

УДК 539.3

Н.К.Аширбаев, Ж.Н.Аширбаева, Ш.Е.Алтынбеков, М.Т.Шоманбаева

*Южно-Казахстанский государственный университет им. М.О.Ауэзова, Шымкент  
(E-mail: ank\_56@mail.ru)*

## Особенности распространения динамических возмущений в упругой многоопорной конструкции

В статье рассмотрена задача о распространении динамических возмущений в упругой многоопорной конструкции, представляющей собой прямоугольную полосу. Сформулированная в терминах напряжений и скоростей смешанная задача моделируется численно с помощью явной разностной схемы сквозного счета, основанной на методе пространственных характеристик. Основная задача настоящего исследования заключается в анализе влияния разрыва в граничных условиях на распространение волновых процессов во внутренних точках исследуемой упругой среды. Изучена концентрация динамических напряжений в окрестности разрыва граничных условий.

*Ключевые слова:* упругая среда, волновой процесс, напряжение, скорость, разрыв, численное решение.

Прогнозирование динамических волновых процессов в твердых телах конечных размеров с учетом ряда ослабляющих факторов (разрывы в граничных условиях, отверстия, полости, вырезы и т.д.) путем математического моделирования с целью определения характера возможных повреждений представляет помимо чисто научного интереса важное прикладное значение. В силу конструктивных особенностей в деталях машин и сооружениях может быть наличие различных нарушений сплошности, вблизи которых разрушение происходит наиболее часто. Поэтому изучение напряженно-деформированного состояния в зонах концентрации является чрезвычайно важной задачей. В целом, количество работ, посвященных динамическим задачам с учетом ряда ослабляющих факторов, очень невелико, в них рассматриваются далеко не все аспекты их работоспособности в условиях действия нестационарных внешних нагрузок [1–6]. Однако интерес к этим проблемам, обусловленный, в первую очередь, важностью решения сложных практических задач, велик, и дальнейшее совершенствование численных методов в различных модификациях с использованием все более совершенной электронно-вычислительной техники должно привести к существенному развитию данного направления.

*Постановка задачи.* Найти функции  $v_1, v_2, p, q, \tau$ , которые в прямоугольной полосе  $0 \leq x_1 \leq l, -L \leq x_2 \leq L$  (рис.1) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} v_{1,\tau} - p_{,1} - q_{,1} - \tau_{,2} &= 0; & v_{2,t} - p_{,2} + q_{,2} - \tau_{,1} &= 0; & (1) \\ \gamma^2(\gamma^2 - 1)^{-1}p_{,t} - v_{1,1} - v_{2,2} &= 0; & \gamma^2q_{,t} - v_{1,1} + v_{2,2} &= 0; \end{aligned}$$

$$\gamma^2 \tau_{,t} - v_{1,2} - v_{2,1} = 0,$$

начальным условиям при  $t = 0$

$$v_1(x_1, x_2, 0) = v_2(x_1, x_2, 0) = p(x_1, x_2, 0) = q(x_1, x_2, 0) = \tau(x_1, x_2, 0) = 0 \quad (2)$$

и следующим граничным условиям для  $t \geq 0$  :

$$v_1 = f(t), v_2 = 0 \text{ при } x_1 = 0, |x_2| \leq L; \quad (3)$$

$$p - q = 0, \tau = 0 \text{ при } |x_2| = L, 0 \leq x_1 \leq l; \quad (4)$$

$$v_1 = v_2 = 0 \text{ при } |x_1| = l \text{ и } \forall x_2^0 \leq |x_2| \leq L, \quad x_2^2 \leq |x_2| \leq x_2^1, \quad \forall x_2 \leq x_2^3; \quad (5)$$

$$p + q = 0, \tau = 0 \text{ при } x_1 = l \text{ и } \forall x_2^1 \leq |x_2| \leq x_2^0, \quad x_2^3 \leq |x_2| \leq x_2^2. \quad (6)$$

Здесь  $f(t)$  — заданная функция;  $x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3$  — некоторые постоянные числа, удовлетворяющие требованию  $|x_2^i| \leq L (i = 0, 1, 2, 3)$ . Нулевые начальные условия (2) означают, что полоса до момента времени  $t \leq 0$  находится в невозмущенном состоянии. Граничное условие (3) определяет задание нормальной компоненты скорости частиц  $x_1 = 0$  полосы и отсутствие касательной компоненты скорости частиц для любого момента времени. Граничные условия (4) означают, что надлежащие точки границы  $|x_2| = L$  свободны от напряжений для любого момента времени.

