраховочным критерием, использование которого заключается в получении максимального гарантированного результата при наихудших условиях – ориентация на минимизацию риска. Критерий Лапласа (8) определяет стратегию, максимизирующую выигрыш (минимизирующую минимальный риск). Это критерий крайнего оптимизма. Критерий Гурвица (9) при выборе решения рекомендует руководствоваться некоторым средним результатом, характеризующим состояние между крайним пессимизмом и крайним оптимизмом.

#### Результаты и их анализ

Расчеты проведены в системе компьютерной математики «Maple 9.» В таблице 3 представлены результаты расчетов по формулам (4–9) для различных значений важности  $j$ -го признака.

Таблица 3

#### Анализ результатов (отбор через упорядочение объектов по образцу)

Наполнители	Критерии/оптимальная, масс.ч.					
	аддитивная свертка	мультипликативная свертка	дополнительная мультипликативная свертка	критерий Сэвиджа (Вальда)	критерий Лапласа	критерий Гурвица
ДМ	80 <sup>1)</sup>	80 <sup>1)</sup>	80 <sup>1)</sup>	15	80	80
МТ	80 <sup>1)</sup>	80 <sup>1)</sup>	80 <sup>1)</sup>	10	80	80
КС	0,5 <sup>1)</sup>	0,5 <sup>1)</sup>	0,5 <sup>1)</sup>	0,5	1	0,5

Расчитанные по формуле (2) матрицы для каждого типа наполнителя представлены в таблице 4. Расчеты проведены в предположении, что все критерии имеют одинаковую важность.

Таблица 4

Рассчитанные по формуле (2), (3) матрицы, наполненные дисульфидом молибдена, микротальком, карбонатом серебра

Наполнители												
Дисульфид молибдена ( $q_1$ )												
1	$\omega$	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	$min$	$max$	$y_a$	$y_{ms}$	$y_{md}$
2	$q_{1,2,3}$	$\sigma_{изг}$	$E$	$T$	$W$	$\alpha$	$T_0$					
3	0	0,798	1,000	1,000	0,976	1,000	0,189	0,189	1,000	0,829	0,726	0,594
4	5	0,891	0,979	0,556	0,142	0,943	0,500	0,142	0,979	0,670	0,565	0,514
5	10	0,904	0,950	0,311	0,273	0,972	0,514	0,273	0,972	0,656	0,575	0,506
6	15	0,933	0,900	0,289	0,285	0,864	0,581	0,285	0,933	0,643	0,571	0,498
7	20	0,953	0,850	0,289	0,823	0,847	0,635	0,289	0,953	0,733	0,685	0,545
8	30	0,978	0,826	0,289	0,845	0,737	0,595	0,289	0,978	0,712	0,665	0,534
9	40	0,997	0,784	0,267	0,899	0,462	0,635	0,267	0,997	0,675	0,616	0,515
10	50	0,999	0,763	0,267	0,953	0,371	0,689	0,267	0,999	0,675	0,606	0,515
11	60	0,999	0,737	0,222	0,955	0,0963	1,000	0,0963	1,000	0,669	0,496	0,514
12	80	1,000	0,716	0,156	1,000	0,0482	0,838	0,0482	1,000	0,628	0,406	0,493
		<b>Vald</b>	<b>Laplas</b>	<b>Hurwitz</b>								
		0,933	0,0482	0,524								
Микротальк ( $q_2$ )												
1	0	0,802	1,000	1,000	0,867	0,835	0,700	0,700	1,000	0,869	0,860	0,609
2	5	0,823	0,850	0,533	0,715	1,000	0,600	0,533	1,000	0,754	0,736	0,554
3	10	0,900	0,739	0,489	0,648	0,650	0,700	0,489	0,900	0,689	0,676	0,520
4	15	0,944	0,653	0,467	0,580	0,678	1,000	0,467	1,000	0,722	0,694	0,539
5	20	0,966	0,574	0,422	0,641	0,619	0,900	0,422	0,966	0,688	0,661	0,520
6	30	0,984	0,482	0,378	0,788	0,700	0,800	0,378	0,984	0,690	0,654	0,521
7	40	0,999	0,382	0,311	0,842	0,747	0,850	0,311	0,999	0,691	0,631	0,523
8	50	1,000	0,261	0,311	0,893	0,690	0,450	0,261	1,000	0,602	0,530	0,474
9	60	1,000	0,200	0,244	0,945	0,284	0,450	0,200	1,000	0,521	0,424	0,426
10	80	1,000	0,0184	0,0889	1,000	0,350	0,450	0,0184	1,000	0,485	0,252	0,406
		<b>Vald</b>	<b>Laplas</b>	<b>Hurwitz</b>								
		0,900	0,0184	0,509								
Карбонат серебра ( $q_3$ )												
1	0	0,835	0,907	1,000	0,925	1,000	0,412	0,412	1,000	0,847	0,812	0,601
2	0,025	1,000	0	0,622	0,901	0,286	0,529	0,286	1,000	0,691	0,638	0,523
3	0,050	0,985	0,833	0,622	0,900	0,357	1,000	0,357	1,000	0,784	0,740	0,571
4	0,100	0,590	0,857	0,600	0,854	0,487	0,353	0,353	0,857	0,625	0,596	0,484
5	0,250	0,661	0,842	0,622	0,673	0,312	0,176	0,176	0,842	0,548	0,482	0,441
6	0,500	0,697	0,790	0,622	0,0225	0,0198	0,588	0,0198	0,790	0,457	0,210	0,385
7	1,000	0,0114	1,000	0,578	1,000	0,0368	0,412	0,0114	1,000	0,508	0,215	0,421
		<b>Vald</b>	<b>Laplas</b>	<b>Hurwitz</b>								
		0,790	0,0114	0,405								

Примечание.  $y_a$  — аддитивная свертка;  $y_{ms}$  — мультипликативная свертка;  $y_{md}$  — дополнительная мультипликативная свертка;  $\omega$  — важность.

С использованием обобщающих функций (4-6) составлен окончательный рейтинг массовых частей для каждого наполнителя, представленный в таблице 5 (рассматривали только аддитивную и мультипликативную свертки).

## Окончательный рейтинг по массовому содержанию каждого наполнителя

Наполнители	Критерии/оптимальная, масс.ч.			
	Ранг	Аддитивная свертка <sup>1)</sup>	Мультипликативная свертка <sup>1)</sup>	Дополнительная мультипликативная свертка*
ДМ	1	80	80	80
	2	15	60	10
	3	10	5	60; 5
	4	5	10	40; 50
МТ	1	80	80	80
	2	60	60	60
	3	50	50	50
	4	20	40	20; 10
КС	1	0,500	0,500	0,500
	2	1,000	1,000	1,000
	3	0,250	0,250	0,250
	4	0,100	0,100	0,100

Примечание.  $*\omega(W) = \omega(\sigma_{873}) = \omega(E) = \omega(T) = \omega(\alpha) = \omega(\Delta l) = \omega(\varepsilon_m) = \omega(E_a) = 0,167$ .

## Выводы

Для окончательного вывода относительно оптимальной массовой части того или иного наполнителя необходимо учитывать совпадения по разным обобщающим функциям, степень адекватности каждой обобщающей функции решаемой задаче. В данном решении использовали шесть обобщающих функций, вполне удовлетворяющих поставленной задаче, хотя существует множество других подходов и функций, которые также можно применить.

Анализ оптимизации позволяет сделать окончательный вывод: оптимальная массовая часть дисульфида молибдена составляет 80 масс.ч., микроталяка – 80 масс.ч., карбоната серебра – 0,5 масс.ч.

## Список литературы

- 1 Зінченко Д.О. Вплив мікродисперсного карбонату срібла на теплостійкість епоксикомполітів / Д.О. Зінченко // Матеріали VII Міжнар. наук.-техн. конф., присвяченої 75-річчю кафедри ССЕСУ «Суднова енергетика: стан та проблеми». – Миколаїв: Наці. ун-т кораблебудування імені адмірала Макарова, 2015. – С. 194, 195.
- 2 Зінченко Д.О. Вплив карбонату срібла на енергію активації термоокиснювальної деструкції епоксикомполіту / Д.О. Зінченко // Матеріали IV Міжнародної науково-технічної конференції молодих учених та студентів «Актуальні задачі сучасних технологій». – Тернопіль: Тернопільський національний ун-ет імені Івана Пулюя, 2015. – С. 53.
- 3 Букетов А.В. Вплив антифрикційної добавки на фізико-механічні властивості епоксикомполітів / А.В. Букетов, Д.О. Зінченко, О.В. Акімов, С.О. Сметанкін // Матеріали 8-ї Міжнар. наук.-практ. конф. «Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті». – Херсон: Херсонська державна морська академія, 2016. – С. 310, 311.
- 4 Букетов А.В. Исследование физико-механических свойств композитных материалов на основе эпоксидиановой смолы, отвержденной полиэтиленполиамином, с добавлением пластификатора-антипирена трихлорэтил-фосфата / А.В. Букетов, А.В. Акимов, Д.А. Зинченко // Вісн. Хмельницького національного ун-ту. Технічні науки. – 2015. – № 5. – С. 126–134.
- 5 Букетов А.В. Влияние микродисперсного карбоната серебра на свойства эпоксикомполітов / А.В. Букетов, А.А. Сапронов, Д.А. Зинченко, В.Н. Яцок // Механика композиционных материалов и конструкций – 2015. – № 4. – С. 533–547.

- 6 Букетов А.В. Дослідження впливу мікродисперсних антифрикційних наповнювачів на адгезійну міцність епоксикомпозитів / А.В. Букетов, Д.О. Зінченко, В.Д. Нігалатій // Міжвузівський збірник Наукові нотатки. — 2016. — № 53. — С. 17–23.
- 7 Buketov A.V. Enhancing performance characteristics of equipment of sea and river transport by using epoxy composites / A.V. Buketov, P.O. Maruschak, O.O. Sapronov, D.O. Zinchenko, V.M. Yatsyuk, S. Panin // Transport. Vilnius Gediminas Technical University (VGTU), 2016. — Vol. 31(3). — P. 333–342. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.3846/16484142.2016.1212267>.
- 8 Микони С.В. Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив / С.В. Микони. — СПб.: Лань, 2009. — 272 с.
- 9 Дубров А.М. Моделирование рискованных ситуаций в экономике и бизнесе / А.М. Дубров, Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталева. — М.: Финансы и статистика, 2000. — 176 с.
- 10 Мушик Э. Методы принятия технических решений / Э. Мушик, П. Мюллер. — М.: Мир, 1990. — 208 с.

А.В. Букетов, А.В. Шарко, Д.А. Зинченко, Д.М. Степанчиков

## Эпоксидті шайыр негізінде композитті материалдардың күрделі қосындыларын оңтайландыру мәселелері

Іліу кезіндегі серпімділік модулін, жылуөткізгіштікті, жылуөткізгіштік пен сызықты кеңейтудің температуралық коэффициентін, кернеуді бұзатын көрсеткіштердің өзгеруін талдау негізінде қорғаныш жабындының ингредиенттер құрылымының көп критерийлі тиімдеу алгоритмі құрылған. Нұсқа бойынша объектілерді реттеу арқылы сұрыптау әдісін қолданып, эпоксидті композитті материалды екі компонентті дисперсиялық толтырғыштың ең тиімді құрылымы анықталған. Әр түрлі дисперсиялы екі толтырғышты енгізу материалдың физика-механикалық және жылуфизикалық қасиеттерін жақсартатыны байқалған. ЕД-20 (100 масс. ч.) эпоксидті олигомер мен (10 масс. ч.) ПЕПА қатайтқышы негізінде құрылған матрица үшін екі компонентті толтырғыштың ең тиімді құрылымы келесі түрде болатыны дәлелденген: молибден дисульфиді — 80 масс. ч., микротальк — 80 масс. ч., күміс карбонаты — 0,5 масс. ч.

*Кілт сөздер:* эпоксидті композит, соққы тұтқырлық, серпімділік модулі, деструкция, оңтайландыру, компонентті толтырғыш.

A.V. Buketov, A.V. Sharko, D.A. Zinchenko, D.M. Stepanchikov

## To the problem of ingredients optimization of composite materials based on epoxy resin

An algorithm of multi-criteria optimization of ingredients content of protective coatings based on analysis of changes in the values of destructive stress, modulus of elasticity in flexure, heat resistance, thermoresistance and temperature linear expansion coefficient was developed. The most optimal content of two-component disperse filler in the epoxy composite material was determined, using the method of selection by ordering objects like in example. It was found that the combination of two fillers with different dispersion improves physico-mechanical and thermal properties of materials. It was proved that for the developed matrix based on hardener PEPA (10 wt %) and epoxy oligomer ED-20 grade (100 wt %) the optimal content of two-component filler is: molybdenum disulfide — 80 wt %, microtalc — 80 wt %, silver carbonate — 0,500 wt %.

*Keywords:* epoxy composite, resilience, modulus of elasticity, destruction, optimization, component filler.

References

- 1 Zinchenko, D.O. (2015). Vpliv mikrodispersnoho karbonatu sribla na teplostiikist epoksikompozitiv [Effect of micro-dispersed silver carbonate on the heat resistance of an epoxy-composite]. *Ship Power: Status and Problems: VII Mizhnarodnaia naukovo-tekhnichnoi konferentsii, prisviachenoii 75-richchiiu kafedri SSEU – 7nd International Scientific Conference dedicated to the 75th anniversary of the department SSEU* (pp. 194–195). Nikolaev: Natsionalnii universitet korablebuduvannia imeni admirala Makarova [in Ukrainian].
- 2 Zinchenko, D.O. (2015). Vpliv karbonatu sribla na enerhiiu aktivatsii termookisniuvalnoi destrukttsii epoksikompozitu [Effect of silver carbonate activation energy termookisnyuvalnoyi destruction epoksykompozytu]. *Current problems of modern technology: IV Mizhnarodnoi naukovo-tekhnichnaia konferentsiia molodikh uchenikh ta studentiv – 4nd International scientific conference of young scientists and students.* (p. 53). Ternopil: Ternopilskii natsionalnii universitet imeni Ivana Puliuia [in Ukrainian].
- 3 Buketov, A.V., Zinchenko, D.O., Akimov, O.V., Smetankin, S.O. (2016). Vpliv antifriktsiinoi dobavki na fiziko-mekhanichni vlastivosti epoksikompozitiv [The impact of anti-friction additives on physical and mechanical properties epoksykompozytiv]. *Modern information and innovative technologies in transport: 8-aia Mizhnarodnaia naukovo-tekhnichskaia konferentsiia – 8nd International scientific conference,* pp. 310, 311. Kherson: Khersonska derzhavna morskakademiia [in Ukrainian].
- 4 Buketov, A.V., Akimov, A.V., Zinchenko, D.A. (2015). Issledovanie fiziko-mekhanicheskikh svoistv kompozitnykh materialov na osnove epoksidianovoi smoly, otverzhdennoi polietilenpoliaminom, s dobavleniem plastifikatora–antipirena trikhloretil-fosfata [Investigation of physical and mechanical properties of composite materials based on epoxy-resin resin cured with polyethylene polyamine, with the addition of plasticizer-fire retardant trichloroethyl phosphate]. *Visnik Khmelnytskoho natsionalnoho universiteta. Tekhnichni nauki – Bulletin of Khmelnytsky National University,* 5, pp. 126–134 [in Russian].
- 5 Buketov A.V., Saponov A.A., Zinchenko D.A., Yatsyuk V.N. (2015). Vliianie mikrodispersnoho karbonata serebra na svoistva epoksikompozitov [Effect of finely dispersed silver carbonate on the properties of epoxy composites]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstrukttsii – Mechanics of Composite Materials and Structures,* 4, pp. 533–547 [in Russian].
- 6 Buketov A.V., Zinchenko D.O., Nigalatiy V.D. (2016). Doslidzhennia vplivu mikrodispersnykh antifriktsiinykh napovniuvachiv na adheziinu mitsnist epoksikompozitiv [Investigation of anti-friction micro disperse fillers on the adhesion strength epoksykompozytiv]. *Mizhvuzivskii zbirnik Naukovi notatki – Interuniversity Journal Scientific Notes,* 53, pp. 17–23 [in Ukrainian].
- 7 Buketov A.V., Maruschak P.O., Saponov O.O., Zinchenko D.O., Yatsyuk V.M., Panin S. (2016). Enhancing performance characteristics of equipment of sea and river transport by using epoxy composites // *Transport. Vilnius Gediminas Technical University (VGTU), Vol. 31(3),* pp. 333–342. Retrieved from <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.3846/16484142.2016.1212267>.
- 8 Mikoni S.V. (2009). *Mnokokriterialnyi vybor na konechnom mnozhestve alternativ [Multi-criteria selection on a finite set of alternatives].* Saint Petersburg: Lan [in Russian].
- 9 Dubrov A.M., Lagosha B.A., Hrustalev E.Yu. (2000). *Modelirovanie riskovykh situatsii v ekonomike i biznese – Simulation in economics and business risk situations.* Moscow: Finansy i statistika [in Russian].
- 10 Mushik E., Myuller P. (1990). *Metody priniatiia tekhnicheskikh reshenii – Methods of technical decisions,* Moscow: Mir [in Russian].

А.А. Викентьев

*Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;  
Новосибирский государственный университет, Россия;  
Новосибирский государственный технический университет, Россия  
(E-mail: vikent@math.nsc.ru)*

## О машинных реализациях вычислений новых модельных расстояний, структуризаций и распознавания в знаниях

Рассмотрены примеры по обработке структуры конечного множества логических формул (многозначных суждений экспертов) и задача по распознаванию образов. Используя наработанное программное обеспечение, даны иллюстрации их применения. Предложены подходы по обработке множеств суждений или экспертной информации, которые применимы при обучении студентов, например, для оценочного тестирования знаний по конкретному разделу, в коллективном управлении качеством образования с учетом пожеланий сторон, для обработки экспертных оценок и предложений по улучшению окружающей среды. Использование этих подходов позволит повысить учет достоверности знаний, качество управления образованием, получаемой информации и пожеланий различных платформ.

*Ключевые слова:* логические формулы, обработка множеств, распознавание образов, экспертная оценка, множество суждений, учет, достоверная информация.

### 1 Введение в проблему

В настоящее время возрос интерес к построению решающих функций на основе анализа экспертной информации, заданной в виде вероятностных логических высказываний нескольких экспертов, реализации процессов адаптации и согласования логических формул [1–12]. Предлагаемые ниже подходы по обработке множеств суждений экспертов найдут применение в обучении студентов, например, математике (оценочное тестирование по разделу), в коллективном управлении качеством образования (учет пожеланий сторон), а также при обработке множеств формализованных суждений по улучшению окружающей среды. При применении данной технологии пользователь в процессе работы формирует базы знаний, которые впоследствии можно включать в процесс алгоритмической обработки для принятия решений. В этом случае используются различные модельные расстояния для формул логики Лукасевича, которые отражают многозначность суждений (высказываемых экспертом); определяются коллективные расстояния, которые служат некоторым согласованием мер близости, предлагаемых для кластеризации множеств высказываний и нахождения по ним новых кластеризаций, дающих более высокие индексы результатов. Предполагается знакомство с работой [10, 13–18].

Проблема распознавания образов уже давно привлекает внимание психологов, физиологов, инженеров и математиков. Методы распознавания образов находят применение в различных сферах деятельности человека: диагностика заболеваний, сельское хозяйство, добыча полезных ископаемых и многое другое.

Для решения проблемы распознавания образов необходимо проанализировать информацию, поступающую в виде «данных», «знаний» и других структур. Такой анализ включает в себя две процедуры: процедуру обнаружения закономерностей, содержащихся в предоставленной информации; процедуру структурирования знаний и использования обнаруженных закономерностей для предсказания значения одной части информации по известным значениям другой её части. Напомним, что в работе [10] отмечено, что при увеличении числа знаний возникает потребность в анализе этих знаний. В частности, допустим, что задана некоторая структурированная база знаний (например, кластерами), на вход которой подаётся некоторое новое знание  $q$ . Требуется определить, к какому из имеющихся  $k$  таксонов (именованных областей, содержащих элементы, похожие друг на друга по каким-то характеристикам) следует отнести это новое знание, т.е. получаем задачу распознавания образов:

Постановка задачи

Пусть в пространстве знаний заданы:

1. Набор характеристик  $X$ .
2. Список наименований фиксированных областей (таксонов, называемых также образами), на которые разделено выборочное пространство  $i = 1 \dots I$ .
3. Обучающая выборка в виде знаний экспертов  $Doi$  (в пространстве  $X$ ) для каждого  $Si$ .
4. Контрольное знание  $q$ .

Требуется определить номер  $iSi$ :  $q \in Si$ , используя алгоритм  $k$ -ближайших соседей по прецедентам (типичным представителям каждого образа):

$$i = \arg \min_{i \in I} \sum_{k=1}^K Rik \mid S, Do, X, k, R,$$

где  $Rik$  —  $k$ -минимальные расстояния от  $q$  до  $M$  знаний для каждого таксона;  $R$  — ошибка распознавания. То есть находятся расстояния от контрольного знания до реализации каждого образа, выбираются  $k$ -минимальные расстояния, определяются средние (для каждого образа), среди которых находится минимальное, и таким образом восстанавливается номер таксона, которому принадлежит контрольное знание.

Для решения поставленной задачи была написана компьютерная программа. Кроме того, в ней рассмотрен алгоритм, реализованный ранее, отличие которого от рассмотренного в [10] заключается в использовании для определения  $i$  эталонных знаний, создаваемых для каждого образа:

$$i = \arg \min_{i \in I} Ri,$$

где  $Ri$  — расстояние от  $q$  до  $Eti$  (эталонного знания  $i$ -го образа). Далее все описано аналогично статье [10].

2 О новых (коллективных) модельных расстояниях

Известно [16–18], что устойчивость решений в задачах кластеризации может быть повышена благодаря формированию ансамбля алгоритмов и построению на его основе коллективного решения. При этом используются результаты, полученные разными алгоритмами либо одним алгоритмом с различными значениями параметров. Кроме того, для формирования ансамбля могут быть применены разные подсистемы переменных. Ансамблевый подход является одним из наиболее перспективных направлений в кластерном анализе [1, 4, 5; 18–27; 11–18].

В данной работе для построения коллективного решения используются результаты работы иерархического алгоритма.

Пусть имеется множество из  $l$  формул. Допустим, мы рассмотрели  $k$  наборов  $\alpha$ . Для каждого набора провели кластеризацию. Выбираем и получаем некоторые кластеры. Для каждого полученного набора кластеров рассчитаем индекс качества кластеризации. Тогда *коллективным расстоянием* для  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$  назовем следующую величину:

$$\tilde{\rho}(\varphi_i \varphi_j) = s_1 \rho_1(\varphi_i \varphi_j) + \dots + s_k \rho_k(\varphi_i \varphi_j),$$

где  $s_m$  — индекс качества кластеризации для  $m$ -го набора  $\alpha$ ;  $m = 1, \dots, k$ ;  $\rho_m(\varphi_i \varphi_j)$  — расстояние между формулами  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$  для  $m$ -го набора  $\alpha$ ,  $m = 1, \dots, k$ .

Далее введем коллективную меру достоверности. *Коллективной мерой достоверности* для формулы  $\varphi_i$  назовем следующую величину:

$$\tilde{I}(\varphi_i) = s_1 I_1(\varphi_i) + \dots + s_k I_k(\varphi_i),$$

где  $s_m$  — индекс качества кластеризации для  $m$ -го набора  $\alpha$ ,  $m = 1, \dots, k$ ;  $I_m(\varphi_i)$  — мера достоверности для формулы  $\varphi_i$  для  $m$ -го набора  $\alpha$ ,  $m = 1, \dots, k$  (табл. 1–5).

Например, для предыдущего примера при  $n = 5$ :

$$\tilde{\rho}(\varphi_1 \varphi_2) = 0,056 * 0,760 + 0,016 * 0,760 = 0,055.$$

$$\tilde{I}(\varphi_1) = 0,056 * 0,200 + 0,016 * 0,190 = 0,014. \text{ Далее по аналогии.}$$

Матрица коллективных расстояний для примера ( $n = 5$ ) множества состоит из восьми формул:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= x \rightarrow y; \\ \varphi_2 &= \neg(x \rightarrow y); \\ \varphi_3 &= (x \vee z) \rightarrow y; \\ \varphi_4 &= \neg((x \wedge y) \vee z) \rightarrow w; \\ \varphi_5 &= y \rightarrow (x \wedge z); \\ \varphi_6 &= (\neg y \vee (x \rightarrow z)) \rightarrow w; \\ \varphi_7 &= ((x \rightarrow y) \rightarrow z) \rightarrow w; \\ \varphi_8 &= (w \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow x). \end{aligned}$$

Таблица 1

Матрица коллективных мер недоверности для примера 5.1 (n = 5)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0.055	0.007	0.025	0.033	0.028	0.018	0.030
2		0	0.049	0.039	0.036	0.036	0.046	0.036
3			0	0.023	0.037	0.026	0.017	0.034
4				0	0.029	0.004	0.009	0.032
5					0	0.030	0.031	0.010
6						0	0.012	0.033
7							0	0.034
8								0

Таблица 2

Матрица коллективных расстояний для того же примера (n = 7)

<i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tilde{I}(\varphi_i)$	0.014	0.058	0.021	0.026	0.021	0.029	0.019	0.024

Таблица 3

Матрица коллективных мер недоверности для примера 5.1 (n = 7)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0.024	0.003	0.011	0.014	0.012	0.007	0.012
2		0	0.022	0.017	0.017	0.016	0.021	0.017
3			0	0.011	0.015	0.011	0.007	0.014
4				0	0.013	0.001	0.004	0.015
5					0	0.013	0.013	0.004
6						0	0.005	0.014
7							0	0.014
8								0

Таблица 4

Используем иерархический алгоритм. Получим следующие кластеры.

<i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tilde{I}(\varphi_i)$	0.006	0.026	0.009	0.012	0.009	0.013	0.008	0.010



Они и задают структуру множества рассматриваемых формул, позволяющую решать вопрос о принадлежности новой формулы к одному из кластеров.

