УДК 517.95

Д.М.Ахманова, А.Е.Омирбекова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: danna.67@mail.ru)

Об интегральном уравнении Вольтерра с дельтаобразным ядром

В статье рассмотрено сингулярное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, к которому редуцируется ряд краевых задач для нагруженных уравнений теплопроводности. Ввиду неограниченности промежутка интегрирования и дельтаобразности ядра к нему не применим метод последовательных приближений. Построено соответствующее характеристическое уравнение, решение которого найдено в явном виде. Для исходного уравнения применен метод равносильной регуляризации, найден его спектр.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, норма оператора, метод регуляризации Карлемана-Векуа.

Рассматривается интегральное уравнение с переменными пределами интегрирования

$$\tilde{K}_{2\lambda}\tilde{v} \equiv \left(I-\lambda\tilde{K}_2\right)\tilde{v} \equiv \tilde{v}(t)-\lambda\int_t^{\infty}\tilde{K}_2(\tau,t)\tilde{v}(\tau)\,d\tau=\tilde{g}_1(t), \quad t\in R_+, \tag{1}$$

где

$$\tilde{K}_2(\tau,t)=e^{-(t-\tau)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/2-\omega}\cdot\frac{\tau^{\omega}}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}\right), \quad \omega<\frac{1}{2},$$

которое возникает при решении граничных задач для спектрально-нагруженных уравнений параболического типа [1, 2].

При исследовании уравнения (1) достаточно рассмотреть «упрощенное» интегральное уравнение [3]

$$K_{2\lambda}v \equiv \left(I-\lambda K_2\right)v \equiv v(t)-\lambda\int_t^{\infty}K_2(\tau,t)v(\tau)\,d\tau=g_1(t), \quad t\in R_+, \tag{2}$$

где

$$K_2(\tau,t)=\left(\frac{t}{\tau}\right)^{3/2-\omega}\cdot\frac{\tau^{\omega}}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}\right), \quad \omega<\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Ядро интегрального уравнения (2) — функция $K_2(\tau,t)$ обладает следующим свойством:

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{\infty}K_2(\tau,t)\,d\tau=1. \tag{4}$$

Действительно, так как $t<\tau<\infty,$ это следует из соотношений

$$\int_t^{\infty}\frac{\tau^{\omega}}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}}\cdot e^{-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}}d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}\left\{\left[\frac{\tau^{\omega}}{4(\tau-t)^{3/2}}-\frac{\omega\cdot\tau^{\omega-1}}{2\sqrt{\tau-t}}\right]+\frac{\omega\cdot\tau^{\omega-1}}{2\sqrt{\tau-t}}\right\}e^{-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}}d\tau=$$

$$=\left\|\frac{\tau^{\omega}}{2\sqrt{\tau-t}}=z; \qquad dz=\left(-\frac{\tau^{\omega}}{4(\tau-t)^{3/2}}+\frac{\omega\cdot\tau^{\omega-1}}{2\sqrt{\tau-t}}\right)d\tau\right\|=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}\frac{\omega\cdot\tau^{\omega-1}}{\sqrt{\tau-t}}\cdot e^{-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}}d\tau=1+I(t)=$$

$$=\left|I(t)\right|=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}\frac{|\omega|\cdot\tau^{\omega-1}}{\sqrt{\tau-t}}\cdot e^{-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}}d\tau=\left\|\tau=\frac{t}{x};\;\; d\tau=-\frac{t}{x^2}dx\right\|=$$

$$=\frac{\omega}{\sqrt{\pi}}\int_0^1\frac{t^{\omega-1}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot t}{x^{\omega-1}\cdot\sqrt{1-x}\cdot x^2\cdot t^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{-\frac{t^{2\omega}\cdot x}{4x^{2\omega}\cdot t(1-x)}}dx=\frac{|\omega|}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{t^{\frac{1}{2}-\omega}}\cdot\int_0^1\frac{1}{x^{\omega+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1-x}}\cdot e^{-\frac{1}{t^{1-2\omega}}\cdot\frac{x^{1-2\omega}}{4(1-x)}}dx\le$$

$$\leq \frac{|\omega|}{\sqrt{\pi}} \cdot t^{\frac{1}{2}-\omega} \cdot \int_0^1 x^{\left(\frac{1}{2}-\omega\right)-1} (1-x)^{\frac{1}{2}-1} dx = \frac{|\omega|}{\sqrt{\pi}} \cdot B(1/2-\omega, 1/2) \cdot t^{\omega-1/2},$$

где $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функция Эйлера.

Таким образом, $\lim\limits_{t\to\infty} |I(t)| = 0$ при $\omega < 1/2$. Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty \frac{\tau^\omega}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\tau^{2\omega}}{4(\tau-t)}} d\tau = 1.$$

Равенство (4) справедливо и для ядра $\tilde{K}_2(\tau,t)$, это означает, что норма интегрального оператора, действующего в пространстве суммируемых функций и определяемого ядром $\tilde{K}_2(\tau,t)$, равна единице. Это существенно отличает уравнение (2) от уравнений Вольтерра второго рода, для которых решение существует и единственно.

Для исследования интегрального уравнения (2) рассмотрим соответствующее характеристическое уравнение, которое имеет вид

$$K_\lambda v \equiv (I - \lambda K) v \equiv v(t) - \lambda \int_t^\infty K(\tau,t) v(\tau) d\tau = g_1(t), \quad t \in R_+, \tag{5}$$

где

$$K(\tau,t) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2} \cdot \frac{\alpha^{3/2}\tau^{\alpha-1}}{2\sqrt{\pi}\left(\tau^\alpha - t^\alpha\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{4\left(\tau^\alpha - t^\alpha\right)}\right). \tag{6}$$

Здесь для сокращения записи введено обозначение

$$\alpha = 1 - 2\omega.$$

Всюду в дальнейшем будем учитывать, что $\alpha > 0$, так как $-\infty < \omega < 1/2$.

