УДК 517.96

Б.Т.Калимбетов, Ж.О.Хабибуллаев

Международный казахско-турецкий университет им.Х.А.Ясави, Туркестан
(E-mail: bkalimbetov@mail.ru)

Метод регуляризации для сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системы с кратным спектром

В статье исследована задача Коши для сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системы с кратным спектром предельного оператора. Обобщая идеи метода регуляризации С.Ломова, разработанного для асимптотического интегрирования систем дифференциальных уравнений, построено асимптотическое решение исходной задачи при стремлении малого параметра к нулю. Произведены регуляризация интегро-дифференциальной задачи, в случае кратного спектра предельного оператора, и асимптотическая инвариантность пространства решений регуляризованной задачи относительно интегрального оператора. Доказана нормальная и однозначная разрешимость итерационных задач.

Ключевые слова: интегро-дифференциальная система, кратный спектр, регуляризация задачи, итерационная задача, матрица жордановой структуры, нильпотентный оператор.

Введение

Основные проблемы при асимптотическом анализе решений сингулярно возмущенных уравнений в случае кратного спектра возникают из-за многоплановости задачи: необходимо выделить алгоритм описания сингулярной зависимости от возмущения (от ε в наших обозначениях), описать алгоритм определения степеней ε, по которым можно строить аппроксимации решений, и, наконец, правильно описать пространство решений, соответствующих кратному спектру. Метод регуляризации [1] для решения сингулярно возмущенной дифференциальной системы с кратным спектром в условиях, когда предельный оператор эквивалентен жордановой структуре, разработан А.Г.Елисеевым [2, 3]. Обобщая результаты работ [2, 3], А.М.Джураеву удалось построить специфическую разновидность пространства векторов экспоненциального типа, где асимптотические ряды решения задачи в условиях кратного спектра представляют собой сходящиеся ряды Лорана при соответствующих ограничениях на данные рассматриваемой задачи [4, 5]. Некоторые случаи неограниченности предельного оператора (постоянный или переменный) изучены в работах [6–8].

Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается задача Коши для сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системы

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = A(t)y(t,\varepsilon) + \int_0^t K(s)y(s,\varepsilon)ds + h(t), \qquad y(0,\varepsilon) = y^0, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где $A(t)$, $K(t)$ – заданные матрицы порядка 2; $h(t) = \{h_1(t), h_2(t)\}$ – известная вектор-функция; $y^0 = \{y_1^0, y_2^0\}$ – известный постоянный вектор; ε – малый параметр.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1. Элементы $\{a_{ij}(t)\}$, $\{k_{ij}(t)\}_{i,j=1,2}$ матриц $A(t), K(t)$ и $h(t) \in C^{\infty}[0,T]$.

2. Матрица $A(t)$ жордановой структуры такая, что корни характеристического уравнения $det[A(t) - \lambda I] = 0$ удовлетворяют требованиям:

а) $\lambda_1(t) \equiv \lambda_2(t)$; б) $Re\lambda_1(t) < 0$; $\lambda_1(t) \neq 0$; $\forall t \in [0,T]$.

3. Матрица $A(t)$ имеет следующее разложение: $A(t) = \lambda_1 P_1 + T_1$, где P_1 – проектор на собственное подпространство $A(t)$; T_1 – нильпотентный оператор порядка 2, т.е. $A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$, $A\varphi_2 = \lambda_1\varphi_2 + \varphi_1$, где φ_1 – собственный вектор; φ_2 – присоединенный вектор.

Регуляризация задачи

Введем регуляризирующие функции

$$\tau_1 = \frac{1}{\mu^2}\int_0^t [\lambda_1(t) + \mu p_1(t)]dt \equiv \theta_1(t, \frac{1}{\mu}), \quad \tau_2 = \frac{1}{\mu^2}\int_0^t [\lambda_1(t) + \mu q_1(t)]dt \equiv \theta_2(t, \frac{1}{\mu}), \tag{2}$$

где $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, а функции $p_1(t)$, $q_1(t)$ определяются ниже в процессе построения асимптотического решения задачи (1).

