УДК 517.96

Ш.Билал, А.Калибекова

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы
(E-mail: bilal44@mail.ru)

Весовое неравенство типа Харди

В статье получены необходимые и дополнительные условия на весовые функции для выполнения весового неравенства типа Харди. Установлены непрерывность и компактность вложения весовых пространств. Дан критерий компактности вложения. Приведены некоторые основополагающие леммы, используемые при доказательстве основных теорем.

Ключевые слова: весовые неравенства, неравенства типа Харди, весовые функции, теоремы вложения, компактность вложения.

Данная работа представляет собой дополнение результатов работы [1]. Получены необходимые и достаточные условия на весовые функции ρ, ν, r, при которых справедливо неравенство

$$\|rf\|_q = c\left(\|\rho f'\|_p + \|\nu f\|_p\right) \tag{1}$$

при $p = q = \infty$. При этом для наименьшей константы c найдены двухсторонние оценки, совпадающие по порядку. Дан критерий компактности оператора вложения, соответствующего (1). Отметим, что неравенство (1) при $\nu \equiv 0$ переходит в обобщенное неравенство Харди (в дифференциальной форме) [2]. Неравенство (1) при $\rho \equiv 1$, $1 = p \le q < \infty$, рассмотрено К.Т.Мынбаевым [3, 4]; при $\rho \equiv 1$, $p = q = 2$, — Е.Т.Сойером [5–7]; при $1 < p \le q < \infty$ — Р.Ойнаровым и М.Отелбаевым [8], а при $1 \le p < q < \infty, 1 \le q < p < \infty$ — в общих ситуациях Р.Ойнаровым [7]. Подобные неравенства для матричных операторов рассмотрены в работах Ж.Тасмагамбетовой и А.Темирхановой [9–11].

Пусть $W_p' \equiv W_p'(\rho, \upsilon; y)$ — пространство, полученное замыканием множества финитных, абсолютно непрерывных на $J = (a,b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, функций $f\left(f \in \overset{\circ}{AC}(J)\right)$ по норме $\|f\|_{W_p'} = \|\rho f'\|_p + \|\upsilon f\|_p$, $1 \le p \le \infty$; $L_p \equiv L_p(J)$ — пространство измеримых на J функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_J |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} & \text{при} \quad 1 \le p < \infty; \\ \upsilon rai\sup\limits_{x \in J} |f(x)| & \text{при} \quad p = \infty; \end{cases}$$

$L_{s,r} \equiv L_s(r, J)$ — пространство измеримых на J функций t с конечной нормой $\|f\|_{s,r} = \|rf\|_s$, $1 \le s \le \infty$.

Будем считать, что ρ, υ, r — заданные весовые функции, определенные на интервале $J = (a,b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, удовлетворяют на этом интервале следующим требованиям:

$$\begin{gathered} 0 < \rho(x) \in L_\infty^{loc}(J), \quad \rho^{-1}(x) \in L_1^{loc}(J); \\ 0 < \upsilon(x) \in C^{loc}(J), \quad 0 \le r(x) \in C^{loc}(J). \end{gathered} \tag{2}$$

Введем в рассмотрение следующие величины, характеризующие локальное поведение весовых функций:

$$\omega(x,y) = \sup\left\{d > 0 : \int\limits_{x-d}^{x} \rho^{-1}(\tau)\,d\tau \le \int\limits_{x}^{x+y} \rho^{-1}(\tau)\,d\tau, (x-d, x+y] \subset J\right\};$$

$$d^+(x) = \sup\left\{d > 0 : \sup_{x-\omega(x,d) \le t \le x+d} \upsilon(t) \int\limits_{x-\omega(x,d)}^{x+d} \rho^{-1}(\tau)\,d\tau \le 1, [x, x+d) \subset J\right\};$$

$$d^-(x)=\omega\left(x,d^+(x)\right).$$

Обозначим $\Delta(x)=\left[x-d^-(x),x+d^+(x)\right]=\left[x^-,x^+\right]$; $\Delta^-(x)=\left[x-d^-(x),x\right]$; $\Delta^+(x)=\left[x,x+d^+(x)\right]$.