Номер итерации	$n = 5$	$\Delta$	$n = 7$	$\Delta$
1	{4, 6}, 1, 2, 3, 5, 7, 8	0.003	{4, 6}, 1, 2, 3, 5, 7, 8	0.001
2	{1, 3}, {4, 6}, 2, 5, 7, 8	0.007	{1, 3}, {4, 6}, 2, 5, 7, 8	0.003
3	{1, 3}, {4, 6, 7}, 2, 5, 8	0.01	{1, 3}, {4, 6, 7}, 2, 5, 8	0.005
4	{1, 3}, {4, 6, 7}, {5, 8}, 2	0.01	{1, 3, 4, 6, 7}, 2, 5, 8	0.007
5	{1, 3, 4, 6, 7}, {5, 8}, 2	0.015	{1, 3, 4, 6, 7}, {5, 8}, 2	0.007
6	{1, 3, 5, 8, 6, 7, 4}, 2	0.015	{1, 3, 5, 8, 6, 7, 4}, 2	0.007
7	{1, 3, 5, 8, 6, 7, 4, 2}	0.044	{1, 3, 5, 8, 6, 7, 4, 2}	0.02

### 3 Наблюдения и выводы для различных $n$ , $n \geq 2$ логики Лукасевича

Была создана база из более 250 различных логических формул, откуда случайным образом выбирались подмножества формул. С помощью адаптированных алгоритмов, описанных в [8, 9], было кластеризовано более 100 таких подмножеств при различных  $n$  и  $\alpha$ .

Исходя из рассмотренных примеров для новых метрик, были сделаны следующие выводы:

1. Для  $n = 2, \dots, 7$  наблюдается разница в составе кластеров, при  $n > 7$  кластеры и последовательность итераций не меняются. Таким образом, возникает гипотеза о нецелесообразности использования логики большой значности в реальных задачах от малого числа переменных.

2. Для алгоритма  $k$ -средних при вычислении центров масс наблюдаются одни и те же результаты, как при замене среднего арифметического ближайшим сверху значением из  $V_n$ , так и ближайшим снизу.

3. В большинстве случаев коллективные расстояния дают наилучшую кластеризацию.

В данном разделе нами использованы новые меры, обобщающие формулы расстояния и меры недоверности, полученные впервые для шестизначной логики Лукасевича совместно с В.В. Фефеловой. Также использована формула для расстояния, когда некоторые значения переменных заранее известны. Ранее [6–10] доказаны свойства этих величин, схожие со свойствами расстояния, и меры недоверности для случая классической логики. Полученные величины могут быть использованы при построении логических решающих функций в распознавании, при анализе баз знаний и их кластеризации (например, таких, как медицинская экспертная база или база рекомендательных систем).

Были адаптированы два алгоритма кластеризации – иерархический и  $k$ -средних ( $k$ -means). Проведены численные эксперименты для различных  $n$  и  $\alpha$ , показаны их различия. По введенному индексу качества кластеризации из множества примеров была выбрана наилучшая кластеризация, построены коллективные расстояния и по ним – новая кластеризация.

Для автоматической кластеризации впервые совместно с В.В. Фефеловой [8, 9] разработано и написано рабочее Java-приложение, расширенное в данной работе. Сложность алгоритма вычисления расстояния между формулами – экспоненциальная. Далее описаны содержание программы для вычисления расстояний и меры недоверности, в которой представлена реализация иерархического алгоритма и алгоритма  $k$ -средних. Программа реализована на языке *Java* и состоит из семи классов. Первый класс *Fraction* определяет класс рациональных дробей и операции над ними (рациональные дроби являются истинностными значениями многозначной логики). Следующий класс *Formula* описывает формулы (высказывания экспертов или часть базы знаний). Класс *Distance* реализует расчет мер недоверности и расстояний между формулами. Класс *HierarchicAlg* содержит иерархический алгоритм. Класс *K-Means* содержит алгоритм  $k$ -средних. В классе *Helper* задаются множества истинностных значений и весов, также в нем содержатся вспомогательные методы. Класс *N-valued Logic* является основным, в нем производится вызов объектов других классов для необходимых расчетов.

Реализация на высокоуровневом ООП языке позволяет добиться универсальности применения программы. Программа представлена в виде консольного приложения, все необходимые параметры задаются в тексте программы. В консоль выводятся результаты вычислений: матрица расстояний, меры недоверности и результат поэтапного выполнения иерархического алгоритма и алгоритма  $k$ -средних (индекс качества кластеризации также выдается на каждом этапе).

В дальнейшем планируется адаптировать и другие алгоритмы кластеризации, а также провести кластеризацию большого числа формул и проиллюстрировать применение полученных величин на практике.

## 4 Машинная реализация алгоритмов распознавания

До недавнего времени существовал только один реализованный алгоритм распознавания образов в пространстве знаний, основанный на гипотезе унимодальной компактности. В процессе работы с В.В. Ивановым [10] была создана компьютерная программа «Knowledge» в среде DELPHI 5.0., реализующая новый алгоритм из [10], алгоритм  $k$ -ближайших соседей, основанный уже на гипотезе полимодальной компактности, которая является более слабой и потому позволяет расширить возможности распознавания в пространстве знаний.

Работа с программой начинается с Главного окна (рис. 1), где задаются число характеристик (по которым производится обучение и распознавание); количество экспертов, задающих параметры; количество образов, на которое разбивается выборочное пространство;  $k$ -ближайших соседей; максимальное значение критерия значимости для характеристик.

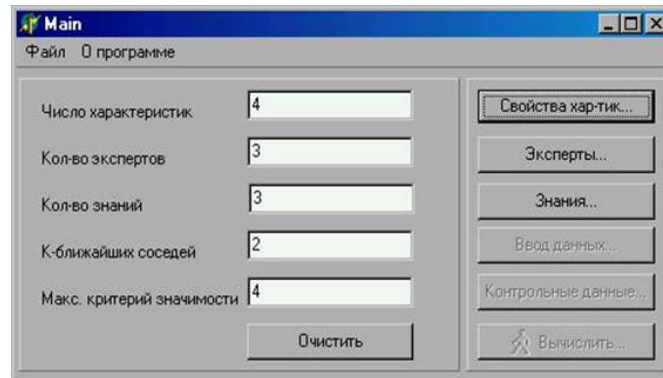


Рисунок 1. Главное окно

Переходя в режим «Свойства характеристик» (рис. 2), можем задать максимальное значение характеристики, минимальное значение характеристики, т.е. крайнее левое значение (от которого отсчитывается первый интервал) и разбиение — количество интервалов.

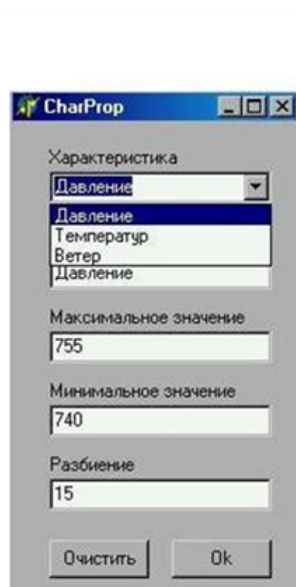


Рисунок 2. Режим «Свойства характеристик»

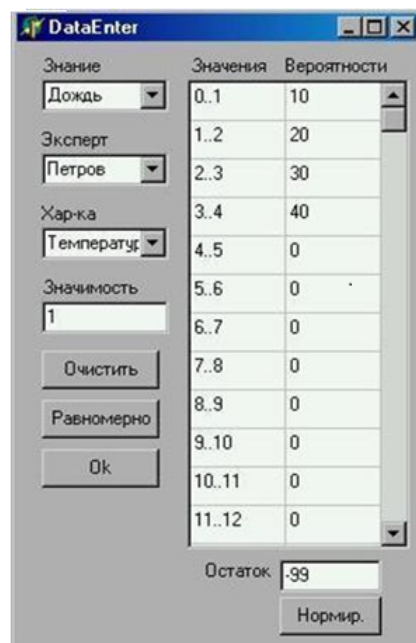


Рисунок 3. Обучающая выборка

Нажав на кнопку «Ввод данных» (рис. 3), мы получаем возможность ввести обучающую выборку — заполняется для каждого образа, каждого эксперта, каждой характеристики, каждого интервала значения вероятностей (если эксперт не может предоставить распределение для какой-либо характеристики, то для неё задаём равномерное распределение). После ввода данных (в процентах или в долях) в поле «вероятности» (рис. 3, 4), их необходимо нормировать (кнопка «Нормир»), затем задаётся значимость характеристик, т.е. значение, характеризующее, насколько эксперт считает важной данную характеристику (при расчётах используются средние значения значимостей по всем экспертам для данной характеристики, т.е. проводится своего рода «голосование»).

После ввода обучающей выборки переходим в режим «Контрольные данные», где задаётся контрольное знание (рис. 4).

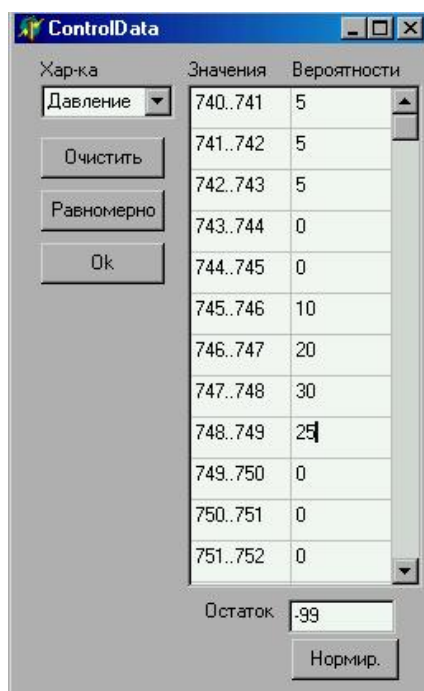


Рисунок 4. Режим «Контрольные данные»

По мере завершения ввода данных программа готова к распознаванию. Для этого нажимаем на кнопку «Вычислить», после чего появляется окно результатов (рис. 5), обозначение – \* в каждом образе (имя образа выводится слева, например: *дождь* и *снег*) показывает каждого из  $k$ -ближайших знаний экспертов (в примере  $= 2 \Rightarrow$  выбираем два знания в каждом образе, расстояние от контрольного до которых минимально, для образа *дождь* — это знания *Петрова* и *Иванова*, для образа *снег* — знания *Иванова* и *Сидорова*); \*\* — показывает образ, к которому относится контрольное знание, распознанное с использованием эталона и алгоритма  $k$ -ближайших соседей.

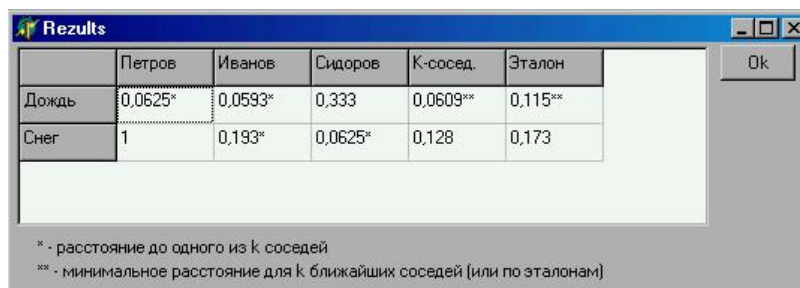


Рисунок 5. Окно результатов

Работа данной программы была проверена на тестовых выборках, одна из которых представляет собой набор знаний, высказанных студентами-пятикурсниками, выступающими в роли экспертов. Студентам было предложено назвать характеристики, по которым можно определить, что студент получит на экзамене: 5, 4 или 3. После опроса выбраны следующие характеристики: а) посещаемость лекций; б) посещаемость семинаров; в) средний балл; г) время подготовки к экзамену; д) курс, на котором учится студент. Для них были введены значения и вероятности, с которыми эти значения принимаются. Контрольная выборка представляла собой знания экспертов, не включенных в обучающую выборку, без имени образа, которому принадлежат эти знания. Проводилось распознавание, а затем сравнение результатов, полученных программой, и значений, заданных экспертами. Совпадение данных показало, что алгоритмы, реализованные в программе, позволяют проводить распознавание образов в пространстве знаний. Возникали случаи, когда распознавание с использованием алгоритма  $k$ -ближайших соседей и эталонов давали разные результаты. Это происходило при полимодальных распределениях характеристик, в данном случае распознавание по эталону давало ошибочный результат, что подтверждает целесообразность использования алгоритма  $k$ -ближайших соседей, а не эталонных знаний соседей в случае полимодальных распределений. Очевидно, что можно применять в этой задаче новые модельные расстояния [7–11].

Перечислим результаты данного раздела работы: в новой постановке рассмотрена задача распознавания образов в пространстве знаний, в виде программы реализованы алгоритм  $k$ -ближайших соседей, позволяющий решить данную задачу, и ранее рассмотренный алгоритм сравнения по эталонам. Заданы обучающие выборки, проведено распознавание знаний и подтверждена связь между характером распределений и правильностью работы алгоритмов, в случае унимодальных распределений оба алгоритма распознают практически одинаково, а в случае полимодальных — сравнение по эталонам даёт больше ошибок. Проведённые эксперименты показывают возможность дальнейшего использования программ и различных модельных расстояний для структуризации знаний в логических базах знаний.

Планируется дальнейшее развитие предложенных подходов для решения конкретных прикладных задач.

*Автор выражает благодарность своим коллегам и особо сподвижникам по работе В.В. Фефеловой и В.В. Иванову за помощь в реализации алгоритмов и проверке конкретных вычислений, изложенных выше.*

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ, проекты 14-07-00851а, 14-07-00249а.*

#### Список литературы

- 1 Загоруйко Н.Г. Прикладные методы анализа данных и знаний / Н.Г. Загоруйко. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999.
- 2 Загоруйко Н.Г. Меры расстояния в пространстве знаний / Н.Г. Загоруйко, М.В. Бушуев // Анализ данных в экспертных системах. — 1986. — Вып. 117. Вычислительные системы. — С. 24–35.
- 3 Загоруйко Н.Г. Алгоритмы обнаружения эмпирических закономерностей / Н.Г. Загоруйко, В.Н. Ёлкина, Г.С. Лбов. — Новосибирск: Наука, 1985.
- 4 Загоруйко Н.Г. Методы распознавания и их применение / Н.Г. Загоруйко. — М.: Сов. радио, 1972.
- 5 Викентьев А.А. Расстояние между формулами пятизначной логики Лукасевича и мера недоверности высказываний экспертов / А.А. Викентьев, Е.С. Кабанова // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2013. — № 1(69). — С. 18–27.
- 6 Викентьев А.А. О возможных расстояниях и степенях недоверности в многозначных высказываниях экспертов и приложении этих понятий в проблемах кластеризации и распознавания / А.А. Викентьев // Проблемы информатики. — 2011. — № 3(11). — С. 33–45.
- 7 Vikent'ev A.A. Concerning distances and degrees of uncertainty for many-valued expert statements and application of those concepts in pattern recognition and clustering // Pattern Recognition and Image Analysis. — 2014. — Vol. 24. — No. 4. — P. 489–501.
- 8 Викентьев А.А. Введение полных расстояний и мер недоверности для формул логик Лукасевича для автоматической кластеризации множеств логических высказываний из базы знаний / А.А. Викентьев, В.В. Фефелова // Вестн. Караганд. ун-та. — Сер. Математика. — 2015. — № 3(79). — С. 17–24.

- 9 Викентьев А.А. Новые расстояния и меры достоверности для формул логики Лукасевича в кластеризации логических высказываний базы знаний / А.А. Викентьев, В.В. Фефелова // Математические методы распознавания образов ММО-17: тезисы докл. 17-й Всерос. конф. с междунар. участием, г. Светлогорск, Калининградская обл. — М.: Торус пресс, 2015. — С. 68, 69.
- 10 Викентьев А.А. Методы распознавания образов в пространстве знаний / А.А. Викентьев, В.В. Иванов // Вестн. Караганд. ун-та. — Сер. Математика. — 2016. — № 1(81). — С. 26–34.
- 11 Викентьев А.А. Изучение модельных расстояний на логических высказываниях с учетом экспертных интерпретаций для формул многозначных логик Лукасевича и автоматической кластеризации в базах знаний. I / А.А. Викентьев // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2016. — № 2(82). — С. 23–31.
- 12 Викентьев А.А. Изучение модельных расстояний на логических высказываниях с учетом экспертных интерпретаций для формул многозначных логик Лукасевича и автоматической кластеризации в базах знаний. II / А.А. Викентьев // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2016. — № 2(82). — С. 32–39.
- 13 Ершов Ю.Л. Математическая логика / Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин. — 2-е изд. — М.: Наука, 1987. — 336 с.
- 14 Карпенко А.С. Логика Лукасевича и простые числа / А.С. Карпенко. — М.: Наука, 2000. — 319 с.
- 15 Лбов Г.С. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений / Г.С. Лбов, Н.Г. Старцева. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. — 212 с.
- 16 Vikent'ev A.A., Lbov G.S. Setting the metric and informativeness on statements of experts // Pattern Recognition and Image Analysis. — 1997. — Vol. 7. — No. 2. — P. 175–183.
- 17 Лбов Г.С. Устойчивость решающих функций в задачах распознавания образов и анализа разнотипной информации / Г.С. Лбов, В.Б. Бериков. — Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2005. — 200 с.
- 18 Strehl A., Ghosh J. Clustering ensembles – a knowledge reuse framework for combining multiple partitions // Journal Machine Learning Research. — 2002. — No. 3. — P. 583–617.

А.А. Викентьев

## Білімдегі айырып тану, құрылым және жаңа үлгілі арақашықтық, есептеулердің машиналық жүзеге асуы

Бейнелерді тану есебі мен логикалық формулалардың (сарапшылардың көп мағыналы пайымдауы) ақырлы жиынның құрылымдарын өңдеу мысалдары қарастырылды. Сыналған бағдарламалық құралды пайдаланып, оларды жүзеге асыру мысалдары берілген. Пікірлер жиыны мен сараптамалық ақпаратты өңдеу тәсілдері ұсынылған, мысалы, ұсыныс беруші жақтарды ескере отырып, сапалы білім берудегі ұжымдық басқаруда нақты бөлім бойынша білімді бағалау үшін және қоршаған ортаны жақсарту мақсатында экспертті бағалаулар мен ұсыныстарды беруде. Бұл тәсілдерді қолдану шынайы білімді тіркеуде сапалы білім беруді басқаруда, алынған ақпараттың растығын, сондай-ақ әр түрлі платформалардың ескертулерін тіркеу жұмыстарында жоғары көрсеткішке ие болуға көмектеседі.

*Кілт сөздер:* логикалық формулалар, жиындарды өңдеу, бейнелерді танып білу, тіркеу, расталған ақпарат.

A.A. Vikent'ev

## On machine implementations of calculations of new model distances, structurizations and recognition in knowledge

Examples are given of processing the structure of a finite set of logical formulas (multi-valued judgments of experts) and the task of pattern recognition. Using the software, illustrations of their application are given.

The approaches to processing sets of judgments or expert information that are applicable to the training of students, for example, for evaluating knowledge testing on a specific section, in collective management of the quality of education, taking into account the wishes of the parties, for processing expert assessments and proposals for improving the environment are proposed. The use of these approaches will allow to increase the account of the reliability of knowledge, the quality of education management, increase the reliability of the information received and take into account the wishes of various platforms.

*Keywords:* logical forums, processing of sets, recognition of images, expert evaluation, sets of judgments, accounting, reliability of information.

#### References

- 1 Zagoruiko, N.G. (1999). *Prikladnye metody analiza dannykh i znanii [Applied methods of data and knowledge analysis]*. Novosibirsk: Izdatelstvo Instituta matematiki [in Russian].
- 2 Zagoruiko, N.G., Bushuev, M.V. (1986). Mery rasstoianii v prostranstve znanii [Distance measures in the space of knowledge]. *Analiz dannykh v ekspertnykh sistemakh – Data Analysis in Expert Systems*, Issue. 117: Computing systems, 24–35 [in Russian].
- 3 Zagoruiko, N.G., Yolkina, V.N., Lbov, G.S. (1985). *Algoritmy obnaruzheniia empiricheskikh zakonomernostei [Algorithms for detecting empirical regularities]*. Novosibirsk: Nauka [in Russian].
- 4 Zagoruiko, N.G. (1972). *Metody raspoznavaniia i ikh primenenie [Methods of recognition and their application]*. Moscow: Sovetskoe radio [in Russian].
- 5 Vikent'ev, A.A., Kabanova, E.S. (2013). Rasstoianie mezhdru formulami piatiznachnoi logiki Lukasevicha i mera nedostovernosti vyskazyvanii ekspertov [The distance between the formulas of the three-valued logic of Lukasiewicz and the measure of unreliability of the statements of experts]. *Vestnik Karagandinskogo universiteta. Ser. Matematika – Bulletin of the Karaganda University, Ser. Mathematics*, 1 (69), 18–27 [in Russian].
- 6 Vikent'ev, A.A. (2011). O vozmozhnykh rasstoianiiakh i stepeniakh nedostovernosti v mnogoznachnykh vyskazyvaniakh ekspertov i prilozhenie etikh poniatii v problemakh klasterizatsii i raspoznavaniia [On the possible distances and degrees of inauthenticity in polysemantic statements of experts and the application of these concepts in the problems of clustering and recognition]. *Problemy informatiki – Problems of Informatics*, 3 (11), 33–45 [in Russian].
- 7 Vikent'ev, A.A. (2014). Concerning distances and degrees of uncertainty for many-valued expert statements and application of those concepts in pattern recognition and clustering. *Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 24, 4*, 489–501 [in Russian].
- 8 Vikent'ev, A.A., Fefelova, V.V. (2015). Vvedenie polnykh rasstoianii i mer nedostovernosti dlia formul logik Lukasevicha dlia avtomaticheskoi klasterizatsii mnozhestv logicheskikh vyskazyvanii iz bazy znanii [The introduction of full distances and measures of inauthenticity for Lukasiewicz's formulas for automatic clustering of sets of logical statements from the knowledge base]. *Vestnik Karagandinskogo universiteta. Ser. Matematika – Bulletin of the Karaganda University, Ser. Mathematics*, 3 (79), 17–24 [in Russian].
- 9 Vikent'ev, A.A., Fefelova, V.V. (2015). Novye rasstoianii i mery dostovernosti dlia formul logiki Lukasevicha v klasterizatsii logicheskikh vyskazyvanii bazy znanii [New distances and confidence measures for formulas of Lukasiewicz's logic in the clustering of logical statements of the knowledge base]. *Mathematical methods of pattern recognition MMRO-17: 17-aia Vserossiiskaia konferentsiia s mezhdunarodnym uchastiem, g. Svetlogorsk, Kaliningradskaia obl. – 17th All-Russian Conference with international participation. City of Svetlogorsk, Kaliningrad region*, pp. 68, 69. Moscow: Torus press [in Russian].
- 10 Vikent'ev, A.A., Ivanov, V.V. (2016). Metody raspoznavaniia obrazov v prostranstve znanii [Methods for recognizing images in the space of knowledge]. *Vestnik Karagandinskogo universiteta. Ser. Matematika – Bulletin of the Karaganda University, Ser. Mathematics*, 1 (81), 26–34 [in Russian].
- 11 Vikent'ev, A.A. (2016). Izuchenie modelnykh rasstoianii na logicheskikh vyskazyvaniakh s uchedom ekspertnykh interpretatsii dlia formul mnogoznachnykh logik Lukasevicha i avtomaticheskoi klasterizatsii v bazakh znanii. I [Study of model distances on logical statements based on expert interpretation of the formulas of many-valued logics of Lukasiewicz and automatic clustering of knowledge bases. I]. *Vestnik Karagandinskogo universiteta. Ser. Matematika – Bulletin of the Karaganda University, Ser. Mathematics*, 2 (82), 23–31 [in Russian].

- 12 Vikent'ev, A.A. (2016). Izuchenie modelnykh rasstoianii na logicheskikh vyskazyvaniakh s uchetom ekspertnykh interpretatsii dlia formul mnogoznachnykh logik Lukasevicha i avtomaticheskoi klasterizatsii v bazakh znani. II [Study of model distances on logical statements based on expert interpretation of the formulas of many-valued logics of Lukasiewicz and automatic clustering of knowledge bases. II]. *Vestnik Karagandinskogo universiteta. Ser. Matematika – Bulletin of the Karaganda University, Ser. Mathematics, 2 (82)*, 32–39 [in Russian].
- 13 Yershov, Yu.L., Palyutin, E.A. (1987). *Matematicheskaiia logika [Mathematical Logic]*. (2d ed.). Moscow: Nauka [in Russian].
- 14 Karpenko, A.S. (2000). *Logiki Lukasevicha i prostye chisla [Lukasevich's logic and prime numbers]*. Moscow: Nauka [in Russian].
- 15 Lbov, G.S., Startseva, N.G. (1999). *Logicheskie reshaiushchie funktsii i voprosy statisticheskoi ustoiichivosti reshenii [Logical decision functions and questions of statistical stability of solutions]*. Novosibirsk: Izdatel'stvo Instituta matematiki [in Russian].
- 16 Vikent'ev, A.A., Lbov, G.S. (1997). Setting the metric and informativeness on statements of experts. *Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 7, 2*, 175–183.
- 17 Lbov, G.S., Berikov, V.B. (2005). *Ustoiichivost reshaiushchikh funktsii v zadachakh raspoznavaniia obrazov i analiza raznotipnoi informatsii [Stability of decision functions in problems of pattern recognition and analysis of heterogeneous information]*. Novosibirsk: Izdatel'stvo IM SO RAN [in Russian].
- 18 Strehl, A., Ghosh, J. (2002). Clustering ensembles – a knowledge reuse framework for combining multiple partitions. *Journal Machine Learning Research, 3*, 583–617.

G.A. Yessenbayeva, K.S. Kutimov, Zh.R. Sazhinova, A.Zh. Sarsenbek

*Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan  
(E-mail: esenbaevagulsima@mail.ru)*

## On the application of mathematical methods for the research of vibration processes in mechanics

Article represents the study of applied problems of mathematics, whose mathematical modeling leads to boundary problems for equations in partial derivatives. Mathematical methods, applied to these models, enable to obtain exact analytical results. Detailed result is represented for boundary problem of oscillations of thin structures with boundary conditions in general terms. Application of spectral decomposition for sufficiently smooth function, characterizing the membrane deviation from equilibrium state, enables to define exact analytic representation of inflection function for studied problem. To calculate multilayer plates, method of finite elements is applied.

*Keywords:* oscillating motions, thin structures, orthonormal function system, inflection function, multilayer plates.

Integral instrument of mechanician, which is impossible to work without, is the wide range of mathematical methods, applied in mechanics.

Boundary problems for equations in partial derivatives, closely related to study if mechanical problems, became especially urgent due to developing extent of their application. Differential equations appear naturally at study of problems of classic mechanics, mechanics of continue, acoustics, optics, hydrodynamics, etc., at modeling of oscillatory processes, deformation processes, transportation processes, heat and weight exchange processes, dynamics, demolition, etc.

Thus, boundary problems for equations of mathematical physics are successfully applied, for example, in description of motion of continuum, where main equations of mechanics of continue are shown, which represent mass conservation law, energy conservation law, impulse law and law of conservation of angular momentum, peculiar for every physicist.