Вместо исходной задачи (1) рассмотрим расширенную задачу

$$\begin{gathered}\mu^2 \frac{\partial u}{\partial t} + [\lambda_1(t) + \mu p_1(t)]\frac{\partial u}{\partial \tau_1} + [\lambda_1(t) + \mu q_1(t)]\frac{\partial u}{\partial \tau_2} - A(t)u - \\ -\int_0^t K(s)u(s, \theta_1(s,\mu), \theta_2(s,\mu), \mu)ds = h(t), \quad u(0,0,0,\mu) = y^0\end{gathered} \tag{3}$$

для функции $u = u(t, \tau_1, \tau_2, \mu)$ такой, что $y(t,\varepsilon) \equiv u(t, \theta_1(t,\mu), \theta_2(t,\mu), \mu)$ – точное решение задачи (1). Однако задачу (3) нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не произведена регуляризация интегрального члена

$$Iu(t, \tau_1, \tau_2, \mu) = \int_0^t K(s)u(s, \theta_1(s,\mu), \theta_2(s,\mu), \mu)ds. \tag{4}$$

Для регуляризации интегрального оператора (4) вводим класс M_μ, асимптотически инвариантный относительно оператора I.

Определение 1. Говорят, что класс M_μ асимптотически инвариантен (при $\mu \to +0$) относительно оператора T_0, если выполнены следующие условия:

1) $M_\mu \subset D(T_0)$ при каждом фиксированном $\mu \neq 0$;

2) образ $T_0 g(t,\mu)$ любого элемента $T_0 g(t,\mu) \in M_\mu$ разлагается в ряд

$$T_0 g(t,\mu) = \sum_{n=-1}^{\infty} \mu^n g_n(t,\mu) \;\; (.\,\mu \to +0, \;\; g_n(t,\mu) \in M_\mu, \;\; n = -1,0,1,\dots),$$

сходящийся асимптотически при $\mu \to +0$ (равномерно по $t \in [0,1]$).

В качестве класса M_μ, асимптотически инвариантного относительно интегрального оператора $T_0 = I$, возьмем класс $M_\mu = U\big|_{\tau=\theta}$, где пространство U определяется следующим образом.

Определение 2. Будем говорить, что функция $u(t, \tau_1, \tau_2)$ принадлежит классу U, если она представима в виде

$$u(t, \tau_1, \tau_2) = \sum_{i,j=1}^{2} u_{ij}(t)\varphi_i e^{\tau_j} + \sum_{i=1}^{2} u_i(t)\varphi_i(t), \tag{5}$$

где $u_{ij}(t, \tau_1, \tau_2)$ – многочлены по μ с коэффициентами из класса $C^\infty\left([0,1], \mathbb{C}_1\right)$, т.е.

$$u_{ij}(t,\mu) = \sum_{m=-1}^{\infty} u_{ij}^{(m)}(t)\mu^m, \quad u_{ij}^{(m)}(t) \in C^\infty\left([0,1], \mathbb{C}^1\right), \;\; m \geq 0.$$

В качестве M_μ возьмем класс $U\big|_{\tau=\theta}$. Подставляя элемент (5) пространства U в интегральный оператор (5), будем иметь

$$\begin{gathered} Iu(t, \tau_1, \tau_2, \mu) = -\frac{1}{\mu}\int_0^t K(s)\left\{[\lambda_1(t)u_1^{-1}(s) + u_2^{-1}(s)]\varphi_1(s) + \lambda_1(t)u_2^{-1}(s)\varphi_2(s)\right\} - \\ -\frac{1}{\mu}\int_0^t K(s)\left(\varphi_1(s)u_{11}^{-1}(s)e^{\frac{1}{\mu^2}\int_0^s [\lambda_1(x)+\mu p_1(x)]dx} + \varphi_1(s)u_{12}^{-1}(s)e^{\frac{1}{\mu^2}\int_0^s [\lambda_1(x)+\mu p_1(x)]dx}\right)ds. \end{gathered}$$

В последнем интеграле первое слагаемое возьмем по частям:

$$I_1\left(t, \theta(t, \frac{1}{\mu})\right) = \int_0^t K(s)\varphi_1(s)u_{11}^{-1}(s)e^{\frac{1}{\mu^2}\int_0^s [\lambda_1(x)+\mu p_1(x)]dx} ds = \mu^2 \int_0^t \frac{K(s)\varphi_1(s)u_{11}^{-1}(s)}{\lambda_1(s) + \mu p_1(s)} d\left(e^{\frac{1}{\mu^2}\int_0^s [\lambda_1(x)+\mu p_1(x)]dx}\right) =$$

$$= \mu^2 \left[\frac{K(t)\varphi_1(t)u_{11}^{-1}(t)}{\lambda_1(t)+\mu p_1(t)} e^{\frac{1}{\mu^2}\int_0^t [\lambda_1(x)+\mu p_1(x)]dx} - \frac{K(0)\varphi_1(0)u_{11}^{-1}(0)}{\lambda_1(0)+\mu p_1(0)} \right] - \mu^2 \int_0^t e^{\frac{1}{\mu^2}\int_0^s [\lambda_1(x)+\mu p_1(x)]dx} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{K(s)\varphi_1(s)u_{11}^{-1}(s)}{\lambda_1(s)+\mu p_1(s)} \right) ds.$$

Отсюда видно, что после операции интегрирования по частям получили внеинтегральные члены класса U, а интегральный член снова типа $I_1\left(t,\theta(t,\mu)\right)$.

