УДК 517.929

А.Ш.Шалданбаев, М.Т.Шоманбаева

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауэзова, Шымкент
(E-mail: shaldanbaev51@mail.ru)

О существовании и единственности сильного решения антипериодической задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом

В статье доказана сильная разрешимость смешанной задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом и с однородными антипериодическими краевыми условиями $u_t(x,T-t)+u_{xx}(x,t)=f(x,t), \quad u|_{t=0}=0, u|_{x=0}+u|_{x=l}=u_x|_{x=0}+u_x|_{x=l}=0$ в пространстве $L_2(\Omega)$.

Ключевые слова: отклоняющийся аргумент, уравнение теплопроводности, спектральная задача, собственные функции, собственные значения.

Теории разрешимости параболических уравнений посвящено большое количество работ: достаточно отметить монографии [1-2]. Теории обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом посвящена монография [3]. Спектральные свойства краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом исследованы в работе [4]. В работе [5] установлена вольтерровость смешанной задачи для уравнения теплопроводности. При отклонении аргумента в уравнении теплопроводности появляется спектр, поэтому становится возможным использование спектральной теории линейных операторов. Работы [6-12] посвящены сильной разрешимости первой смешанной задачи, второй смешанной задачи, смешанной задачи с периодическими граничными условиями, смешанной задачи с периодическими граничными условиями и с младшим членом (периодическая задача СМЧ) для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом. В работах [12-13] охарактеризовано влияние младшего члена на сильную разрешимость периодической задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом. Сильная разрешимость полузакрепленной задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом исследована в работе [14].

В настоящей работе исследуется сильная разрешимость антипериодической задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^2$ — четырехугольник, ограниченный отрезками $AB: 0 \le t \le T, x=0; BC: 0 \le x \le l, t=T; CD: 0 \le t \le T, x=l; DA: 0 \le x \le l, t=0$.

Через $C^{2,1}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x,t)$, дважды непрерывно дифференцируемых по x и единожды непрерывно дифференцируемых по t в области Ω. Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \bigcup AD \bigcup CD$.

Антипериодическая задача. Найти решение уравнения

$$Lu = u_t(x,T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{x=0} + u|_{x=l} = u_x|_{x=0} + u_x|_{x=l} = 0, \tag{2}$$

и

$$u|_{t=0} = 0, \tag{3}$$

где $f(x,t) \in L_2(\Omega)$.

Определение 1. Регулярным решением задачи (1)–(3) будем называть функцию

$$u \in C^{2,1}(\Omega)\bigcap C(\bar{\Omega}),$$

обращающую в тождество уравнение (1) и краевые условия (2)-(3).

Определение 2. Функцию $u \in L_2(\Omega)$ назовем сильным решением задачи, если существует последовательность функций $\{u_n\} \in C^{2,1}(\Omega)\bigcap C(\bar{\Omega}),\ n = 1,\ 2,\ 3,\ ...,$ удовлетворяющая краевым условиям, такая, что $\{u_n\}$ и $\{Lu_n\}$, $\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ ...,$ сходятся в $L_2(\Omega)$ соответственно к u и f.

Определение 3. Краевая задача (1)–(3) называется сильно разрешимой, если сильное решение задачи существует для любой правой части $f(x,t) \in L_2(\Omega)$ и единственно [1].

Целью настоящей работы является доказательство сильной разрешимости краевой задачи (1)-(3) в пространстве $L_2(\Omega)$.

2 О спектре антипериодической задачи

2.1 О симметричности

Лемма 2.1. Оператор L, соответствующий краевой задаче (1)-(3), симметричен [2].