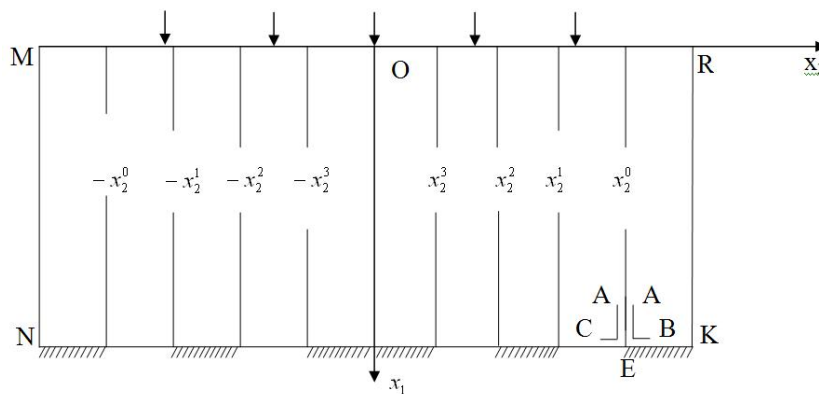


Рисунок 1. Исследуемая область

Граничные условия (5) соответствуют условиям жесткого закрепления тыльной части границы  $x_1 = l$ . Условия (6) означают, что другая часть тыльной границы  $x_1 = l$  свободна от напряжений. Они моделируют условия работы многоопорной конструкции.

Задача заключается в определении внутри прямоугольной области полей напряжений и скоростей, вызванных фронтами падающих и многократно дифрагированных упругих волн в момент времени  $t > 0$ .

Решение системы уравнений (1) при начальных (2) и граничных (3)–(6) условиях отыскивается методом пространственных характеристик в узловых точках, на которые разбивается вся исследуемая область [7]. Особенностью рассмотренного тела является то, что в точках типа Е (рис. 1) границы  $x_1 = l$  исследуемого тела нарушается «привычная» для динамических задач гладкость функций, т.е. в этих точках искомые функции и их производные терпят разрыв первого рода. Именно на такие особенности, как нам известно, не было метода решения подобных задач. В дополнение к известным соотношениям [7] получены расчетные соотношения в особых точках типа Е границы  $x_1 = l$  для нахождения искомых функций, в которых граничные условия терпят разрыв первого рода [3]. Таким образом, построен численный алгоритм решения

поставленной нестационарной задачи теории упругости в особых точках, в которых входящие параметры терпят разрыв первого рода. На основе построенного численного алгоритма составлена программа расчетов на персональном компьютере на алгоритмическом языке Фортран, которая как составная часть включена в единую общую программу.

Настоящие расчеты проведены для прямоугольной области  $0 \leq x_1 \leq 100h_1$ ,  $|x_2| \leq 100h_2$ , при этом  $h_1 = h_2 = h$ . Шаг по времени  $k$  выбран в соответствии с необходимыми условиями устойчивости используемой явной конечно-разностной расчетной схемы

$$\left(\frac{k}{h}\right)^2 \leq \min \left\{ \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1}, \frac{\gamma^2}{(2\gamma^2 - 1)} \right\}.$$