Введем операторы $I_{-1} = \frac{1}{\lambda_1(s)+\mu p_1(s)}$, $I_0 = \frac{1}{\lambda_1(s)+\mu p_1(s)}\frac{\partial}{\partial s} I_{-1}, \ldots, I_\gamma = \frac{1}{\lambda_1(s)+\mu p_1(s)}\frac{\partial}{\partial s} I_{\gamma-1}\cdot,\ \gamma \ge -1$.

Тогда предыдущее равенство можно записать в виде

$$I_1\left(t,\theta(t,\mu)\right) = \int_0^t K(s)\varphi_1(s)u_{11}^{-1}(s) e^{\frac{1}{\mu^2}\int_0^s [\lambda_1(x)+\mu p_1(x)]dx} ds =$$

$$= \sum_{\gamma=-1}^{\infty} (-1)^\gamma \mu^{2\gamma+4} \left[I_\gamma\left(K(s)\varphi_1(s)u_{12}^{-1}(s)\right)_{s=t} \cdot e^{\frac{1}{\mu^2}\int_0^t [\lambda_1(x)+\mu q_1(x)]dx} - \left(I_\gamma\left(K(s)\varphi_1(s)u_{12}^{-1}(s)\right)\right)_{s=0} \right],$$

которое сходится при $\varepsilon \to +0$ к данному интегралу равномерно по $t \in [0,1]$.

Для второго слагаемого имеет место разложение

$$I_2\left(t,\theta(t,\mu)\right) = \int_0^t K(s)\varphi_1(s)u_{12}^{-1}(s) e^{\frac{1}{\mu^2}\int_0^s [\lambda_1(x)+\mu q_1(x)]dx} ds =$$

$$= \sum_{\gamma=-1}^{\infty} (-1)^\gamma \mu^{2\gamma+4} \left[I_\gamma\left(K(s)\varphi_1(s)u_{12}^{-1}(s)\right)_{s=t} \cdot e^{\frac{1}{\mu^2}\int_0^t [\lambda_1(x)+\mu q_1(x)]dx} - \left(I_\gamma\left(K(s)\varphi_1(s)u_{12}^{-1}(s)\right)\right)_{s=0} \right]. \tag{6}$$

Запишем задачу, полностью регуляризованную по отношению к исходной задаче (1)

$$\mu^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + [\lambda_1(t)+\mu p_1(t)]\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau_1} + [\lambda_1(t)+\mu q_1(t)]\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau_2} - A(t)\tilde{u} - \tilde{I}\tilde{u} = h(t),\ \ \tilde{u}(0,0,0,\mu) = y^0, \tag{7}$$

где $\tilde{I}$ — интегральный оператор, описанный выше, являющийся расширением задачи (1) на рядах вида (6).

Определяем решение задачи (7) в виде ряда

$$u(t,\tau_1,\tau_2,\mu) = \sum_{k=-1}^{\infty} \mu^k u_k(t,\tau_1,\tau_2). \tag{8}$$

Подставляя (8) на (7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим следующие итерационные задачи

$$L_0 u_{-1} \equiv \lambda_1(t)\frac{\partial u_{-1}}{\partial \tau_1} + \lambda_1(t)\frac{\partial u_{-1}}{\partial \tau_2} - A(t)u_{-1} - R_{-1}u_{-1} = 0, \qquad u_{-1}(0,0,0) = 0; \tag{9}$$

$$L_0 u_0 = L_1 u_{-1} + h(t), \qquad u_0(0,0,0) = y^0; \tag{10}$$

$$L_0 u_1 = L_1 u_0 + I_{-1}u_{-1} + \frac{\partial u_{-1}}{\partial t}, \qquad u_1(0,0,0) = 0; \tag{11}$$

$$\ldots$$

$$L_0 u_{k-1} = L_1 u_{k-2} + I_{k-2}u_{-1} + \ldots + I_{-1}u_{k-3} + \frac{\partial u_{k-3}}{\partial t}, \quad u_{k-1}(0,0,0) = 0; \tag{12}$$

$$L_0 u_k = L_1 u_{k-1} + I_{k-2}u_0 + I_{k-3}u_2 + \ldots + I_{-1}u_{k-2} + \frac{\partial u_{k-2}}{\partial t}, \quad u_k(0,0,0) = 0, \tag{13}$$

где $L_1 \equiv -p_1(t)\frac{\partial}{\partial \tau_1} - q_1(t)\frac{\partial}{\partial \tau_2}$.