Лемма 1. Имеет место неравенство

$$\int\limits_{y-d^-(y)}^{y+d^+(y)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\le 2\int\limits_{x-d^-(x)}^{x+d^+(x)}\rho^{-1}(\tau)d\tau \quad \forall y\in\Delta(x). \tag{3}$$

Лемма 2. Функции $\varphi^-(x)=x-d^-(x)$, $\varphi^+(x)=x+d^+(x)$ непрерывны и монотонно возрастают в J, при этом

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to b)}}\varphi^-(x)=a(b);\quad \lim_{\substack{x\to b\\(x\to a)}}\varphi^+(x)=b(a).$$

Лемма 3. $\forall f\in AC^{loc}(J)$ справедлива оценка

$$\sup_{t\in\Delta(x)}\left|f(t)\right|\le\int\limits_{\Delta(x)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\left[\upsilon rai\sup_{t\in\Delta(x)}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Delta(x)}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right]. \tag{4}$$

Лемма 4. Пусть $(\alpha;\beta)$ — ограниченный отрезок из $J=(a,b)$. Тогда справедливость неравенства $\|rf\|_{L_\infty(\alpha,\beta)}\le c\|\rho f'\|_{L_\infty(\alpha,\beta)}$ для всех $f\in AC\left(\overset{\circ}{\alpha},\beta\right)\left(f\in AC\left(\alpha,\overset{\circ}{\beta}\right)\right)$ эквивалентна условию

$$\begin{gathered}A=\sup_{\alpha\le x\le\beta}r(x)\int\limits_\alpha^x\rho^{-1}(\tau)d\tau<\infty;\\ \left(A=\sup_{\alpha\le x\le\beta}r(x)\int\limits_x^\beta\rho^{-1}(\tau)d\tau<\infty\right),\end{gathered} \tag{5}$$

где $AC\left(\overset{\circ}{\alpha},\beta\right)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $f(x)$ таких, что $f(\alpha)=0$, а $AC\left(\alpha,\overset{\circ}{\beta}\right)$ — пространство функций $f(x)\in AC^{loc}(J)$ с $f(\beta)=0$. При этом для наименьшей константы C имеет место оценка $C_1A\le C\le C_2A$, где C_1,C_2 не зависят от весовых функций.

Лемма 5. Существует не более чем счетное множество точек $\{x_i\}$ таких, что $\underset{i}{U}\left[x_i-d^-(x_i),x_i+d^+(x_i)\right]=J$, причем $x_{i+1}-d^-(x_{i+1})=x_i+d^+(x_i)$.

Рассмотрим условия выполнения неравенства

$$\|rf\|_\infty\le c\left(\|\rho f'\|_\infty+\|\upsilon f\|_\infty\right). \tag{6}$$

Введем функцию $\mathrm{B}(x)=\sup\limits_{x^-\le z\le x}r(z)\int\limits_{x^--d^-(x^-)}^{z}\rho^{-1}(\tau)d\tau+\sup\limits_{x\le z\le x^+}r(z)\int\limits_{z}^{x^+-d^+(x^+)}\rho^{-1}(\tau)d\tau.$

Теорема 1. Пространство W'_∞ вложено в $L_{\infty,r}$ тогда и только тогда или неравенство (6) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{B}=\sup_{x\in J}\mathrm{B}(x)<\infty. \tag{7}$$

При этом для нормы оператора вложения $E:W'_\infty\to L_{\infty,r}$ справедлива оценка

$$c^{-1}\mathrm{B}\le\|E\|\le c\mathrm{B}. \tag{8}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $W'_\infty\to L_{\infty,r}$, тогда

$$\|f\|_{L_{\infty,r}}\le c\|f\|_{W'_\infty}\ (\forall f\in W'_\infty), \tag{9}$$