Отметим,что ядро характеристического уравнения $K(\tau,t)$ обладает теми же свойствами, что и ядро $K_2(\tau,t)$, и, в частности, для него справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty K(\tau,t) d\tau = 1. \tag{7}$$

Проверим его справедливость $(\alpha > 0)$. Имеем

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2} \cdot \frac{(\alpha)^{3/2} \cdot \tau^{\alpha-1}}{2\pi\left(\tau^\alpha - t^\alpha\right)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{4\left(\tau^\alpha - t^\alpha\right)}} d\tau = \left\| \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\tau^\alpha - t^\alpha}} = z; \quad dz = -\frac{\sqrt{\alpha}}{4} \frac{\alpha \cdot \tau^{\alpha-1}}{\left(\tau^\alpha - t^\alpha\right)^{3/2}} d\tau \right\| =$$

$$= \left\| \tau^\alpha = t^\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{4t^\alpha \cdot z^2}\right) \right\| = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4t^\alpha \cdot z^2}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}}} \cdot e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz = 1.$$

Для того чтобы интегральное уравнение (5) было характеристическим, оно должно удовлетворять следующим двум условиям:

1^0. Оно должно сводиться к «эталонному» уравнению (интегральному уравнению, соответствующему случаю $\omega = 0$) [4].

2^0. Разность ядер

$$K_2(\tau,t) - K(\tau,t) = \tilde{K}(\tau,t)$$

должна обладать слабой особенностью (при $t \to \infty$).

Проверим выполнение условия 1^0. Для этого в уравнении (5) произведем следующие замены независимых переменных:

$$t = [\alpha \cdot t_1]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \tau = [\alpha \cdot \tau_1]^{\frac{1}{\alpha}}$$

и введем обозначения:

$$\psi(t_1)=t_1^{-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}}v\left(\left[\alpha\cdot t_1\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right),\quad g_2(t_1)=t_1^{-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}}g_1\left(\left[\alpha\cdot t_1\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right);$$

$$k^*(z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{4z}\right);\quad z>0.$$

Тогда уравнение (5) запишется в виде

$$k_\lambda^*\psi\equiv\left(I-\lambda k^*\right)\psi\equiv\psi(t_1)-\lambda\int_{t_1}^{\infty}k(\tau_1-t_1)\psi(\tau_1)d\tau_1=g_2(t_1). \tag{8}$$

Действительно (с учетом $d\tau=\alpha^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\tau_1^{\frac{1}{\alpha}-1}d\tau_1=\alpha^{\frac{1}{\alpha}-1}\cdot\tau_1^{\frac{1}{\alpha}-1}d\tau_1$) имеем

$$\begin{aligned}\psi(t_1)-\lambda\int_{t_1}^{\infty}\frac{\alpha^{3/2}\left[\alpha\tau_1\right]^{-\frac{1}{\alpha}+1}\alpha^{\frac{1}{\alpha}-1}\cdot\tau_1^{\frac{1}{\alpha}-1}}{2\sqrt{\pi}\alpha^{3/2}\left(\tau_1-t_1\right)^{3/2}}\exp\left[-\frac{\alpha}{\alpha\cdot 4\left(\tau_1-t_1\right)}\right]\psi(\tau_1)d\tau_1=\\ =\psi(t_1)-\lambda\int_{t}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi}\left(\tau_1-t_1\right)^{3/2}}\exp\left[-\frac{1}{4\left(\tau_1-t_1\right)}\right]\psi(\tau_1)d\tau_1=g_2(t_1).\end{aligned} \tag{9}$$

Теперь переходим к доказательству справедливости условия 2^0, которая следует из утверждения следующей теоремы.

Теорема 1. При выполнении условий $\alpha>0$ и $0<t<\tau<\infty$ имеет место оценка.

$$\left|K_2(\tau,t)-K(\tau,t)\right|\le C(\alpha)\frac{t^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\tau^{3/2}\sqrt{\tau-t}}\cdot\exp\left[-C(\alpha)\frac{\tau^{1-\alpha}}{\tau-t}\right] \tag{10}$$

и выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t}^{\infty}\left|K_2(\tau,t)-K(\tau,t)\right|d\tau=0.$$

Для доказательства этой теоремы и для того, чтобы более проще показать то, что интегральное уравнение (5) с бесконечным пределом интегрирования является характеристическим для уравнения (2), удобнее свести уравнения (2) и (5) к уравнениям на конечном промежутке $(0,t)$. Для этого в интегральных уравнениях (2) и (5) произведем следующие замены независимых переменных:

$$t=1/t_1,\quad \tau=1/\tau_1,$$

и тогда они запишутся, соответственно, в виде

$$v(t_1)-\lambda\int_0^{t_1}\left(\frac{\tau_1}{t_1}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}\frac{t_1^{3/2}\cdot\tau_1^{\frac{\alpha}{2}-1}}{2\sqrt{\pi}\left(t_1-\tau_1\right)^{3/2}}\exp\left[-\frac{t_1\cdot\tau_1^{\alpha}}{4\left(t_1-\tau_1\right)}\right]v(\tau_1)d\tau_1=g_1(t_1); \tag{11}$$

$$v(t_1)-\lambda\int_0^{t_1}\left(\frac{\tau_1}{t_1}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}\frac{\alpha^{3/2}t_1^{\frac{3\alpha}{2}}\cdot\tau_1^{\frac{\alpha}{2}-1}}{2\sqrt{\pi}\left(t_1^{\alpha}-\tau_1^{\alpha}\right)^{3/2}}\exp\left[-\frac{\alpha t_1^{\alpha}\cdot\tau_1^{\alpha}}{4\left(t_1^{\alpha}-\tau_1^{\alpha}\right)}\right]v(\tau_1)d\tau_1=g_1(t_1). \tag{12}$$

Переобозначая переменные t_1 и τ_1 снова соответственно через t и τ и обозначая ядра уравнений (11) и (12) через $K_2^{'}(t,\tau)$ и $K(t,\tau)$, представим их в виде

$$K_2^{'}(t,\tau)=P_2^{'}(t,\tau)\exp\left\{-Q_2^{'}(t,\tau)\right\};\ K^{'}(t,\tau)=P^{'}(t,\tau)\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\}, \tag{13}$$