We consider the partial differential equations that describe mathematical models of mechanical and physical phenomena. We often use the second order partial differential equations of hyperbolic type in the problems of oscillation theory and we apply the parabolic equations in problems of mechanics, where the characteristics of the various elements of constructions are investigated under the influence of different temperatures [1].

We consider the partial differential equations that describe mathematical models of mechanical and physical phenomena. We often use the second order partial differential equations of hyperbolic type in the problems of oscillation theory and we apply the parabolic equations in problems of mechanics, where the characteristics of the various elements of constructions are investigated under the influence of different temperatures [1].

Method of Riemann functions, integral transformations, method of partition, finite elements method and other mathematical and numeral methods are effectively applied in different spheres of exact sciences, including problems of mechanics, such as dynamic problems for taut space, problems of fluid dynamics and its relations with elastic bodies, problems of oscillatory processes, etc.

Equation, defining the distribution of elastic waves in prismatic bar, whose longitudinal motions of points does not depend on coordinates in its cross section, and extension rigidity is the same that is in statics, and has the following type [1]

$$\rho F u_{tt} - E F u_{xx} = Q(t, x),$$

where  $u$  – moving;  $F$  – cross section area;  $Q$  – external axial load.

In the simplest cases, such as in problem of longitudinal oscillations of the bar, modeled by equations

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = Q(t, x), \quad u_x(t, 0) = 0, \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad 0 < t, \quad x < \infty,$$

at application of integral cos-transformation [2], result may be obtained in evident analytic form



$$u(t, x) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(|x - at|)] + \frac{1}{2a} \left[ \int_0^{x+at} \psi(z)dz - \text{sign}(x - at) \int_0^{|x-at|} \psi(z)dz \right] + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \left[ \int_0^{x+a(t-\tau)} Q(\tau, z)dz - \text{sign}(x - a(t - \tau)) \int_0^{x+a(t-\tau)} Q(\tau, z)dz \right].$$

Plane problem on longitudinal ambulatory plate distortions is defined with the following equations [1]

$$\nu_{tt} - \nu_{xx} - (1 - 2c^2)\omega_x = Q_0;$$

$$\omega_{tt} - c^2\omega_{zz} + 3\omega + 3(1 - 2c^2)\nu_x = 0;$$

$$Q_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 Q(t, x, y)dy, \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

where  $\nu, \omega$  – wave velocity in continuum;  $\mu$  – Lamé’s constant.

Considering that axis stresses, averaged in cross-section  $\sigma_{xx}$  are defined with equation

$$\sigma_{xx} = \nu_{xx} + (1 - 2c^2)\omega,$$

for infinite plate at

$$Q_0 = 2\delta(x),$$

which corresponds to compression of the right part of plate ( $x > 0$ ) with single force and strain of left part with the same force ( $x < 0$ ), and after application of Laplace transformation under  $t$  and Fourier transformation under  $x$  [3] and applying asymptomatic representations at reversion, we obtain

$$\sigma_{xx} \approx -\frac{1}{3} + \int_0^\eta Ai(\tau)d\tau - J_0 \left( \sqrt{6 \frac{1-d^2}{1-c^2}} t(t-x) \right);$$

$$\eta = (x - ct) \left[ \frac{1}{6} \left( 1 + c^2 - d^2 - \frac{c^2}{d^2} \right) \right]^{-\frac{1}{3}};$$

$$d^2 = \frac{E}{(1 - \nu^2)\rho},$$

where  $Ai(\tau)$  – Airy stress function;  $J_0(z)$  – Bessel function.

Consider the problem of vibrations of the infinite rod [1]

$$u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \infty; \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = g(x).$$

Using the method of the Riemann function [1], we find

$$u(x, y) = \left\{ \frac{\varphi(x-y) \cdot e^{-\frac{a-b}{2}y} + \varphi(x+y) \cdot e^{-\frac{a+b}{2}y}}{2} \right\} - \\ - \frac{1}{2} e^{\frac{b}{2}y} \int_{x-y}^{x+y} \left\{ \frac{b}{2} J_0(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\varsigma)^2 - y^2}) - \sqrt{c_1} y \frac{J_1(\sqrt{c_1} \sqrt{(x-\varsigma)^2 - y^2})}{\sqrt{(x-\varsigma)^2 - y^2}} \right\} \cdot e^{-\frac{a}{2}(x-\varsigma)} \varphi(\varsigma) d\varsigma + \\ + \frac{1}{2} e^{\frac{b}{2}y} \int_{x-y}^{x+y} J_0 \left( \sqrt{c_1} \sqrt{(x-\varsigma)^2 - y^2} \right) \cdot e^{\frac{a}{2}(x-\varsigma)} g(\varsigma) d\varsigma.$$

Applying the Laplace transformation [2] to the more general problem for the wave equation

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u + f(x, y), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty; \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = g(x),$$

we receive the solution in the analytic form

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2a} \cdot \int_{x+at}^{x-at} g(\zeta) I_0 \left( c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\zeta)^2}{a^2}} \right) d\zeta + \\ & + \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{ct}{2a} \cdot \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\zeta) \frac{I_1 \left( c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\zeta)^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-\zeta)^2}{a^2}}} d\zeta + \\ & + \frac{1}{2a} \cdot \int_0^t dt \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\zeta, \tau) I_0 \left( c \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(x-\zeta)^2}{a^2}} \right) d\zeta. \end{aligned}$$

The boundary value problem for the heating of the infinite rod [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{x^\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( x^\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty; \quad u(0, t) = \varphi(t), \quad u(\infty, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0,$$

by applying the mathematical methods [3] has the following solution of this problem

$$u(x, t) \int_0^t \frac{x^{2\eta} \cdot \varphi(\tau)}{\Gamma(\eta) \cdot (4a^2)^\eta \cdot (t-\tau)^{1+\eta}} \cdot \exp \left( -\frac{x^2}{4a^2 \cdot (t-\tau)} \right) d\tau.$$

Among thin structures, which combine lightness with high durability, we can emphasize film-type and membrane constructions. Thin structures (films, membranes, coatings, etc.) may be applied in all the spheres of manufacture and human life support.

In all the spheres of human life technical and economical problems are tried to be solved on the base of films, membranes and coatings. These are problems of friction and wearing, problems of corrosion and erosion, problems of absorption of waves of specified range, problems of protection from high temperatures and fire, problems of protection from viruses and bacteria, problems of mechanisms, products and water conservation, disinfection, etc.

Creation of new films, membranes and coatings with specified operating characteristics is one of perspective directions of mechanics development.

To create new films, membranes and coatings with specified operating characteristics and durability, it is necessary to study temperature-time, mechanic (including oscillatory), chemical and other impacts may cause the demolition processes in material structure, that is why necessary characteristics of films, membranes and coatings are provided mainly by calculation of influence of such impacts on durability and material characteristics necessary for exploitation [4].

Oscillatory process of plane thin structure (membrane) is described with the following equation in second-order partial derivatives [5]:

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), \tag{1}$$

where  $a^2 = \frac{T}{\rho}$ ;  $T$  – tension on a membrane;  $\rho$  – membrane density.

Let us study plane uniform rectangular membrane, edge-fixed, with legs  $b$  and  $c$  in plane  $XOY$ ,  $0 \leq x \leq b$ ,  $0 < y < c$ .

Membrane inflection function, i.e its derivations from equilibrium state in point  $x, y$  at the moment of time  $t$ , shall be denoted with  $u(x, y, t)$ .

Let us study the process when membrane oscillation is caused by specified primary deviation and specified primary velocity.

To find the function  $u(x, y, t)$  we have the following boundary value problem: find the solution of the oscillation equation (1) in the region  $0 < x < b$ ,  $0 < y < c$ ,  $t > 0$  under the initial conditions

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y); \tag{2}$$

$$u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \tag{3}$$

and boundary conditions

$$\alpha_1 u(0, y, t) + \beta_1 u_x(0, y, t) = 0, \quad \alpha_2 u(b, y, t) + \beta_2 u_x(b, y, t) = 0; \tag{4}$$

$$\gamma_1 u(x, 0, t) + \theta_1 u_y(x, 0, t) = 0, \quad \gamma_2 u(x, c, t) + \theta_2 u_y(x, c, t) = 0, \tag{5}$$

where  $\varphi$  and  $\psi$  are given functions;  $\alpha_1, \beta_i, \gamma_i, \theta_i$  are given numbers and

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0, \quad \gamma_i^2 + \theta_i^2 \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

The solution of problem (1)–(5) is founded by Fourier method in the form function, not identically zero

$$u(x, y, t) = v(x, y) \cdot T(t). \tag{6}$$

Substituting (6) into (1) and dividing the variables, we obtain

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{v_{xx} + v_{yy}}{v} = -\sigma, \tag{7}$$

where  $\sigma$  is constant of separation of variables, which for convenience of calculations we take with a minus sign, without assuming anything about her sign.

From (7) we obtain the differential equation for the

$$T'' + a^2 \sigma T = 0 \tag{8}$$

and the following boundary-value problem for the function  $v(x, y)$

$$v_{xx} + v_{yy} + \sigma v = 0; \tag{9}$$

$$\alpha_1 v(0, y) + \beta_1 v_x(0, y) = 0, \quad \alpha_2 v(b, y) + \beta_2 v_x(b, y) = 0; \tag{10}$$

$$\gamma_1 v(x, 0) + \theta_1 v_y(x, 0) = 0, \quad \gamma_2 v(x, c) + \theta_2 v_y(x, c) = 0, \tag{11}$$

where the boundary conditions (10), (11) are obtained by direct substitution (6) into (4), (5).

To solve problem (9)–(11), we again apply Fourier method. The solution of the boundary value problem (9)–(11) will be sought in the form

$$v(x, y) = X(x) \cdot Y(y), \tag{12}$$

where the function  $v(x, y) \neq 0$ . We substitute (12) into (9) and divide the variables

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \sigma = -\eta, \tag{13}$$

where  $\eta$  is constant of separation of variables. From the relation (13) and from the boundary conditions (10), (11) we obtain for the definition of the functions  $X(x)$  and  $Y(y)$  the following one-dimensional spectral eigenvalue problems, where  $\tau = \sigma - \eta$

$$\begin{cases} X'' + \eta X = 0; \\ \alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0) = 0; \\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} Y'' + \tau \cdot Y = 0; \\ \gamma_1 Y(0) + \theta_1 Y'(0) = 0; \\ \gamma_2 Y(c) + \theta_2 Y'(c) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

*Note.* We consider the problem for the differential equation with a parameter  $\nu$

$$\begin{cases} Z'' + \nu \cdot X = 0; \\ h_1 Z(0) + g_1 Z'(0) = 0; \\ h_2 Z(l) + g_2 Z'(l) = 0; \end{cases} \quad (15)$$

where  $Z = Z(z); 0 < z < l; g_i (i = 1, 2)$  — given number, and define under which parameter values of  $\nu$  problem has a nontrivial solution.

Under direct calculations [5] obtained that the problem (15) have nontrivial solution in following cases:

1)  $\nu = 0$  under the condition

$$g_1 h_2 - h_1 (h_2 l + g_2) = 0; \quad (16)$$

2)  $\nu < 0$ .

In remark spectral problems (14) have eigenvalues and eigen functions,  $\eta = \tau = 0$  if under performance of condition (16) for matching parameters and  $\eta < 0, \tau < 0$ .

We introduce the notation  $\eta = \lambda^2, \tau = \mu^2$ , then problem (14) will take of the form

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0; \\ \alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0) = 0; \\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} Y'' + \mu^2 Y = 0; \\ \gamma_1 Y(0) + \theta_1 Y'(0) = 0; \\ \gamma_2 Y(c) + \theta_2 Y'(c) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

If spectral problems solved (17) we obtained that eigenvalues of problem (17) is  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$  and  $\mu_1, \dots, \mu_m, \dots$  equation

$$tg\lambda b = \frac{(\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) \lambda}{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 \lambda^2}, \quad tg\mu c = \frac{(\gamma_2 \theta_1 - \gamma_1 \theta_2) \mu}{\gamma_1 \gamma_2 - \theta_1 \theta_2 \mu^2},$$

root respectively, and eigen functions is function with view as

$$X_n(x) = A_n (\beta_1 \lambda_n \cos \lambda_n x - \alpha_1 \sin \lambda_n x), Y_m(y) = B_m (\theta_1 \mu_m \cos \mu_m y - \gamma_1 \sin \mu_m y). \quad (18)$$

$\sigma = \tau + \eta = \lambda^2 + \mu^2$ , considering  $\tau = \sigma - \eta$  from (14). So, we obtained that eigenvalues  $\sigma_{n,m} = \lambda_n^2 + \mu_m^2$  correspond eigen functions according to (12), (18):

$$v_{nm}(x, y) = X_n(x) Y_m(y) = A_{nm} (\beta_1 \lambda_n \cos \lambda_n x - \alpha_1 \sin \lambda_n x) (\theta_1 \mu_m \cos \mu_m y - \gamma_1 \sin \mu_m y), \quad (19)$$

where  $A_{nm} = A_n \cdot B_m$  — constant. Choose it in such a way as to norm of function  $v_{nm}$  with weight at 1 was total 1 that is to say function orthonormaling

$$\int_0^b \int_0^c v_{nm}^2 dx dy = A_{nm}^2 \int_0^b (\beta_1 \lambda_n \cos \lambda_n x - \alpha_1 \sin \lambda_n x)^2 dx \cdot \int_0^c (\theta_1 \mu_m \cos \mu_m y - \gamma_1 \sin \mu_m y)^2 dy = 1;$$

$$A_{nm} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^b (\beta_1 \lambda_n \cos \lambda_n x - \alpha_1 \sin \lambda_n x)^2 dx \cdot \int_0^c (\theta_1 \mu_m \cos \mu_m y - \gamma_1 \sin \mu_m y)^2 dy}}. \quad (20)$$

Calculation of coefficient  $A_{nm}$  is time-consuming and impractical in general cases according to the formula (20). Notably easy and rational way of calculation of coefficient  $A_{nm}$  is calculate in each concrete cases of border-line conditions spectral problem, in contrast with using awkward-to-handle and difficulty-memorizing formula, which was gotten under integral calculation in (20).

Return to original problem (1)–(5). From (19) we have

$$v_{nm}(x, y) = A_{nm} (\beta_1 \lambda_n \cos \lambda_n x - \alpha_1 \sin \lambda_n x) (\theta_1 \mu_m \cos \mu_m y - \gamma_1 \sin \mu_m y),$$

where coefficient  $A_{nm}$  is calculated in each concrete cases of border-line conditions. Find the general solution of equation (8) with  $\sigma_{Tn} = \lambda_n^2 + \mu_n^2$

$$T_{nm}(t) = C_{nm} \cos a\sqrt{\sigma_{nm}t} - D_{nm} \sin a\sqrt{\sigma_{nm}t},$$

where  $C_{nm}, D_{nm}$  – the arbitrary constant.

Returning to the original problem (1)–(5), we obtain that the particular solutions according to (6) will have view

$$u_{nm}(x, y, t) = v_{nm}(x, y) \cdot T_{nm}(t) = v_{nm}(x, y)(C_{nm} \cos a\sqrt{\sigma_{nm}t} + D_{nm} \sin a\sqrt{\sigma_{nm}t}).$$

According to the superposition solution of the equation (1) with the boundary conditions (2), (3) have view

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(x, y)T_{nm}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (C_{nm} \cos a\sqrt{\sigma_{nm}t} + D_{nm} \sin a\sqrt{\sigma_{nm}t}) \cdot u_{nm}(x, y). \quad (21)$$

Using initial conditions (4), (5), correlation between (21) and property of  $u_{nm}$  function orthonormaling, we find value of constant  $C_{nm}$  and  $D_{nm}$ .

$$u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}u_{nm}(x, y) = \varphi(x, y), \Rightarrow C_{nm} \int_0^b \int_0^c \varphi(x, y)u_{nm}dx dy;$$

$$u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm}a\sqrt{\sigma_{nm}}u_{nm}(x, y) = \psi(x, y), \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_{nm} = \frac{1}{a\sqrt{\delta_{nm}}} \int_0^b \int_0^c \psi(x, y)u_{nm}(x, y)dx dy.$$

So then we get analytical form of problem solving (1)–(5):

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (C_{nm} \cos a\sqrt{\sigma_{nm}t} + D_{nm} \sin a\sqrt{\sigma_{nm}t}) \cdot u_{nm}(x, y),$$

where

$$u_{nm}(x, y, ) = A_{nm}(\beta_1 \lambda_n \cos \lambda_n x - \alpha_1 \cos \lambda_n x)(\theta_1 \mu_m \cos \mu_m y - \gamma_1 \sin \mu_m y);$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$  - is equation root  $tg\lambda b = \frac{(a_2\beta_1 - a_1\beta_2)\lambda}{a_1a_2 + \beta_1\beta_2\lambda^2}$ ;

$\mu_1, \dots, \mu_m, \dots$  - is equation root  $tg\mu c = \frac{(\gamma_2\theta_1 - \gamma_1\theta_2)\mu}{\gamma_1\gamma_2 + \theta_1\theta_2\mu^2}$ .

$$A_{nm} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^b (\beta_1 \lambda_n \cos \lambda_n x - a_1 \sin \lambda_n x)^2 dx \cdot \int_0^c (\theta_1 \mu_m \cos \mu_m y - \gamma_1 \sin \mu_m y) dy}};$$

$$C_{nm} = \int_0^b \int_0^c \varphi(x, y)u_{nm}(x, y)dx dy, \quad D_{nm} = \frac{1}{a\sqrt{\delta_{nm}}} \int_0^b \int_0^c \psi(x, y)u_{nm}(x, y)dx dy.$$

So then we get analytical solution of boundary-value problem, which describe fluctuation of beamless plate structure for general cases of border-line conditions. Boundary-value problems and equation in partial derivative is ubiquitous in mechanics of continua, liquid mixture, beamless plate structure, introduction to fracture mechanics, shape memory alloy mechanics, differential modeltheory of viscoelasticity, theory of hereditary elasticity, flow theory and in other mechanic fields [1].

The remarkable thing is that the similar boundary-value problem as investigating problem above, can describe different processes in varied fields of knowledge such as mechanic, physics, chemistry, biology, economics etc, insomuch as mathematical modeling various processes lead to the same tasks under using basic conservation

law (energy, mass, particle number). Analytical solution could be used in applied problem of variety science, which have result as represented boundary-value problem under mathematical modeling, in adding number with border-line conditions in general view.

Finite elements method be able used for calculating multilayer plates under inability getting accurate analytical solution [6]. Following calculation formula as a result of using basic classical correlation for displacement, voltage, balance equation for multilayer plates, is [7]:

– for contact conditions in stratum boundary, for voluntary constant

$$u_1^{i-1} = u_1^i, \quad H\varphi_{i-1}(a_{i-1}) = H\varphi_i(a_{i-1});$$

$$C_{i-1}^0 - a_{i-1} = C_1^0 - a_{i-1}, \quad C_{i-1}^0 = C_i^0 = C^0;$$

$$\tau_{13}^{i-1} = \tau_{13}^i, \quad E_0H^2\psi_{i-1}(a_{i-1}) = E_0H^2\psi_i(a_{i-1});$$

$$A_{i-1}^0 - \beta_{i-1}(C^0a_{i-1} - \frac{a_{i-1}^2}{2}) = A_{i-1}^0 - \beta_i(C^0a_{i-1} - \frac{a_{i-1}^2}{2});$$

$$\sigma_3^{i-1} = \sigma_3^i, \quad E_0H^2\sigma_{i-1}(a_{i-1}) = E_0H^2\sigma_i(a_{i-1});$$

$$B_{i-1}^0 - A_{i-1}^0 + \beta_{i-1}(C_{i-1}^0 \frac{a_{i-1}^2}{2} \frac{a_{i-1}^3}{6}) = B_i^0 - A_i^0 + \beta_i(C_i^0 \frac{a_{i-1}^2}{2} \frac{a_{i-1}^3}{6});$$

– for voluntary constant

$$C^0 = \frac{1}{2} \frac{\beta_n - \sum_{k=2}^n (\beta_k - \beta_{k-1}a_{k-1}^2)}{\beta_n - \sum_{k=2}^n (\beta_k - \beta_{k-1}a_{k-1}}}, \quad A_i^0 = C^0 \sum_{k=2}^i (\beta_k - \beta_{k-1})a_{k-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^i (\beta_k - \beta_{k-1})a_{k-1}^2;$$

$$B_i^0 = \sum_{k=2}^i (A_k^0 - A_{k-1}^0) - \frac{C^0}{2} \sum_{k=2}^i (\beta_k - \beta_{k-1})a_{k-1}^2 + \frac{1}{6} \sum_{k=2}^i (\beta_k - \beta_{k-1})a_{k-1}^3;$$

– for internal effort

$$M = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} \sigma_1^i z dz = -DC_\beta \frac{d^2W}{dx_1^2}, \quad D = \frac{E_0H^3}{12};$$

$$C_\beta = 12 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{C_0}{2} \beta_i - (a_i^2 - a_{i-1}^2) - \frac{1}{3} \beta_i (a_i^3 - a_{i-1}^3) \right\};$$

$$Q = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tau_{13}^i dz = DA_\beta \frac{d^3W}{dx_1^3}; \tag{22}$$

$$A_\beta = 12 \sum_{i=1}^n \left\{ A_i^0 (a_i - a_{i-1}) - \beta_i \left[ \frac{C_0}{2} (a_i^2 - a_{i-1}^2) - \frac{1}{6} (a_i^3 - a_{i-1}^3) \right] \right\};$$

$$\sigma_3^n = q = E_0H^3 \delta_n(1) \frac{d^4W}{dx_1^4} = DB_\beta \frac{D^4W}{dx_1^4};$$

$$B_\beta = 12\delta_n(1), \quad C_\beta = A_\beta.$$

Calculation of multilayer plates under given algorithm[7], where resolving equation have view:

$$DB_\beta \frac{d^4W}{dx_1^4} = q,$$

introduce proportion  $\eta_i = \frac{D_i}{D_0}$ ; were  $D_0$  – basic plate modulus one of layer, which is chosen the first from below;  $D_i$  – plate modulus of other layers.

Then integral parameters  $C_\eta$  and  $A_\eta$  adding as multiplier in basic formula of finite elements, which calculated by formula (22), but with an allowance instead.

$$F = C_\eta K \cdot V, \quad M = -C_\eta B \cdot V, \quad Q = -A_\eta C \cdot V_\eta \quad [3].$$

Cooperative using analytical (for example, integral transformation) and numerical methods is quite often effective for solution multidimensional problems of mechanic, under this possible take results where any one of them in separate way are practically powerless.

#### References

- 1 Власенко В.Д. Математическое моделирование в задачах механики сплошной среды / В.Д. Власенко. — Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2010. — 103 с.
- 2 Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. — Л.: Наука, 1968. — 403 с.
- 3 Князев П.Н. Интегральные преобразования / П.Н. Князев. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 200 с.
- 4 Якупов Н.М. Методы расчета пленочных элементов конструкций: учеб. пос. / Н.М. Якупов, С.Н. Якупов. — Казань: КГАСУ, 2007. — 117 с.
- 5 Yesbayev A.N., Yessenbayeva G.A., Ivanov I.A. On the boundary value problem for the vibration and wave processes in two-dimensional environs // Bulletin of the Karaganda University. Ser. Mathematics. — 2016. — No. 3(83). — P. 55–61.
- 6 Зенкевич О. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред / О. Зенкевич, И. Чанг. — М.: Недра, 1974. — 240 с.
- 7 Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин / Р.Б. Рикардс. — Рига: Зинатне, 1988. — 284 с.

Г.А. Есенбаева, К.С. Кутимов, Ж.Р. Сажина, Ә.Ж.Сәрсенбек

## Механикадағы тербелмелі процестерді зерттеу кезінде математикалық әдістерді қолдану қосымшасы туралы

Мақалада қолданбалы механика есептері мен тапсырмаларын зерттеу жұмыстары көрсетілген, оларды математикалық модельдеу дербес туындылар теңдеулеріне шектік есептерге әкеледі. Арнайы модельдерге қоса берілген математикалық тәсілдер өз кезегінде аналитикалық нақты шешімдерді алуға мүмкіндік береді. Жалпы түрде шектес шарттармен қоса жұқабүйірлі құрылымдар тербелісі шеткі есебі үшін нақты шешім алуға болады. Тегіс функция үшін спектралды ыдырауды қолдану тепе-теңдік жағдайларында мембраналардың ауытқуы сипатталды, ол зерттелетін есеп үшін функциялардың иілу кезінде нақты күйін анықтауға мүмкіндік береді. Көпқабатты пластиналарды есептеу үшін шектік элементтер тәсіл пайданылған.

*Кілт сөздер:* тербелістер, жұқабүйірлі құрылымдар, ортонормаланған функция жүйесі, иілу функциясы, көпқабатты пластиналар.

Г.А. Есенбаева, К.С. Кутимов, Ж.Р. Сажинава, А.Ж. Сарсенбек

## О приложении математических методов к исследованию колебательных процессов в механике

В статье представлено исследование прикладных задач механики, математическое моделирование которых приводит к краевым задачам для уравнений в частных производных. Математические методы, примененные к данным моделям, позволяют получить точные аналитические решения. Подробное решение представлено для краевой задачи колебаний тонкостенных конструкций с граничными условиями в общем виде. Использование спектрального разложения для достаточно гладкой функции, характеризующей отклонение мембраны от положения равновесия, позволяет определить точное аналитическое представление функции прогиба для исследуемой задачи. Для расчета многослойных пластин использован метод конечных элементов.

*Ключевые слова:* колебания, тонкостенные конструкции, ортонормированная система функций, функция прогиба, многослойные пластины.

### References

- 1 Vlasenko, V.D. (2010). *Matematicheskoe modelirovanie v zadachakh mekhaniki sploshnoi sredy [Mathematical modeling in problems of continuum mechanics]*. Khabarovsk: Izdatelstvo Tikhoookeanskoho hosedarstvennogo universiteta [in Russian].
- 2 Uphland, Ya.S. (1968). *Intehralnye preobrazovaniia v zadachakh teorii uprugosti [Integral transforms in problems of elasticity theory]*. Leningrad: Nauka [in Russian].
- 3 Knyazev, P.N. (2004). *Intehralnye preobrazovaniia [Integral transformation]*. Moscow: Editorial URSS [in Russian].
- 4 Yakupov, N.M., Yakupov, S.N. (2007). *Metody rascheta plenochnykh elementov konstruktsii [Methods of calculation of the film elements of structures: textbook]*. Kazan: KHASU [in Russian].
- 5 Yesbayev, A.N., Yessenbayeva, G.A., Ivanov, I.A. (2016). On the boundary value problem for the vibration and wave processes in two-dimensional environs. *Bulletin of the Karaganda University. Ser. Mathematics*, 3(83), 55–61.
- 6 Zenkevich, O., Chang, I. (1974). *Metod konechnykh elementov v teorii sooruzhenii i v mekhanike sploshnykh sred [The finite element Method in the theory of structures and in continuum mechanics]*. Moscow: Nedra [in Russian].
- 7 Rickards, R.B. (1988). *Metod konechnykh elementov v teorii obolochek i plastin [The finite element Method in the theory of shells and plates]*. Riga: Zinatne [in Russian].