2.2 О базисности собственных векторов. Рассмотрим спектральную задачу, соответствующую нашей краевой задаче,

$$u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = \lambda u(x,t), \tag{4}$$

$$u|_{x=0} + u|_{x=l} = u_x|_{x=0} + u_x|_{x=l} = 0, \tag{5}$$

$$u|_{t=0} = 0. \tag{6}$$

Для решения этой задачи воспользуемся методом разделения переменных. Полагая

$$u(x,t) = v(t)\cdot w(x), \tag{7}$$

имеем:

$$u|_{t=0} = v(0)\cdot w(x) = 0,\ \Rightarrow\ v(0) = 0;$$

$$u|_{x=0} + u|_{x=l} = v(t)\cdot[w(0)+w(l)] = 0,\ \Rightarrow\ w(0)+w(l) = 0;$$
$$u_x|_{x=0} + u_x|_{x=l} = v(t)\cdot\left[w'(0)+w'(l)\right] = 0,\ \Rightarrow\ w'(0)+w'(l) = 0;$$

Подставив (7) в уравнение (4), получим:

$$v_t(T-t)\cdot w(x) + v(t)\cdot w''(x) = \lambda\cdot v(t)\cdot w(x);$$
$$\dot{v}(T-t)\cdot w(x) = v(t)\cdot[\lambda\cdot w(x) - w''(x)];$$
$$\frac{\dot{v}(T-t)}{v(t)} = \frac{\lambda w(x) - w''(x)}{w(x)} = \mu,$$

где μ — некоторая постоянная. Таким образом, если решение задачи (4)-(6) имеет вид (7), то функции $v(t)$ и $w(x)$ являются решениями спектральных задач:

a) $$-w''(x) = \gamma\cdot w(x), \qquad w(0)+w(l) = w'(0)+w'(l) = 0,$$

b) $$\dot{v}(T-t) = \mu\cdot v(t), \qquad v(0) = 0,$$

где $\gamma = \mu - \lambda$.

Лемма 2.2. Спектральная задача

$$-w''(x) = \gamma^2 w(x), \tag{8}$$

$$w(0) = w(l) = 0 \tag{9}$$

имеет бесконечное множество собственных значений

$$\gamma_n = (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

и соответствующих им собственных функций

$$w_n{}^-(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos(2n+1)\frac{\pi}{l}x, \quad w_n{}^+(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(2n+1)\frac{\pi}{l}x, \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \tag{10}$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L_2(0,\ l)$.

Доказательство. Найдем собственные значения антипериодической задачи. Общее решение уравнения (8) имеет вид: $w(x,\gamma) = A\cos\sqrt{\gamma}\ x + B\frac{\sin\sqrt{\gamma}x}{\sqrt{\gamma}}$, где A, B — произвольные постоянные, вообще говоря, зависящие от спектрального параметра γ. Подставив это выражение в граничное условие (9), имеем

$$A = -A\cos\sqrt{\gamma}l - B\frac{\sin\sqrt{\gamma}l}{\sqrt{\gamma}};$$

$$B = A\sqrt{\gamma}\sin\sqrt{\gamma}l - B\cos\sqrt{\gamma}l$$

или

$$A(1+\cos\sqrt{\gamma}l) + B\frac{\sin\sqrt{\gamma}l}{\sqrt{\gamma}} = 0;$$

$$-A\sqrt{\gamma}\sin\sqrt{\gamma}l + B(1+\cos\sqrt{\gamma}l) = 0.$$

Эта система уравнений имеет нетривиальное решение лишь для тех значений γ, при которых ее определитель обращается в нуль. Определителем этой системы будет

$$\Delta(\gamma) = \begin{vmatrix} (1+\cos\sqrt{\gamma}l) & \frac{\sin\sqrt{\gamma}l}{\sqrt{\gamma}} \\ -\sqrt{\gamma}\sin\sqrt{\gamma}l & (1+\cos\sqrt{\gamma}l) \end{vmatrix} = (1+\cos\sqrt{\gamma}l)^2 + \sin^2\sqrt{\gamma}l = 1 + 2\cos\sqrt{\gamma}l + 1 = 2(1+\cos\sqrt{\gamma}l).$$

Приравняв к нулю этот определитель, имеем

$$\cos\gamma\ l = -1, \sqrt{\gamma}l = 2n\pi + \pi,\ \sqrt{\gamma} = (2n+1)\frac{\pi}{l},$$

$$\gamma_n = (2n+1)^2\frac{\pi^2}{l^2}, \qquad n = 0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots$$