Решение каждой из итерационных задач (μ^k) определяем в пространстве U функций $u(t,\tau_1,\tau_2)$, представимых в виде

$$u = \sum_{i,j=1}^{2} u_{ij}(t)\varphi_i e^{\tau_j} + \sum_{i=1}^{2} u_i(t)\varphi_i(t),$$

где $u_{ij}(t), u_i(t) \in C^\infty([0,T],\mathbb{C})$.

Основной оператор L_0 на произвольный элемент $u \in U$ действует следующим образом:

$$L_0 u = -\varphi_1 \sum_{j=1}^{2} u_{1j}(t) e^{\tau_j} - (\lambda_1 u_1 + u_2)\varphi_1 - \lambda_1 u_2 \varphi_2. \quad (14)$$

Здесь мы использовали действие проектора P_1 и нильпотентного оператора T_1 на базисные элементы

$$P_1 \varphi_i = \varphi_i \quad (i = 1,2), \quad T_1 \varphi_2 = \varphi_1, \quad T_1 \varphi_1 = 0.$$

Разлагая векторы $\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t)$ по биортогональной системе $\{\varphi_1, \varphi_2\}$, $\{\psi_1, \psi_2\}$, нормированной в виде $(\varphi_i, \psi_j) \equiv \delta_{ij}$, получим

$$\dot{\varphi}_1(t) = (\dot{\varphi}_1, \psi_1)\varphi_1(t) + (\dot{\varphi}_1, \psi_2)\varphi_2(t), \quad \dot{\varphi}_2(t) = (\dot{\varphi}_2, \psi_1)\varphi_1(t) + (\dot{\varphi}_2, \psi_2)\varphi_2(t). \quad (15)$$

Здесь $\psi_1(t)$ — собственная и $\psi_2(t)$ — присоединенная функции оператора $A^*(t)$.

Разрешимость итерационных задач

Теперь сформулируем следующие теоремы о разрешимости уравнения:

$$L_0 u(t, \tau_1, \tau_2) = \lambda_1(t)\left(\frac{\partial u}{\partial \tau_1} + \frac{\partial u}{\partial \tau_2}\right) - A(t)u = f(t, \tau_1, \tau_2). \quad (16)$$

Теорема 1. Пусть $f(t, \tau_1, \tau_2) \in U$ и выполнены условия 1 и 2. Тогда для разрешимости уравнения (16) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы

$$< f(t, \tau_1, \tau_2), \psi_2(t) e^{\tau_j} > \equiv 0, \quad j = 1,2. \quad (17)$$

Теорема 2. Пусть для задачи

$$L_0 u(t, \tau_1, \tau_2) \equiv \lambda_1(t)\left(\frac{\partial u}{\partial \tau_1} + \frac{\partial u}{\partial \tau_2}\right) - A(t)u = 0, \quad u(0,0,0) = 0, \quad (18)$$

выполнены условия 1, 2; скалярные функции $p_1(t)$ и $q_1(t)$ выбраны в виде

$$p_1(t) = \sqrt{-(\dot{\varphi}_1(t), \psi_2(t))}, \quad q_1(t) = \sqrt{-(\dot{\varphi}_1(t), \psi_2(t))}, \quad (\dot{\varphi}_1, \psi_2) \neq 0, \ \forall t \in [0, T],$$

и, кроме того, $< L_1 u_1 + u, \ \psi_2 e^{\tau_1} > \equiv 0, \ j = 1,2.$

Тогда система уравнений

$$L_0 u_1 = L_1 u, \quad L_0 u_2 = L_1 u_1 + \dot{u}$$

разрешима в U. При этом задача (18) при дополнительных условиях

$$< L_1 u_2 + \dot{u}_1, \psi_2 e^{\tau_j} > \equiv 0, \quad j = 1,2, \quad u_1(0,0,0) = 0$$

имеет только нулевое решение.

Применим теоремы 1 и 2 к итерационным задачам (9)-(13). Уравнение (11) имеет решение в виде линейной комбинации элементов ядра оператора L_0

$$u_{-1}(t, \tau_1, \tau_2) = u_{11}^{-1}(t)\varphi_1(t) e^{\tau_1} + u_{12}^{-1}(t)\varphi_1(t) e^{\tau_2}, \quad (19)$$