A.R. Yeshkeyev

Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan  
(E-mail: modth1705@mail.ru)

## The properties of central-orbital types of EPSCJ theories

This article, in its content, refers to the study of the theoretical-model properties of the Jonsson theories. A new approach to this study is proposed. As a new notion, the idea of a central-orbital type is used. When studying Jonsson theories are taken into account the following facts: Syntactic, concerning the Jonsson theories and the Jonsson subsets of the semantic model of the Jonsson theory under consideration. In addition, a special role in the syntactic sense is played by the enrichment of the signature associated with the given Jonsson sets. The semantic aspect of the issues under consideration is primarily concerned with the notion of convexity, strong convexity, and existential primeness. Although these definitions are related to theory, in fact we are dealing with different types of models that are existentially closed.

*Keywords:* Jonsson theory, Jonsson set, fragment of Jonsson sets, Existentially Prime Strongy Convex Jonsson theories, central-orbital types.

This work is associated with the concepts of convexity theory in the class existentially-prime Jonsson theories. We denote such theories as *Existentially Prime Strongy Convex Jonsson (EPSCJ)*. Also we have concentrating our attention to not arbitrary subsets but use have deal with Jonsson subsets of some semantic model for fixing Jonsson theory [1–3].

Let  $L$  be a countable first-order language.

*Definition 1.* The inductive theory  $T$  called existential-prime, if

1. It has an algebraic prime model and the class of all algebraically prime models denoted by  $AP$ .
2. The class  $E_T$  existentially closed models of theory  $T$  has non-empty intersection with an  $AP$  class, i.e.,  $T_{AP} \cap E_T \neq \emptyset$ .

*Definition 2.* The theory  $T$  is called convex if for any model  $\mathfrak{U}$  and any family  $\{\mathfrak{B}_i | i \in I\}$  of its substructures, which are models of the theory  $T$ , the intersection  $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{B}_i$  is a model theory  $T$ . It is assumed that this intersection is not empty. If this intersection is never empty, then the theory is called the strongly convex.

The following notions belong to A. Robinson [4].

*Definition 3.* The set  $X$  is said to be Jonsson in theory  $T$  if it satisfies the following properties:

- 1)  $X$  is a  $\Sigma$ -definable subset of  $C$ ;
- 2)  $dcl(X)$  is the universe of some existentially closed submodel  $C$ .

It is well known [1] that if Jonsson Theories  $T$  is perfect, then the class of its existentially closed models  $E_T$  is elementary and coincides with the  $ModT^*$ , where  $T^*$  — its center. Otherwise, i.e. if the theory  $T$  is not perfect, instead of  $ModT$  we are working with the class  $E_T$ , i.e., it is assumed that all the allegations relate only existentially closed models. Also, we assume in the case of an imperfect, that besides the existential closure of all these models is algebraically prime.

We say that all  $\forall\exists$ -corollary of the arbitrary theory form a Jonsson fragment of this theory, if the deductive closure of these  $\forall\exists$ -corollary is Jonsson Theories. Obtained in this case Jonsson theories will be called Jonsson fragment (further fragment). Accordingly, it is determined by the fragment of Jonsson set. In both cases, we can carry out research Jonsson fragments on the connection with an initial theory that the new formulation of the problem research is Jonsson's theory.

Let  $X$  Jonsson set in the theory  $T$  and  $M$  is existentially closed submodel of semantic model  $C$ , considered Jonsson theory  $T$  where  $dcl(X) = M$ . Then let  $Th_{\forall\exists}(M) = Fr(X)$ ,  $Fr(X)$  is Jonsson fragment of Jonsson sets  $X$ .

### Pure triples of complete theories

The following definitions belong to T.G. Mustafin [5; 49].

*Definition 4.* If  $A$  is non-empty set,  $G$  is some group of bijections (permutations)  $A$  relative to the superposition, then the pair  $(A, G)$  is called a pure pair (p.p.).

*Definition 5.* The triple  $(A, G, N)$  is called a pure triple (p.t.), if:

1)  $(A, G)$  is p.p.;

2)  $N$  – some class of subsets  $A$  such that  $g(M) \in N$  for all  $M \in N, g \in G$ , where  $g(M) = \{g(a) : a \in M\}$ .

If  $(A, G, N), (A', G', N')$  is p.t.,  $\varphi : A \rightarrow A'$  - bijection, then  $\varphi$  is called an exact similarity (isomorphism) if:

a)  $G' = \{\varphi g \varphi' : g \in G\}$ ;

b)  $N' = \{\varphi(M) : M \in N\}$ .

If  $(A, G, N)$  - p.t.,  $\sim - G$  - invariant equivalence relation on  $A$ , then  $\sim$  is called a congruence on  $(A, G, N)$ , if  $\forall a \in A \forall M \in N (a \in M \Rightarrow \tilde{a} \in M)$ .

*Proposition 1.* If  $\sim$  is a congruence on p.t.  $(A, G, N)$ , then  $(A/\sim, G/\sim, N/\sim)$  is p.t.,

where  $N/\sim = \{M/\sim : M \in N\}$ .

▷ easy to verify.

If  $(A, G, N), (A', G', N')$  - p.t.,  $\varphi : A \rightarrow A'$  is surjection, then  $\varphi$  is called compression in  $\varphi^{-1}$  is called bloating, if:

1) the relation  $\tilde{\varphi}$  is a congruence,

where  $a\tilde{\varphi}b \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b), a, b \in A$ ;

2) the map  $\psi : A' \rightarrow A/\sim$  is an exact similarity,

where  $\psi(a') = \{a \in A : \varphi(a) = a'\}, a' \in A'$ .

Let  $T$  is Jonsson theory and  $T^* = Th(\mathcal{L})$  is center, i.e. where  $\mathcal{L}$  is a semantic model of the theory  $T$ .  $G = Aut(\mathcal{L}), N = E_T$ , where  $E_T$  is the class of all existentially closed models theory  $T$ . Then p.t.  $(\mathcal{L}, G, N)$  is called the semantic triple (s.t.) of Jonsson theory  $T$ . Jonsson theories  $T_1, T_2$  are called semantically exactly similar if their semantic triples are exactly similar.

*Remark.* The concept of exact similarity of theories does not depend on the choice of the semantic model.

Let  $\varepsilon$  is such relation on  $\mathcal{L}$ , that:

– if  $a \in acl(\emptyset)$ , then  $b\varepsilon a \Leftrightarrow b = a$ ;

– if  $a, b \notin acl(\emptyset)$ , then  $b\varepsilon a \Leftrightarrow acl(b) = acl(a)$ .

We have the following results by analogy with the results of [5].

*Lemma 1.* In p.t.  $(\mathcal{L}, G, N)$  the relation  $\varepsilon$  is congruence.

If  $(\mathcal{L}_i, G_i, N_i)$  are s.t. of theory  $T_i, i = 1, 2$ , then  $T_1$  and  $T_2$  are called  $\varepsilon$  are similar if  $(\mathcal{L}_1/\varepsilon, G_1/\varepsilon, N_1/\varepsilon)$  and  $(\mathcal{L}_2/\varepsilon, G_2/\varepsilon, N_2/\varepsilon)$  exactly similar. It is easy to see that the relation "  $\varepsilon$  is similar" is an equivalence relation in the class of Jonsson theories.

*Proposition 2.* Let  $(A, G, N)$  is p.t.,  $(\mathcal{L}_i, C_i, N_i)$  s.t. existentially complete perfect Jonsson theories  $T_i, i = 1, 2$ ,  $\psi_i : \mathcal{L}_i \rightarrow A_i$  are compression,  $i = 1, 2$ . If  $X_i \subset \mathcal{L}_i, i = 1, 2$ , then let  $X_1 = X_2$  means that  $\psi_1(X_1) = \psi_2(X_2)$ . Then:

1)  $I(\alpha, T_1^*) = I(\alpha, T_2^*)$  for all  $\alpha \Leftrightarrow I(\alpha, E_{T_1}) = I(\alpha, E_{T_2})$ , where  $E_{T_i}$  is number of existentially closed models of theory  $T_i$ ;

2) for all  $\lambda$  is true that  $T_1 - \lambda$  is stable  $\Leftrightarrow T_2 - \lambda$  is stable;

3) if  $\bar{a}_1 = \bar{a}_2, M_1 \leftrightarrow M_2, M_i \in N_i, i = 1, 2$ , then

a)  $\bar{a}_1 = \bar{a}_2, \bar{a}_1 \in M_1 \Leftrightarrow \bar{a}_2 \in M_2$ ;

b)  $L(tp(\bar{a}_1, M_1)) = L(tp(\bar{a}_2, M_2))$ ;

c)  $tp(\bar{a}_1, M_1)$  is regular  $\Leftrightarrow tp(\bar{a}_2, M_2)$  is regular;

d)  $tp(\bar{a}_1, M_1 \cup X_1)\lambda M_1 \Leftrightarrow tp(\bar{a}_2, M_2 \cup X_2)\lambda M_2$ ;

▷ routine, so it is omitted.

The Jonsson theories  $T_1$  and  $T_2$  are called  $\tau$  is similar, if there exist countable existentially closed models  $M_1 \models T_1, M_2 \models T_2$  such that  $Th_{\forall\exists}(M_1, m)_{m \in M_1}$  and  $Th_{\forall\exists}(M_2, m)_{m \in M_2}$   $\varepsilon$  is similar.

Using Proposition 2, we can prove the following

*Proposition 3.*

1) If  $T_1$  and  $T_2$  are existentially complete perfect Jonsson theories  $\varepsilon$  is similar,  $M_i \in N_i, M_1 = M_2$  (In the sense of Proposition 2), then  $Th_{\forall\exists}(M_1, m)_{m \in M_1}$  and  $Th_{\forall\exists}(M_2, m)_{m \in M_2}$   $\varepsilon$  are similar;

2) relation « $\tau$  is similar» is an equivalence relation.

We give the necessary definitions related to Jonsson theories in the enriched signature.

Let  $T$  is an arbitrary Jonsson theory in the language of the first order signature  $\sigma$ . Let  $C$  is a semantic model of theory  $T$ . Let  $A \subseteq C$  is a Jonsson set of theory  $T$ . Let  $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a | a \in A\} \cup \Gamma, \Gamma = \{P\} \cup \{c\}$ .

Let  $T_A^C = T \cup Th_{\forall\exists}(C, a)_{a \in A} \cup \{P(c_a) | a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{''P \subseteq''\}$  where  $\{''P \subseteq''\}$  is an infinite set of sentences expressing the fact that the interpretation of symbol  $P$  is existentially closed submodel in the language of the

signatures  $\sigma_\Gamma(A)$  and this model is a definable closure of the set  $A$ . It is understood that the consideration the set of sentences is Jonsson theory and this theory generally is not complete.

Let  $T^*$  is the center of the Jonsson theory  $T_A^C$  and  $T^* = Th(C')$  where  $C'$  is a semantic model of the theory  $T_A^C$ . By restriction theory  $T_A^C$  to signatures  $\sigma_\Gamma(A) \setminus \{c\}$  the theory  $T_A^C$  becomes a complete type. This type we call a central type of the theory  $T$  relatively the Jonsson set  $A$  and denoted by  $P_A^C$ .

Let  $T$  is an arbitrary *EPSCJ* theory in first order signature  $\sigma$ . Let  $C$  is a semantic model of  $T$ .  $A \subseteq C$ . The requirement of existential closeness for a submodel is essential in that sense, that it should not be finite. The theory  $T_A^C$  is not necessary complete. Through  $S_\Gamma^A$  denote a set of all  $\exists$ - completions of theory  $T_A^C$ . Let  $\lambda$  is an arbitrary cardinal.

Accordingly, the main idea of this clause of the article is to redefine all concepts, introduced by T.G. Mustafin for orbital types in [5], also in the language of central orbital types and then get the corresponding results in the language pure pair corresponding of Jonsson theory.

We give the Jonsson definition of some important model-theoretic concepts in the language pure pair  $(A, G)$ , where  $A$  is some subsets of the semantic model and  $G$  is automorphism group of semantic model.

Let  $(A, G)$  is an arbitrary pure pair  $X \subseteq A$ :

1.  $G_x \triangleq \{g \in G : \forall x \in X (g(x) = x)\}$ . It is obvious that  $G_x \subseteq G$ .
2. If  $Y \subseteq A$ , to  $G_x(Y) \triangleq \{g(Y) : g \in G_x\}$ . If  $Y = \{a\}$ , then we will use the record  $G_x(a)$ .  $G_x(Y)$  is called  $G_x$  orbit  $Y$ .
3. If  $0 < n < \omega$ , then  $O^n(X) \triangleq \{G_x(\bar{a}) : \bar{a} \in A^n\}$ .
4.  $acl(X) \triangleq \{a \in A : |G_x(a)| < \omega\}$ .
5. The sequence  $E = \langle \bar{e}_i : i < A \rangle$  finite sequences (tuples) the same length is called indistinguishable over  $X$ , if:

- a)  $\bar{e}_i \neq \bar{e}_j$  for all  $i < j < a$ ;
- b) for any sequence  $\langle i_k : k < m < \omega \rangle$  indices such that  $i_k < i_s \Leftrightarrow k < s$  for all  $k, s \leq m$ , exist  $g \in G_x$ , such that  $g(\langle e_k : k \leq m \rangle), \langle e_{i_k} : k \leq m \rangle$ .

6. If  $(I; <)$  is linearly ordered set of indices, then the sequence  $E = \langle \bar{e}_i : i \in I \rangle$  is called indistinguishable over  $X$ , if for all  $I_0 \subseteq I$ , such that  $ord(I_0) = \omega$ ,  $E = \langle e_i : i \in I \rangle$  is indistinguishable over  $X$  sequence.

7. The set  $E = \langle \bar{e}_i : i \in I \rangle$  sequences of the same length are said to be indistinguishable over  $X$ , if:

- a)  $\bar{e}_i \neq \bar{e}_j$  при  $i \neq j$ ;
- b) for all  $F, D \subseteq E$ , such that  $|F| = |D| < \omega$  and any bijection  $\psi : F \rightarrow D$  exist  $g \in G$  such that  $\psi \in g$ .
8. If  $X \subseteq Y, p \in O^n(Y)$ , then  $p$  is called:
  - a) splitting over  $X$ , if there are such  $\bar{a}, \bar{b} \in Y$ , that  $G_x(\bar{a}) = G_x(\bar{b})$ , but for all  $\bar{c} \in pG_{x \cup \bar{c}}(\bar{a}) \cap G_{x \cup \bar{b}} = \bar{c} \in p(\varphi)$ ;
  - b) strictly splitting over  $X$ , if there exists such an indistinguishable  $X$  infinite sequence  $E \langle \bar{a}_i : i < \omega \rangle$  in  $A$ , that  $\bar{a}_0, \bar{a}_1 \in Y$ , and for all  $\bar{c} \in p$  occurs  $G_{x \cup \bar{c}}(\bar{a}) \cap G_{x \cup \bar{c}}(\bar{b}) = \bar{c} \in p(\varphi)$ ;
  - c) branching over  $X(p \wedge X)$ , if there is such a  $Z \supseteq Y$ , that  $|Z \setminus Y| < \omega$ , and for all  $q \in O^n(Z)$  from the fact that  $q \leq p$ , follows that  $q$  is strictly splitting over  $X$ .

9. Subset  $X \subseteq A$  is called  $\lambda$  is saturated if  $\forall Y \subseteq X, \forall p \in O^1(Y) < \lambda \Rightarrow X \cap p \neq (\varphi)$ .

10. Pure pair  $(A, G)$  is called  $\lambda$  is stable if  $\forall X \subseteq A (|X| \leq \lambda \Rightarrow |O^1(X)| \leq \lambda)$ .

11. Let  $O(A) \triangleq \bigcup \{ \bigcup_{n < \omega} O^n(X) : X \subseteq A, |X| < |A| \}$ .

By induction, we define the rank function  $L : O(A) \rightarrow Ord \cup \{\infty\}$ :

- a)  $L(p) \geq 0$  for all  $p \in O(A)$ ;
- b) if  $\alpha$  is the limit ordinal, then  $L(p) \geq \alpha$  if and only if  $L(p) \geq \beta$  for all  $\beta < \alpha$ ;
- c) if  $\alpha = \beta + 1, p \in O^n(X)$ , then  $L(p) \geq \alpha$  if and only if  $L(p) \geq \beta$  and there are  $Y \subseteq A, q \in O^n(Y)$ , that  $X \subseteq Y, q \leq p, L(q) \geq \beta$  и  $q \wedge X$ ;
- d)  $L(p) = \alpha \Leftrightarrow L(p) \geq \alpha \vee L(p) \not\geq \alpha + 1$ ;
- e)  $L(p) = \infty \Leftrightarrow L(p) \geq \alpha$  for all ordinals  $\alpha$ .

12. If  $\bar{a}, \bar{b} \in A^n$ , then  $\vec{v}(\bar{a}, X) = \vec{x}(\bar{b}, X)$  means that there are such  $Y, p \in O^n(Y)$ , что  $X \subseteq Y, Y \omega X \subseteq Y$  is saturated  $p \wedge X, \bar{a}, \bar{b} \in p$ .

13.  $V^n(X) \triangleq \{ \vec{v}(\bar{a}, X) : \bar{a} \in A^n \}, V(X) = \bigcup_{n < \omega} V^n(X)$ .

If  $p \in O^n(X)$ , then  $V_p \{ \vec{v}(\bar{a}, X) : \bar{a} \in p \}$ .

14. If  $X \subseteq Y, \vec{w} \in V^n(X), \vec{u} \in V^n(Y)$ , then

$$\vec{w} < \vec{u} \Leftrightarrow \forall \bar{a}, \bar{b} \in A^n (\vec{w} = \vec{v}(\bar{a}, X) \vee \vec{u} = \vec{v}(\bar{b}, Y) \Rightarrow \vec{v}(\bar{a}, X) = \vec{v}(\bar{b}, X) \wedge G_\gamma(\bar{b}) \wedge X).$$

15. The sequence  $\langle \bar{a}_i : i < a \rangle$  is called the Morley sequence over  $X$ , generated  $\bar{u}$  from  $V^n(X)$ , if  $\vec{u} < \vec{v}(\bar{a}_j, X \cup \bigcup_{j < i} \bar{a}_j)$  for all  $i < a$ .

16. Let's call  $\bar{u}, \bar{w} \in V(X)$  almost orthogonal (we denote by  $\bar{u} \perp^\alpha \bar{w}$ ), if  $\forall \bar{a}, \bar{b} \in A(\bar{u} = \bar{v}(\bar{a}, X) \wedge \bar{w} = \bar{v}(\bar{b}, X)) \Rightarrow G_{X \cup \bar{b}}(\bar{a}) \wedge X$ .
17. Let's call  $p, q \in O(X)$  almost orthogonal (we denote by  $p \perp^\alpha q$ ), если  $\bar{u} \in V_p, \bar{w} \in V_q$ .
18. Let's call  $\bar{u} \in V(X), \bar{w} \in V(Y)$  almost orthogonal (we denote by  $\bar{u} \perp^\alpha \bar{w}$ ), if  $\forall Z \forall \bar{u}, \bar{w}_1 \in V(Z)$  ( $X \cup Y \subseteq Z \wedge \bar{u} < \bar{u}_1 \wedge \bar{w} < \bar{w}_1 \Rightarrow \bar{u}_1 \perp^\alpha \bar{w}_1$ ).
19. Let's call  $p \in O(X), q \in O(Y)$  almost orthogonal (we denote by  $p \perp q$ ), if  $q \subseteq V_p \forall \bar{w} \in V_q(\bar{u} \perp \bar{w})$ .
20. Let's call  $p \in O(X)$  regular if

$$\forall Y \forall q \in O(Y) (X \in Y \wedge q \subseteq p \wedge q \wedge X \Rightarrow p \perp q).$$

All the concepts introduced in this way related to central-orbital types of the Jonsson theory naturally give Jonsson analogues of theorems for complete theories. First of all, we are interested in describing models of central types of Jonsson algebras with respect to stability topics. Let  $L$  is an arbitrary language. Let  $T$  are Jonsson's perfect theory, complete for existential sentences in the language  $L$ , and its semantic model is  $C$ . We say that the set  $X \Sigma$  is definable if it is definable by some existential formula.

The set  $X$  is called algebraically Jonsson in theory  $T$ , if it satisfies the following properties:

- $X$  is  $\Sigma$  definable subset  $C$ ;
- $acl(X)$  is the universe of some existentially closed submodel  $C$ .

With the help of the introduced definitions of Jonsson sets, we can transfer many properties for the Jonsson theories to Jonsson and algebraically Jonsson subsets of the semantic model.

We say that two Jonsson (algebraically) sets (equivalent, cosmetic, categorical), if there are, respectively, (Jonsson equivalent, kosemantic, categorical, syntactically similar, semantically similar, etc.) the models obtained by the corresponding closure of these sets. Consider, for example, kosemantic. Two Jonsson sets are cosemantic, if their respective closures are cosmetic, etc. The most invariant concept is the syntactic similarity of theories, since it preserves all the properties of the theories under consideration. For the case of Jonsson sets, we define the syntactic similarity as follows: two (algebraic) Jonsson sets are syntactically similar to each other if the elementary theories of their corresponding closures are syntactically similar. If  $\forall \exists$  is the consequences of these elementary theories will be given by the Jonsson theories, then in this case we can consider their Jonsson syntactic similarity, i.e. to the invariance of the semantic model, our definition is correct. In conclusion, we will make a far-reaching proposal.

In this article the new definitions, we set the task of considering and attempting to describe strongly minimal Jonsson sets. This, in turn, entails a whole series of new problem statements, for example, refinement of the Lachlan-Baldwin theorem in the framework of this novelty. And finally we claim that for central-orbital types will be true all results from [6] and also the following result:

Let us consider the stability for fragments of Jonsson sets.

Let  $X$  Jonsson set and  $M$  is existentially closed model, where  $dcl(X) = M$ .

Consider the fragment of Jonsson set  $X$  as the theory  $Th_{\forall \exists}(M) = T_M$ .

*Lemma 2.*  $T_M$  will Jonsson theory in the enrichment as above signature.

*Theorem 1.* Let  $T_M$ , as described above. If  $\lambda \geq \omega$ , then the following conditions are equivalent:

- (1)  $T^*$  is  $J - \lambda$ -stable, where  $T^*$  is the center of  $T$ .
- (2)  $T_A^C$  is  $\lambda$ -stable.

*Theorem 2.* Then the following conditions are equivalent:

- (1)  $T_M^*$  -  $\omega$ -categorical;
- (2)  $T_A^C$  -  $\omega$ -categorical.

## References

- 1 Yeshkeyev A.R. Jonsson sets and some of their model-theoretic properties. Abstracts Book. International Congress of Mathematicians. — August, 13-21, 2014. — Seoul, Korea. — P. 8.
- 2 Yeshkeyev A.R. On Jonsson sets and some their properties // Bulletin of Symbolic Logic. — 2015. — Vol. 21. No. 1. — P. 99, 100.
- 3 Yeshkeyev A.R. Properties of central type for fragments of Jonsson sets // Bulletin of Symbolic Logic. — 2016. — Vol. 22. — No. 3. — P. 429, 430.

- 4 Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории и их классы моделей / А.Р. Ешкеев, М.Т. Касыметова. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2016. — С. 346.
- 5 Мустафин Т.Г. Введение в прикладную теорию моделей / Т.Г. Мустафин, Т.А. Нурмагамбетов. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1987. — С. 39–51.
- 6 Yeshkeyev A.R. Some properties of Morly rank over Jonsson sets // Bulletin of the Karaganda University. Ser. Mathematics. — 2016. — No. 4(84). — P. 57–62.

А.Р. Ешкеев

## EPSCJ теориялардың централды-орбиталды түрлерінің қасиеттері

Мақала өз мағынасы бойынша йонсондық теориялардың модельді-теоретикалық қасиеттерінің сұрақтары зерттелген. Сонымен қатар осы оқытудың жаңа әдісі ұсынылды. Жаңа ұғым ретінде централды-орбиталды типтің идеясы қолданылды. Йонсондық теорияларды оқу барысында келесі фактілер пайданылды: синтаксистік, йонсондық теорияға қатысты және қарастырып отырған йонсондық теорияның йонсондық ішкі жиындардың семантикалық моделі. Сонымен қатар берілген йонсондық жиындармен байланысты сигнатураның байытылуы синтаксистік мағынада негізгі роль атқарады. Қарастырып отырған сұрақтардың семантикалық тұрғы, ең алдымен, дөңестілік, қатты дөңестілік және экзистенциалды жайлылық ұғымдарымен байланысты. Бұл анықтамалар теориямен байланысты болғандықтан, факт бойынша біз экзистенциалды-тұйық болатын модельдердің әр түрлі түрлерімен жұмыс жасауға тура келеді.

*Кілт сөздер:* йонсондық теория, йонсондық жиын, йонсондық жиынның фрагменттері, экзистенциалды жай қатты дөңес йонсондық теория, централды-орбиталды типтер.

А.Р. Ешкеев

## Свойства центрально-орбитальных типов EPSCJ теорий

Статья по своему содержанию относится к вопросам изучения теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий. При этом предложен новый подход такого изучения. В качестве нового понятия использована идея центрально-орбитального типа. При изучении йонсоновских теорий учтены следующие факты: синтаксический, касающийся йонсоновских теорий и йонсоновских подмножеств семантической модели, рассматриваемой йонсоновской теории. Кроме этого, особую роль в синтаксическом смысле играет обогащения сигнатуры, связанные с заданными йонсоновскими множествами. Семантический аспект рассматриваемых вопросов, в первую очередь, связан с понятием выпуклости, сильной выпуклости и экзистенциальной простоты. Хотя эти определения связаны с теорией, по факту мы имеем дело с различными видами моделей, которые являются экзистенциально-замкнутыми.

*Ключевые слова:* йонсоновская теория, йонсоновское множество, фрагменты йонсоновских множества, экзистенциальная простая сильно выпуклая йонсоновская теория, центрально-орбитальные типы.

### References

- 1 Yeshkeyev, A.R. (2014). Jonsson sets and some of their model-theoretic properties: abstracts Book. International Congress of Mathematicians, 13-21, August, Seoul, Korea.
- 2 Yeshkeyev, A.R. (2015). On Jonsson sets and some their properties. *Vestnik simvolicheskoi lohiki – Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 21, 1*, 99, 100.