Материал тела обладает следующими характеристиками: модуль упругости  $E = 200$  ГПа; коэффициент Пуассона  $\gamma = 0.3$ ; плотность  $\rho = 7.9 \cdot 10^3$  кг.м<sup>3</sup>;  $c_1$  и  $c_2 = 5817$  м/с;  $\gamma = 1.87$ . Параметры волнового поля получены при следующих значениях исходных данных:

$$f(t) = t \cdot e^{-t}, \quad k = 0.025, \quad h = 0.05, \quad |x_2^0| = 80 \cdot h, \quad |x_2^1| = 60 \cdot h, \quad |x_2^2| = 40 \cdot h, \quad |x_2^3| = 20 \cdot h.$$

Из-за симметрии условий закрепления и характера нагружения искомые параметры  $v_1, p, q$  являются четными, а  $v_2, \tau$  — нечетными функциями относительно оси  $x_2 = 0$ . Поэтому результаты расчетов представлены только для положительных значений  $x_2$  ( $x_2 \geq 0$ ). Фактически расчет был выполнен до момента времени  $t = 600 \cdot k$ , который соответствует двухкратному отражению волны от тыльной границы прямоугольной полосы. На рисунке 2 приведено распределение продольных скоростей перемещений  $v_1$  по координатам  $x_1/h$  и  $x_2/h$  в момент времени  $t = 300 \cdot k$ . Величина продольной скорости перемещений достигает своих максимальных значений внутри полосы в районе особой точки  $x_2^3 = 20 \cdot h$ . Это объясняется удаленностью сечения  $x_2^3 = 20 \cdot h$  от свободной границы  $x_2 = 100h$  прямоугольной полосы. По мере приближения к свободной границе величина максимальных значений продольной скорости перемещений постепенно уменьшается.

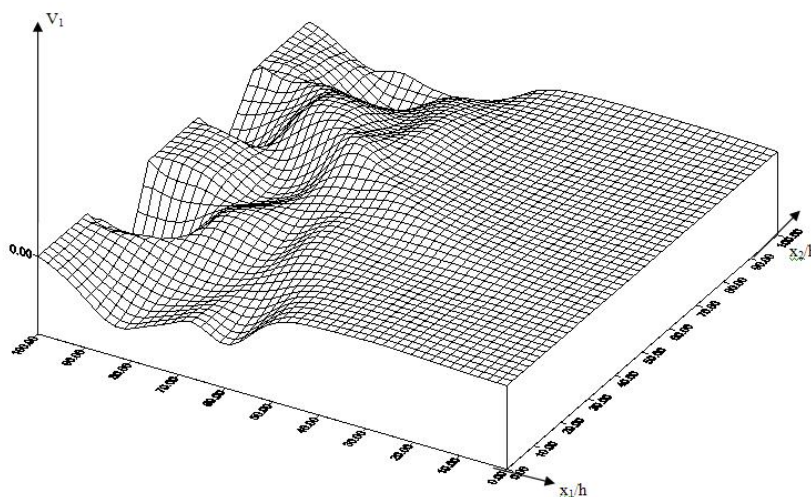


Рисунок 2. Распределение продольных скоростей перемещений  $v_1$  по координатам  $x_1/h$  и  $x_2/h$  в момент времени  $t = 300 \cdot k$

На рисунке 3 приведено распределение нормальных напряжений  $p + q$  в исследуемой области в момент времени  $t = 300 \cdot k$ . На боковой границе  $x_2 = 100h$  полосы и вдоль прямых  $x_2 = x_2^i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) отмечаются качественные отличия изменения напряжения по оси  $x_1/h$  от их характера в невозмущенных областях. Отличие обусловлено наложением дифрагированных

волн от угловых и особых точек типа Е и отраженных волн от закрепленных частей тыльной границы прямоугольной полосы. Концентрация сжимающихся напряжений наблюдается вблизи угловых точек  $R(x_1 = 0, x_2 = 100h)$ ,  $K(x_1 = 100h, x_2 = 100h)$  прямоугольной полосы и особых точек типа Е. Максимум напряжений в данный момент времени достигает величины  $p+q = -1.96$  в угловой точке  $K(x_1 = 100h, x_2 = 100h)$ .