где

$$P_2^{'}(t,\tau)=\frac{t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}}\cdot\tau^{\alpha}}{2\sqrt{\pi}\left(t-\tau\right)^{3/2}};\quad Q_2^{'}(t,\tau)=\frac{t\cdot\tau^{\alpha}}{4\left(t-\tau\right)};$$

$$P^{'}(t,\tau)=\frac{\alpha^{3/2}t^{\alpha-1}\cdot\tau^{\alpha}}{2\sqrt{\pi}\left(t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\right)^{3/2}};\quad Q^{'}(t,\tau)=\frac{\alpha\cdot t^{\alpha}\cdot\tau^{\alpha}}{4\left(t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\right)}.$$

Отметим, что для ядер $K_2^{'}(t,\tau)$ и $K(t,\tau)$ также выполняются предельные соотношения

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t K_2^{'}(\tau,t)\,d\tau=1;\ \lim_{t\to 0}\int_0^t K^{'}(\tau,t)\,d\tau=1. \qquad (14)$$

и справедлива следующая

Теорема 2. При выполнении условий $\alpha>0$ и $0<\tau<t<\infty$ выполняется оценка

$$K_0^{'}(\tau,t)=\left|K^{'}(\tau,t)-K_2^{'}(\tau,t)\right|\le C(\alpha)\,\frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\tau-t}}\cdot\exp\left[-C(\alpha)\,\frac{t\cdot\tau^{\alpha}}{t-\tau}\right] \qquad (15)$$

и верно следующее соотношение:

$$\lim_{t\to 0}\int_t^t\left|K^{'}(t,\tau)-K_2^{'}(t,\tau)\right|d\tau=0.$$

Вначале докажем следующую лемму.

Лемма 1. При выполнении условий теоремы 2 справедливы неравенства

$$P_0^{'}(t,\,\tau)=\left|P^{'}(t,\,\tau)-P_2^{'}(t,\,\tau)\right|\le C(\alpha)\,\frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}}; \qquad (16)$$

$$Q_0^{'}(t,\,\tau)=\left|Q_2^{'}(t,\,\tau)-Q^{'}(t,\,\tau)\right|\le C_2(\alpha)\cdot t^{\alpha}. \qquad (17)$$

Доказательство леммы. Покажем справедливость (16). Имеем

$$t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{t-\tau}\cdot\left|P^{'}(t,\,\tau)-P_2^{'}(t,\,\tau)\right|=$$

$$=t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{t-\tau}\cdot\left|\frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}\cdot\tau^{\alpha}}{2\pi(t-\tau)^{3/2}}-\frac{\alpha^{3/2}\cdot t^{\alpha-1}\cdot\tau^{\alpha}}{2\pi\left(t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\right)^{3/2}}\right|=$$

$$=\frac{t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{t-\tau}\cdot t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\tau^{\alpha}\cdot\left|\frac{t^{1-\alpha}\left(t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\right)^{3/2}-\alpha^{3/2}\cdot t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}\cdot(t-\tau)^{3/2}}{(t-\tau)^{3/2}\cdot\left(t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\right)^{3/2}}\right|=$$

$$=\frac{\tau^{\alpha}}{2\sqrt{\pi}}\left|\frac{t^{1-\alpha}\left(t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\right)^{3/2}-\alpha^{3/2}\cdot t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}\cdot(t-\tau)^{3/2}}{(t-\tau)\cdot\left(t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\right)^{3/2}}\right|=\left\|\tau=x\cdot t,\quad 0<x<1\right\|=$$

$$=\frac{x^{\alpha}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\left|\frac{\left(1-x^{\alpha}\right)^{3/2}-\alpha^{3/2}\cdot(1-x)^{3/2}}{(1-x)\cdot\left(1-x^{\alpha}\right)^{3/2}}\right|=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot P_0^{'}(x).$$

Функция $P_0^{'}(x)$ непрерывна для всех значений x при $0\le x<1$, но имеет особенность при $x=1$. Поэтому вычислим

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{\left(1-x^{\alpha}\right)^{3/2}-\alpha^{3/2}(1-x)^{3/2}}{(1-x)\left(1-x^{\alpha}\right)^{3/2}}\right|=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\left|\frac{1-\alpha^{3/2}\left(\dfrac{1-x}{1-x^{\alpha}}\right)}{1-x}\right|=\lim_{x\to 1}\left|\frac{1-x^{\frac{3}{2}-\frac{3\alpha}{2}}}{1-x}\right|=3\left|\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right|.$$

Теперь докажем неравенство (17). Имеем

$$t^{-\alpha}Q_0^{'}(t,\,\tau)=t^{-\alpha}\,\frac{1}{\alpha}\cdot\left|\frac{t\cdot\tau^{\alpha}}{4(t-\tau)}-\frac{\alpha\cdot t^{\alpha}\cdot\tau^{\alpha}}{4\left(t^{\alpha}-\tau^{\alpha}\right)}\right|=\left\|\tau=t\cdot x,\ 0<x<1\ \right\|=$$

$$=\frac{x^{\alpha}}{4}\cdot\left|\,\frac{1}{1-x}-\frac{\alpha}{1-x^{\alpha}}\right|=\frac{x^{\alpha}}{4}\cdot\left|\frac{1-x^{\alpha}-\alpha+x\alpha}{(1-x)\left(1-x^{\alpha}\right)}\right|.$$

Функция $Q_0^{'}(t, t\,x) = Q_0^{'}(x)$ монотонна, $Q_0^{'}(0) = 0$ и непрерывна для всех значений $x \in (0,1)$, имеет особенность лишь в точке $x = 1$.