где $c=\|E\|$. Пусть $x\in J$, $\Omega_x=\Delta(x)\cup\Delta(x^-)\cup\Delta(x^+)$. Для каждого фиксированного $z\in\left[x^-,x\right]$ построим функцию $f^-_{x,z}(t)$ следующим образом:

$$f_{x,z}^{-}(t)=\begin{cases}0, & t\,\overline{\in}\,\Omega_x;\\ \int\limits_{x^- - d^-(x^-)}^{t}\rho^{-1}(\tau)d\tau, & x^- - d^-(x^-)\le t\le z;\\ \int\limits_{x^- - d^-(x^-)}^{z}\rho^{-1}(\tau)d\tau, & z\le t\le x;\\ \left(\int\limits_{x}^{x^+ + d^+(x^+)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)\int\limits_{x^- - d^-(x^-)}^{z}\rho^{-1}(\tau)d\tau\int\limits_{t}^{x^+ + d^+(x^+)}\rho^{-1}(\tau)d\tau, & x\le t\le x^+ + d^+(x^+).\end{cases}$$

Оценим нормы $\left\|f_{x,z}^{-}\right\|_{L_{\infty,r}}$, $\left\|f_{x,z}^{-}\right\|_{W_\infty^1}$. Из определения функции $f_{x,z}^{-}$ следует, что

$$\left\|f_{x,z}^{-}\right\|_{L_{\infty,r}}\ge\sup_{x^-\le z\le x}r(z)\int\limits_{x^- - d^-(x^-)}^{z}\rho^{-1}(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Теперь вычислим норму $\left\|f_{x,z}^{-}\right\|_{W_\infty^1}=\left\|\rho\left(f_{x,z}^{-}\right)'\right\|_{L_\infty}+\left\|\upsilon f_{x,z}^{-}\right\|_{L_\infty}$. Для этого предварительно покажем правомерность некоторых неравенств. На основании леммы 1 имеем

$$\int\limits_{x^- - d^-(x^-)}^{x^-}\rho^{-1}(\tau)d\tau=\int\limits_{x^-}^{x^- + d^+(x^-)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\le\int\limits_{x^-}^{x^+}\rho^{-1}(\tau)d\tau=2\int\limits_{x}^{x^+}\rho^{-1}(\tau)d\tau;$$

$$\int\limits_{x^- - d^-(x^-)}^{z}\rho^{-1}(\tau)d\tau=\int\limits_{x^- - d^-(x^-)}^{x^-}\rho^{-1}(\tau)d\tau+\int\limits_{x^-}^{z}\rho^{-1}(\tau)d\tau\le 3\int\limits_{x}^{x^+}\rho^{-1}(\tau)d\tau;$$

$$\int\limits_{x}^{x^+ + d^+(x^+)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\ge\int\limits_{x}^{x^+}\rho^{-1}(\tau)d\tau\,.$$

Пользуясь этими неравенствами, мы можем произвести вычисление норм:

$$\left\|\rho\left(f_{x,z}^{-}\right)'\right\|_{L_\infty}\le\max\left\{1,0,\int\limits_{x^- - d^-(x^-)}^{z}\rho^{-1}(\tau)d\tau\Bigg/\int\limits_{x}^{x^+ + d^+(x^+)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right\}\le\max\{1,3\}=3\,.$$

$$\left\|\upsilon f_{x,z}^{-}\right\|_{L_\infty}\le\max\left\{\sup_{x^{--}\le t\le z}\upsilon(t)\int\limits_{x^{--}}^{t}\rho^{-1}(\tau)d\tau,\sup_{z\le t\le x}\upsilon(t)\int\limits_{x^{--}}^{z}\rho^{-1}(\tau)d\tau,\sup_{x\le t\le x^{++}}\upsilon(t)\left(\int\limits_{x^{--}}^{t}\rho^{-1}(\tau)d\tau\Bigg/\int\limits_{x}^{x^{++}}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{t}^{x^{++}}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right\}\le\max\{1,1,3\}=3.$$