- 3 Yeshkeyev, A.R. (2016). Properties of central type for fragments of Jonsson sets. *Vestnik simvolicheskoi lohiki – Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 22, 3*, 429, 430.
- 4 Yeshkeyev, A.R., Kasymetova, M.T. (2016). *Jonsonovskie teorii i ikh klassy modelei [Jonsson theory and its classes of models]*. Karaganda: Izdatelstvo KarHU [in Russian].
- 5 Mustafin, T.G., Nurmagambetov, T.A. (1987). *Vvedenie v prikladnuiu teoriyu modelei [Introduction to applied theory of models]*. Karaganda: Izdatelstvo KarHU [in Russian].
- 6 Yeshkeyev, A.R. (2016). Some properties of Morly rank over Jonsson sets. *Vestnik Karagandinskogo universiteta. Ser. Matematika – Bulletin of the Karahanda University. Ser. Mathematics, 4(84)*, 57–62.

А.А. Жакулина, А.С. Жакулин

*Карагандинский государственный технический университет, Казахстан  
(E-mail: adilzhakulin@mail.ru)*

## Выбор грунтовой модели для затухающей ползучести и методы их описания

В статье исследованы методы выбора реологических моделей при затухающей ползучести грунтов оснований фундаментов на основе экспериментальных опытов и уравнения для их описания. При этом учитывались вязкие свойства глинистых грунтов территории Казахстана. Приведены примеры для определения коэффициента вязкости и параметров ползучести по результатам экспериментальных данных, свидетельствующие о новизне метода.

*Ключевые слова:* модель, реология, ползучесть, грунты, длительная прочность, теория ползучести, модуль деформации, реологические параметры.

### Введение

Реологические модели могут быть обоснованы и выбраны только по результатам экспериментов при исследовании грунтов на длительную ползучесть. Экспериментальные кривые на длительную прочность хорошо описываются уравнением ползучести для линейной наследственной среды в более общем виде (при  $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ )

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}(1 + \Phi),$$

где  $\Phi$  — функция ползучести. На основании исследований Ж.С. Ержанова [1, 2], заложившего основы теории ползучести в геомеханике, функцию ползучести можно представить в виде

$$\Phi = \frac{\delta t^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

где  $\alpha$  и  $\delta$  — экспериментальные характеристики ползучести грунтов. Испытания грунтов заключаются в том, что образец грунтов получает заданную нагрузку, которая в течение опыта остается постоянной ( $\sigma_0 = \text{const}$ ). Заданному напряжению соответствуют начальные условия  $\sigma_0 = E\epsilon_0$ . Явление ползучести выражается в уменьшении деформации с течением времени при постоянном напряжении. Экспериментальными исследованиями, проведенными авторами, установлено, что развитие деформации грунтов территории Центрального Казахстана ненарушенной структуры, природной влажности и плотности носит вязкоупругопластический характер и обладает затухающей ползучестью скелета. Затухающая ползучесть имеет место в основаниях сооружений лишь при внешних давлениях, не превосходящих определенного значения, соответствующего наступлению стадии пластично-вязкого течения. В процессе затухающей ползучести коэффициент вязкости глинистых грунтов все время возрастает вследствие уплотнения и упрочнения водно-коллоидных оболочек минеральных частиц, закрытия микротрещин и возникновения новых структурных связей. Для грунтов определим коэффициент вязкости и модуль деформации для описания ползучести суглинка. Из уравнения ползучести при  $t \rightarrow \infty$  имеем

$$\epsilon_\infty = \sigma/E.$$

В условиях эксперимента  $\sigma = 0,10$  МПа наблюдается длительная деформация из графика  $\epsilon_\infty = 1,12 \cdot 10^{-2}$ , следовательно,  $E = \frac{0,1}{1,12 \cdot 10^{-2}} = 8,92$  МПа. Из уравнения ползучести определим коэффициент вязкости

$$\eta = -\frac{Et}{\ln(1 - E\epsilon/\sigma)}.$$

По кривой ползучести устанавливаем: при  $t=4$  сут  $\epsilon = 0,7 \cdot 10^{-2}$ ; при  $t=16$  сут  $\epsilon = 1,12 \cdot 10^{-2}$ . Подставив эти значения, а также  $E=8,92$  МПа и  $\sigma=0,1$  МПа в формулу, получим

$$\eta = -\frac{8,92 \cdot 4}{1 - \frac{8,92 \cdot 0,7 \cdot 10^{-2}}{0,1}} = 1629 \text{ МПа} \cdot \text{сут} = 14 * 10^7 \text{ МПа} \cdot \text{с}.$$

Аналогично вычислим коэффициент вязкости для  $t = 16$  сут и получим  $\eta = 1547$  МПа·сут. =  $13,4 \cdot 10^7$  МПа·с. Среднее значение коэффициента вязкости равно  $\eta = 1590$  МПа·сут. =  $13,7 \cdot 10^7$  МПа·с.

При исследовании затухающей ползучести грунтов необходимо различать объемную ползучесть (имеющую место при местном или общем сжатии, например, при компрессии) и ползучесть при сдвиге при постоянно действующих горизонтальных усилиях [3]. Установленная затухающая ползучесть пылевато-глинистых грунтов обуславливает так называемую вторичную (вязкоползучую) консолидацию [4–6]. Вязкоползучая деформация, как указывалось ранее, возникает вследствие деформации ползучести скелета грунта, наиболее применимой для глинистых грунтов. Основные уравнения при решении задач по линейной теории наследственной ползучести – это уравнения состояния скелета грунта. Уравнение напряженно-деформированного состояния грунтов при затухающей ползучести и однократном нагружении будет иметь вид

$$\epsilon(t) = \sigma(t)/E_{\text{мгн.}} + K(t - t_0)\sigma(t)\Delta t_0,$$

где первый член правой части означает мгновенную деформацию в момент  $t$  (при модуле мгновенной деформации  $E_{\text{мгн.}}$ ), второй член характеризует деформации, которые накапливаются во времени и пропорциональны напряжению  $\sigma(t)$ , промежутку времени действия  $\Delta t_0$  и некоторой функции  $K(t - t_0)$ , зависящей от времени, прошедшего с момента  $t_0$  (ядру ползучести). Уравнение при непрерывном нагружении имеет следующий вид:

$$\epsilon(t) = \left( \frac{1}{E_{\text{мгн.}}} \right) \left[ \sigma(t) + \int_0^t K(t - t_0)\sigma(t_0)dt_0 \right],$$

где  $\overline{K(t - t_0)} = K(t - t_0)/\text{мгн.}$  Наиболее оправданным вариантом для пылевато-глинистых грунтов считается экспоненциальное ядро ползучести, имеющее вид

$$\overline{K(t - t_0)} = \delta e^{-\delta_1(t - t_0)},$$

где  $\delta, \delta_1$  – параметры ползучести (коэффициент ядра ползучести  $\delta$  и коэффициент затухания ползучести  $\delta_1$ ), определяемые экспериментальным путем.

При определении параметров ползучести глинистых грунтов по результатам дренированных компрессионных испытаний необходимо обеспечить полное насыщение образцов грунта водой, что будет соответствовать отсутствию пузырьков воздуха в поровой воде (насыщение образцов грунта водой достигается под вакуумом). В стабилизированной конечной для данной ступени нагрузке состояния коэффициента конечной относительной сжимаемости  $m_v^k$  определяются следующей формулой:

$$m_v^k = s_\infty / (p_i h_i),$$

где  $s_\infty$  – стабилизированная осадка грунта при данной ступени нагрузки;  $p_i$  – полное давление для данной ступени нагрузки;  $h_i$  – высота образца грунта;  $k$  – коэффициент относительной сжимаемости в момент приложения нагрузки (коэффициент первичной относительной сжимаемости)  $m'_v$ , определяемый в зависимости от компрессионных и фильтрационных свойств грунта по формуле, вытекающей из выражения

$$m'_v = k_\phi / (\gamma_w c_v),$$

где  $k_\phi, c_v$  – коэффициенты фильтрации и консолидации в начале компрессионного уплотнения (например, при степени консолидации  $U_0=0,2$  или  $U_0=0,3$ ).

Имея показатели  $m_v^k$  и  $m'_v$ , по результатам наблюдения осадки испытываемого образца грунта после спада до нуля порового давления ( $p_w=0$ ) определяем относительные скорости осадки за счет ползучести скелета грунта для различных промежутков времени, а по ним – коэффициент затухания ползучести  $\delta_1$ . Для этого строят кривую зависимости логарифма скорости относительной осадки на единицу давления  $\ln \frac{s}{ph}$ , где  $s = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  от времени  $t$ , когда тангенс угла наклона полученной полулогарифмической прямой к оси  $t$  будет численно равен коэффициенту затухания ползучести  $\delta_1$  (1/мин) (см. рис.):

$$\delta_1 = tg\zeta.$$



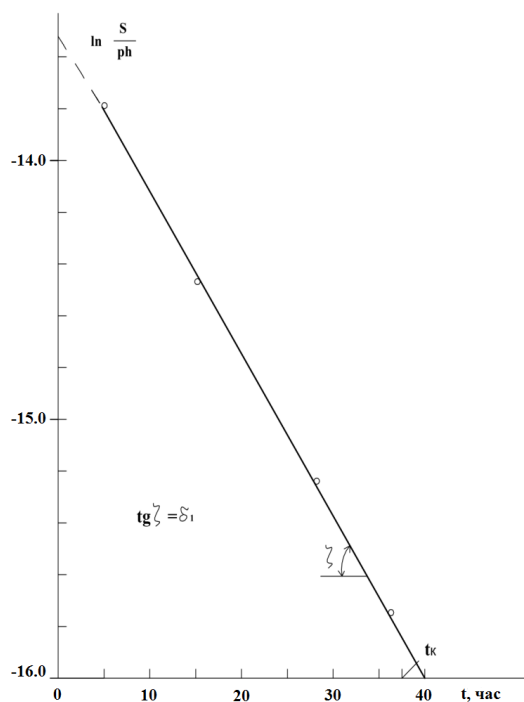


Рисунок. Определение коэффициента затухания ползучести

Зная коэффициент затухания ползучести  $\delta_1$ , коэффициент ядра ползучести  $\delta_1$  можно определить по формуле

$$\delta = \delta_1 m_v'' / m_v',$$

где  $m_v''$  — вторичный коэффициент относительной сжимаемости (за счет ползучести скелета грунта). Исходя из принятой экспоненциальной зависимости, для ядра затухающей ползучести выводим

$$m_v'' = (m_v^k - m_v') / (1 - e^{-\delta_1 t_k}),$$

где  $t_k$  — время практически полной стабилизации осадки (при данной ступени нагрузки).

Приведенные выражения позволяют однозначно определять параметры затухающей ползучести, используемые в расчетах осадков грунтовых оснований. Необходимо также отметить, что для определения параметров ползучести  $\delta$  и  $\delta_1$  по результатам дренированных компрессионных испытаний требуется продолжительные до нескольких дней и достаточно точные измерения осадок испытываемых образцов грунта. Как было показано, время таких наблюдений можно сократить примерно до одного дня, если определение производить по результатам недренированных испытаний (по закрытой системе) образцов не полностью водонасыщенных грунтов с измерением порового давления.

#### Список литературы

- 1 Цытович Н.А. Основы геомеханики в строительстве / Н.А.Цытович, З.Г. Тер-Мартirosян. — М.: Высш. шк., 1981. — 382 с.
- 2 Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов / С.С. Вялов. — М.: Высш. шк., 1978. — 448 с.
- 3 Жакулин А.С. Деформируемость грунтов водонасыщенных оснований / А.С. Жакулин. — Саарбрюкен: LAP, 2015. — 246 с.
- 4 Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике / А.Б. Фадеев. — М.: Высш. шк., 1987. — 221 с.
- 5 Ухов С.Б. Механика грунтов, основания и фундаменты / С.Б. Ухов, В.В. Семенов, В.В. Знаменский, З.Г. Тер-Мартirosян, С.Н. Чернышев. — М.: Высш. шк., 2002. — 566 с.

6 Тер-Мартirosян З.Г. Реологические параметры грунтов и их расчет / З.Г. Тер-Мартirosян. — М.: Высш. шк., 2012. — 321 с.

А.Ә. Жакулина, Ә.С. Жакулин

## Бәсеңдеген жылжу үшін топырақ үлгісін таңдау және оны сипаттау әдістері

Мақалада топырақ көшу негіздерінің серпімділік үлгісі анықталып, есепті шығару мәселесі қарастырылды. Қазақстан аймақтарындағы топырақтарды еске алып, ұзақ мерзімдегі ғимараттардың іргетастарының шөгу мөлшерін анықтауға болады. Келтірілген мысалдар алынған нәтижелердің серпімділік және топырақ жылжуының көрсеткіштерін алуға мүмкіндік береді.

*Кілт сөздер:* үлгі, серпімділік, көшу, топырақ, ұзақ беріктілік, топырақ жылжудың теориясы, өзгеріс модулі, реологиялық көрсеткіштер.

A.A. Zhakulina, A.S. Zhakulin

## The ground foundations model for an attenuation creep and methods of their description

In the article are investigational methods of choice rheological to the model at the attenuation creep of soils of grounds of foundations on the basis of experimental experiments and equalization for their description. Viscid properties of clay soils of territory of Kazakhstan are thus taken into account. Examples are made for determination of coefficient of viscosity and parameters creeps on results experimental data, testifying to the novelty of method.

*Keywords:* model, rheology, creep, soils, long-term strength, thorium creep, modulus of deformation, rheological parameters.

### References

- 1 Tsytoich, N.A., Ter-Martirosian, Z.G. (1981). *Osnovy heomekhaniki v stroitelstve [Bases of applied geomechanics in construction]*. Moscow: Visshaya shkola [in Russian].
- 2 Vyalov, S.S. (1978). *Reolohicheskie osnovy mekhaniki hruntov [Rheological principles of soil mechanics]*. Moscow: Visshaya shkola [in Russian].
- 3 Zhakulin, A.S. (2015). *Deformiruemost hruntov vodonasyshchennykh osnovanii [Deformed saturated soils ground foundation]*. Saarbrücken: LAP [in Russian].
- 4 Fadeev, A.B. (1987). *Metod konechnykh elementov v heomekhanike [The Method of Final Elements in Geomechanics]*. Moscow: Visshaya shkola [in Russian].
- 5 Ukhov, S.B., Semenov, V.V., Znamenskii, V.V., Ter-Martirosian, Z.G., Chernyshev, S.N. (2002). *Mekhanika hruntov, osnovaniia i fundamenti [Soil Mechanics, Foundations]*. Moscow: Visshaya shkola [in Russian].
- 6 Ter-Martirosian, Z.G. (2012). *Reolohicheskie parametry hruntov i ikh raschety [Reologic Parameters of the Grounds and Calculations of the Construction Foundations]*. Moscow: Visshaya shkola [in Russian].

R.K. Tyulyubergenev

*D.Serikbayev East Kazakhstan State Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan  
(E-mail: rustem.tyulyubergenev@gmail.com)*

## On computable subgroups of the group of all unitriangular matrices over a ring

The problems of existence and uniqueness of computable numberings are fundamental in theory of computably numbered groups. In connection with the development of the theory of algorithms a study of the problems of computability of important classes of algebraic systems are currently relevant. Groups of unitriangular matrices over the ring are a classic representative of the class of nilpotent groups and have numerous applications both in group theory and in its applications. In this paper we obtain a criterion of computability of subgroups of the group of all unitriangular matrices  $UT_n(K)$  over a computable associative ring with unity.

*Keywords:* numbering, group of unitriangular matrices, constructive group, nilpotent subgroup, subgroup, rational number, theory of algorithms.

Let  $\omega$  be the set of natural numbers,  $G$  a group, and  $\nu : \omega \rightarrow G$  a mapping from  $\omega$  onto  $G$ , also called a *numbering* of  $G$ . The pair  $(G, \nu)$  is called a *constructive group* if there is an algorithm which, for any triple of natural numbers  $n, m$  and  $s$ , determines whether the equalities  $\nu n = \nu m$  and  $\nu n \cdot \nu m = \nu s$  are true. A group  $G$  is called *computable* (or *constructivizable*) if there exists a numbering  $\nu$  such that the pair  $(G, \nu)$  is a constructive group. A subgroup  $H$  of a numbered group  $(G, \nu)$  is called *computable* (*computably enumerable*) in  $(G, \nu)$  if the set  $\nu^{-1}H$  is computable (computably enumerable). If  $(G, \nu)$  is a constructive group, then  $\nu$  is called a *computable numbering* of the group  $G$ . The problems of existence and uniqueness of computable numberings are fundamental here, i.e., which groups are computable, and, if they are, how many non-equivalent computable numberings do they admit. These problems have been investigated by A.I. Malcev, Yu.L. Ershov, S.S. Goncharov, R. Downey, J. Knight, A.S. Morozov, V.A. Roman'kov, V.P. Dobritsa, N.G. Khisamiev, I.V. Latkin and other authors.

V. Roman'kov and N. Khisamiev proved [1] that the group  $UT_n(K)$  of all unitriangular matrices,  $n \geq 3$ , over a commutative associative ring  $K$  with unity, is computable if and only if  $K$  is computable (where a *computable ring* is defined in the obvious way, following the definition of a computable group). In [2] the same authors constructed a ring  $K$  that is not computable, but the group  $UT_2(K)$  is computable. Let  $\mathbb{Q}$  be the additive group of rational numbers. In [3] A.I. Malcev proved that a subgroup  $G \leq \mathbb{Q}^n$  is computable if and only if  $G$  is a computably enumerable subgroup in  $(\mathbb{Q}^n, \gamma)$ , where  $\gamma$  is a standard numbering of the set of  $n$ -tuples of rational numbers. In [4] it is obtained criteria for computability of torsion-free nilpotent groups of finite dimension and it is proved the existence of a principal computable numbering of the class of all computable torsion-free nilpotent groups of finite dimension. In this article we obtain a criterion of computability of subgroups of the group of all unitriangular matrices  $UT_n(K)$  over a computable associative ring with unity.

Our basic references for models, groups and rings are respectively [5–7], of which we adopt terminology and notations. If in a torsion-free abelian group  $A$  there is a finite maximal linearly independent system of elements, then we say that the *dimension* of the group  $A$  is *finite*. If a nilpotent torsion-free group  $G$  has a central series whose factors are all abelian groups of finite dimensions, then  $G$  is called a group of *finite dimension*.

*Theorem 1.* Let  $(G, \nu)$  be a constructive nilpotent torsion-free group of finite dimension, and let

$$e = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G, \quad (1)$$

be a central series of  $G$ . Then each  $G_i$  is a computable subgroup in  $(G, \nu)$ , for all  $i \leq n$ .

*Proof.* By induction on  $i$ . The claim is obvious for  $i = 0$ . Suppose that the claim holds of  $i$ , and

$$g_{k1}, g_{k2}, \dots, g_{km_k};$$

are elements of  $G$  such that the sequence

$$\bar{g}_{k1}, \bar{g}_{k2}, \dots, \bar{g}_{km_k},$$

is a maximal linearly independent system of elements of the quotient  $\bar{G}_k = G_k/G_{k-1}$ ,  $0 < k \leq n$ . Since (1) is a central series of the group  $G$ , the equivalence

$$g \in G_{i+1} \iff g_{kj} \cdot g = g \cdot g_{kj} \pmod{G_i}, \tag{2}$$

holds, i.e.,  $[g_{kj}, g] \in G_i$ , for all  $0 < k \leq n$ ,  $0 < j \leq m_k$ .

Let  $m_{kj} \in \omega$  be numbers such that  $\nu m_{kj} = g_{kj}$ . Then (2) yields

$$s \in \nu^{-1}G_{i+1} \iff [\nu m_{kj}, \nu s] \in G_i, \quad 0 < k \leq n, \quad 0 < j \leq m_k. \tag{3}$$

Since, by the induction hypothesis, the subgroup  $G_i$  is computable in the constructive group  $(G, \nu)$ , the right-hand side of (3) can be effectively verified. From this, the set  $\nu^{-1}G_{i+1}$  is computable, i.e., the subgroup  $G_{i+1}$  is computable in  $(G, \nu)$ . The theorem is proved.

*Corollary 1.* If  $G$  is a computable nilpotent torsion-free group of finite dimension, then the factors of any central series of  $G$  are computable.

Let  $K$  be a computable associative ring with unity, and  $UT_n(K)$  the group of all unitriangular matrices over  $K$ , of order  $n \geq 2$ . From any computable numbering  $\gamma$  of the ring  $K$  one can determine a numbering  $\gamma_*$  of the group  $UT_n(K)$ , such that from a  $\gamma_*$ -number of a matrix  $A$  one can effectively find  $\gamma$ -numbers of the elements of the matrix  $A$ .

*Theorem 2.* A subgroup  $G$  of the group  $UT_n(K)$  of all unitriangular matrices over a computable associative ring  $K$ , whose additive group is torsion-free and of finite dimension, is computable if and only if  $G$  is a computably enumerable subgroup in  $(UT_n(K), \gamma_*)$ , i.e., the set  $\gamma_*^{-1}G$  is computably enumerable.

*Proof.* Let  $\mu$  be a computable numbering of  $G$  and let

$$e = G_0 < G_1 < \dots < G_m = G,$$

be a central series such that each quotient  $\bar{G}_i = G_i/G_{i-1}$ ,  $0 < i \leq m$ , is an abelian group of finite dimension. By Theorem 1, the set  $\mu^{-1}G_i$  is computable. Let

$$\bar{g}_{i1}, \bar{g}_{i2}, \dots, \bar{g}_{im_i},$$

be a maximal linearly independent system of elements in the quotient  $\bar{G}_i$ . In each class  $\bar{g}_{ij}$ ,  $0 < j \leq m_i$ , we fix a matrix  $A_{ij}$ . Since there are finitely many such matrices, we can assume that  $\gamma$ -numbers of the elements of these matrices are known.

By induction on  $i$ , we prove that the subgroup  $G_i$  is computably enumerable in  $(UT_n(K), \gamma_*)$ , and from any number  $s \in \mu^{-1}G_i$  one can effectively find  $t$  such that  $\mu s = \gamma_* t$ . This is obvious for  $i = 0$ . Assume that for  $i$  it has been proved that  $\gamma_*^{-1}G_i$  is a computably enumerable set of numbers, and there exists a partial computable function  $f_i$ , with domain  $\delta f_i = \mu^{-1}G_i$ , such that  $\mu k = \gamma_* f_i(k)$ , for all  $k \in \mu^{-1}G_i$ .

By definition of the matrices  $A_{i+1j}$ ,  $0 < j \leq m_{i+1}$ , the following holds: For every  $k \in \omega$ , we have that  $\mu k \in G_{i+1}$  if and only if there are integers  $s, t, r_1, r_2, \dots, r_{m_{i+1}}$ , with  $t \in \mu^{-1}G_i$ , such that

$$(\mu k)^s = A_{i+11}^{r_1} \cdot \dots \cdot A_{i+1m_{i+1}}^{r_{m_{i+1}}} \cdot \mu t. \tag{4}$$

Suppose that (4) is true. By induction,  $\mu t = \gamma_* f_i(t)$ . By definition of the numbering  $\gamma_*$  of the group  $UT_n(K)$ , it follows that from the number  $f_i(t)$  we can effectively find  $\gamma$ -numbers of the elements of the matrix  $B = \gamma_* f_i(t)$ . Hence from the numbers  $r_1, r_2, \dots, r_{m_{i+1}}$  we can effectively find  $\gamma$ -numbers of the elements of the matrix

$$C = A_{i+11}^{r_1} \cdot \dots \cdot A_{i+1m_{i+1}}^{r_{m_{i+1}}} \cdot B.$$

Since  $UT_n(K)$  is a nilpotent torsion-free group, roots of elements when they exist are unique, see [6, Theorem 16.2.8]. So, from  $C$  we can effectively determine a unique  $D$ , and  $r$ , such that  $D^s = C$ , and  $\gamma_* r = D$ . From this and (4) it follows that there is an algorithm that lists the  $\gamma_*$ -numbers of matrices of the subgroup  $G_{i+1}$ , and from a number  $k \in \mu^{-1}G_{i+1}$  one can effectively find  $\gamma$ -numbers of the elements of the matrix  $\mu k$ , hence a number  $s$  such that  $\mu k = \gamma_* s$ , therefore completing the proof of the induction step.

Thus,  $G_m = G$  is a computably enumerable subgroup in  $(UT_n(K), \gamma_*)$ , i.e., necessity has been proved.

Sufficiency follows from the fact that a computably enumerable subgroup of a constructive group is computable. This completes the proof of the theorem.

Let  $\nu_1$  and  $\nu_2$  be two computable numberings of the group  $G$ . Then say that  $\nu_1$  is  $m$ -reducible to  $\nu_2$  if there is a computable function  $f$  such that  $\nu_1 n = \nu_2 f(n)$ , for all  $n \in \omega$ . If all computable numberings are  $m$ -reducible to each other, then the group is called *computably stable*.

From the proof of the previous theorem we have:

*Corollary 2.* If  $G$  is a computable subgroup of the group  $UT_n(K)$  over a computable associative ring  $K$  with unity, whose additive group is torsion-free and of finite dimension, then any computable numbering of the group  $G$  is  $m$ -reducible to the numbering  $\gamma_*$  of the group  $UT_n(K)$ .

*Corollary 3.* Any computable subgroup of the group  $UT_n(K)$  over a computable associative ring  $K$  with unity, whose additive group is torsion-free and of finite dimension, is computably stable.

*Corollary 4.* A subgroup  $G$  of the group  $UT_n(P)$  of all unitriangular matrices over a field  $P$  of finite degree and of characteristic 0, is computable if and only if  $G$  is a computably enumerable subgroup in  $(UT_n(P), \gamma_*)$ .

*Corollary 5.* If  $G$  is a computable subgroup of the group  $UT_n(P)$  over a field  $P$  of finite degree and of characteristic 0, then any computable numbering of  $G$  is  $m$ -reducible to the numbering  $\gamma_*$  of the group  $UT_n(P)$ .

In particular, Corollaries 4 and 5 are valid when  $P$  is the field of rational numbers.