Вычислим

$$\lim_{x\to 1-0} Q_0^{'}(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^{\alpha}}{4}\left|\frac{x\alpha - (x^{\alpha} + \alpha - 1)}{(1-x)(1-x^{\alpha})}\right| = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{4}\lim_{x\to 1-0}\left|\frac{\alpha - \alpha\cdot x^{\alpha-1}}{-(1-x^{\alpha}) - \alpha x^{\alpha-1}(1-x)}\right| =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{4}\lim_{x\to 1-0}\left|\frac{(1-\alpha)\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-2}}{\alpha\cdot x^{\alpha-1} + (1-\alpha)\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-2}(1-x) + \alpha\cdot x^{\alpha-1}}\right| = \frac{1}{4}\left|\frac{(1-\alpha)\cdot\alpha}{2\cdot\alpha}\right| = \frac{|1-\alpha|}{8},$$

т.е. $C_2^{'} = |1-\alpha|/8$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Приведем доказательство для тех значений параметра α и $0 < \tau < t < \infty$, для которых разность $Q^{'}(t, \tau) - Q_2^{'}(t, \tau) \ge 0$. А для тех значений параметра α и $0 < \tau < t < \infty$, для которых разность $Q^{'}(t, \tau) - Q_2^{'}(t, \tau) < 0$, достаточно будет в доказательстве поменять ролями функции $Q^{'}(t, \tau)$ и $Q_2^{'} = (t,\tau)$; $P^{'}(t,\tau)$ и $P_2^{'}(t, \tau)$ соответственно.

$$\left|K^{'}(t,\tau) - K_2^{'}(t,\tau)\right| = \left|P^{'}(t,\tau)\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\} - P_2^{'}(t,\tau)\exp\left\{-Q_2^{'}(t,\tau)\right\}\right| =$$

$$= \left|P^{'}(t,\tau)\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\} - P_2^{'}(t,\tau)\exp\left\{-Q_2^{'}(t,\tau)\right\} + P_2^{'}(t,\tau)\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\} - P_2^{'}(t,\tau)\exp\left\{-Q_2^{'}(t,\tau)\right\}\right| \le$$

$$\le \left|\left(P^{'}(t,\tau) - P_2^{'}(t,\tau)\right)\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\} + P_2^{'}(t,\tau)\left[\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\} - \exp\left\{-Q_2^{'}(t,\tau)\right\}\right]\right| \le$$

$$\le \left|\left(P^{'}(t,\tau) - P_2^{'}(t,\tau)\right)\right|\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\} + \left|P_2^{'}(t,\tau)\right|\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\}\left|\left(1 - \exp\left(-Q_2^{'}(t,\tau)\right) + Q^{'}(t,\tau)\right)\right| \le$$

$$\le \left|\left(P^{'}(t,\tau) - P_2^{'}(t,\tau)\right)\right|\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\} + P_2^{'}(t,\tau)\left|\left(-Q_2^{'}(t,\tau)\right) + Q^{'}(t,\tau)\right|\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\}.$$

Используя лемму (1) и следующее двойное неравенство [4; 55]:

$$b_1\cdot t^{\alpha-1}(t-\tau) \le t^{\alpha} - \tau^{\alpha} \le b_2\cdot t^{\alpha-1}(t-\tau), \tag{18}$$

где

$$b_1 = \min\{1, \alpha\}, \quad b_2 = \max\{1, \alpha\},$$

вначале получим

$$\exp\left\{-Q^{'}(t, \tau)\right\} = \exp\left\{-\frac{\alpha\cdot t^{\alpha}\cdot\tau^{\alpha}}{4(t^{\alpha} - \tau^{\alpha})}\right\} \le \exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t^{\alpha}\cdot\tau^{\alpha}}{t^{\alpha-1}(t-\tau)}\right\} = \exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t\cdot\tau^{\alpha}}{4(t^{\alpha} - \tau^{\alpha})}\right\}.$$

Далее имеем

$$\left|\left(P^{'}(t,\tau) - P_2^{'}(t,\tau)\right)\right|\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\} \le C_1\cdot\frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}}\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t\cdot\tau^{\alpha}}{4(t-\tau)}\right\};$$

$$P_2^{'}(t,\tau)\left|\,Q_2^{'}(t,\tau) - Q^{'}(t,\tau)\right|\cdot\exp\left\{-Q^{'}(t,\tau)\right\} \le$$

$$\le C_2\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}\cdot\tau^{\alpha}\cdot t^{\alpha}}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t\cdot\tau^{\alpha}}{8(t-\tau)}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t\cdot\tau^{\alpha}}{8(t-\tau)}\right\} \le$$

$$\le C_2\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}\cdot\tau^{\alpha}\cdot t^{\alpha}}{2\sqrt{\pi}\cdot(t-\tau)^{3/2}}\cdot\frac{b_2\cdot(t-\tau)}{t\cdot\tau^{\alpha\cdot\alpha}}\cdot\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t\cdot\tau^{\alpha}}{8(t-\tau)}\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t\tau^{\alpha}}{8(t-\tau)}\right\}\cdot\exp\left\{\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t\cdot\tau^{\alpha}}{8(t-\tau)}\right\} \le$$

$$\le \left\|x\cdot e^{-x} \le \frac{1}{e}\right\| \le C_3\cdot\frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}}\cdot\exp\left\{\frac{\alpha}{b_2}\cdot\frac{t\cdot\tau^{\alpha}}{8(t-\tau)}\right\}.$$

Таким образом, получим

$$\left|K^{'}(t,\tau) - K_2^{'}(t,\tau)\right| \le C\frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{-C\cdot\frac{t\cdot\tau^{\alpha}}{t-\tau}\right\}.$$

Выполнение неравенства (15) означает, что ядро

$$K_0'(t,\tau)=K_2'(t,\tau)-K'(t,\tau)$$

имеет слабую особенность и справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}}\cdot\exp\left\{-C\cdot\frac{t\cdot\tau^{\alpha}}{(t-\tau)}\right\}d\tau \le \lim_{t\to 0}\int_0^t \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau=0,$$

значит, уравнение (5) действительно является характеристическим для уравнения (2).

Таким образом, теорема 2, а тем самым и теорема 1 доказаны.