Таким образом,

$$\left\|f_{x,z}^{-}\right\|_{W_\infty^1}\le 6=C_1. \tag{11}$$

Теперь, подставляя найденные значения норм (10), (11) в (9), получим

$$C_1^{-1}\sup_{x^-\le z\le x}r(z)\int\limits_{x^- - d^-(x^-)}^{z}\rho^{-1}(\tau)d\tau\le C. \tag{12}$$

Для $z\in\left[x,x^+\right]$ определим функцию $f_{x,z}^{+}(t)$ следующим образом:

$$f_{x,z}^{+}(t)=\begin{cases}0, & t\in\Omega_x;\\ \int\limits_{z}^{x^{+}+d^{+}(x^{+})}\rho^{-1}(\tau)d\tau\left(\int\limits_{x^{-}-d^{-}(x^{-})}^{x}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^{-1}\int\limits_{x^{-}-d^{-}(x^{-})}^{t}\rho^{-1}(\tau)d\tau, & x^{-}-d^{-}(x^{-})\le t\le x;\\ \int\limits_{z}^{x^{+}+d^{+}(x^{+})}\rho^{-1}(\tau)d\tau, & x\le t\le z;\\ \int\limits_{t}^{x^{+}+d^{+}(x^{+})}\rho^{-1}(\tau)d\tau, & z\le t\le x^{+}+d^{+}(x^{+}).\end{cases}$$

Оценим нормы $\left\|f_{x,z}^{+}\right\|_{L_{\infty,r}}$ и $\left\|f_{x,z}^{+}\right\|_{W_{\infty}'}$.

По определению функции $f_{x,z}^{+}(t)$

$$\left\|rf_{x,z}^{+}\right\|_{L_{\infty}}\ge\sup_{x\le z\le x^{+}}r(z)\int\limits_{z}^{x^{+}+d^{+}(x^{+})}\rho(\tau)d\tau. \tag{13}$$

На основании леммы 1 получим

$$\left\|\rho\left(f_{x,z}^{+}\right)'\right\|_{L_{\infty}}\le\max\{3,1\}=3\,.$$

Действительно, из $x^{+}\in\Delta(x)$ следует, что

$$\int\limits_{x^{+}-d^{-}(x^{+})}^{x^{+}+d^{+}(x^{+})}\rho^{-1}(\tau)d\tau\le 2\int\limits_{x-d^{-}(x)}^{x^{+}+d^{+}(x)}\rho^{-1}(\tau)d\tau$$

или

$$\int\limits_{x^{+}}^{x^{+}+d^{+}(x^{+})}\rho^{-1}(\tau)d\tau\le\int\limits_{x^{-}}^{x^{+}}\rho^{-1}(\tau)d\tau=2\int\limits_{x^{-}}^{x}\rho^{-1}(\tau)d\tau\,.$$

Отсюда

$$\int\limits_{z}^{x^{+}+d^{+}(x^{+})}\rho^{-1}(\tau)d\tau=\int\limits_{z}^{x^{+}}\rho^{-1}(\tau)d\tau+\int\limits_{x^{+}}^{x^{+}+d^{+}(x^{+})}\rho^{-1}(\tau)d\tau\le 3\int\limits_{x^{-}}^{x}\rho^{-1}(\tau)d\tau;$$

а

$$\int\limits_{x^{-}-d^{-}(x^{-})}^{x}\rho^{-1}(\tau)d\tau\ge\int\limits_{x^{-}}^{x}\rho^{-1}(\tau)d\tau\,.$$

С помощью этих неравенств оценим и вторую норму, тем самым имеем

$$\left\|f_{x,z}^{+}\right\|_{W_{\infty}'}=\left\|\rho\left(f_{x,z}^{+}\right)'\right\|_{L_{\infty}}+\left\|\upsilon f_{x,z}^{+}\right\|_{L_{\infty}}\le 3+3=6=C_1. \tag{14}$$