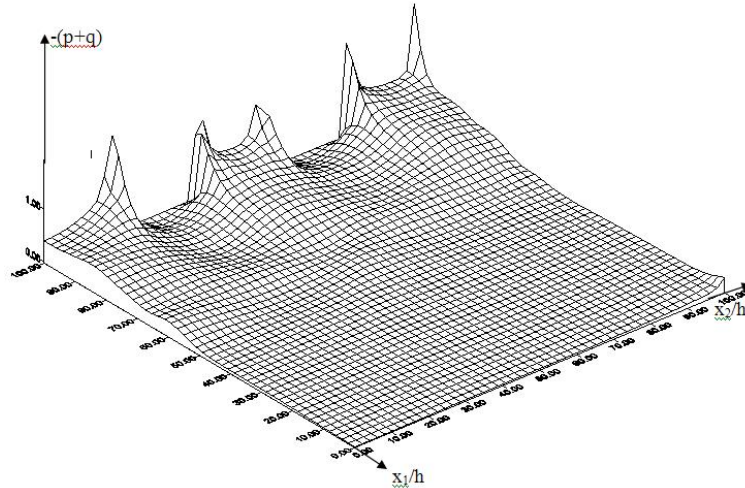
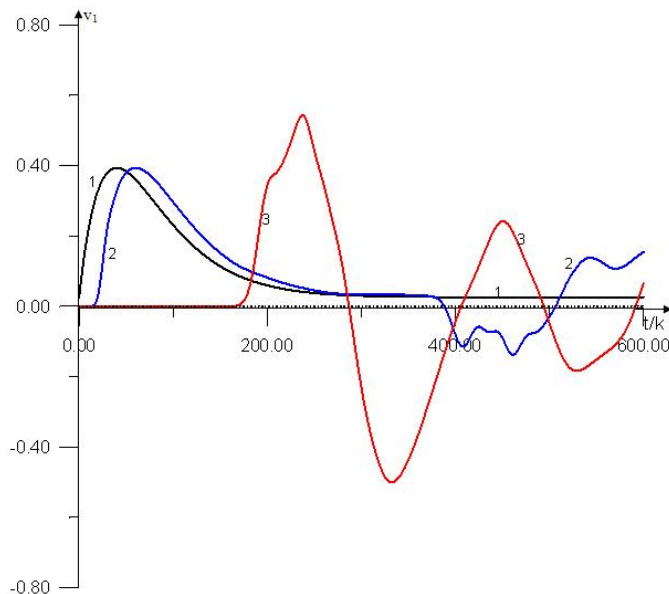


Рисунок 3. Распределение нормальных напряжений  $p + q$  в исследуемой области в момент времени  $t = 300 \cdot k$

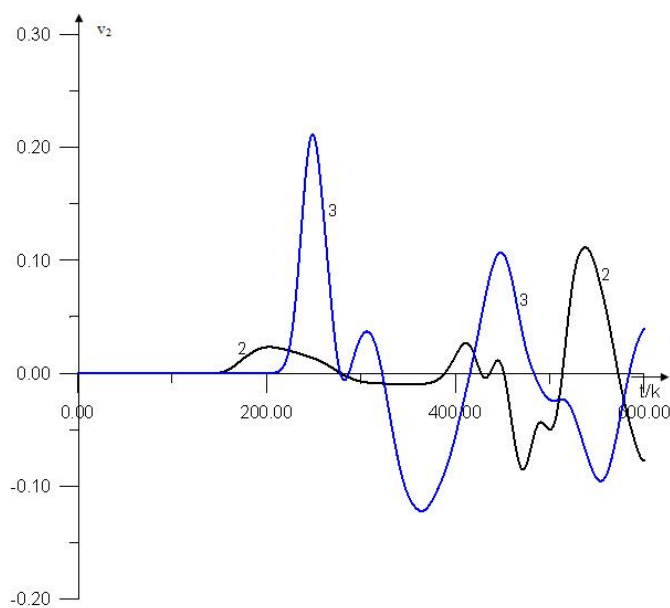
Осциллограмма продольных  $v_1$  и поперечных  $v_2$  скоростей перемещений на отрезке времени  $t \in [0; 600k]$  в трех фиксированных точках наблюдения: 1)  $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ ; 2)  $(x_1 = 10 \cdot h, x_2 = 25 \cdot h)$ ; 3)  $(x_1 = 90 \cdot h; x_2 = 25 \cdot h)$  — представлена кривыми на рисунках 4, 5. Импульс, приложенный на границе  $x_1 = 0$ , приходит последовательно в нижележащие слои по координате  $x_1$ . Продольная скорость перемещения  $v_1$  в точке 1 повторяет форму приложенного граничного воздействия на торце  $x_1 = 0$ . В точках 2 и 3 продольная скорость перемещения вначале изменяется в соответствии с изменением приложенной нагрузки. В последующие моменты времени на убывании и возрастании продольной скорости перемещения сказывается влияние волн дифракции, которое более заметно в фиксированных точках наблюдения 2 и 3.