Как было отмечено ранее, если в характеристическом интегральном уравнении (5) произвести замены независимых переменных $(\alpha=1-2\omega>0)$:

$$t=[\alpha t_1]^{1/\alpha},\quad \tau=[\alpha\tau_1]^{1/\alpha}$$

и ввести обозначения

$$\tilde{\psi}(t_1)=v\left([\alpha t_1]^{1/\alpha}\right),\qquad \tilde{g}_2(t_1)=g\left([\alpha t_1]^{1/\alpha}\right); \tag{19}$$

$$k(z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{4z}\right), \tag{20}$$

то получим следующее эталонное интегральное уравнение [4]:

$$k_\lambda^*\tilde{\psi}\equiv\left(I-\lambda k^*\right)\tilde{\psi}\equiv\tilde{\psi}(t)-\lambda\int_{t_1}^{\infty}\left(\frac{t_1}{\tau_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}}\cdot k(\tau_1-t_1)\tilde{\psi}(\tau_1)d\tau_1=\tilde{g}_2(t_1); \tag{21}$$

$$0<t_1<\tau_1<\infty.$$

Используя его решение, запишем решение характеристического интегрального уравнения (5) в виде $(\alpha>0)$

$$v(t)=\tilde{\psi}\left(\left[\alpha^{-1}t^{\alpha}\right]\right)=g_1(t)+\lambda\int_t^{\infty}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}\cdot\tau^{\alpha-1}\cdot r_{\lambda-}\left(\left[\alpha^{-1}\tau^{\alpha}\right]\right)-$$

$$-\left[\alpha^{-1}\tau^{\alpha}\right]g_1(\tau)d\tau+\sum_{k=-N_1}^{N_2}c_k t^{1+\alpha/2}\cdot\exp\left(\frac{-iz_k}{\alpha}\cdot t^{\alpha}\right),\quad t\in R_+\ (*),$$

где

$$r_{\lambda-}(y)=\frac{1}{2\pi(-\theta)^{3/2}}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\lambda^m\cdot\exp\left(\frac{m^2}{4y}\right),\ |\lambda|<1,\quad y\in R_-;$$

$$r_{\lambda-}(y)=2\sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)}\sqrt{-p_k}\cdot\exp(p_k\cdot y)+2\sum_{k=N_2+1}^{\infty}\sqrt{-p_k}\cdot\exp(p_k\cdot y)+$$

$$+\frac{1}{2\pi(-y)^{3/2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m}{\lambda^m}\cdot\exp\left(\frac{m^2}{4y}\right),\qquad \operatorname{Re}p_k>0,\ |\lambda|\ge 1,\quad y\in R_- -$$

$$-N_1\le k\le N_2,\quad N_1=\left[\frac{\ln|\lambda|+\arg\lambda}{2\pi}\right],\quad N_2=\left[\frac{\ln|\lambda|-\arg\lambda}{2\pi}\right].$$

Линии, описываемые уравнением $|\lambda|=\exp\left(|\arg\lambda+2k\pi|\right)$, делят комплексную плоскость параметра λ на непересекающиеся области D_m, $m=0,1,2,\ldots,$ следующим образом:

$$D_{2n}=\left\{D_n^{(1)}\bigcap D_n^{(2)}\right\}\setminus\bigcup_{k=-1}^{2n-1}D_k;\quad D_{-1}=\varnothing,\ D_{2n+1}=\left\{D_n^{(1)}\bigcup D_n^{(2)}\right\}\setminus\bigcup_{k=0}^{2n}D_k; \tag{22}$$

где

$$D_n^{(1)}=\left\{\lambda:|\lambda|<\exp\left[(2n+1)\pi-\arg\lambda\right]\right\},\quad D_n^{(2)}=\left\{\lambda:|\lambda|<\exp\left[2n\pi+\arg\lambda\right]\right\},\ n=0,1,2,\ldots$$

Внешние части границ ∂D_m, $m=0,1,2,...,$ областей D_m, $m=0,1,2,...,$ обозначим, соответственно, через Γ_m, $m=0,1,2,...$

Теперь найдем решение исходного интегрального уравнения методом регуляризации Карлемана-Векуа. Введем обозначение

$$\tilde{K}(\tau,t)=K_2(\tau,t)-K(\tau,t) \tag{23}$$

и запишем исходное интегральное уравнение (2) в виде

$$\tilde{\mathrm{K}}_\lambda \tilde{v}\equiv v(t)-\lambda\int_t^\infty K(\tau,t)v(\tau)d\tau=\lambda\int_t^\infty \tilde{K}(\tau,t)v(\tau)d\tau+g_1(t). \tag{24}$$

Рассматривая уравнение (24) как характеристическое, т.е. считая правую часть этого уравнения временно известной, запишем его решение:

$$v(t)\equiv g(t)-\lambda\int_t^\infty \tilde{K}(t,\tau)v(\tau)d\tau+\lambda\int_t^\infty\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2}\tau^{\alpha-1}r_{\lambda-}\left(\frac{\tau^\alpha}{\alpha}-\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\times$$
$$\times\left[g_1(\tau)d\tau+\lambda\int_\tau^\infty \tilde{K}(\xi,\tau)\,v(\xi)d\xi\right]d\tau+\sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k t^{1+\alpha/2}\exp\left(\frac{p_k}{\alpha}t^\alpha\right).$$

Преобразуем правую часть последнего равенства:

$$v(t)\equiv g_1(t)+\lambda\int_t^\infty\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2}\tau^{\alpha-1}r_{\lambda-}\left(\frac{\tau^\alpha}{\alpha}-\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\cdot g_1(\tau)d\tau+$$
$$+\sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k t^{1+\alpha/2}\exp\left(\frac{p_k}{\alpha}\cdot t^\alpha\right)+\lambda\int_\tau^\infty \tilde{K}(\tau,t)\,v(\tau)d\tau+$$
$$+\lambda\int_t^\infty v(\xi)\,d\xi\int_t^\infty\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2}\cdot\tau^{\alpha-1}\cdot r_{\lambda-}\left(\frac{\tau^\alpha}{\alpha}-\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\cdot\tilde{K}(\xi,\tau)d\tau. \tag{25}$$