Изучим кратность найденных собственных значений. При $\gamma = (2n+1)^2\frac{\pi^2}{l^2}$ все элементы определителя $\Delta(\gamma)$ обращаются в нуль, следовательно, все собственные значения двукратны, т.е. каждому собственному значению отвечает пара собственных функций. Алгебраическая кратность собственных значений не меньше геометрической, и в самом деле

$$\left.\frac{d}{d\gamma}\Delta(\gamma)\right|_{\gamma=(2n+1)^2\frac{\pi^2}{l^2}} = -2\frac{l}{2\sqrt{\gamma}}\sin\sqrt{\gamma}l = -\frac{l}{(2n+1)\frac{\pi}{l}}\sin(2n+1)\pi = 0;$$

$$\frac{d^2}{d\gamma^2}\Delta(\gamma)\Big|_{\gamma=(2n+1)^2\frac{\pi^2}{l^2}} = \left(\frac{l}{\gamma\sqrt{\gamma}}\sin\sqrt{\gamma}l - \frac{l}{\sqrt{\gamma}}\frac{l}{2\sqrt{\gamma}}\cos\sqrt{\gamma}l\right) =$$

$$= -\frac{l^2}{(2n+1)^2\frac{\pi^2}{l^2}}\cos(2n+1)\pi == -\frac{l^4}{2(2n+1)^2\pi^2} \neq 0.$$

Все собственные значения двукратны (геометрически и алгебраически. Собственными функциями являются функции

$$\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(2n+1\right)\frac{\pi}{l}x, \quad \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(2n+1\right)\frac{\pi}{l}x, \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...$$

Каждому собственному значению $\gamma_n = (2n+1)^2\frac{\pi^2}{l^2}$ соответствует пара собственных функций. Заменив n на $-n, n = 1, 2, ...$, получим

$$\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(-2n+1\right)\frac{\pi}{l}x = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(2n-1\right)\frac{\pi}{l}x;$$

$$\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(-2n+1\right)\frac{\pi}{l}x = -\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(2n-1\right)\frac{\pi}{l}x.$$

Следовательно, отрицательные индексы не дают новых собственных функций, поэтому можем ограничиться неотрицательными индексами. Тригонометрическая система $\sin nt,\ \cos nt,\ n = 0, = 1,\ 2, ...$ полна в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ [3]. Ортогональность собственных функций спектральной задачи (8)–(9) является следствием ее симметричности. В силу теоремы Рисса-Фишера система собственных функций (10) образует ортонормированный базис пространства $L_2(0, l)$.

Лемма 2.3. Спектральная задача

$$\dot{v}(T-t) = \mu \cdot v(t), \tag{11}$$
$$v(0) = 0$$

имеет бесконечное множество собственных значений

$$\mu_n = (-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T}, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

и соответствующих им собственных функций

$$v_n\left(t\right) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi\ t}{T}, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \tag{12}$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L_2\left(0, T\right)$.

Лемма 2.4. Если система функций $\left\{\phi_m\left(x\right)\right\}$, $m = 1,\ 2,\ ...$, образует ортонормированный базис пространства $L_2\left(0, l\right)$, а система функций $\left\{\psi_n\left(t\right)\right\}$, $n = 1,\ 2, \ldots$, образует ортонормированный базис пространства $L_2\left(0, T\right)$, то система функций $u_{mn}\left(x, t\right) = \phi_m\left(x\right)\psi_n\left(t\right)$, $\quad m,\ n = 1,\ 2, \ldots$, образует ортонормированный базис пространства $L_2\left(\Omega\right)$, где $\Omega = [0, l] \times [0, T]$.

Из формул (7), (11), (12) следует, что собственными функциями спектральной задачи (4)- (5) являются функции

$$u_{mn}{}^{-}\left(x, t\right) = \frac{2}{\sqrt{Tl}}\cos\left(2m+1\right)\frac{\pi}{l}x \cdot \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T}t; \quad m,\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots;$$

$$u_{mn}{}^{+}(x,t)=\frac{2}{\sqrt{Tl}}\sin(2m+1)\frac{\pi}{l}x\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T}t;\quad m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

которые в силу леммы 2.4 образуют ортонормированный базис пространства $L_2(\Omega)$, где $\Omega = [0,l]\times[0,T]$.