где функции $u_{11}^{-1}(t), u_{12}^{-1}(t) \in C^\infty[0,T]$ пока произвольны. Подчиняя (19) начальному условию $u_{-1}(0,0,0) = 0$, находим $[u_{11}^{-1}(0) + u_{12}^{-1}(0)]\varphi_1(0) = 0$, или

$$u_{11}^{-1}(0) + u_{12}^{-1}(0) = 0. \quad (20)$$

Перейдем к решению следующей задачи (10):

$$L_0 u_0 = -p_1(t) u_{11}^{-1}\varphi_1 e^{\tau_1} - q_1(t) u_{12}^{-1}\varphi_1 e^{\tau_2} + h(t), \ u_0(0,0,0) = y^0. \quad (21)$$

Решение задачи (21) ищем в виде

$$u_0(t, \tau_1, \tau_2) = u_{11}^0 \varphi_1 e^{\tau_1} + u_{12}^0 \varphi_1 e^{\tau_2} + u_{21}^0 \varphi_2 e^{\tau_1} + u_{22}^0 \varphi_2 e^{\tau_2} + u_1^0 \varphi_{10} + u_2^0 \varphi_2.$$

Записав $u_0(t, \tau_1, \tau_2)$ в общем виде

$$L_0 u_0 \equiv \lambda_1(t) u_{11}^0 \varphi_1 e^{\tau_1} + \lambda_1(t) u_{12}^0 \varphi_1 e^{\tau_2} + \lambda_1(t) u_{21}^0 \varphi_2 e^{\tau_1} + \lambda_1(t) u_{22}^0 \varphi_2 e^{\tau_2} - A(t) u_{11}^0 \varphi_1 e^{\tau_1} - A(t) u_{12}^0 \varphi_1 e^{\tau_2} -$$

$$-A(t) u_1^0 \varphi_1 - A(t) u_{21}^0 \varphi_2 e^{\tau_1} - A(t) u_{22}^0 \varphi_2 e^{\tau_2} - A(t) u_2^0 \varphi_2 - \int_0^t K(s) u_1^0 \varphi_1 ds - \int_0^t K(s) u_2^0 \varphi_2 ds = -p_1(t) u_{11}^{-1} \varphi_1 e^{\tau_1} -$$

$$-q_1(t) u_{12}^{-1} \varphi_1 e^{\tau_2} + h(t)$$

и приравнивая коэффициенты при экспонентах и свободные члены, получим

$$[\lambda_1(t)I - A(t)]\varphi_1 u_{11}^0 + [\lambda_1(t)I - A(t)]\varphi_2 u_{21}^0 = -p_1(t)\varphi_1 u_{11}^{-1}(t);$$
$$[\lambda_1(t)I - A(t)]\varphi_1 u_{12}^0 + [\lambda_1(t)I - A(t)]\varphi_2 u_{22}^0 = -q_1(t)\varphi_2 u_{12}^{-1}(t);$$
$$-A(t)(u_1^0\varphi_1 + u_2^0\varphi_2) - \int_0^t K(s)(u_1^0\varphi_1 + u_2^0\varphi_2)ds = h(t),$$

откуда найдем

$$u_{21}^0 = -p_1(t)u_{11}^{-1}(t),\ u_{22}^0 = -q_1(t)u_{12}^{-1}(t),\ u_1^0\varphi_1 + u_1^0\varphi_2 = -A^{-1}(t)h(t) - \int_0^t A^{-1}(s)K(s)ds.$$

Таким образом, мы нашли решение $u_0(t,\tau_1,\tau_2)$ задачи (21) в следующей форме:

$$u_0 = (u_{11}^0(t)\varphi_1 - p_1(t)u_{11}^{-1}\varphi_2)e^{\tau_1} + (u_{12}^0(t)\varphi_1 - q_1(t)u_{12}^{-1}\varphi_2)e^{\tau_2} - A^{-1}(t)h(t) - \int_0^t A^{-1}(s)K(s)ds. \tag{22}$$

Подчиняя (22) начальному условию $u_0(0,0,0) = y^0$, будем иметь

$$u_{11}^0(0) + u_{12}^0(0) = y_1^0 + A^{-1}(0)h_1(0); \tag{23}$$
$$-p_1(0)u_{11}^{-1}(0) - q_1(0)u_{12}^{-1}(0) = y_2^0 + A^{-1}(0)h_2(0). \tag{24}$$

Решаем (24) совместно с (20):

$$\begin{cases} -p_1(0)u_{11}^{-1}(0) - q_1(0)u_{12}^{-1}(0) = y_2^0 + A^{-1}(0)h_2(0); \\ u_{11}^{-1}(0) + u_{12}^{-1}(0) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Определитель системы (25) $\Delta = p_1(0) - q_1(0) \neq 0$, поэтому $u_{11}^{-1}(0)$, $u_{12}^{-1}(0)$ определяются однозначно в виде

$$u_{11}^{-1}(0) = -\frac{1}{\Delta}\left(y_2^0 + A^{-1}(0)h_2(0)\right); \qquad u_{12}^{-1}(0) = -u_{11}^{-1}(0). \tag{26}$$