Поменяв ролями переменные интегрирования ξ и τ в повторном интеграле последнего уравнения, получим новое регуляризованное уравнение относительно искомой функции $v(t)$:

$$\tilde{\mathrm{K}}_\lambda^* v\equiv\left(I-\lambda\widehat{K}^*\right)v\equiv v(t)-\lambda\int_t^\infty \widehat{K}(\tau,t)v(\tau)d\tau=\widehat{g}(t)+\sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k\cdot t^{1+\alpha/2}\cdot\exp\left(\frac{p_k}{\alpha}\cdot t^\alpha\right), \tag{26}$$

где использовали обозначения:

$$\widehat{K}(t,\tau)=\tilde{K}(t,\tau)+\lambda\int_t^\infty\left(\frac{t}{\xi}\right)^{1+\alpha/2}\xi^{\alpha-1}r_{\lambda-}\left(\frac{\tau^\alpha}{\alpha}-\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)\cdot\tilde{K}(\tau,\xi)d\xi=\tilde{K}(t,\tau)+\lambda\tilde{\tilde{K}}(t,\tau); \tag{27}$$

$$\widehat{g}_1(t)=g_1(t)+\lambda\int_t^\infty\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1+\alpha/2}\tau^{\alpha-1}r_{\lambda-}\left(\frac{\tau^\alpha}{\alpha}-\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)g_1(\tau)d\tau. \tag{28}$$

Покажем, что интегральное уравнение (26) действительно регулярное (имеет единственное решение), для этого достаточно показать справедливость следующей оценки:

$$\left|\widehat{K}(\tau)\right|\le C(\alpha)\frac{t^{-\varepsilon}}{\tau^{1/2+\alpha/2-\varepsilon}(\tau-t)^{1/2}}\cdot\exp\left\{-C(\alpha)\cdot\frac{\tau^{1-\alpha}}{\tau-t}\right\}; \tag{29}$$
$$0<\varepsilon<\alpha/2,\quad \alpha>0,\quad 0<t<\tau<\infty.$$

Для регуляризации особых интегральных уравнений с бесконечным пределом интегрирования целесообразнее переходить к уравнениям на конечном интервале. Поэтому вначале преобразуем интегральное уравнение (25) к уравнению на конечном интервале. Для этого в нем произведем замены независимых переменных:

$$t=t_1^{-1};\qquad \tau=\tau_1^{-1}$$

и получим

$$v(t_1)-\lambda\int_0^{t_1} K'(t_1,\tau_1)v(\tau_1)d\tau_1=\lambda\int_0^{t_1}\tilde{K}'(t_1,\tau_1)v(\tau_1)d\tau+g_1(t_1) \tag{30}$$

где

$$\tilde{K}'(t_1,\tau_1) = K_2'(t_1,\tau_1) - K'(t_1,\tau_1); \tag{31}$$

и ядра $K_2'(t_1,\tau_1)$, $K'(t_1,\tau_1)$ определяются из равенств (13). Соответственно равенства (26)–(28) примут вид

$$\widehat{K}^{*'}_{\lambda}\tilde{v} \equiv \left(I - \lambda\widehat{K}^{*'}\right)v \equiv v(t_1) - \lambda\int_0^{t_1}\widehat{K}'(t_1,\tau_1)v(\tau_1)d\tau_1 =$$

$$= \widehat{g}(t_1) + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \cdot t_1^{-1-\alpha/2}\cdot\exp\left(\frac{p_k}{\alpha}\cdot t^{-\alpha}\right). \tag{32}$$

Здесь использованы обозначения

$$\widehat{K}'(t_1,\tau_1) = \tilde{K}'(t_1,\tau_1) + \lambda\int_{\tau_1}^{t_1}\left(\frac{\xi}{t_1}\right)^{1+\alpha/2}\cdot\xi^{-\alpha-1}\cdot r_{\lambda-}\left(\left[\alpha t_1^{\alpha}\right]^{-1} - \left[\alpha\xi^{\alpha}\right]^{-1}\right)\cdot\tilde{K}'(\tau_1,\xi)d\xi =$$

$$= \widehat{K}'(t_1,\tau_1) + \lambda\cdot\tilde{\tilde{K}}'(t_1,\tau_1); \tag{33}$$

$$\widehat{g}_l(t_1) = g_l(t_1) + \lambda\int_0^{t_1}\left(\frac{\tau_l}{t_1}\right)^{1+\alpha/2}\cdot\tau_1^{-\alpha-1}\cdot r_{\lambda-}\left(\left[\alpha\cdot t_1^{\alpha}\right]^{-1} - \left[\alpha\cdot\tau_1^{\alpha}\right]^{-1}\right)\cdot g_1(\tau_1)\,d\tau_1. \tag{34}$$

Теперь покажем, что интегральное уравнение (32) действительно регулярное (вольтеррово), для этого достаточно доказать справедливость следующей леммы:

Лемма 2. Ядро интегрального уравнения (32) имеет слабую особенность, т.е. справедлива оценка

$$\left|\widehat{K}'(t_1,\tau_1)\right| \le C\frac{t_1^{1/2+\varepsilon}}{\tau_1^{1-\alpha/2+\varepsilon}(t_1-\tau_1)^{1/2}}\exp\left\{-c(\alpha)\cdot\frac{t_1\cdot\tau_1^{\alpha}}{t_1-\tau_1}\right\}; \tag{35}$$

$$0<\varepsilon<\alpha/2;\ \alpha>0;\ 0<\tau_1<t_1<\infty.$$

Доказательство. Так как $\widehat{K}'(t,\tau)$ имеет представление $\tilde{K}'(t,\tau) + \lambda\ \tilde{\tilde{K}}'(t,\tau)$ то оценка (35) следует из (15) и приведенных ниже соотношений. Используя следующее двойное неравенство [5]:

$$C_1\ t^{\alpha-1}(t-\tau) \le t^{\alpha} - \tau^{\alpha} \le C_2\,t^{\alpha-1}(t-\tau),\quad C_1 = \min\{1,\alpha\},\ C_2 = \max\{1,\alpha\},$$