Let  $K$  be a computable associative ring with unity, whose additive group is torsion-free and of finite dimension, let  $G$  be a subgroup of the group of unitriangular matrices  $UT_n(K)$ , and let

$$e = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G, \tag{5}$$

be a central series of it. Let us fix some maximal linearly independent system

$$\bar{A}_{i1}, \bar{A}_{i2}, \dots, \bar{A}_{im_i}$$

in the quotient  $\bar{G}_i = G_{i+1}/G_i$ ,  $i < n$ . Let

$$S_i(G) = \{ \langle \alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im_i} \rangle \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{Z}, j \leq m_i, \& \exists \bar{B} \in \bar{G}_i (\bar{B}^{\alpha_{i0}} = \bar{A}_{i1}^{\alpha_{i1}} \cdot \dots \cdot \bar{A}_{im_i}^{\alpha_{im_i}}) \}.$$

Using this notation, we introduce the following

*Definition 1.* We say that a subgroup  $G$  is *pure* in  $UT_n(K)$  with respect to the central series (5), if for every  $i < n$  and sequence  $\langle \alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im_i} \rangle \in S_i(G)$ , and for every element  $c \in G_i$  the following is true: From solvability of the equation  $x^{\alpha_{i0}} = A_{i1}^{\alpha_{i1}} \cdot \dots \cdot A_{im_i}^{\alpha_{im_i}} \cdot c$  in the group  $UT_n(K)$ , it follows solvability of this equation in  $G$ .

Let  $\gamma$  be a computable numbering of the ring  $K$ , and let  $\gamma_*$  be a numbering of  $UT_n(K)$ , defined through  $\gamma$ , so that from any number  $n \in \omega$  we can effectively find  $\gamma$ -numbers of the elements of the matrix  $\gamma_* n$ . Then we have

*Theorem 3.* Let  $G$  be a subgroup  $G \leq UT_n(K)$ , and let (5) be a central series of it, such that the following are true:

- a) all factors of the series (5) are computable;
- b)  $G$  is pure in  $UT_n(K)$  with respect to the series (5).

Then  $G$  is a computably enumerable subgroup in  $(UT_n(K), \gamma_*)$ .

*Proof.* By induction on  $i$ , we prove that the subgroup  $G_i$  is computably enumerable in  $(UT_n(K), \gamma_*)$ . The claim is obvious for  $i = 0$ .

Assume that  $G_i$  is a computably enumerable subgroup in  $(UT_n(K), \gamma_*)$ . Since the dimension of the quotient  $G_{i+1}/G_i$  is finite, then there is a finite sequence of matrices

$$A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{im_i},$$

such that the cosets

$$\bar{A}_{i1}, \bar{A}_{i2}, \dots, \bar{A}_{im_i} \tag{6}$$

form a linearly independent system in the quotient  $\bar{G}_i = G_{i+1}/G_i$ ,  $i < n$ . Since  $\bar{G}_i$  is computable, then the set of all sequences of integers

$$S_i = \{ \langle \alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im_i} \rangle \mid \exists \bar{B} \in \bar{G}_i (\bar{B}^{\alpha_{i0}} = \bar{A}_{i1}^{\alpha_{i1}} \cdot \dots \cdot \bar{A}_{im_i}^{\alpha_{im_i}}), \alpha_{ij} \in \mathbb{Z}, j \leq m_i \}$$

is computably enumerable. We prove that the following equivalence is true:

$$s \in \gamma_*^{-1}G_{i+1} \Leftrightarrow (UT_n(K), \gamma_*) \models \exists \langle \alpha_{i0}, \dots, \alpha_{im_i} \rangle \exists r \in \gamma_*^{-1}G_i;$$

$$(\langle \alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im_i} \rangle \in S_i \ \& \ (\gamma_*s)^{\alpha_{i0}} = A_{i1}^{\alpha_{i1}} \cdot \dots \cdot A_{im_i}^{\alpha_{im_i}} \cdot \gamma_*r). \quad (7)$$

( $\Rightarrow$ .) Let  $s \in \gamma_*^{-1}G_{i+1}$  and  $B = \gamma_*s$ . Since (6) is a maximal linearly independent system of elements of the quotient  $\overline{G}_i$ , then there are a sequence of integers  $\langle \alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im_i} \rangle$  and a matrix  $C \in G_i$  such that

$$B^{\alpha_{i0}} = A_{i1}^{\alpha_{i1}} \cdot \dots \cdot A_{im_i}^{\alpha_{im_i}} \cdot C. \quad (8)$$

Hence, it follows that the right-hand side of (7) is true.

( $\Leftarrow$ .) Assume, now, the right-hand side of (7), and suppose that  $B = \gamma_*s$ ,  $\gamma_*r = C \in G_i$ . Then we have (8). Hence, by purity of the subgroup  $G$  in  $UT_n(K)$  with respect to (5), and uniqueness of roots in  $UT_n(K)$ , we have that  $B \in G$ , and therefore  $B \in G_{i+1}$ , as desired.

We show that by the equation (8) the elements of the matrix  $B$  can be effectively identified. Indeed, from a number  $r$ , we can effectively determine  $\gamma$ -numbers of the elements of the matrix  $\gamma_*r = C$ . Since the number of matrices  $A_{ij}$  is finite, we can assume that  $\gamma$ -numbers of the elements of these matrices are known. From this, we find effectively  $\gamma$ -numbers of the elements of the matrix in the right-hand side of (8). By uniqueness of roots in  $UT_n(K)$ , we can find  $\gamma$ -numbers of the elements of the matrix  $B$  such that (8) holds, and therefore we can find also a  $\gamma_*$ -number of the matrix  $B$ .

From this and (7), by the induction hypothesis we get that  $G_{i+1}$  is a computably enumerable subgroup in the group  $(UT_n(K), \gamma_*)$ . The induction step, and thus the sufficiency of the theorem, has been proved.

*Corollary 6.* Suppose that  $G \leq UT_n(K)$  is pure in  $UT_n(K)$  with respect to the central series (5). Then the group  $G$  is computable if and only if the factors of the series (5) are computable.

*Corollary 7.* If  $G$  is pure in  $UT_n(K)$ , then it is pure with respect to any central series of it.

From this and Corollary 6, it follows.

*Corollary 8.* Let  $G \leq UT_n(K)$  be pure in  $UT_n(K)$ . Then the group  $G$  is computable if and only if all factors of some central series of it are computable.

#### References

- 1 Романьков В.А. О конструктивных матричных и упорядоченных группах / В.А. Романьков, Н.Г. Хисамиев // Алгебра и логика. — 2004. — Т. 43. — № 3. — С. 198–204.
- 2 Романьков В.А. О конструктивизируемых матричных группах / В.А. Романьков, Н.Г. Хисамиев // Алгебра и логика. — 2004. — Т. 43. — № 5. — С. 339–345.
- 3 Мальцев А.И. О рекурсивных абелевых группах / А.И. Мальцев // Доклады АН СССР. — 1962. — Т. 46. — № 5. — С. 1009–1012.
- 4 Нуризинов М.К. Вычислимые нильпотентные группы без кручения конечных размерностей / М.К. Нуризинов, Р.К. Тюлюбергенов, Н.Г. Хисамиев // Сиб. мат. журн. — 2014. — Т. 55. — № 3. — С. 580–591.
- 5 Гончаров С.С. Конструктивные модели / С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов. — Новосибирск: Науч. кн., 1999.
- 6 Каргаполов М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. — Т. 1. — М.: Наука, 1996.
- 7 Б.Л. ван дер Варден. Алгебра / Б.Л. ван дер Варден. — Т. 1. Спрингер. — Нью-Йорк: Спрингер-Верлаг, 1991.

Р.К. Тюлюбергенев

## Сақинадағы барлық униүшбұрышты матрицалар тобының есептелінетін іштоптары туралы

Мақалада негізгі мәселелер ретінде қандай да бір топтар кластары үшін конструктивизацияның бар болуы, жалғыздығы және жалғасы қарастырылды. Алгоритмдер теориясының дамуына байланысты алгебралық жүйелердің маңызды кластарының есептелімділік мәселелерін шешуді зерттеу өзекті мәселелердің біріне айналды. Сақинадағы униүшбұрышты матрицалар тобы нильпотентті топтар кластарының классикалық өкілі болып табылады және көптеген қолданылымдары тек қана топтар теориясында ғана емес, оның қосымшалары үшін де маңызды орын алған. Автор есептелінетін ассоциативті сақинадағы бірлікпен  $UT_n(K)$  барлық униүшбұрышты матрицалар тобындағы есептелімді іштоптардың болу критерийін алған.

*Клт сөздер:* нөмірлеу, униүшбұрышты матрицалар тобы, конструктивті топ, нильпотентті топ, алгоритм теориясы.

Р.К. Тюлюбергенев

## О вычислимых подгруппах группы всех унитарных матриц над кольцом

Основными проблемами статьи являются проблемы существования, единственности и продолжения конструктивизации для тех или иных классов групп. В связи с развитием теории алгоритмов актуальным является исследование проблем вычислимости важных классов алгебраических систем. Группы унитарных матриц над кольцом составляют важный класс нильпотентных групп, имеющий многочисленные применения как в самой теории групп, так и в её приложениях. Автором получен критерий вычислимости подгруппы группы всех унитарных матриц  $UT_n(K)$  над вычислимым ассоциативным кольцом с единицей.

*Ключевые слова:* нумерация, группа унитарных матриц, конструктивная группа, нильпотентная подгруппа, подгруппа, рациональное число, теория алгоритмов.

### References

- 1 Roman'kov, V.A., Khisamiev, N.G. (2004). O konstruktivnykh matrichnykh i uporiadochennykh hruppakh [Constructive matrix and orderable groups]. *Algebra i lohika – Algebra and Logic*, Vol. 43, 3, 198–204 [in Russian].
- 2 Roman'kov, V.A., Khisamiev, N.G. (2004). O konstruktiviziruemykh matrichnykh hruppakh [Constructible matrix groups]. *Algebra i lohika – Algebra and Logic*, Vol. 43, 5, 339–345 [in Russian].
- 3 Malcev, A.I. (1962). O rekursivnykh abelevykh hruppakh [On recursive abelian groups]. *Doklady AN SSSR – Reports AS SSSR*, Vol. 46, 5, 1009–1012 [in Russian].
- 4 Nurizhinov, M.K., Tyulyubergenev, R.K., Khisamiev, N.G. (2014). Vychislime nilpotentnye hruppy bez krucheniiia konechnykh razmernostei [Computable torsion-free nilpotent groups of finite dimension]. *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal – Siberian Mathematical Journal*, Vol. 55, 3, 580–591 [in Russian].
- 5 Goncharov, S.S., Ershov, Yu.L. (1999). *Konstruktivnye modeli [Constructive Models]*. Novosibirsk: Nauchnaya Knihya [in Russian].
- 6 Kargapolov, M.I., Merzljakov, Yu.I. (1996). *Osnovy teorii hrupp [Fundamentals of the Theory of Groups]*. (Vol. 1). Moscow: Nauka [in Russian].
- 7 B.L. van der Waerden (1991). *Algebra [Algebra]*, Vol. 1. Springer. New York: Springer-Verlad [in Russian].

A.A. Konyrkhanova<sup>1</sup>, N.G. Khisamiev<sup>2</sup><sup>1</sup>*D.Serikbayev East Kazakhstan State Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan;*<sup>2</sup>*S.Amansholov East Kazakhstan State University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan  
(E-mail: ErkeshanK@mail.ru)*

## Universal elements of unitriangular matrices groups

The following theorems are proved for a matrix  $g$  from the group of unitriangular matrices over a commutative and associative ring  $K$  of finite dimension of greater than three with unity: 1) if the matrix  $g$  is universal then all of its elements are on the first collateral diagonal except extreme ones are nonzero; 2) if all elements of the first collateral diagonal of the matrix  $g$ , with the possible exception of the last element are reversible in  $K$ , then  $g$  is universal; 3) if the ring  $K$  is Euclidean and has no reversible elements except trivial ones, then it follows from the universality of the matrix  $g$  that all the elements of its first collateral diagonal, except the extreme ones, are reversible in  $K$ .

*Keywords:* unitriangular matrix group, commutator, commutant, universal element, ring, euclidean ring, associative ring.

We denote the group of all upper unitriangular matrices over a commutative associative ring  $K$  with unity by  $UT_n(K)$ . Its commutant  $UT'_n(K)$  consists of all matrices with the first zero collateral diagonal (see [1], for example).

In paper of A. Bier [2], it is proved that every element of commutant  $UT'_n(\mathbb{F})$  is a commutator in the case of a field  $\mathbb{F}$  of characteristic zero, i.e. for each element  $f$  of  $UT'_n(\mathbb{F})$  the equation of the form

$$[x_1, x_2] = f, \quad (1)$$

is always solvable in the group  $UT_n(\mathbb{F})$ , where  $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$  is the commutator of variables  $x_1$  and  $x_2$ .

This result is significantly enhanced in the paper of N.S. Bahta [3], where it is proved that any element  $f \in UT'_n(K)$  can be represented in the form  $[g, x]$ , where  $g$  is a fixed element of the group  $UT_n(K)$ . Any element having the first collateral diagonal consisting of units can be taken as a element  $g$ . In addition, in [4] similar results were obtained for the members of lower central row of the group  $UT_n(K)$  (see also [5]). Paper [6] provides an overview of results on the solvability of equations in groups which mentions the results discussed.

The concept of universal element belongs to V. Roman'kov. In papers of A. Konyrkhanova [7, 8] some necessary and sufficient conditions of an universality of an element of groups  $UT_n(\mathbb{F})$  and  $UT_n(\mathbb{Z})$ , were first obtained, where  $\mathbb{F}$  — is arbitrary field and  $\mathbb{Z}$  — is a ring of integers.

In this paper necessary and sufficient conditions for the element universality for unitriangular matrices group of arbitrary finite dimension over a commutative associative ring with unity and over Euclidean ring are obtained.

The element  $g$  of group  $G$  is called *universal*, if the equation

$$[g, x] = f, \quad (2)$$

is solvable for any element  $f$  from the commutant  $G'$  of group  $G$ .

If  $n = 2$ , then  $G \cong UT_2(K) \cong K^+$ , i.e.  $G$  is Abelian group, therefore  $G' = E$ , where  $E$  is identity matrix. Hence, every element of  $G$  is universal. Therefore, in the further groups  $UT_n(K)$  of dimension  $n \geq 3$  are considered.

*Lemma 1.* If  $\varphi$  is automorphism of the group  $G$ , then the element  $g \in G$  is universal if and only if its image  $\varphi(g)$  is universal.

*Proof.* Necessity. Let  $g$  be universal in  $G$ . Then equation (2) is solvable in  $G$  for any element  $f$  from the commutant  $G'$ . Hence, we obtain

$$[\varphi(g), \varphi(x)] = \varphi(f). \quad (3)$$

Since, the automorphism  $\varphi$  maps the commutant  $G'$  into  $G'$ , then the equality

$$\{\varphi(f) | f \in G'\} = G'$$

holds. From this and (3) it follows that the element  $\varphi(g)$  is universal. The necessity is proved.



*Sufficiency.* Let  $\varphi(g)$  be universal in  $G$ , where  $\varphi$  is automorphism of the group  $G$ . Then the equation

$$[\varphi(g), x] = f \tag{4}$$

is solvable in  $G$  for all  $f \in G'$ . Since  $\varphi^{-1}$  is also the automorphism of the group  $G'$ , then we have from (4):

$$[\varphi^{-1}(\varphi(g)), \varphi^{-1}(x)] = \varphi^{-1}(f);$$

i.e.

$$[g, \varphi^{-1}(x)] = \varphi^{-1}(f).$$

From this and in virtue of the equality  $\{\varphi^{-1}(f) | f \in G'\} = G'$  we obtain that  $g$  is universal in  $G$ . The lemma is proved.

Let  $K$  be an associative commutative ring with unity. We introduce the following matrices from  $UT_n(K)$ :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} & \dots & g_{1,n-1} & g_{1n} \\ 0 & 1 & g_{23} & \dots & g_{2,n-1} & g_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & g_{3,n-1} & g_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & g_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, g^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & g_{13}^* & \dots & g_{1,n-1}^* & g_{1n}^* \\ 0 & 1 & 1 & \dots & g_{2,n-1}^* & g_{2n}^* \\ 0 & 0 & 1 & \dots & g_{3,n-1}^* & g_{3n}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

where  $\varepsilon = 1$ , if  $g_{n-1,n} \neq 0$ , and  $\varepsilon = 0$ , otherwise, and the elements  $g_{i,i+1} \neq 0$  for  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ , and all elements of the first collateral diagonal are equal to 1 in  $g^*$  with the possible exception of  $\varepsilon$ .

We denote by  $diag_i a$  (where  $i = 1, 2, \dots, n$ ) a diagonal matrix of the group of all triangular matrices  $T_n(K)$ , in which elements on the  $i$ -th place of the main diagonal equal  $a \in K \setminus 0$ , and the other elements of the main diagonal are units.

*Theorem 1.* Let matrix  $g$  of the group of all unitriangular matrices  $UT_n(K)$  over a commutative associative ring  $K$  with unity such that all of its elements are on the first collateral diagonal with the possible exception of the last element are reversible in  $K$ . Then there exists a matrix  $g^*$  from  $UT_n(K)$  of the form (5) conjugate with  $g$  in the group  $T_n(K)$ , and such that the following statement is true: matrix  $g$  is universal if and only if  $g^*$  is universal.

*Proof.* Let  $g \in UT_n(K)$  is defined as in (5), and elements  $g_{12}, g_{23}, \dots, g_{n-2,n-1}$  are reversible in ring  $K$ . Let us take a diagonal matrix  $a_1 = diag_2 g_{12}^{-1}$ . Then direct calculations yield the following equation:

$$a_1^{-1} g a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & g_{13} & g_{14} & \dots & g_{1,n-1} & g_{1n} \\ 0 & 1 & g_{12}g_{23} & g_{12}g_{24} & \dots & g_{12}g_{2,n-1} & g_{12}g_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & g_{34} & \dots & g_{3,n-1} & g_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & g_{4,n-1} & g_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & g_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightleftharpoons g_1. \tag{6}$$

Let  $a_2 = diag_3 g_{23}^{-1} g_{12}^{-1}$ . Then we have from (6):

$$a_2^{-1} g_1 a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & g_{12}g_{23}g_{34} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \rightleftharpoons g_2,$$

where  $*$  represents some elements of the ring  $K$ . Thus, conjugating the matrix  $g$  with appropriate product of matrices of the form  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , we obtain a matrix of the form  $g^*$  from (5).

Matrices  $a_{i-1}$  are triangular, i.e.  $a_{i-1} \in T_n(K)$ . Conjugates of elements  $g \in UT_n(K)$  by the product of matrices  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{i-1}$  in  $T_n(K)$  are automorphisms of the group  $UT_n(K)$ . From this and Lemma 1 follows that the matrix  $g$  is universal if and only if  $g^*$  is universal. The theorem is proved.

*Theorem 2.* The matrix  $g \in UT_3(K)$ , where  $K$  is a commutative associative ring with a unity, is universal if and only if  $g_{12}$  and  $g_{23}$  are coprime.

*Proof.* Necessity. Let  $g$  be universal. Then the equation (2) has a solution for any element  $f \in UT'_n(K)$ . Direct calculations yield the following equation

$$[g, x] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & g_{12}x_{23} - x_{12}g_{23} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Since  $g$  is a universal element, the commutator  $[g, x]_{13}$  must take any value. Hence the equation (2) is solvable, and therefore  $g_{12}$  and  $g_{23}$  are coprime.

*Sufficiency.* Let elements  $g_{12}$  and  $g_{23}$  of the matrix  $g$  are coprime. Let us prove that the equation (2) is solvable in  $UT_3(K)$ , i.e. for any  $f \in UT'_3(K)$  the equation

$$g_{12}x_{23} - x_{12}g_{23} = f_{13} \quad (7)$$

is solvable.

Since  $g_{12}$  and  $g_{23}$  are coprime, then there exist elements  $u, v \in K$ , such that

$$g_{12}u + g_{23}v = 1.$$

It follows that the values  $x_{23} = f_{13}u$  and  $x_{12} = -f_{13}v$  are the solution of the equation (7). Hence,  $g$  is a universal element of the group  $UT_3(K)$ .

The theorem is proved.

*Corollary 1.* There exists an algorithm which determines its universality by any matrix  $g \in UT_3(\mathbb{Z})$ .

Hereinafter we assume that  $n > 3$ .

*Theorem 3* (a necessary condition for the universality). Let  $K$  be associative commutative ring with a unity. Then from universality of the element  $g \in UT_n(K)$ ,  $n > 3$  follows that

$$g_{i-1,i} \neq 0, 2 < i < n.$$

*Proof.* Let the matrix  $g$  be universal in  $UT_n(K)$ . Then for any matrix  $f \in UT'_n(K)$  the following system of equations has a solution in  $UT_n(K)$ :

$$\begin{cases} f_{13} = g_{12}x_{23} - x_{12}g_{23}; \\ f_{24} = g_{23}x_{34} - x_{23}g_{34}; \\ f_{35} = g_{34}x_{45} - x_{34}g_{45}; \\ \dots \\ f_{n-2,n} = g_{n-2,n-1}x_{n-1,n} - x_{n-2,n-1}g_{n-1,n}. \end{cases} \quad (8)$$

Assume the contrary, i.e.  $g_{i-1,i} = 0$  for some  $i \in \{3, 4, \dots, n-1\}$ . Then we have from (8):

$$\begin{cases} f_{i-2,i} = x_{i-1,i}g_{i-2,i-1}; \\ f_{i-1,i+1} = -x_{i-1,i}g_{i,i+1}. \end{cases} \quad (9)$$

Let us prove that in this case  $g_{i-2,i-1} \neq 0$ . Indeed, otherwise, it follows from the first equation of the system (9) that for any matrix  $f \in UT'_n(K)$  the equality  $f_{i-2,i} = 0$  is true. Since there exist an element  $f$  in  $UT'_n(K)$  such that  $f_{i-2,i} \neq 0$ , it implies a contradiction. Similarly  $g_{i,i+1} \neq 0$ . Thus,

$$g_{i-2,i-1} \neq 0, g_{i,i+1} \neq 0.$$

From this and (9) follows that for any matrix  $f$  the following statement holds:

$$\text{if } f_{i-2,i} \neq 0, \text{ then } f_{i-1,i+1} \neq 0. \quad (10)$$

Since,  $f$  is any matrix in  $UT'_n(K)$ , there exists, for example, a matrix:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in UT'_n(K),$$

for which the condition (10) is false. This is a contradiction. Consequently,  $g_{i-1,i} \neq 0$ . The theorem is proved.

*Theorem 4* (a sufficient condition for the universality). Let  $K$  be an associative commutative ring with a unity 1. If all the elements of the first collateral diagonal of the matrix  $g \in UT_n(K)$ ,  $n \geq 3$ , with the possible exception of the last element are reversible in  $K$ , then  $g$  is universal.

*Proof.* By Theorem 1, we can assume that all the elements of the first collateral diagonal matrix  $g$ , except perhaps the last one, are equal to 1. To prove the theorem, we need to solve the equation (2) for any matrix  $f$  from the commutant  $UT'_n(K)$ . It follows that the first collateral diagonal of the matrix  $x$  is defined by the following system of equations:

$$\begin{cases} f_{13} = x_{23} - x_{12}; \\ f_{24} = x_{34} - x_{23}; \\ \dots \\ f_{n-3,n-1} = x_{n-2,n-1} - x_{n-3,n-2}; \\ f_{n-2,n} = x_{n-1,n} - x_{n-2,n-1} \cdot g_{n-1,n}, \end{cases} \tag{11}$$

If we assume that  $x_{12} = 0$ , we find  $x_{23}$ , from the first equation and we find  $x_{34}$ , from the second equation, etc. Thus, the values of the first collateral diagonal of the matrix  $x$  are defined.

The second collateral diagonal of the matrix  $x$  is defined by the system of equations:

$$\begin{cases} f_{14} = x_{24} - x_{13} + b_{14}; \\ f_{25} = x_{35} - x_{24} + b_{25}; \\ f_{36} = x_{46} - x_{35} + b_{36}; \\ \dots \\ f_{n-3,n} = x_{n-2,n} - x_{n-3,n-1} \cdot g_{n-1,n} + b_{n-3,n}, \end{cases}$$

where  $b_{i,i+3}$  are some constants. Assuming that  $x_{13} = 0$ , one can determine the values of  $x_{i,i+2}$ ,  $i = 2, 3, \dots, n-2$ , similar to the determination of the values  $x_{i,i+1}$  of a system (11). Continuing similarly, we find a solution of equation (2). The theorem is proved.

Similarly we can prove the following theorem

*Theorem 5* (a sufficient condition for the universality). Let  $K$  be an associative commutative ring with a unity 1. If all the elements of the first collateral diagonal of the matrix  $g \in UT_n(K)$ ,  $n \geq 3$ , with the possible exception of the first element are reversible in  $K$ , then  $g$  is universal.

*Corollary 2.* If all the elements of the first collateral diagonal of the matrix  $g \in UT_n(\mathbb{Z})$ ,  $n \geq 3$ , with the possible exception of the first or last element are equal to 1 or  $-1$ , then  $g$  is universal.

*Lemma 2.* Assume that there are no reversible elements in a Euclidean ring  $E$  except 1 and  $-1$ . Then for any non-zero elements  $g_1, g_2$  in  $E$  the following equivalence holds:

elements  $g_1, g_2$  do not have a common divisor except 1 if and only if there exist  $u_1, u_2 \in E$  such that:

$$g_1 u_1 + g_2 u_2 = 1. \tag{12}$$

*Proof.* Assume that  $g_1, g_2$  do not have common divisors except 1. Then the greatest common divisor is  $(g_1, g_2) = 1$ . Hence, by the Euclidean algorithm, there exist  $u_1, u_2 \in E$  such that (12) holds.

Let (12) be true. Assume the contrary, i.e.

$$g_\varepsilon = d \cdot v_\varepsilon, d \neq 1,$$

where  $\varepsilon = 1, 2$ . Then we have from (12) that

$$d(u_1 v_1 + u_2 v_2) = 1.$$

Hence  $d$  is reversible and  $d \neq 1$ . This is a contradiction. The lemma is proved.