Поперечная скорость перемещения  $v_2$ , вызванная дифрагированными волнами, несколько раз изменяет свое направление и является знакопеременной функцией времени. Из сравнения этих графиков видно, что в фиксированных точках наблюдения 2,3 заметно непрерывающееся колебательное движение, поперечные скорости частиц постоянно меняют свои знаки. На оси симметрии поперечная скорость частиц  $v_2 = 0$  (точка наблюдения 1), т.е. отсутствует движение. Полученные результаты подтверждают известные эффекты, отраженная от боковых границ поперечная скорость частиц при встрече взаимно уничтожается, а при отражении от свободной поверхности — удваивается. Скорость  $v_2 = 0$ , порожденная волнами дифракции от угловой точки  $R(x_1 = 0, x_2 = 100h)$  прямоугольной полосы, появляется в точке наблюдения 2 раньше ( $t \approx 156 \cdot k$ ), чем в точке наблюдения 3 ( $t \approx 214k$ ). Поперечные скорости перемещения на порядок меньше продольных. Вследствие двумерности задачи параметры движения по пространственным координатам приобретают колебательный характер.

Анализ скоростей перемещений точек и напряжений в них показывает, что для области с разрывами в граничных условиях и для области без разрыва в граничных условиях вдали от точки разрыва их распределения по оси  $x_1/h$  практически совпадают. Отличия этих параметров наблюдаются лишь вблизи точки разрыва на расстояниях, равных  $6 \cdot h - 8 \cdot h$  от точки разрыва.



1 — точка (0, 0); 2 — точка (10, 25); 3 — точка (90, 25)  
Рисунок 4. Оциллограмма продольных скоростей перемещений  $v_1$  в трех фиксированных точках наблюдения прямоугольной области



1 — точка (0, 0); 2 — точка (10, 25); 3 — точка (90, 25)  
Рисунок 5. Оциллограмма поперечных скоростей перемещений  $v_2$  в трех фиксированных точках наблюдения прямоугольной области

Следует заметить, что в разработанном алгоритме вычисления напряжений и скоростей в точках разрыва в граничных условиях учитывается влияние повышенного числа точек исследуемой области, что, как нам представляется, способствует повышению достоверности результатов.

Разработанная методика может быть использована для исследования динамических напряжений при скачкообразном изменении граничных условий, максимально приближенных к реальным типам закрепления в ряде инженерных сооружений.

В результате проведенных исследований можно заключить, что разработанная методика расчета применительно к нестационарным динамическим задачам с разрывными граничными условиями достаточно правильно передает основные закономерности и особенности протекающих волновых процессов и позволяет проводить исследование напряженно-деформированного состояния в однородных и слоисто-неоднородных средах со сложной системой неоднородностей рассмотренных типов.