вначале получим $(\alpha = 1-2\omega > 0)$

$$\tilde{\tilde{K}}'(t,\tau) \le M_1(\alpha)\int_{\tau}^{t}\eta^{-\alpha-1}\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{1-\alpha/2}\cdot\frac{\eta^{(\alpha-1)/2}}{\sqrt{\eta-\tau}}\cdot\frac{\sqrt{t}\eta^{\alpha/2}}{\sqrt{t-\eta}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t\eta^{\alpha}}\right)d\eta +$$

$$+M_2(\alpha)\int_{\tau}^{t}\eta^{-\alpha-1}\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{1-\alpha/2}\cdot\frac{\eta^{(\alpha-1)/2}}{\sqrt{\eta-\tau}}\cdot\frac{t^{3/2}\eta^{3\alpha/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\alpha)\,t\eta^{\alpha}}{t-\eta}\right)d\eta = J_1(t,\tau) + J_2(t,\tau).$$

Здесь $C_j(\alpha)$, $M_j(\alpha)$, $j=1,2$ — постоянные, зависящие только от α, функции $J_1(t,\tau)$, $J_2(t,\tau)$ соответственно равны

$$J_1 = M_1(\alpha)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\alpha/2}}\int_{\tau}^{t}\frac{1}{\eta^{(\alpha+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau)(t-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t\,\eta^{\alpha}}\right)d\eta = M_1(\alpha)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\alpha/2}}I_1(t,\tau);$$

$$J_2 = M_2(\alpha)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\alpha/2}}\int_{\tau}^{t}\frac{t\eta^{(\alpha+1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\alpha)\,t\,\eta^{\alpha}}{t-\eta}\right)d\eta = M_2(\alpha)\frac{\sqrt{t}}{\tau^{1-\alpha/2}}I_2(t,\tau).$$

Далее каждую из функций $I_1(t,\tau)$, $I_2(t,\tau)$ представим в виде суммы из двух слагаемых:

$$I_1(t,\tau) = I_{11}(t,\tau) + I_{12}(t,\tau);\quad I_2(t,\tau) = I_{21}(t,\tau) + I_{22}(t,\tau),$$

для каждого из которых последовательно будем иметь:

$$J_{11}(t,\tau) = \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}\frac{1}{\eta^{(\alpha+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau)(t-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t\,\eta^{\alpha}}\right)d\eta \le$$

$$\le C(\alpha)\sqrt{t}\int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}\frac{\sqrt{t}\,d\eta}{(t-\eta)\sqrt{\eta(\eta-\tau)}}\le\left\|z^2=\frac{t-\tau}{t-\eta}-1\right\|\le$$

$$\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_0^1\frac{dz}{\sqrt{z^2+\tau/t}}=\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\ln\left(\sqrt{t/\tau}+\sqrt{t/\tau+1}\right)=$$

$$=\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\ln\frac{1+\sqrt{1+\tau/t}}{\sqrt{\tau/t}}\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{\tau/t}}\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[C_1+C_2(\tau/t)^{\varepsilon}\left|\ln\frac{\tau}{t}\right|\cdot(t/\tau)^{\varepsilon}\right]=\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[C_1+C_3(t/\tau)^{\varepsilon}\right].$$

Здесь значение параметра ε выбирается из условия $0<\varepsilon<\alpha/2$;

$$I_{12}(t,\tau)=\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{1}{\eta^{(\alpha+1)/2}\sqrt{(\eta-\tau)(t-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t\eta^{\alpha}}\right)d\eta\le$$

$$\le\left(\frac{2}{(t-\tau)}\right)^{(\alpha+1)/2}\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{1}{\sqrt{(t-\eta)}}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t^{\alpha+1}}\right)d\eta\le$$

$$\le C(\alpha)\left(\frac{t}{(t+\tau)}\right)^{(\alpha+1)/2}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\cdot\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\exp\left(-\frac{C_1(\alpha)(t-\eta)}{t^{\alpha+1}}\right)d\left(\frac{\sqrt{C_1(\alpha)(t-\eta)}}{t^{(\alpha+1)/2}}\right)\le$$

$$\le\left\|z=\frac{\sqrt{C_1(\alpha)(t-\eta)}}{t^{(\alpha+1)/2}}\right\|\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_0^{\infty}\exp\left\{-z^2\right\}dz\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}};$$

$$I_{21}(t,\tau)=\int\limits_{\tau}^{(t+\tau)/2}\frac{\sqrt{t}\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\alpha)\,t\eta^{\alpha}}{t-\eta}\right)d\eta\le C(\alpha)\int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}\frac{\sqrt{t}d\eta}{(t-\eta)\sqrt{\eta(\eta-\tau)}}\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[C_1+C_2(\tau/t)^{\varepsilon}\left|\ln\frac{\tau}{t}\right|\cdot(t/\tau)^{\varepsilon}\right]=\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[C_1+C_3(t/\tau)^{\varepsilon}\right],$$

где последнее неравенство получается так же, как и при оценке функции $I_{11}(t,\tau)$, и значение параметра ε выбирается также из условия $0<\varepsilon<\alpha/2$;

$$I_{22}(t,\tau)=\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{t\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}(\eta-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{C_2(\alpha)\,t\eta^{\alpha}}{t-\eta}\right)d\eta\le$$

$$\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{t\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_3(\alpha)\,t(t+\tau)^{\alpha}}{t-\eta}\right)d\eta=$$

$$=\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t}\frac{t\eta^{(\alpha-1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_3(\alpha)\,t^{\alpha+1}}{t-\eta}\left\{1+\frac{\tau}{t}\right\}^{\alpha}\right)d\eta\le$$

$$\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_0^t\frac{t^{(\alpha+1)/2}}{(t-\eta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_4(\alpha)\,t^{\alpha+1}}{t-\eta}\right)d\eta=\left\|\begin{array}{l}z=\dfrac{t^{(\alpha+1)/2}}{2\sqrt{t-\eta}}\\ dz=\dfrac{t^{(\alpha+1)/2}d\eta}{4(t-\eta)^{3/2}}\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{t^{\alpha/2}/2}^{\infty}\exp\left\{-z^2\right\}dz\le\frac{C(\alpha)}{\sqrt{t-\tau}}.$$

В этих неравенствах постоянные $C(\alpha)$, $C_j(\alpha)$, $j=1,2,3,4$, разные и зависят только от α. Из полученных неравенств следует искомая оценка (35). Лемма доказана.