Подставляя (13), (14) в (9), приходим к соотношению

$$C_1^{-1}\sup_{x\le t\le x^{+}}r(z)\int\limits_{z}^{x^{+}+d^{+}(x^{+})}\rho^{-1}(\tau)d\tau\le C. \tag{15}$$

Объединяя (15) с (12), получим

$$(2C_1)^{-1}\mathrm{B}(x)\le(2C_1)^{-1}\sup_{x\in J}\mathrm{B}(x)=(2C_1)^{-1}\beta\le C=\|E\|. \tag{16}$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\beta<\infty$. Для любой функции

$$f(t)\in W_{\infty}',\quad t\in\left[x^{-},x\right],$$

$$\sup_{x^-\le t\le x}\left|r(t)f(t)\right|=\sup_{x^-\le t\le x}\left|r(t)\left(f(t)-f\left(x^-\right)\right)+f\left(x^-\right)\right|\le$$
$$\le\sup_{x^-\le t\le x}\left|r(t)\left(f(t)-f\left(x^-\right)\right)\right|+\sup_{x^-\le t\le x}\left|r(t)f\left(x^-\right)\right|. \tag{17}$$

При $t=x^-$ функция $\left(f(t)-f\left(x^-\right)\right)=0$. Тогда в силу леммы 4 имеем

$$\sup_{x^-\le t\le x}\left|r(x)\left(f(t)-f\left(x^-\right)\right)\right|=\sup_{x^-\le t\le x}r(t)\int_{x^-}^{x}\rho^{-1}(\tau)d\tau\bullet\vartheta rai\sup_{x^-\le t\le x}\left|\rho(t)f'(t)\right|\le$$
$$\le C_2\mathrm{B}(x)\,\vartheta rai\sup_{x^-\le t\le x}\left|\rho(t)f'(t)\right|,$$

т. е.

$$\sup_{x^-\le t\le x}\left|r(t)\left(f(t)-f\left(x^-\right)\right)\right|\le C_2\mathrm{B}(x)\|f\|_{W'_\infty(\Delta(x))}. \tag{18}$$

На основании леммы 3 имеем

$$\sup_{x^-\le t\le x}r(t)\left|f\left(x^-\right)\right|\le\sup_{x^-\le t\le x}r(t)\bullet\sup_{x^{--}\le t\le x^{-+}}\left|f(s)\right|\le$$
$$\le\sup_{x^-\le t\le x}r(t)\int_{x^--d^-\left(x^-\right)}^{x^-+d^+\left(x^-\right)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\left(\vartheta rai\sup_{t\in\Delta\left(x^-\right)}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Delta\left(x^-\right)}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right)\le$$
$$\le2\sup_{x^-\le t\le x}r(t)\int_{x^--d^-\left(x^-\right)}^{x^-}\rho^{-1}(\tau)d\tau\left(\vartheta rai\sup_{t\in\Delta\left(x^-\right)}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Delta\left(x^-\right)}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right)\le$$
$$\le C_3\mathrm{B}(x)\left(\vartheta rai\sup_{t\in\Delta\left(x^-\right)}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Delta\left(x^-\right)}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right),$$

т. е.

$$\sup_{x^-\le t\le x}r(t)\left|f\left(x^-\right)\right|\le C_3\mathrm{B}(x)\left(\vartheta rai\sup_{t\in\Delta\left(x^-\right)}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Delta\left(x^-\right)}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right). \tag{19}$$

Подставляя (18), (19) в (17), получим

$$\sup_{x^-\le t\le x}\left|r(t)f(t)\right|\le C_4\mathrm{B}(x)\left(\vartheta rai\sup_{t\in\Omega_x}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Omega_x}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right). \tag{20}$$