Теперь переходим к задаче (11):

$$L_0u_1 = L_1u_0 - \dot{u}_{-1} \equiv [-p_1(t)u_{11}^0(t) + u_{11}^{-1}(t)(\dot\varphi_1,\psi_1) + \dot u_{11}^{-1}(t)]\varphi_1 e^{\tau_1} + [-q_1(t)u_{12}^0(t) + u_{12}^{-1}(t)(\dot\varphi_1,\psi_2) + \dot u_{12}^{-1}(t)]\varphi_1 e^{\tau_2} +$$
$$+u_{11}^{-1}(t)[p_1^2(t) + (\dot\varphi_1,\psi_2)]\varphi_2 e^{\tau_1} + u_{12}^{-1}(t)[q_1^2(t) + (\dot\varphi_1,\psi_2)]\varphi_2 e^{\tau_2} - I_{-1}u_{-1}, \quad u_1(0,0,0) = 0. \tag{27}$$

Для того чтобы уравнение (27) имело решение в пространстве U, необходимо и достаточно, что

$$(p_1^2 + (\dot\varphi_1,\psi_2))u_{11}^{-1} = 0, \quad (q_1^2 + (\dot\varphi_1,\psi_2))u_{12}^{-1} = 0. \tag{28}$$

Если $u_{11}^{-1} \neq 0$, $u_{12}^{-1} \neq 0$, то из (28) найдем:

$$p_1(t) = \sqrt{-(\dot\varphi_1(t),\ \psi_2(t))}, \quad q_1(t) = -\sqrt{-(\dot\varphi_1(t),\ \psi_2(t))}. \tag{29}$$

Таким образом, мы определили неизвестные функции $p_1(t)$ и $q_1(t)$ в (3). Задачу (27) после ортогонализации (28) запишем в виде

$$L_0u_1 = f(t,\tau_1,\tau_2); \qquad u_1(0,0,0) = 0, \tag{30}$$

где $f_1 \equiv [-p_1(t)u_{11}^0(t) + u_{11}^{-1}(t)(\dot\varphi_1,\psi_1) + \dot u_{11}^{-1}(t)]\varphi_1 e^{\tau_1} + [-q_1(t)u_{12}^0(t) + u_{12}^{-1}(t)(\dot\varphi_1,\psi_2) + \dot u_{12}^{-1}(t)]\varphi_1 e^{\tau_2} - I_{-1}u_{-1}$.

Записав $u_1(t,\tau_1,\tau_2)$ в общем виде

$$L_0u_1 = [-p_1(t)u_{11}^0(t) + u_{11}^{-1}(t)(\dot\varphi_1,\psi_1) + \dot u_{11}^{-1}(t)]\varphi_1 e^{\tau_1} +$$
$$+[-q_1(t)u_{12}^0(t) + u_{12}^{-1}(t)(\dot\varphi_1,\psi_2) + \dot u_{12}^{-1}(t)]\varphi_1 e^{\tau_2} - I_{-1}u_{-1}(t),$$

из уравнения (30) находим

$$u_1(t,\tau_1,\tau_2) = \{u_{11}^1\varphi_1 + [-p_1u_{11}^0 + u_{11}^{-1}(\dot\varphi_1,\psi_1) + \dot u_{11}^{-1} - I_{-1}u_{11}^{-1}]\varphi_2\}e^{\tau_1} + \{u_{12}^1\varphi_1 +$$
$$+[-q_1u_{12}^0 + u_{12}^{-1}(\dot\varphi_1,\psi_1) + \dot u_{12}^{-1} - I_{-1}u_{12}^{-1}]\varphi_2\}e^{\tau_2}. \tag{31}$$

Подчиняя (31) начальному условию $u_1(0,0,0) = 0$, получим

$$u_{11}^1(0) + u_{12}^1(0) = 0, \quad p_1(0)u_{11}^0(0) + q_1(0)u_{12}^0(0) = \dot u_{11}^{-1}(0) + \dot u_{12}^{-1}(0) + \left[u_{11}^{-1}(0) + u_{12}^{-1}(0)\right]\left[\dot\varphi_1(0),\psi_1(0)\right]. \tag{32}$$

Далее, присоединяя (32) к (23), найдем значения $u_{11}(0), u_{12}(0)$:

$$u_{11}^0(0) = \frac{1}{\Delta}\left\{\dot u_{11}^{-1}(0) + \dot u_{12}^{-1}(0) - p_1(0)\left[y_1^0 + A^{-1}(0)h_1(0)\right]\right\},\ u_{12}^0(0) = -u_{11}^0(0).$$