Итак, в силу оценки (35) для заданной правой части, уравнение (32), а вместе с ним и уравнение (26) имеют только единственное решение, существование которого можно показать методом последовательных приближений.

Из соотношений (24) и (26) следует, что однородное уравнение

$$K_{2\lambda}^{*}v \equiv \left(I-\lambda K_2\right)v \equiv v(t)-\lambda\int_t^{\infty} K_2\left(\tau,t\right)v\left(\tau\right)d\tau = 0,\ t\in R_+ \tag{36}$$

равносильно неоднородному уравнению

$$\widehat{K}_{\lambda}^{*}v \equiv v(t)-\lambda\int_t^{\infty}\widehat{K}\left(\tau,t\right)\mu\left(\tau\right)d\tau = \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k\cdot t^{1+\alpha/2}\cdot\exp\left(\frac{p_k}{\alpha}\cdot t^{\alpha}\right),\ t\in R_+. \tag{37}$$

Рассмотрим вместо (37) семейство интегральных уравнений:

$$\widehat{K}_{\lambda}^{*}\mu \equiv v(t)-\lambda\int_t^{\infty}\widehat{K}\left(t,\tau\right)v\left(\tau\right)d\tau = t^{1+\alpha/2}\cdot\exp\left(\frac{p_k}{\alpha}\cdot t^{\alpha}\right),\ k=-N_1,\ ....,0,\ N_2,\quad t\in R_+. \tag{38}$$

Далее в силу того, что каждое из уравнений (38) имеет единственное нетривиальное решение $v_{\lambda k}\left(t\right),\ k=-N_1,...,0,...,N_2,$ соответствующее правой части уравнения (38) $t^{1+\alpha/2}\cdot\exp\left(\frac{p_k}{\alpha}\cdot t^{\alpha}\right)$, то для каждого значения параметра $\lambda\in C\setminus D_0$ эти функции $v_{\lambda k}\left(t\right),\ k=-N_1,...,0,...,N_2,$ будут соответствующими собственными функциями однородного уравнения (36) (а значит, и однородного для (2) уравнения.

Теорема 3. Значения $\lambda\in D_0$ из (22) являются регулярными числами оператора $K_{2\lambda}^{*}$ (2).

Теорема 4. Множество $C\setminus D_0$ составляют характеристические числа оператора $K_{2\lambda}^{*}$ (2). Причем если $\lambda\in D_m\bigcup\Gamma_{m-1}\setminus\left\{\left(-1\right)^m e^{m\pi}\right\},\ m=1,2,...,$ то $dim\,Ker\left(K_{2\lambda}^{*}\right)=m;$ и соответствующими собственными функциями будут решения уравнений (38):

$$v_{\lambda k}\left(t\right)=\left[\widehat{K}_{\lambda}^{*}\right]^{-1}\left[t^{1+\alpha/2}\cdot\exp\left(\frac{p_k}{\alpha}\cdot t^{\alpha}\right)\right],\ k=1,....,\ m=N_1+N_2+1.$$

Общим решением неоднородного интегрального уравнения (26), равно как и уравнения (2), будет функция

$$v_{\lambda}\left(t\right)=\left[\widehat{K}_{\lambda}^{*}\right]^{-1}\hat{g}\left(t\right)+\sum_{k=1}^{m=N_1+N_2+1} c_k\cdot v_{\lambda k}\left(t\right),\quad t\in R_+,$$

где c_k — произвольные постоянные, $k=1,...,m.$

Список литературы

1 *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — 205 с.

2 *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. — М.: Наука, 2012. — 232 с.

3 *Полянин А.Д., Манжиров А.В.* Справочник по интегральным уравнениям. — М.: Физматлит, 2003. — С. 608.

4 *Akhmanova D.M., Dzhenaliyev M.T., Ramazanov M.I.* On a particular Volterra integral equation of second kind with a spectral parameter // Siberian Mathematical Journal. — 2011. — Vol. 52. — № 1. — P. 1–12.

5 *Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: Иностр. лит, 1948. — С. 55.

Д.М.Ахманова, А.Е.Өмірбекова

Дельта тәрізді өзекті Вольтерра интегралдық теңдеуі туралы

Мақалада жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін шеттік есептер қатарына редуцирленетін екінші текті Вольтерра сингулярлы интегралдық теңдеуі қарастырылған. Интегралдау аралығының шексіздігіне және дельта тәрізді өзегіне байланысты мұнда біртіндеп жуықтау әдісін қолдануға келмейді. Шешімі айқын түрде табылған сәйкес сипаттамалық теңдеу құрастырылған. Бастапқы теңдеуге тең қуатты регуляризациялау әдісі қолданылып, оның спектрі табылған.

D.M.Akhmanova, A.Ye.Omirbekova

On an integral of equation of Voltaire with delta-type kernel

The article considers the singular integral equation Volterra of the second kind, which reduces number of boundary value problems for the heat equation loaded. In view of unbounded intervals of integration and delta kernel does not apply to it the method of successive approximations. Construct the corresponding characteristic equation, the solution of which is found in explicit form. For the original equation, the method of equivalent regularization, found its spectrum.

References

1 Nakhushev A.M. *Equations of Mathematical Biology*, Moscow: Vysh. shk, 1995, 205 p.

2 Nakhushev A.M. *Loaded equations and their applications*, Moscow: Nauka, 2012, 232 p.

3 Polyanin A.D., Manzhirov A.V. *Handbook of Integral Equations*, Moscow: Fizmatlit, 2003, p. 608.

4 Akhmanova D.M., Dzhenaliyev M.T., Ramazanov M.I. *Siberian Mathematical Journal*, 2011, 52, 1, p. 1–12.

5 Hardy G.G., Littlewood D.E., Polya G. *Inequalities*, Moscow: Inostrannaya literatura, 1948, p. 55.