Собственные значения λ_{mn} найдем по формуле

$$\lambda_{mn}=\mu_n-\gamma_m=(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T}-(2m+1)^2\frac{\pi^2}{l^2},\ \ m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots.$$

Теорема 2.1. Спектральная задача

$$Lu=u_t(x,T-t)+u_{xx}(x,t)=\lambda u(x,t),$$

$$u|_{t=0}=0;\qquad u|_{x=0}+u|_{x=l}=u_x|_{x=0}+u_x|_{x=l}=0$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\lambda_{mn}=\mu_n-\gamma_m=(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T}-(2m+1)^2\frac{\pi^2}{l^2},\ \ m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ ...,\tag{13}$$

и соответствующих им собственных функций

$$u_{mn}{}^{-}(x,t)=\frac{2}{\sqrt{Tl}}\cos(2m+1)\frac{\pi}{l}x\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T}t;\quad m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots;\tag{14}$$

$$u_{mn}{}^{+}(x,t)=\frac{2}{\sqrt{Tl}}\sin(2m+1)\frac{\pi}{l}x\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T}t;\quad m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots,\tag{15}$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L_2(\Omega)$, где $\Omega = [0,l]\times[0,T]$.

3. О существовании и единственности сильного решения антипериодической задачи

Рассмотрим линейный оператор, соответствующий краевой задаче (1)-(3):

$$Lu\ =\ u_t(x,T-t)+u_{xx}(x,t),$$

$$u|_{t=0}=0;\quad u|_{x=0}+u|_{x=l}=u_x|_{x=0}+u_x|_{x=l}=0.$$

Допустим, что при некотором $u\in D(L)$, $u\neq 0$, имеет место равенство $Lu=0$. Тогда в силу симметричности оператора L имеем

$$0=(Lu,\ u_{mn})=(u,\ Lu_{mn})=\lambda_{mn}(u,\ u_{mn})\,.$$

Если $\lambda_{mn}\neq 0$, то в силу полноты системы $\{u_{mn}\}$ получим $u=0$, что противоречит нашему предложению. Поэтому при некотором значении индексов имеет место равенство $\lambda_{mn}=0$. Обратно, если среди собственных значений есть нулевое собственное значение, то при некотором $u\neq 0$ имеет место равенство $Lu=0$. Для существования обратного оператора L^{-1} необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $\ker L=\{0\}$. Для выполнения этого условия необходимо и достаточно выполнение условия $\lambda_{mn}\neq 0$, $\forall\ m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots$. Очевидно, что

$$\lambda_{m,2n+1}=-\left(2n+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{T}-(2m+1)^2\frac{\pi^2}{l^2}\neq 0,\qquad m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots.$$

Поэтому необходимым и достаточным условием обратимости оператора будет условие

$$\lambda_{m,2n} = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T} - (2m+1)^2\frac{\pi^2}{l^2} \neq 0, \qquad m,\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

или, сократив на π, имеем

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n + \frac{1}{2}}{(2m+1)^2}, \qquad m,\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots.$$

При выполнении этого условия оператор L взаимно однозначно отображает множество $D(L)$ на $R(L)$, но об ограниченности обратного оператора L^{-1} речь не идет.

Теперь построим обратный оператор L^{-1}. Пусть $u \in D(L),\ f \in R(L)$ и имеет место равенство $Lu = f$. Разложив в ряд Фурье по системе $\{u_{mn}\}$ (значки опустим для удобства) левую и правую часть этого равенства [4], имеем

$$Lu = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(Lu, u_{mn}) \cdot u_{mn}(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{mn}(u, u_{mn}) \cdot u_{mn}(x,t);$$

$$f = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(f, u_{mn}) \cdot u_{mn}(x,t).$$

Сравнивая коэффициенты этих разложений, получим

$$(u, u_{mn}) = \frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}}.$$

Следовательно,

$$u(x,t) = L^{-1}f(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}} \cdot u_{mn}(x,t). \tag{16}$$