Переходим к задаче (12) при $k=3$:

$$L_0u_2 = L_1u_1 + I_0u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial t}, \quad u_2(0,0,0)=0, \tag{33}$$

где

$$u_{11}^0 L_1u_1 + I_0u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial t} = \Big\{\Big[-p_1u_{11}^0 + \dot u_{11}^0 + u_{11}^0(\dot\varphi_1,\psi_1) - p_1u_{11}^{-1}(\dot\varphi_2,\psi_1) + I_{-1}u_{11}^0\Big]\varphi_1 +$$

$$+\Big[p_1^2u_{11}^0 - 2p_1\dot u_{11}^{-1} - \dot p_1u_{11}^{-1} - p_1u_{11}^{-1}((\dot\varphi_1,\psi_1)+(\dot\varphi_2,\psi_2)) + u_{11}^0(\dot\varphi_1,\psi_2) + p_1I_{-1}u_{11}^{-1} + I_{-1}u_{21}^0\Big]\varphi_2\Big\}e^{\tau_1} +$$

$$+\Big\{\Big[-p_1u_{12}^1 + \dot u_{12}^0 + u_{12}^0(\dot\varphi_1,\psi_1) - I_{-1}u_{12}^0\Big]\varphi_1 + \Big[q_1^2u_{12}^0 - 2q_1\dot u_{12}^{-1} - q_1u_{12}^{-1} - q_1\dot u_{11}^{-1}((\dot\varphi_1,\psi_1)-(\dot\varphi_2,\psi_2)) +$$

$$+u_{12}^0(\dot\varphi_1,\psi_2) + q_1I_{-1}u_{12}^{-1} + I_{-1}u_{21}^0\Big]\varphi_2\Big\}e^{\tau_2} - A^{-1}h - A^{-1}\dot h - A^{-1}K - \int_0^t\left[\dot A^{-1}(s)K(s) + A^{-1}\frac{\partial K(s)}{\partial s}\right]ds.$$

Для разрешимости уравнения (33) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы

$$\dot u_{11}^{-1} + \frac{1}{2}\left[\frac{\dot p_1}{p_1} + (\dot\varphi_1,\psi_1) + (\dot\varphi_2,\psi_2)\right]u_{11}^{-1} = 0, \qquad \dot u_{11}^{-1} + \frac{1}{2}\left[\frac{\dot p_1}{p_1} + (\dot\varphi_1,\psi_1) + (\dot\varphi_2,\psi_2)\right]u_{11}^{-1} = 0. \tag{34}$$

Решая (34) совместно с начальными условиями (26), найдем функции u_{11}^{-1} и u_{12}^{-1}:

$$u_{11}^{-1}(t) = u_{11}^{-1}(0)e^{C(t)}; \;\; u_{12}^{-1}(t) = u_{12}^{-1}(0)e^{D(t)},$$

где $C(t) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t\left[\frac{\dot p_1}{p_1} + (\dot\varphi_1,\psi_1) + (\dot\varphi_2,\psi_2)\right]d\tau,\;\; D(t) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t\left[\frac{\dot q_1}{q_1} + (\dot\varphi_1,\psi_1) + (\dot\varphi_2,\psi_2)\right]d\tau,$ а $u_{11}^{-1}(0)$ и $u_{12}^{-1}(0)$ вычисляются по формулам (26). Тем самым решение $u_{-1}(t,\tau_1,\tau_2)$ в соответствии с теоремой 2 найдено в пространстве U однозначным образом:

$$u_{-1} = \varphi_1u_{11}^{-1}(0)e^{C(t)}e^{\tau_1} + \varphi_1u_{12}^{-1}(0)e^{D(t)}e^{\tau_2}.$$

Таким образом, для вычисления функции $u_{-1}(t,\tau_1,\tau_2)$ мы использовали четыре последовательных уравнения (9), (10), (11) и (12) (при $k=3$), начальные условия (19), (26) и три условия ортогональности для правых частей систем (10), (11) и (12) (при $k=3$).

Решение $u_0(t,\tau_1,\tau_2)$ задачи (10) будет найдено в следующем виде:

$$u_0 = \left[u_{11}^0(t)\varphi_1 - p_1(t)u_{11}^{-1}\varphi_2\right]e^{\tau_1} + \left[u_{12}^0(t)\varphi_1 - q_1(t)u_{12}^{-1}\varphi_2\right]e^{\tau_2} - A^{-1}(t)h(t) - \int_0^t A^{-1}(s)K(s)ds,$$

где $u_{11}^0(t) = e^{C(t)}\left[u_{11}^0(0) + \displaystyle\int_0^t M(\xi)e^{C(\xi)}d\xi\right],\;\; u_{12}^0(t) = e^{D(t)}\left[u_{12}^0(0) + \displaystyle\int_0^t N(\xi)e^{D(\xi)}d\xi\right],$ функции $C(t),\; D(t),$ $M(t),\; N(t), u_{11}^{-1}, u_{12}^{-1}$ вычисляются с помощью указанной выше процедуры.