*Theorem 6* (a necessity condition for the universality). Let  $E$  be an Euclidean ring having no reversible elements except 1 and  $-1$ . Then, it follows from the universality of the matrix  $g \in UT_n(E)$ ,  $n > 3$  that all the elements of its first collateral diagonal are equal to  $\pm 1$ , with the possible exception of extreme ones, i.e.

$$|g_{i-1,i}| = 1, 2 < i < n. \tag{13}$$

*Proof.* Let  $g$  be universal in  $G \Leftarrow UT_n(E)$ . Then for any matrix  $f \in UT_n(E)$  the equation (2) is solvable in  $G$ . Hence, the elements of the first collateral diagonal of the matrix  $x$  are the solution of the system (8). Let us

first establish that all the elements  $g_{i-1,i}, 2 < i < n$ , are non-zero. Assume the contrary, i.e.  $g_{i-1,i} = 0$  for some  $i$ . Then the two successive equations of the system (8) containing  $g_{i-1,i}$  are as follows:

$$\begin{cases} f_{i-2,i} = -x_{i-1,i}g_{i-2,i-1}; \\ f_{i-1,i+1} = x_{i-1,i}g_{i,i+1}. \end{cases}$$

Since the left-hand sides of these equations can take any values, for example, a value of 1, then

$$g_{i-2,i-1} \neq 0, g_{i,i+1} \neq 0$$

for any  $2 < i < n$ . Assuming  $f_{i-3,i-1} = 1$  in (8), we obtain

$$x_{i-2,i-1}g_{i-3,i-2} - x_{i-3,i-2}g_{i-2,i-1} = 1, \quad (14)$$

where  $3 < i < n$ . Since the ring  $E$  is Euclidean, then it follows from (14) that  $g_{i-2,i-1}$  and  $g_{i-3,i-2}$  are coprime when  $3 < i < n$ . Let us prove the validity of (13). Two consecutive equations of the system (8) of the form:

$$\begin{cases} x_{i-1,i}g_{i-2,i-1} - x_{i-2,i-1}g_{i-1,i} = f_{i-2,i}; \\ x_{i,i+1}g_{i-1,i} - x_{i-1,i}g_{i,i+1} = f_{i-1,i+1}, \end{cases} \quad (15)$$

$2 < i < n$ , have solutions for any values of  $f_{i-1,i+1}$ . Let  $f_{i-1,i+1} = 0$ . Then we have from (15):

$$x_{i-1,i} \cdot g_{i,i+1} = x_{i,i+1} \cdot g_{i-1,i}. \quad (16)$$

Since  $g_{i,i+1}$  and  $g_{i-1,i}$  are coprime when  $2 < i < n$ , then by lemma 2, they have no common divisors. From this and (16) follows that  $x_{i,i+1}$  is divided by  $g_{i,i+1}$ , i.e.

$$x_{i,i+1} = d \cdot g_{i,i+1}.$$

Similarly we have

$$x_{i-1,i} = d \cdot g_{i-1,i}.$$

We obtain from this and from the first equation of the system (15) that

$$g_{i-1,i}(d \cdot g_{i-2,i-1} - x_{i-2,i-1}) = f_{i-2,i}. \quad (17)$$

If we assume that  $f_{i-2,i} = 1$ , then it follows from (17) that the element  $g_{i-1,i}$  is reversible. Then we have  $|g_{i-1,i}| = 1$  by assumption of the theorem.

*Corollary 3.* Let  $R$  be a ring of integers or a ring of polynomials  $\mathbb{Z}[x]$  over a ring of integers  $\mathbb{Z}$ . Then, from the universality of the matrix  $g$  of  $UT_n(R)$  follows that all the elements of its first collateral diagonal except possible extreme ones, are equal to 1 or  $-1$ .

It is known that if  $E$  is an Euclidean ring, where there are no reversible elements except 1 and  $-1$ , then the ring of polynomials  $E(x)$  is the same Euclidean ring.

*Corollary 4.* Let  $E$  be an Euclidean ring, where there are no reversible elements except 1 and  $-1$ . Then from the universality of matrices  $g$  in  $UT_n(E(x))$  over the ring of polynomials of one variable follows that all the elements of the first collateral are equal to 1 or  $-1$  except possible extreme ones.

The authors express their sincere gratitude to V.A. Roman'kov for the proposed topics and valuable comments, having improved our article.

#### References

- 1 Каргаполов М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. — М.: Наука, 1982. — 288 с.
- 2 Bier A. The width of verbal subgroups in the group of unitriangular matrices over a field / A. Bier // Int. Journal Alg. Comput. — 2012. — Vol. 22. — No. 3. — P. 21–41.
- 3 Бахта Н.С. О представимости коммутанта группы  $UT(n, K)$  множеством значений функции одной переменной / Н.С. Бахта // Вестн. Омского ун-та. — 2012. — № 2. — С. 44–46.

- 4 Бахта Н.С. О представимости членов нижнего центрального ряда группы  $UT(n, K)$  множеством значений функции одной переменной / Н.С. Бахта // Вестн. Омского ун-та. — 2013. — № 4. — С. 13–15.
- 5 Меньшов А.В. О  $p$ -разрешимости некоторых регулярных уравнений над  $p$ -группой Гейзенберга / А.В. Меньшов, В.А. Романьков // Вестн. Омского ун-та. — 2014. — № 3. — С. 11–14.
- 6 Roman'kov V. Equations over groups / V. Roman'kov // Groups Complexity Cryptology. — 2012. — Vol. 4. — No. 2. — P. 191–240.
- 7 Конырханова А.А. Универсальные элементы групп унитарных матриц над полем / А.А. Конырханова // Вестн. Омского ун-та. — 2015. — № 4(78). — С. 18–20.
- 8 Конырханова А.А. Универсальные элементы групп унитарных матриц над кольцом целых чисел / А.А. Конырханова // Вестн. Омского ун-та. — 2016. — № 2. — С. 11–13.

Ә.Ә. Қоңырханова, Н.Г. Хисамиев

## Униүшбұрышты матрицалар топтарының әмбебап элементтері

Элементтері бірлік коммутативті және ассоциативті  $K$  сақинадан алынған ақырлы өлшемі үштен артық униүшбұрышты матрицалар тобының  $g$  матрицасы үшін келесі теоремалар дәлелденген: 1) егер  $g$  матрицасы әмбебап болса, онда оның бірінші қосалқы диагоналінің шеткі элементтерінен басқалары нөлден өзгеше; 2) егер  $g$  матрицасының бірінші қосалқы диагоналінің соңғы элементінен басқасы  $K$ -да қайтымды болса, онда  $g$  әмбебап; 3) егер  $K$  сақинасы евклидтік болса және оның тривиалды элементтерден басқа қайтымды элементтері болмаса, онда  $g$  матрицасының әмбебаптығынан оның бірінші қосалқы диагоналінің шеткі элементтерден басқа барлық элементтері  $K$ -да қайтымды болатыны шығады.

*Кілт сөздер:* униүшбұрышты матрицалар тобы, коммутатор, коммутант, әмбебап элемент, сақина, евклидтік сақина.

А.А.Конырханова, Н.Г.Хисамиев

## Универсальные элементы групп унитарных матриц

Для матрицы  $g$  из группы унитарных матриц данной конечной размерности, больше трех, над коммутативным и ассоциативным кольцом  $K$  с единицей доказаны следующие теоремы: 1) если матрица  $g$  универсальна, то все её элементы первой побочной диагонали, кроме крайних, отличны от нуля; 2) если все элементы первой побочной диагонали матрицы  $g$ , кроме, возможно, последнего, обратимы в  $K$ , то  $g$  универсальна; 3) если кольцо  $K$  евклидово и не имеет обратимых элементов, кроме тривиальных, то из универсальности матрицы  $g$  следует, что все элементы её первой побочной диагонали, кроме крайних, обратимы в  $K$ .

*Ключевые слова:* группа унитарных матриц, коммутатор, коммутант, универсальный элемент, кольцо, евклидово кольцо, ассоциативное кольцо.

### References

- 1 Kargaplov, M.I., Merzlyakov, Yu.I. (1982). *Osnovy teorii hrupp [Foundations of groups theory]*. Moscow: Nauka [in Russian].
- 2 Bier, A. (2012). The width of verbal subgroups in the group of unitriangular matrices over a field. *Int. Journal Alg. Comput.*, Vol. 22, 3, 21–41.
- 3 Bahta, N.S. (2012). O predstavimosti kommutanta hruppy  $UT(n, K)$  mnozhestvom znachenii funksii odnoi peremennoi [On the representability of the commutator of group  $UT(n, K)$  by the set of values of one variable]. *Vestnik Omskoho universiteta – Bulletin of the Omsk University*, 2, 44–46 [in Russian].

- 4 Bahta, N.S. (2013). O predstavimosti chlenov nizhneho tsentralnogo riada hruppy  $UT(n, K)$  mnozhestvom znachenii funktsii odnoi peremennoi [On representability of members of the low central series of the group  $UT(n, K)$  by values of one-variable function]. *Vestnik Omskoho universiteta – Bulletin of the Omsk University*, 4, 13–15 [in Russian].
- 5 Men'shov, A.V., Roman'kov, V.A. (2014). O  $p$ -razreshimosti nekotorykh rehuliarnykh uravnenii nad  $p$ -hruppoi Heizenberha [On  $p$ -solvability of some regular equations over a Heisenberg  $p$ -group]. *Vestnik Omskoho universiteta – Bulletin of the Omsk University*, 3, 11–14 [in Russian].
- 6 Roman'kov, V. (2012). Equations over groups. *Groups Complexity Cryptology*, Vol. 4, 2, 191–240 [in Russian].
- 7 Konyrkhanova, A.A. (2015). Universalnye elementy hrupp unitreuholnykh matritys nad polem [Universal elements of the groups of unitriangular matrices over a field]. *Vestnik Omskoho universiteta – Bulletin of the Omsk University*, 4(78), 18–20 [in Russian].
- 8 Konyrkhanova, A.A. (2016). Universalnye elementy hrupp unitreuholnykh matritys nad koltsom tselykh chisel [Universal elements of unitriangular matrices groups over ring of integers]. *Vestnik Omskoho universiteta – Bulletin of the Omsk University*, 2, 11–13 [in Russian].

T.Kh. Makazhanova, A.S. Bazylzhanova, O.I. Ulbrikht

Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan  
(E-mail: aiger111086@mail.ru)

## The structure of normal subsets of polyhedral cone

The structure of normal convex subsets of polyhedral cone  $K$  in normalized space is investigated. The normality of the subset  $\Omega \subset K$  (in the sense of the cone  $K$ ) is determined by the condition  $\overline{\Omega} - \overline{K} \cap K = \Omega$  (a line over a set means taking a topological closure). The conical shell of finite number of rays mean the polyhedrons of the cone, which are extreme rays. The structure of normal sets were studied from the geometric point of view. It is shown that every normal subset  $\Omega$  of a polyhedral cone can be divided into a sum of two subsets, one of which is a bounded normal subset (in the sense of some subcone in  $K$ ) and the second – the subcone  $K$  contained in the set  $\Omega$  (it is unbounded, if  $\Omega$  is unbounded).

*Keywords:* cone, ray, normal, conical shell, polyhedral cone, forming rays, closed set, normal subset of cone, null cone.

Let  $(X, \|\cdot\|)$  is the real normalized space.

For the subset of  $G \subset X$  introduce the notation:  $G^\circ$  – interior of  $G$ ,  $\bar{G}$  – closure of  $G$ ,  $frG$  – frontier of  $G$ . Everywhere  $\emptyset$  – empty set.

All the operation will be entered in the space  $X$ :

$$G_1 + G_2 = \{x = x_1 + x_2, x_1 \in G_1, x_2 \in G_2\}; \quad G_1, G_2 \subset X;$$

$$\alpha G = \{x = \alpha x, x \in G\}, \quad G \subset X, \quad \alpha - \text{real.}$$

The subset  $G \subset X$  is called convex, if  $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in G$  for any  $x_1, x_2 \in G$  и  $0 \leq \alpha \leq 1$ . The subset  $K \subset X$  is called cone (convex), if the task is done:

$$\alpha x \in K \quad \forall x \in K, \quad \alpha \geq 0;$$

$$x_1 + x_2 \in K \quad \forall x_1, x_2 \in K.$$

It is obvious, that any cone  $0$  has own point  $x$  and outgoing ray  $L = \{\alpha x, \alpha \geq 0\}$  from  $0$ . The cone  $K$  is called bodily, if  $K^\circ \neq \emptyset$ ; salient, if  $K \cap (-K) = \{0\}$ . The conical shell  $coG$  of set  $G \subset X$  is called set of elements

$$coG = \left\{x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad n - \text{any natural}; \quad x_i \in G \quad \text{и} \quad \alpha_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n\right\}.$$

It is obvious that the conical shell is cone. We say it will pull on the set  $G$ .

If  $G = \emptyset$ , then we consider that  $K = coG = \{0\}$ .

The cone  $K$  ([1]) is called polyhedral, if it is cone shell of finite number of outgoing rays from  $0$ . According to the [2] we can see, that every polyhedral cone is closure and bodily in its linear shell. The ray  $L$  of cone  $K$  is called extreme ray of cone, if from equality  $x = x_1 + x_2$ , where  $x \in L$ ,  $x_1, x_2 \in K$ , follows, that  $x_1, x_2 \in L$ . According to the [1] we can see, that the minimal (by inclusion) set of rays, it's conical shell is cone  $K$ , forming the extreme rays.

The extreme rays of cone we will call forming rays. If  $\{L_i\}_{i \in I}$  is forming rays of polyhedral cone  $K$ ,  $\{e_i\}_{i \in I}$  is units (i.e.  $\|e_i\| = 1$ ) directional vectors of this rays ( $I$  – finite set of indices), then

$$K = \left\{x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i, \quad \alpha_i \geq 0 \quad \forall i \in I\right\}.$$

Let  $K$  is polyhedral cone,  $\{L_i\}_{i \in I}$  is forming rays of cone  $K$ . A sub subcone  $K_1$  of cone  $K$ , we will be understand that any polyhedral cone, which is formed by rays  $\{L_i\}_{i \in I_1 \subset I}$ . If  $I_1 = \emptyset$ , then the subcone, which

determined by set of indices  $I_1$ , suppose equal to  $\{0\}$ . If we speak about o cone in this work we will view a polyhedral cones. Let  $K$  is cone,  $\{L_i\}_{i \in I}$  is its forming rays. For set  $\Omega \subset K$  we think that

$$\beta_i = \sup\{\beta \geq 0 : \beta e_i \in \Omega\}, \quad i \in I.$$

If  $\Omega \cap L_i = \emptyset$ , then we think that  $\beta_i = 0$ . We say that the set  $\Omega \subset K$  has a (0)-property with respect to subcone spread on rays  $\{L_i\}_{i \in I_1 \subset I}$ , if  $0 < \beta_i < \infty$ . The set  $\Omega \subset K$ ,  $\Omega$  is called normal (that means cone  $K$ ) set, if  $\Omega$  is convex and rightly the equal  $\overline{\Omega - K} \cap K = \Omega$ .

*Note 1.* Directly from the definition following, that any normal subset be closure.

*Note 2.* If  $\Omega$  is normal subset of cone,  $x \in \Omega$ , the segment will

$$[0, x] = \{\alpha x : 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset \Omega.$$

Its objectively that  $x \in \Omega \subset K$ , wherefrom  $\alpha x \in K$ . In other case,  $\alpha x = x - (1 - \alpha)x$ , where  $x \in \Omega$ ,  $(1 - \alpha)x \in K$ , i.e.  $\alpha x \in \Omega - K$ , according this

$$\alpha x \in (\Omega - K) \cap K \subset \overline{\Omega - K} \cap K = \Omega.$$

Consider the question about structure of normal subsets of polyhedral cone.

*Rightly Proposition.* Let  $\Omega$  is normal (not be cone) subset of cone  $K \Rightarrow \Omega = G + K_1$ , where  $K_1$  is greatest by inclusion contained in  $\Omega$  подконус  $K$ ;  $G = \Omega \cap K_2$  (where  $K_2$  is subset in  $K$ ) and  $G$  is finite normal set and it has a (0)-property with respect to cone  $K_2$ .

*Proof of proposition.* Let  $K$  is polyhedral cone,  $\{L_i\}_{i \in I}$  is set its forming rays.

1. We will consider the case of finite set  $\Omega$ , i.e.  $\exists C > 0 : \|x\| \leq C \quad \forall x \in \Omega$ .

If  $\Omega = \{0\}$ , then  $\Omega$  is null cone, this case in proposition excluded.

Let  $\Omega \neq \{0\}$ , then  $\forall x \in \Omega (x \neq 0)$  we have

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \quad \text{end} \quad \exists \alpha_{i_0} > 0 \quad \text{other wise} \quad x = 0.$$

Rightly the note  $\alpha_{i_0} e_{i_0} = x - \sum_{i \neq i_0} \alpha_i e_i$ , where from

$$\alpha_{i_0} e_{i_0} \in (x - K) \cap K \subset (\Omega - K) \cap K \subset \overline{\Omega - K} \cap K = \Omega$$

by the normality  $\Omega$  with respect to  $K$ .

As  $\alpha_{i_0} e_{i_0} \in \Omega$ , a  $\beta_{i_0} = \sup\{\beta \geq 0 : \beta e_{i_0} \in \Omega\}$ , to  $\beta_{i_0} \geq \alpha_{i_0} > 0$  and that's the

$$I_2 = \{i \in I : \beta_i > 0\} \neq \emptyset.$$

Let  $K_2$  is cone with forming rays  $\{L_i\}_{i \in I_2}$ . Following from definition, that  $\Omega$  has a (0)-property with respect to cone  $K_2$ . We will show, that  $\Omega \subset K_2$ . If suppose, that  $\Omega \not\subset K_2$ , to  $\exists x \in \Omega : x \notin K_2$ . From inclusion  $x \in \Omega \subset K$  we have

$$x = \sum_{i \in I_2} \alpha_i e_i + \sum_{i \in I \setminus I_2} \alpha_i e_i.$$

Since  $x \notin K_2$ , then  $\exists i_0 \in I \setminus I_2 : \alpha_{i_0} > 0$ , then

$$\alpha_{i_0} e_{i_0} = x - \sum_{i \neq i_0} \alpha_i e_i \in (x - K) \cap K \subset \overline{\Omega - K} \cap K = \Omega,$$

because  $\beta_{i_0} \geq \alpha_{i_0} > 0$ , where from  $i_0 \in I_2$ , that this is contrary to inclusion  $i_0 \in I \setminus I_2$ , according this  $\Omega \subset K_2$  and  $G = \Omega \cap K_2 = \Omega$ .

Since  $\Omega$  is finite set, we get that

$$\beta_i = \sup\{\beta \geq 0 : \beta e_i \in \Omega\} \leq c < \infty.$$

According this  $0 < \beta_i < \infty$  for  $\forall i \in I_2$ , where from following, that  $G = \Omega$  has a (0)-property, with respect to cone  $K_2$ .



We have the inclusion  $G \subset \overline{G - K_2} \cap K_2$  from ratio  $G = \Omega \subset K_2$ . Check the inverse inclusion. From condition of normality  $\Omega$  with respect to cone  $K$ , i.e. the equal  $\overline{\Omega - K} \cap K = \Omega$  and the inclusion  $K_2 \subset K$ , we have:

$$\overline{G - K_2} \cap K_2 = \overline{\Omega - K_2} \cap K_2 \subset \overline{\Omega - K} \cap K = \Omega = G.$$

As contained in  $\Omega$  the cone we take  $K_1 = \{0\}$ .

2. Now let the set  $\Omega$  is indefinite. We show, that  $\Omega$  contains a subcone.

By definition  $\beta_i = \sup\{\beta \geq 0 : \beta e_i \in \Omega\}$ ,  $\forall i \in I$ , so  $\exists i \in I : \beta_i = \infty$ .

Really, if it is not, i.e.  $\beta_i < \infty$ ,  $\forall i \in I$ , then

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \quad \text{and} \quad \|x\| \leq \sum_{i \in I} \alpha_i \leq \sum_{i \in I} \beta_i, \quad \text{где} \quad \sum_{i \in I} \beta_i = \beta < \infty,$$

i.e.  $\|x\| \leq \beta \quad \forall x \in \Omega$ , where we get a contradiction of indefinite of set  $\Omega$ .

Let  $I_1 = \{i \in I : \beta_i = \infty\}$ , we showed, that  $I_1 \neq \emptyset$  and let  $K_1$  is subcone with forming rays  $\{L_i\}_{i \in I_1}$ . We will show, that  $K_1 \subset \Omega$ .

This follows from the fact, that  $\beta_i = \sup\{\beta \geq 0 : \beta e_i \in \Omega\} = \infty$  for  $\forall i \in I_1$ , i.e. if  $i \in I_1$  и  $x = \alpha e_i \in L_i$ , that  $\exists \beta > \alpha : \beta e_i \in \Omega$ , we have a ratio from note 2:  $[0, \beta e_i] \subset \Omega$ .

By condition  $0 \leq \alpha < \beta$ , so  $\alpha x \in [0, \beta e_i] \subset \Omega \quad \forall \alpha \geq 0$ , where from the ray  $L_i = \{\alpha e_i, \alpha \geq 0\} \subset \Omega$ . As  $\{L_i\}_{i \in I_1} \subset \Omega$  и  $\Omega$  is convex, that it has cone  $K_1$ , which is formed by the rays  $\{L_i\}_{i \in I_1}$ .

Let  $I_2 = \{i \in I_1 : 0 < \beta_i < \infty\}$ ,  $I_3 = \{i \in I : \beta_i = 0\}$ , then  $\forall x \in \Omega$  we have

$$x = \sum_{i \in I_1} \alpha_i e_i + \sum_{i \in I_2} \alpha_i e_i + \sum_{i \in I_3} \alpha_i e_i,$$

where  $\alpha_i \geq 0 \quad \forall i \in I$ .

We will show, that  $\alpha_i = 0 \quad \forall i \in I_3$ . If it is not, that  $\exists i_0 \in I_3 : \alpha_{i_0} > 0$  and

$$\alpha_{i_0} e_{i_0} = x - \left( \sum_{i \in I_1} \alpha_i e_i + \sum_{i \in I_2} \alpha_i e_i + \sum_{i \in I_3 \setminus i_0} \alpha_i e_i \right) \subset x - K \subset \Omega - K \subset \overline{\Omega - K};$$

besides  $\alpha_{i_0} e_{i_0} \in K$ , i.e.  $\alpha_{i_0} e_{i_0} \in \overline{\Omega - K} \cap K = \Omega$  (by normality  $\Omega$ ).

By definition  $\beta_{i_0} = \sup\{\beta \geq 0 : \beta e_{i_0} \in \Omega\} \geq \alpha_{i_0} > 0$ , this contradicts the inclusion  $i_0 \in I_3$ .

We shown, that for any  $x \in \Omega$  we have the equal  $x = \sum_{i \in I_1} \alpha_i e_i \in K_1$ , i.e.  $\Omega \subset K_1$ . We have previously shown,

that  $K_1 \subset \Omega$ , i.e.  $\Omega = K_1$ , but on the conditions of the proposition  $\Omega$  can not be cone, thereby  $I_2 \neq \emptyset$ .

Now let  $K_2$  is cone with forming  $\{L_i\}_{i \in I_2}$  and  $G = \Omega \cap K_2$ .

The set  $G$  is finite, how the subset of finite set  $\Omega$ .

Following from definition the execution for set  $G$  (0)-property with respect to subcone  $K_2$ . Check the normality (with respect to  $K_2$ ) of the set  $G$ .

The inclusion  $G \subset \overline{G - K_2}$  is obviously.

By definition  $G \subset \Omega$ ,  $K_2 \subset K$ , so

$$\overline{G - K_2} \cap K_2 \subset \overline{\Omega - K_2} \cap K_2 \subset (\overline{\Omega - K} \cap K) \cap K_2 = \Omega \cap K_2 = G.$$

Of equality  $G = \overline{G - K_2} \cap K_2$  and convexity  $G$  (as the intersection of convex sets  $\Omega$  и  $K_2$ ) we have normality  $G$  with respect to  $K_2$ .

Check the equality  $\Omega = G + K_1$ . As noted,  $\forall x \in \Omega$  really the note

$$x = \sum_{i \in I_1} \alpha_i e_i + \sum_{i \in I_2} \alpha_i e_i = x_1 + x_2,$$

where  $x_1 = \sum_{i \in I_1} \alpha_i e_i$ ;  $x_2 = \sum_{i \in I_2} \alpha_i e_i$ . Its true for  $x_2 = x - x_1$  inclusion

$$x_2 \in \Omega - K_1 \subset (\Omega - K) \cap K_2 \subset (\Omega - K) \cap K \subset \overline{\Omega - K} \cap K = \Omega;$$

i.e.  $x_2 \in \Omega \cap K_2 = G$ , where from  $x = x_1 + x_2 \in K_1 + G$ , we proved the inclusion  $\Omega \subset G + K_1$ .

On the contrary, let it  $x \in G + K_1$ , i.e.  $x = x_2 + x_1$ , where  $x_2 \in G$ ,  $x_1 \in K$ . If  $x_1 = 0$ , then  $x = x_2 \in G = \Omega \cap K_2$ , i.e.  $x \in \Omega$ .

Now let  $x_1 \neq 0$  and  $L = \{\alpha x_1, \alpha \geq 0\}$  is ray, which passes through the point  $x_1$ . As  $K_1$  is cone, then  $\lambda x_1 \in K_1 \quad \forall \lambda \geq 0$ ,  $\lambda x_1 \in K \subset \Omega \quad \forall \lambda \geq 0$  and  $x_2 \in G = \Omega \cap K_2 \subset \Omega$ , by virtue of the convexity of the set  $\Omega$  contains the points  $\alpha x_2 + (1 - \alpha)\lambda x_1$   $0 \leq \alpha < 1$  и  $\lambda \geq 0$ . We suppose that  $\lambda = \frac{1}{1-\alpha}$  and will get, that  $\alpha x_2 + x_1 \in \Omega$  for  $0 \leq \alpha < 1$ .

We consider the sequence

$$x^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_2 + x_1, \quad x_n \in \Omega, \quad \text{т.к.} \quad 0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1 \quad \forall n,$$

then  $\lim_n x^n = x_2 + x_1 \in \Omega$  by virtue of the convexity of the set  $\Omega$ .

The proved inclusions  $\Omega \subset G + K$  и  $G + K \subset \Omega$  gave the equality  $\Omega = G + K$ .

#### References

- 1 Голдман А.Дж. Многогранные выпуклые конусы // Линейные неравенства и смежные вопросы: сб. ст. / А.Дж. Голдман, А.У. Таккер. — М.: Иностранная литература, 1959. — С. 156–161.
- 2 Вулих Б.З. Введение в теорию конусов в нормированных пространствах / Б.З. Вулих. — Калинин: Изд-во КГУ, 1977. — С. 26–34.

Т.Х. Макажанова, А.С. Базылжанова, О.И. Ульбрихт

### Көпбүйірлі конустың нормаль ішкі жиындарының құрылымы туралы

Мақалада нормаланған кеңістіктегі  $K$  көпбүйірлі конусының нормаль дөнес ішкі жиындарының құрылымы зерттелді.  $\Omega \subset K$  ішкі жиынының нормальдығы ( $K$  конус мағынасында)  $\overline{\Omega - K} \cap K = \Omega$  шартымен анықталды (жиын үстіндегі сызық топологиялық тұйықталу дегенді білдіреді). Конустың көпбүйірлілігі деп шеткі сәулелері болып табылатын сәулелер ақырлы санының канондық қабықшасын айтамыз. Нормаль жиындардың құрылымы геометриялық тұрғыдан зерттелді. Көпбүйірлі конустың кез келген  $\Omega$  нормаль ішкі жиынын екі ішкі жиындардың қосындысына бөлуге болатындығы көрсетілді: оның бірі — шектелген нормаль жиын (кейбір  $K$  ішкі конус мағынасында), ал екіншісі —  $\Omega$  жиынына тиісті  $K$  ішкі конусы (егер  $\Omega$  шектелмеген болса, онда ол да шектелмеген).