#### Список литературы

- 1 *Ковшов А.Н.* Дифракция упругой волны на сферической полости. Численное решение // Известия АН СССР, Сер. Механика твердого тела. — 1979. — № 2. — С. 62–70.
- 2 *Петров И.Б., Холодов А.С.* Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Журн. вычислительной математики и математической физики. — 1984. — Т.24. — № 5. — С. 722–739.
- 3 *Аширбаев Н.К.* Численное решение плоской задачи с разрывами в граничных условиях // Вестн. КазНПУ им. Абая. Сер. Физико-математические науки. — 2010. — № 1 (29). — С. 50–54.
- 4 *Кукуджанов В.Н.* Деформирование, повреждаемость и разрушение сред и материалов с дефектами и со структурами дефектов // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н.И.Лобачевского. — 2011. — № 4 (4). — С. 1557–1558.
- 5 *Alexeeva L.A., Sarsenov B.T.* Mathematical model of massive dynamics in the neighborhood of disturbance focus // AIP Conference Proceedings. — 2015. — Vol. 1676. — [ER]. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930481>.
- 6 *Ashirbayev N., Ashirbayeva Zh., Shomanbayeva M.* Influence of heterogeneity of nature of border fixing on the propagation of two-dimensional waves // AIP Conference Proceedings. — 2015. — Vol. 1676. [ER]. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930493>.
- 7 *Clifton R.J.* A difference method for plane problems in dynamic elasticity // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 1967. — Vol. 25. — No. 1. — P. 97–116.

Н.Қ.Әшірбаев, Ж.Н.Әшірбаева, Ш.Е.Алтынбеков, М.Т.Шоманбаева

### Серпімді көптіреулі құрылымда динамикалық толқындардың таралу ерекшеліктері

Мақалада көлденең қимасы тіктөртбұрыш түрлі серпімді көптіреулі құрылымда динамикалық толқындардың таралу есебі қарастырылған. Кернеулер мен жылдамдықтар терминінде қойылған аралас есеп айқын айырымдық схема, атап айтқанда, сандық кеңістік сипаттамалар әдісімен шешілген. Зерттеудің негізгі міндеті — шекаралық шарттағы үзілісті нүктелердің серпімді органның ішкі нүктелеріндегі толқындық процестердің таралуына әсерін талдау. Шекаралық шарттағы үзілісті нүктелердің маңайында пайда болатын динамикалық кернеулердің концентрациясы зерттелген.

N.K.Ashirbayev, Zh.N.Ashirbayeva, Sh.E.Altynbekov, M.T.Shomanbayeva

## Features distribution of dynamic perturbations in an elastic multisupport construction

The article discusses the problem of propagation of dynamic perturbations in an elastic multibasic design is a rectangular strip. Formulated in terms of the stress and velocity mixed problem is simulated numerically using the explicit difference scheme through calculation based on the method of spatial characteristics. The main objective of this study is to analyze the impact of the gap in the boundary conditions on the distribution of wave processes in the interior of the study of the elastic medium. We consider the dynamic stress concentration in the vicinity of the gap boundary conditions.

### References

- 1 Kovshov A. N. *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR*, Ser. Mechanics of Solids, 1979, 2, p. 62–70.
- 2 Petrov I. B., Kholodov A. S. *Journal of the Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1984, 24, p.722–739.
- 3 Ashirbayev N.K. *Herald Abay KazNPU*, Ser. Physics and mathematics, 2010, 1 (29), p. 50–54.
- 4 Kukudzhanov V.N. *Bull. of the N.I.Lobachevsky Nizhny Novgorod University*, 2011, 4 (4), p. 1557–1558.
- 5 Alexeeva L.A., Sarsenov B.T. *AIP Conference Proceedings*, 2015, 1676, [ER]. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930481>.
- 6 Ashirbayev N., Ashirbayeva Zh., Shomanbayeva M. *AIP Conference Proceedings*, 2015, 1676, [ER]. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930493>.
- 7 Clifton R.J. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1967, 25, 1, p. 97–116.