Продолжая этот процесс далее и используя теоремы 1 и 2, найдем все функции $u_i(t,\tau_1,\tau_2)$ в пространстве U.

Список литературы

1 *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

2 *Елисеев А.Г.* Теория сингулярных возмущений для систем дифференциальных уравнений в случае кратного спектра предельного оператора. I, II // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1984. — Т. 48. — № 6. — С. 992–1042.

3 *Елисеев А.Г.* Теория сингулярных возмущений для систем дифференциальных уравнений в случае кратного спектра предельного оператора. III // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1984. — Т. 48. — № 6. — С. 1171–1195.

4 *Джураев А.М.* Асимптотическое интегрирование краевой задачи с чисто мнимым спектром // Труды МЭИ. — 1987. — Вып. 141. — С. 30–34.

5 *Джураев А.М.* Об аналитических решениях сингулярно возмущенных задач с кратным спектром // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. — Вып. 21. — Фрунзе: Илим, 1987.— С. 240–244.

6 *Бободжанов А.А., Ломов С.А.* Асимптотическое интегрирование задачи Коши со счетно-кратным спектром // Матем. заметки. — 1984. — Т. 35. — Вып. 1. — С. 63–82.

7 *Бободжанов А.А.* Обобщение метода регуляризации для задач с особенностями спектра: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. — М., 1984.

8 *Калимбетов Б.Т., Иманбаев Н.С., Темирбеков М.А.* О существовании асимптотики решений интегро-дифференциального уравнения со спектральными особенностями ядра интегрального оператора // Вестн. КазНПУ им. Абая. — 2013. — № 2(42). — С. 106–111.

Б.Т.Қалымбетов, Ж.О.Хабибуллаев

Еселі спектрлі сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйе үшін регуляризациялау әдісі

Мақалада шектік операторының спектрі еселі сингуляр ауытқыған интегро-дифференциалдық жүйе үшін Коши есебі зерттелген. С.Ломовтың дифференциалдық теңдеулер жүйесін асимптотикалық интегралдау үшін жасалған регуляризациялау әдісін негізге ала отырып, алғашқы есептің кіші параметрі нолге ұмтылған жағдайы үшін асимптотикалық шешім құрылған. Шектік есептің спектрі еселі болған жағдайда интегро-дифференциалдық теңдеудің регуляризациясы жасалған, регуляризацияланған есептің шешімдері кеңістігінің интегралдық операторға қатысты инварианттығы көрсетілген. Итерациялық есептердің нормаль және бірмәнді шешімділігі дәлелденген.

B.T.Kalimbetov, Zh.O.Habibullaev

Regularization method for singularly perturbed integro-differential systems with multiple spectrum

We study the Cauchy problem for singularly perturbed integro-differential systems with multiple spectrum of the limit operator. Generalizing the idea of the regularization method developed for the asymptotic integration of systems of differential equations, asymptotic solution of the initial problem with the small parameter tends to zero. Carried regularization integro-differential problem in the case of multiple spectrum of limit operator and asymptotic invariance of space of solutions of regularized problem with respect to integral operator. Proved normal and unique solvability of iterative problems.

References

1 Lomov S.A. *Introduction to the general theory of singular perturbation*. Moscow: Nauka, 1981, p. 400.
2 Eliseyev A.G. *Izvestia AS USSR,* Ser. Mathematics, 1984, 48, 6, p. 992–1042.
3 Eliseyev A.G. *Izvestia AS USSR,* Ser. Mathematics, 1984, 48, p. 1171–1195.
4 Juraev A.M. *Proceedings MPEI*, 1987, 141, p. 30–34.
5 Juraev A.M. *Research on the integral-differential equations*, 21, Frunze: Ilim, 1987, p. 240–244.
6 Bobodzhanov A.A., Lomov S.A. *Matematicheskie Zametki,* 1984, 35, 1, p. 63–82.
7 Bobodzhanov A.A. *Abstract of diss.... cand. phys. and mathem. sciences*, Moscow, 1984.
8 Kalimbetov B.T., Imanbaev N.S., Temirbekov M.A. *Bull. of Abai KazNPU,* 2013, 2 (42), p. 106–111.