Для $f(t)\in W'_\infty$ при $t\in\left[x,x^+\right]$ имеем

$$\sup_{x\le t\le x^+}\left|r(t)f(t)\right|=\sup_{x\le t\le x^+}\left|r(t)\left(f(t)-f\left(x^+\right)\right)\right|+\sup_{x\le t\le x^+}r(t)\left|f\left(x^+\right)\right|. \tag{21}$$

При $t=x^+$ функция $\left(f(t)-f\left(x^+\right)\right)=0$. Следовательно, можно пользоваться леммой 4, тогда

$$\sup_{x\le t\le x^+}\left|r(t)\left(f(t)-f\left(x^+\right)\right)\right|\le\sup_{x\le t\le x^+}r(t)\int_{t}^{x^+}\rho^{-1}(\tau)d\tau\bullet\vartheta rai\sup_{x\le t\le x^+}\left|\rho(t)f'(t)\right|\le$$
$$\le C_5\mathrm{B}(x)\left(\vartheta rai\sup_{t\in\Delta(x)}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Delta(x)}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right). \tag{22}$$

По лемме 3

$$\sup_{x\le t\le x^+}r(t)\left|f\left(x^+\right)\right|\le\sup_{x\le t\le x^+}r(t)\bullet\sup_{x\le s\le x^{++}}\left|f(s)\right|\le$$
$$\le\sup_{x\le t\le x^+}r(t)\int_{\Delta\left(x^+\right)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\left(\vartheta rai\sup_{t\in\Delta\left(x^+\right)}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Delta\left(x^+\right)}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right)\le$$

$$\leq 2\sup_{x\leq t\leq x^+} r(t)\int_{\Delta^+(x^+)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\left(\vartheta rai\sup_{t\in\Delta(x^+)}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Delta(x^+)}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right)\leq$$

$$\leq 2\sup_{x\leq t\leq x^+} r(t)\int_{t}^{x^+ +d^+(x^+)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\left(\vartheta rai\sup_{t\in\Delta(x^+)}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Delta(x^+)}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right)\leq$$

$$\leq C_6\mathrm{B}(x)\left(\vartheta rai\sup_{t\in\Delta(x^+)}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Delta(x^+)}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right),$$

т. е.

$$\sup_{x\leq t\leq x^+} r(t)\left|f\left(x^+\right)\right| =\leq C_6\mathrm{B}(x)\left(\vartheta rai\sup_{t\in\Delta(x^+)}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Delta(x^+)}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right). \tag{23}$$

Подставляя (22), (23) в (21) получим

$$\sup_{x\leq t\leq x^+}\left|r(t)f(t)\right| =\leq C_7\mathrm{B}(x)\left(\vartheta rai\sup_{t\in\Omega_x}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Omega_x}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right). \tag{24}$$

Объединяя (20), (24), получим оценку

$$\sup_{t\in\Delta(x)}\left|r(t)f(t)\right|\leq C_8\mathrm{B}(x)\left(\vartheta rai\sup_{t\in\Omega_x}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Omega_x}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right).$$

Пусть $\Delta(x_i)$ — покрытие интервала $J=(a,b)$. Согласно лемме 5 такое покрытие существует. Из монотонности функций $\varphi^{\pm}(x)$ следует, что $x_i^- + d^+\left(x_i^-\right)\leq x_i^+$, $x_i^+ - d^-\left(x_i^+\right)\geq x_i^-$ и $x_i^- - d^-\left(x_i^-\right)\geq x_{i-1}^+$, $x_i^+ + d^+\left(x_i^+\right)\leq x_{i+1}^+$. Эти неравенства означают, что каждый отрезок Ω_{x_i} полностью покрывается тремя интервалами $\Delta(x_i)$ из покрытия $J=(a,b)$. Используя этот факт и оценку нормы, имеем

$$\left\|rf\right\|_{L_\infty}=\sup_i\sup_{t\in\Delta(x_i)}\left|r(t)f(t)\right|\leq C_9\sup_i\mathrm{B}(x_i)\left(\vartheta rai\sup_{t\in\Omega_{x_i}}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Omega_{x_i}}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right)\leq$$

$$\leq c_9\mathrm{B}\sup_i\left(\vartheta rai\sup_{t\in\Omega_{x_i}}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Omega_{x_i}}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right)\leq 3C_9\mathrm{B}\left\|f\right\|_{W'_\infty}.$$