Полученное выражение (16) является сильным решением краевой задачи (1)–(3) [см. 5]. Для сильной разрешимости необходимо и достаточно выполнения условия $R(\overline{L}) = L_2(\Omega)$, т.е. область значения оператора $\overline{L}$ совпадает со всем пространством $L_2(\Omega)$ (разумеется, при существовании L^{-1}). Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.1. Для единственности сильного решения краевой задачи (1)-(3) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n + \frac{1}{2}}{(2m+1)^2}, \qquad m,\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots.$$

При выполнении этого условия сильное решение задачи существует и имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f, u_{mn}{}^{\pm})}{\lambda_{mn}} \cdot u_{mn}{}^{\pm}(x,t)$$

для всех $f(x,t) \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(f, u_{mn}{}^{\pm})}{\lambda_{mn}}\right|^2 < +\infty,$$

где $\lambda_{mn},\ u_{mn}{}^{-}(x,t),\ u_{mn}{}^{+}(x,t)$ задаются формулами (13)–(15).

4. О самосопряженности в существенном операторе L

Лемма 4.1. Если симметрический оператор A имеет полную систему собственных векторов, то замыкание этого оператора $\overline{A}$ самосопряжено в H, иначе говоря, оператор A самосопряжен в существенном.

Доказательство подробно изложено в работе [5]. Наш оператор удовлетворяет всем условиям этой леммы, поэтому имеет место

Теорема 4.1. Оператор

$$Lu \ = \ u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t),$$
$$u|_{t=0} = u|_{x=0} + u|_{x=l} = u_x|_{x=0} + u_x|_{x=l} = 0$$

самосопряжен в существенном в пространстве $H = L_2(\Omega)$, где $\Omega \ = [0,l]\times[0,T]$ — прямоугольник, лежащий на верхней полуплоскости $(x,t) \in R^2$.

Из теорем 3.1 и 4.1 следует

Теорема 4.2. Если

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n+\frac{1}{2}}{(2m+1)^2}, \qquad m, \ n = 0, \ 1, \ 2, \ldots,$$

то обратный оператор L^{-1} существует и самосопряжен.

Доказательство. Существование оператора $\overline{L}^{\,-1}$ следует из теоремы 3.1, остальное — из цепочки равенств $\left(\overline{L}^{\,-1}\right)^* = \left(\overline{L}^{\,*}\right)^{-1} = \left(\overline{L}\,\right)^{-1}$, в которой использована теорема 4.1 и известная лемма $\left(A^{-1}\right)^* = (A^*)^{-1}$.

Список литературы

1 *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М. Наука, 1967.

2 *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир. 1968.

3 *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Наука, 1971. — 296 с.

4 *Кальменов Т.Ш.* Спектральные свойства краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Автоматизированные системы и родственные проблемы анализа: Сб. науч. тр. — Нальчик, 1989. — С. 146-149.

5 *Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т.* О вольтерровости оператора теплопроводности // Поиск. Сер. естеств. и техн. наук. — 2006. — № 4. — С. 166 – 169.

6 *Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т.* О сильной разрешимости смешанной задачи с условием Дирихле для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом // Наука и образование Южного Казахстана. Сер. физ., мат., инф. — 2006. — № 10(59). — С. 133-136.

7 *Шоманбаева М.Т.* О спектральных свойствах оператора теплопроводности // Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики: тез. докл. междунар. науч. конф. — Алматы, 2005. — С. 220.

8 *Шоманбаева М.Т.* О задаче Неймана для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом // Поиск. Серия естеств. и техн. наук. — 2006. — № 3. — С. 179–183.

9 *Шоманбаева М.Т.* О природе спектра оператора Коши-Неймана для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом // Наука и образование Южного Казахстана. Сер. физ., мат., инф. — 2006. — № 10(59). — С. 137–140.

10 *Кальменов Т.Ш., Шоманбаева М.Т.* Об одном критерии существования сильного решения задачи Коши-Неймана для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения: Тез. докл. междунар. конф. — Новосибирск, 2007. — С. 183–184.

11 *Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т.* О существовании и единственности сильного решения периодической задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом // Математический журнал. — 2007. — Т.7. — №4(26) — С. 44–50.