*Клт сөздер:* конус, нормаль, конустың қабығы, көпбүйірлі конус, сәулелер құрылымы, жабық жиынтығы, конус қалыпты ішкі жиыны.

Т.Х. Макажанова, А.С. Базылжанова, О.И. Ульбрихт

### О строении нормальных подмножеств многогранного конуса

В статье исследовано строение нормальных выпуклых подмножеств многогранного конуса  $K$  в нормированном пространстве. Нормальность подмножества  $\Omega \subset K$  (в смысле конуса  $K$ ) определяется условием  $\overline{\Omega - K} \cap K = \Omega$  (черта над множеством означает взятие топологического замыкания). Многогранность конуса означает, что он является конической оболочкой конечного числа лучей, являющихся крайними лучами. Исследовалось строение нормальных множеств с геометрической точки зрения. Показано, что всякое нормальное подмножество  $\Omega$  многогранного конуса можно разбить на сумму двух подмножеств, одно из которых является ограниченным нормальным (в смысле некоторого подконуса в  $K$ ) подмножеством, а второе — содержащимся во множестве  $\Omega$  подконусом  $K$  (неограниченным, если  $\Omega$  неограничено).

*Ключевые слова:* конус, нормаль, коническая оболочка, многогранный конус, образующие лучи, замкнутое множество, нормальное подмножество конуса.

References

- 1 Goldman, A.Dzh., Takker, A.U. (1959). Mnogohrannye vypuklye konusy [Multifaceted convex cones. Collection of articles]. *Lineinye neravenstva i smezhnye voprosy – Linear inequalities and related questions: digest of articles*. Moscow: Inostrannaia literatura [in Russian].
- 2 Vulikh, B.Z. (1977). *Vvedenie v teoriyu konusov v normirovannykh prostranstvakh [Introduction to the theory of cones in normed spaces]*. Kalinin: Izdatelstvo KHU [in Russian].

Г.Н. Нугманова, Ж.М. Сагидуллаева

*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан  
(E-mail: sagidullayeva.zh@gmail.com)*

## Обобщенная спиновая модель с векторным потенциалом и ее решение

В статье исследовано интегрируемое обобщение уравнения Ландау-Лифшица с самосогласованным векторным потенциалом. Установлено, что самосогласованность спинового вектора и потенциала осуществляется связью между решениями потенциала и линейной системы, условие совместности которых соответствует рассматриваемому нами уравнению. Обобщая метод Хироты, построено его точное решение, описывающее самосогласованное движение потенциала и солитона.

*Ключевые слова:* спиновые модели, метод Хироты, солитонные решения, интегрируемые нелинейные дифференциальные уравнения, уравнение Ландау-Лифшица, движение потенциала.

### Введение

Решения интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений, представляющие собой уединенную волну и обладающие свойством упругости взаимодействия с другим таким же решением, имеют различные приложения во многих областях естественных наук. Аналитические исследования процессов взаимодействия уединенных волн являются одними из основных задач теории солитонов. Развитие нелинейной теории магнетизма, в свою очередь, поставило проблему построения интегрируемых обобщений уравнения Ландау-Лифшица с самосогласованным потенциалом. Одно из таких обобщений с самосогласованным скалярным потенциалом было предложено в [1]. Различные алгебро-геометрические аспекты таких моделей изучены в работах [2–5]. Обобщенные уравнения Ландау-Лифшица (ОУЛЛ) с самосогласованным векторным потенциалом (СВП) получены в работе [6], а также установлены их связи с движением кривых и поверхностей.

### Обобщенное уравнение Ландау-Лифшица

Обобщенное уравнение Ландау-Лифшица с самосогласованным векторным потенциалом имеет вид

$$S_t + 0.5S \wedge S_{xx} + \frac{2}{a}S \wedge W = 0; \quad (1)$$

$$W_x + 2aS \wedge W = 0, \quad (2)$$

где  $\wedge$  обозначает векторное произведение и  $S = (S_1, S_2, S_3)$ ;  $W = (W_1, W_2, W_3)$ ; длина векторов  $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$ ,  $W^2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 = b$ ,  $a, b = const$ . В большинстве случаев удобно работать с матричной формой этого уравнения, которая имеет вид

$$iS_t + \frac{1}{2}[S, S_{xx}] + \frac{1}{a}[S, W] = 0; \quad (3)$$

$$iW_x + a[S, W] = 0, \quad (4)$$

где  $a = const$ ,  $S = \sum_{j=1}^3 S_j(x, y, t)\sigma_j$  — матричный аналог спинового вектора;  $W$  — матричный вид векторного потенциала  $W = \sum_{j=1}^3 W_j(x, y, t)\sigma_j$  и

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— матрицы Паули.

ОУЛЛ с самосогласованным потенциалом интегрируемо методом обратной задачи рассеяния и допускает следующее представление Лакса:

$$\Phi_x = U\Phi; \quad (5)$$

$$\Phi_t = V\Phi, \quad (6)$$

где матричные операторы  $U$  и  $V$  задаются как

$$U = -i\lambda S;$$

$$V = \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + \left( \frac{i}{\lambda + a} - \frac{i}{a} \right) W;$$

$$V_2 = -2iS, \quad V_1 = SS_x.$$

#### Постановка задачи

Построить решение уравнения (3)–(4) методом Хироты. Отметим, что данное уравнение содержит две неизвестные функции  $S(x, t)$  и  $W(x, t)$ . При  $W(x, t) = 0$  уравнение (3) переходит к известному уравнению Ландау-Лифшица, открытому в 1935 г. В данном исследовании сложность заключается в установлении связи между решениями функций  $S(x, t)$  и  $W(x, t)$ .

#### Билинейзация

По алгоритму построения решения солитонного уравнения методом Хироты сначала мы должны построить так называемую билинейную форму уравнения (3)–(4). Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

*Теорема 1.* Билинейная форма ОУЛЛ с СВП (3) имеет вид

$$[iD_t + D_x^2](g \cdot f) - \frac{2}{a} p^* q = 0; \quad (7)$$

$$D_x^2(f \cdot f) - \frac{2}{a} q^* q = 0; \quad (8)$$

$$D_x(p \cdot f) - 2iaq^* q = 0; \quad (9)$$

$$D_x(q \cdot f) + 2iaqf = 0, \quad (10)$$

где  $f$  — вещественная функция;  $g, p, q$  — комплексные функции, а операторы Хироты определяются как

$$D_x^l D_t^n f(x, t) \cdot g(x, t) = (\partial_x - \partial_{x'})^l (\partial_t - \partial_{t'})^n f(x, t) \cdot g(x', t')|_{x=x', t=t'}. \quad (11)$$

*Доказательство.* Для удобства перепишем систему (3)–(4) в компонентах  $S$  и  $W$ :

$$iS_t^+ + S^+ S_{3xx} - S_3 S_{xx}^+ + \frac{2}{a}(S^+ W_3 - S_3 W^+) = 0; \quad (12)$$

$$iS_t^- - S_{3xx} S^- + S_3 S_{xx}^- - \frac{2}{a}(S^- W_3 - S_3 W^-) = 0; \quad (13)$$

$$2iS_{3t} + S_{xx}^+ S^- - S^+ S_{xx}^- + \frac{2}{a}(S^- W^+ - S^+ W^-) = 0; \quad (14)$$

$$iW_x^+ - 2a(S_3 W^+ - S^+ W_3) = 0; \quad (15)$$

$$iW_x^- - 2a(S^- W_3 - S_3 W^-) = 0; \quad (16)$$

$$iW_{3x} - a(S^+ W^- - S^- W^+) = 0. \quad (17)$$

Самосогласованный потенциал  $W$  дается как

$$W_3 = |\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2; \quad W^+ = 2\varphi_1^* \varphi_2; \quad W^- = 2\varphi_1 \varphi_2^*, \quad (18)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  являются решениями матричной системы (5)–(6). Учитывая (18), перепишем уравнения (12)–(17) в виде

$$iS_t^+ + S^+ S_{3xx} - S_3 S_{xx}^+ + \frac{2}{a} (S^+ (|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2) - 2S_3 \varphi_1^* \varphi_2) = 0; \quad (19)$$

$$iS_t^- - S_{3xx} S^- + S_3 S_{xx}^- - \frac{2}{a} (S^- (|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2) - 2S_3 \varphi_1 \varphi_2^*) = 0; \quad (20)$$

$$2iS_{3t} + S_{xx}^+ S^- - S^+ S_{xx}^- + \frac{4}{a} (S^- \varphi_1^* \varphi_2 - S^+ \varphi_1 \varphi_2^*) = 0; \quad (21)$$

$$\varphi_{1x} - ia(S_3 \varphi_1 + S^- \varphi_2) = 0; \quad (22)$$

$$\varphi_{2x} - ia(S^+ \varphi_1 - S_3 \varphi_2) = 0. \quad (23)$$

Рассмотрим следующее стереографическое преобразование:

$$S^+ = \frac{2\omega}{1 + |\omega|^2}; \quad S^- = \frac{2\omega^*}{1 + |\omega|^2}; \quad S_3 = \frac{1 - |\omega|^2}{1 + |\omega|^2}. \quad (24)$$

Отсюда получим

$$\omega = \frac{S^+}{1 + S_3}; \quad (25)$$

Таким образом, уравнения (19)–(23) перепишем в виде

$$i\omega_t - \omega_{xx} + \frac{2\omega^* \omega_x^2}{1 + |\omega|^2} + \frac{2}{a} (\omega \varphi_2^* + \varphi_1^*) (\omega \varphi_1 - \varphi_2) = 0; \quad (26)$$

$$\varphi_{1x} - \frac{ia}{1 + |\omega|^2} ((1 - |\omega|^2) \varphi_1 + 2\omega^* \varphi_2) = 0; \quad (27)$$

$$\varphi_{2x} - \frac{ia}{1 + |\omega|^2} (2\omega \varphi_1 - (1 - |\omega|^2) \varphi_2) = 0. \quad (28)$$

Теперь преобразуем (26)–(28) к специальному виду, удобному для использования Паде-аппроксиманты [7]. Для этого заменим  $\omega$  на  $\frac{g}{f}$

$$\omega = \frac{g}{f}, \quad (29)$$

где  $g$  — комплексная функция;  $f$  — действительная функция, а  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  зададим в виде

$$\varphi_1 = \frac{p}{f} e^{iax}, \quad \varphi_2 = \frac{q}{f} e^{iax} \quad (30)$$

и найдем уравнения, которым удовлетворяют  $f, g, p, q, \varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Подставляя (29) и (30), с учетом (11), дальнейшее преобразование уравнений (26)–(28) позволяет получить билинейную форму (7)–(10) для уравнений (19)–(23). *Теорема 1 доказана.*

### Солитонное решение

Используя полученную билинейную форму, мы можем построить солитонное решение для спиновой системы. Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

*Теорема 2.* Односолитонное решение уравнения (3)–(4) для спиновой матрицы  $S$  имеет вид

$$S^+ = \frac{2 \left( 1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*) e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right) e^{i\theta}}{\left( 1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*) e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2 + e^{i(\theta - \theta^*)}}; \quad (31)$$

$$S_3 = \frac{\left( 1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*) e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2 - e^{i(\theta - \theta^*)}}{\left( 1 - \frac{a(k_1^2 + l_1)(k_1^{*2} + l_1^*) e^{i(\theta - \theta^*)}}{4(k_1 - k_1^*)^2} \right)^2 + e^{i(\theta - \theta^*)}}; \quad (32)$$

для потенциала  $W$ :

$$W^+ = -\frac{a \left(1 - \frac{a(l_1+k_1^2)}{(k_1-k_1^*)} \left(\frac{a(l_1^*+k_1^{*2})}{4(k_1-k_1^*)} + a\right) e^{i(\theta-\theta^*)}\right) (l_1+k_1^2) e^{i\theta}}{\left(1 - \frac{a(k_1^2+l_1)(k_1^{*2}+l_1^*) e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1-k_1^*)^2}\right)^2}; \quad (33)$$

$$\begin{aligned} W_3 = & \frac{\left(1 - \frac{a(l_1+k_1^2)}{(k_1-k_1^*)} \left(\frac{a(l_1^*+k_1^{*2})}{4(k_1-k_1^*)} + a\right) e^{i(\theta-\theta^*)}\right)}{\left(1 - \frac{a(k_1^2+l_1)(k_1^{*2}+l_1^*) e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1-k_1^*)^2}\right)^2} \times \\ & \times \frac{\left(1 - \frac{a(l_1^*+k_1^{*2})}{(k_1^*-k_1)} \left(\frac{a(l_1+k_1^2)}{4(k_1^*-k_1)} + a\right) e^{i(\theta-\theta^*)}\right)}{\left(1 - \frac{a(k_1^2+l_1)(k_1^{*2}+l_1^*) e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1-k_1^*)^2}\right)^2} + \\ & + \frac{(a^2(l_1+k_1^2)(l_1^*+k_1^{*2}) e^{i(\theta-\theta^*)})}{4 \left(1 - \frac{a(k_1^2+l_1)(k_1^{*2}+l_1^*) e^{i(\theta-\theta^*)}}{4(k_1-k_1^*)^2}\right)^2}, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\theta = k_1x + l_1t + m_1$ ,  $k_1, l_1$  и  $m_1$  — комплексные постоянные.

*Доказательство.* Разложим в уравнении (7)–(10)  $g$ ,  $f$ ,  $p$  и  $q$  в формальные ряды по произвольной постоянной  $\varepsilon$ :

$$g(x, t) = \varepsilon g_1(x, t) + \varepsilon^3 g_3(x, t) + \dots; \quad (35)$$

$$f(x, t) = 1 + \varepsilon^2 f_2(x, t) + \varepsilon^4 f_4(x, t) + \dots; \quad (36)$$

$$p(x, t) = 1 + \varepsilon^2 p_2(x, t) + \varepsilon^4 p_4(x, t) + \dots; \quad (37)$$

$$q(x, t) = \varepsilon q_1(x, t) + \varepsilon^3 q_3(x, t) + \dots. \quad (38)$$

$N$ -солитонное решение исследуемого решения ищем в виде

$$g_j = \sum_{j=1}^N \exp \theta_j, \quad \theta = k_j x + l_j t + m_j. \quad (39)$$

Возьмем случай  $N=1$ , при этом нетрудно заметить, что  $g_j = 0$  для  $j \geq 3$  и  $f_j = 0$  для  $j \geq 4$  [1]. Аналогично имеем, что  $q_j = 0$  для  $j \geq 3$  и  $p_j = 0$  для  $j \geq 4$ . Для получения односолитонного решения уравнений (7)–(10) возьмем  $g = \varepsilon g_1$ ,  $p = 1 + \varepsilon^2 p_2$ ,  $q = \varepsilon q_1$ ,  $f = 1 + \varepsilon^2 f_2$ . Подставляя эти выражения в билинейную форму (7)–(10), получим следующие данные:

$$i g_{1t} + g_{1xx} - \frac{2}{a} q_1 = 0; \quad (40)$$

$$i g_{1t} f_2 - i g_1 f_{2t} + g_{1xx} f_2 - 2 g_{1x} f_{2x} + g_1 f_{2xx} - \frac{2}{a} p_2^* q_1 = 0; \quad (41)$$

$$f_{2xx} - \frac{1}{a} q_1^* q_1 = 0; \quad (42)$$

$$f_2 f_{2xx} - f_{2x} f_{2x} = 0; \quad (43)$$

$$p_{2x} - f_{2x} - 2i a g_1^* q_1 = 0; \quad (44)$$

$$p_{2x} f_2 - p_2 f_{2x} = 0; \quad (45)$$

$$q_{1x} + 2i a q_1 = 0; \quad (46)$$

$$q_{1x} f_2 - q_1 f_{2x} + 2i a q_1 f_2 = 0. \quad (47)$$

Выбрав  $g_1$  как  $g_1 = e^{i\theta}$ ,  $c\theta = k_1x + l_1t + m_1$ , можем построить решения для  $f$ ,  $q_1$ ,  $p_2$  в виде

$$q_1 = -\frac{a}{2} (l_1 + k_1^2) e^{i\theta}; \quad (48)$$

$$f_2 = -\frac{a(l_1 + k_1^2)(l_1^* + k_1^{*2})}{(k_1 - k_1^*)^2} e^{i(\theta-\theta^*)}; \quad (49)$$

$$p_2 = -\frac{a(l_1 + k_1^2)}{(k_1 - k_1^*)} \left( \frac{a(l_1^* + k_1^{*2})}{4(k_1 - k_1^*)} + a \right) e^{i(\theta - \theta^*)}. \quad (50)$$

Уравнение (24) в компонентах матрицы  $S$  имеет вид

$$S^+ = \frac{2fg}{f^2 + |g|^2}; \quad S^- = \frac{2fg^*}{f^2 + |g|^2}; \quad S_3 = \frac{f^2 - |g|^2}{f^2 + |g|^2}. \quad (51)$$

Наконец, можно получить решения уравнений (3)–(4) в виде (31)–(34). *Теоремы 1, 2 доказаны.*

Самосогласованное поведение спиновой матрицы  $S$  и потенциала  $W$  отчетливо видно на рисунке ниже. Графики полученных решений даны в интервале времени от 0 до 10 и при значениях постоянных:  $k_1 = 25 - i$ ;  $l_1 = 15 - i$ ;  $m_1 = 1$ .

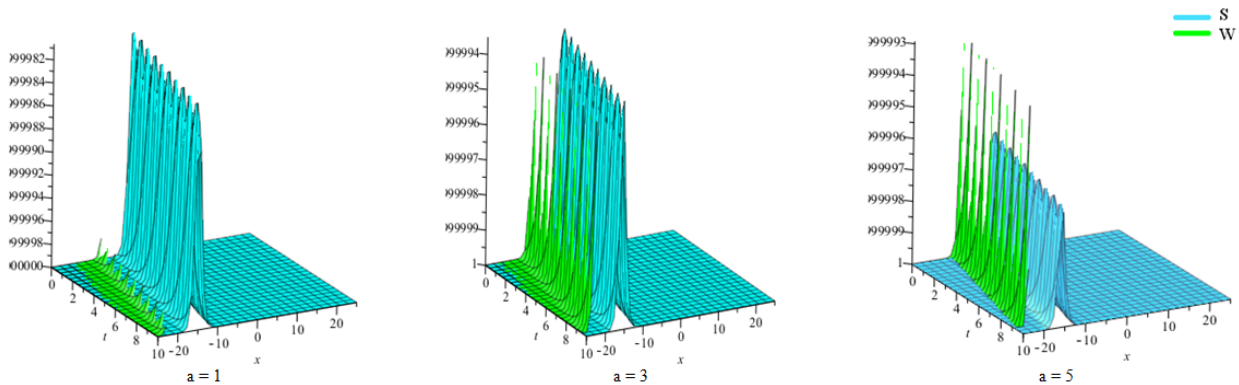


Рисунок. Поведение спиновой матрицы и потенциала

### Заключение

Данная работа является последовательным продолжением наших предыдущих исследований в области интегрируемых спиновых систем, в частности, обобщенных уравнений Ландау-Лифшица с самосогласованным скалярным потенциалом. Объект исследования — обобщенное уравнение Ландау-Лифшица с самосогласованным источником, роль которого играет трехкомпонентный вектор с переменной длиной, а компонентами вектора являются функции от двух переменных. Поэтому рассмотренное нами обобщенное уравнение Ландау-Лифшица с самосогласованным источником не ограничивается выводами и закономерностями, сформулированными для спиновой модели со скалярным потенциалом. Основным результатом данной работы является нахождение связи, описывающей самосогласованное движение векторного потенциала и солитонной волны.

*Работа выполнена при финансовой поддержке проекта 0893/ГФ4 МОН РК.*

### References

- 1 Myrzakulov, R., Vijayalakshmi, S., Nugmanova, G., Lakshmanan, M. (1999). A (2+1)-dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterpart, solitons and localized coherent structures. *Physics Letters A.*, Vol. 233, 4, 391.
- 2 Myrzakulov, R., Nugmanova, G., Danlybaeva, A. (1999). Geometry and multidimensional soliton equations. *Theoretical and Mathematical Physics*, Vol. 188, 441.
- 3 Myrzakulov, R., Nugmanova, G., Syzdykova, R. (1998). Gauge equivalence between (2+1)-dimensional continuous Heisenberg ferromagnetic models and nonlinear Schrodinger-type equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Vol. 31, 147.
- 4 Zhang, Zh.-H., Deng, M., Zhao, W.-Zh., Ke, W. On the integrable inhomogeneous Myrzakulov I Equation. Retrieved from arXiv:nlin/0603069v1 [nlin.SI].



- 5 Chen, Ch., Zhou, Zi-X. (2009). Darboux Transformation and Exact Solutions of the Myrzakulov I Equation. *Chinese Physics Letters*, Vol. 26, 080504.
- 6 Myrzakulov, R., Mamyrbekova, G., Nugmanova, G., Lakshmanan, M. (2015). Integrable  $(2 + 1)$ -Dimensional Spin Models with Self-Consistent Potentials. *Symmetry*, Vol. 7, 1352.
- 7 G.A. Baker, Jr., Gammel, J.L. (1973). *The Pade Approximant in Theoretical Physics*. New-York: Academic Press.

Г.Н. Нугманова, Ж.М. Сагидуллаева

## Векторлық потенциалы бар жалпыланған спиндік үлгі және оның шешімі

Мақалада өздігінен келісілген векторлық потенциалды интегралданатын жалпыланған Ландау-Лифшиц теңдеуі зерттелді. Спиндік вектор және потенциалдың өздігінен келісуі, үйлесу шарты біздің қарастырып отырған теңдеуімізге сәйкес келетін потенциал мен жүйенің шешімдерінің арасындағы байланысы арқылы жүзеге асатыны анықталды. Хирота әдісін жалпыландырып, потенциал мен солитонның өздігінен келісілген қозғалысын сипаттайтын нақты шешімі алынды.

*Клт сөздер:* спиндік үлгілер, Хирота әдісі, солитонды шешімдер, интегралданатын жалпыланған дифференциалды теңдеулер, Ландау-Лифшиц теңдеуі, потенциалдық қозғалыс.

G.N. Nugmanova, Zh.M. Sagidullayeva

## Generalized spin model with vector potential and its solution

In this work an integrable generalization of the Landau-Lifshitz equation with self-consistent vector potential is studied. It was established that self-consistence of spin vector and potential happen by the relation between solutions of the potential and linear system, the compatibility condition of which corresponds to the equation considered by us. By generalizing Hirota's method, it's exact solutions, defining self-consistent motion of the potential and soliton, are constructed.

*Keywords:* spin models, Hirota's method, soliton solutions, integrable nonlinear differential equations, Landau-Lifshitz equation, potential motion.

---

## АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ INFORMATION ABOUT AUTHORS

- Attaev, A.H.** — Candidate of physical and mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the CAD Department of Mixed Systems and Management, Institute of Applied Mathematics and Automation — Branch of the Federal State Budget Scientific Institution «Federal Scientific Center» Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences», Nalchik, Russia.
- Azimova, D.** — Senior Teacher of the Department of Mathematical and Computer Modeling, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.
- Balpanova, M.Zh.** — 1 st year Student speciality 6M060300 — «Mechanics», Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.
- Bazylzhanova, A.S.** — Teacher of the Chair Professor T.G.Mustafin of Algebra, Mathematical Logic and Geometry, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.
- Bekjan, T.N.** — Professor, Xinjiang University, Urumqi, China.
- Bukenov, M.** — Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical and Computer Modeling, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.
- Buketov, A.V.** — Doctor of technical sciences, Professor, Head of subdepartment for Ship Propulsion Plant Operation and General Engineering, Kherson State Maritime Academy, Ukraine.
- Ibraev, A.** — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor of the Department of Mechanics, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.
- Iskakov, S.A.** — PhD students of the 1st year of study, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.
- Jenaliyev, M.T.** — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling KS MES RK, Almaty, Kazakhstan.
- Khisamiev, N.G.** — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, S.Amanzholov East Kazakhstan State University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan.
- Konyrkhanova, A.A.** — PhD student of 3 course speciality 6D060100 — «Mathematics», D.Serikbayev East Kazakhstan State Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan.
- Kutimov, K.S.** — Teacher of the Department of the Chair Professor T.G. Mustafin of Algebra, Mathematical Logic and Geometry, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.
- Makazhanova, T.Kh.** — Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Chair Professor T.G.Mustafina of Algebra, Mathematical Logic and Geometry, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.
- Nugmanova, G.N.** — Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical and Computer Modeling, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.
- Ramazanov, M.I.** — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Institute of Applied Mathematics, Karaganda, Kazakhstan.
- Sagidullayeva, Zh.M.** — PhD student of the 2nd year of the speciality 6D060400 — «Physics», L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

- 
- Sarsenbek, A.Zh.** — Master of 1 course speciality 050603 — «Mechanics», Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.
- Sazhinova, Zh.R.** — Master of 1 course speciality 050603 — «Mechanics», Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.
- Sharko, A.V.** — Doctor of technical sciences, Professor, Head of the Department of Transport Technology, Kherson State Maritime Academy, Ukraine.
- Stepanchikov, D.M.** — Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Energy, Electrical Engineering and Physics, Kherson National Technical University, Ukraine.
- Takhanov, D.K.** — Candidate of technical sciences, Associate professor, Karaganda State Technical University, Kazakhstan.
- Tyulyubergenev, R.K.** — Research staff, D.Serikbayev East Kazakhstan State Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan.
- Ulbricht, O.I.** — Senior Lecturer of the Chair Professor T.G.Mustafin of Algebra, Mathematical Logic and Geometry, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.
- Vikent'ev, A.A.** — Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor, S.L. Sobolev Institute of Mathematics of the SB RAS; Novosibirsk, Novosibirsk State University, Novosibirsk State Technical University, Russia.
- Yeshkeyev, A.R.** — Doctor of physical and mathematical science, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.
- Yessenbayeva, G.A.** — Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Chair Professor T.G.Mustafin of Algebra, Mathematical Logic and Geometry, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.
- Zhakulin, A.S.** — Doctor of technical sciences, Professor, Karaganda State Technical University, Kazakhstan.
- Zhakulina, A.A.** — Candidate of technical sciences, Associate Professor, Karaganda State Technical University, Kazakhstan.
- Zhussupova, D.** — Senior teacher of the Department of Mathematical and Computer Modeling, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.
- Zinchenko, D.A.** — Assistant of the Department of Transport Technology, Kherson State Maritime Academy, Ukraine.