12 *Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т.* О природе спектра оператора периодической задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом // Математический журнал. — 2008. — Т.8. — №1 (27). — С. 40–49.

13 *Orazov I., Shaldanbayev A., Shomanbayeva M.* About the nature of the spectrum of the periodic problem for the heat equation with a deviating argument // Abstract and Applied Analysis. — Vol. 2013. — P. 16. — [ER]. Acces mode: http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363.

14 *Шоманбаева М.Т.* Критерий сильной разрешимости полузакрепленной задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом // Поиск. Серия естеств. и техн. наук. —- 2010. — № 1(1). —- С. 141-–144.

А.Ш.Шалданбаев, М.Т.Шоманбаева

Аргументі ауытқитын жылу теңдеуі үшін антипериодикалық есебінің шешімі бар және жалғыз болуы жөнінде

Мақалада аргументі ауытқитын жылу теңдеуінің $u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t)$, $u|_{t=0} = 0$, $u|_{x=0} + u|_{x=l} = u_x|_{x=0} + u_x|_{x=l} = 0$, антипериодикалық шекаралық шарты бар есебінің шешілуі дәлелденген. Бұл есептің $L_2(\Omega)$ кеңістікте шешімінің бар және жалғыз болуының шарты табылған.

A.Sh.Shaldanbayev, M.T.Shomanbayeva

About the existence and uniqueness of strong solution of the antiperiodic problem for the heat equation with deviating argument

In this paper we have proved the strong solvability of a mixed problem for the heat equation with deviating argument and with the antiperiodic homogeneous boundary conditions $u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t)$, $u|_{t=0} = 0$, $u|_{x=0} + u|_{x=l} = u_x|_{x=0} + u_x|_{x=l} = 0$, in the space $L_2(\Omega)$.

References

1 Ladyzhenskaya O.A., SolonnikovV. A., Uraltseva N.N. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Moscow: Izdat. Nauka, 1968; Engl. trans., Translations of Mathematical Monographs, 23. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1967.

2 Friedman A. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Moscow: Izdat. Mir, 1968.

3 Elsgolts L.E., Norkin S.B. *Introduction to the theory of differential equations with deviating argument*, Ed. 2nd, Revised. and ext, Moscow: Nauka, 1971, p. 296.

4 Kalmenov T.Sh. *Automated systems and related problems of analysis: Collection of scientific papers - Nalchik*, 1989, p. 146–149.

5 Shaldanbayev A.Sh., Shomanbayeva M.T. *Poisk*, Ser. of natural and technical sciences, 2006, 4, p. 166–169.

6 Shaldanbayev A.Sh., Shomanbayeva M.T. *Science and Education of South Kazakhstan*, Ser. phys., mat., inf., 2006, 10(59), p. 133–136.

7 Shomanbayeva M.T. *Abstracts of the International Scientific Conference. «Actual problems of differential equations and mathematical physics»*, Almaty, 2005, p. 220.

8 *Shomanbayeva M.T. Poisk*, Ser. of natural and technical sciences, 2006, 3, p. 179 –183.

9 *Shomanbayeva M.T. Science and Education of South Kazakhstan*, Ser. phys., mat., inf.,2006, 10(59), p. 137–140.

10 Kalmenov T.Sh., Shomanbayeva M.T. *Abstracts of the International Conf. «Differential Equations, Theory of functions and applications»*, Novosibirsk, 2007, p. 183–184.

11 Kalmenov T.Sh., Shaldanbayev A.Sh., Shomanbayeva M.T. *Mathematical Journal*, Almaty, 2007, 7, 4(26), p. 44–50.

12 Kalmenov T.Sh., Shaldanbayev A.Sh., Shomanbayeva M.T. *Mathematical Journal*, Almaty, 2008, 8, 1 (27), p. 40–49.

13 Orazov I., Shaldanbayev A., Shomanbayeva M. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, p. 6, [ER]. Access mode: http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363.

14 Shomanbayeva M.T. *Poisk*, Ser. of natural and technical sciences, 2010, 1(1), p. 141-–144.