В силу произвольности функции $f\in W'_\infty$ заключаем, что $W'_\infty\subset L_{\infty,r}$ и $\left\|E\right\|\leq 3C_9\mathrm{B}$. Это неравенство вместе с (16) показывает, что существует $\cancel{C}>0$ и $\cancel{C}^{-1}\mathrm{B}\leq\left\|E\right\|\leq\cancel{C}\mathrm{B}$.Теорема доказана.

Ввиду того, что функция $\mathrm{B}(x)$ локально ограничена, конечность величины B эквивалентна условию

$$\overline{\lim_{x\to a}}\mathrm{B}(x)<\infty,\quad \overline{\lim_{x\to b}}\mathrm{B}(x)<\infty\,, \tag{25}$$

поэтому имеет место

Теорема 1'. Пространство W'_∞ вложено в $L_{\infty,r}$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (25).

Теорема 2. Вложение $W'_\infty\subset C_r$ компактно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\substack{x\to b\\(x\to a)}}\mathrm{B}(x)=0\,. \tag{26}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть вложение $W'_\infty\subset C_r$ компактно, тогда оно ограничено в $L_{\infty,r}$. Поэтому $\sup_{x\in J}\mathrm{B}(x)<\infty$. По определению существуют точки $z^-=z^-(x)\in\left[x^-,x\right]$ и $z^+=z^+(x)\in\left[x,x^+\right]$ такие, что $r\left(z^-\right)\int_{x^- -d^-(x^-)}^{z^-}\rho^{-1}(\tau)d\tau+r\left(z^+\right)\int_{z^+}^{x^+ +d^+(x^+)}\rho^{-1}(\tau)d\tau=\mathrm{B}(x)$.

Рассмотрим семейство функций $\tilde{\rho}_x^{\mp}(t)=f_{x,z^{\mp}(x)}^{\mp}(t), \quad x\in J$. По теореме 3 имеем $\sup\limits_{x\in J}\left\|\tilde{f}_x^{\mp}(t)\right\|_{W'_\infty}\le C_1$. Следовательно, ограниченное в W'_∞ множество $\left\{\tilde{f}_x^{\mp}(t), x\in J\right\}$, в силу компактности вложения, компактно в C_r. На основании теоремы о компактности множества в $C(J)$ [12] для всех $\varepsilon>0$ существует набор интервалов $\left\{(\alpha_i,\beta_i)\right\}$, $\quad i=\overline{1,n}$, $\quad n=n(\varepsilon)$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i,\beta_i)=J$, где $\alpha_1=a$, $\quad \beta_n=b$,

$$\sup_{x\in J}\sup_{\eta,\xi\in(\alpha_1,\beta_1)}\left|r(\eta)\tilde{f}_x^{\mp}(\eta)-r(\xi)\tilde{f}_x^{\mp}(\xi)\right|<\varepsilon \quad \forall i=\overline{1,n}.$$

Из леммы 5 имеем $\bigcup\limits_{i=-\infty}^{\infty}\Delta(x_i)=J$, тогда существуют i^-,i^+ такие, что для всех $i<i^-$ существует не более чем счетное количество интервалов $\Omega_{x_i}\subset(a,\beta_1)$; для всех $i>i^+$ существует не более чем счетное количество интервалов $\Omega_{x_i}\subset(\alpha_n,b)$.

Пусть $j<i^-$ или $j>i^+$ и

$$\eta=\begin{cases} x_j^- - d^-\left(x_j^-\right) & \text{при} \quad \xi = z^-\left(x_j\right);\\ x_j^+ + d^+\left(x_j^+\right) & \text{при} \quad \xi = z^+\left(x_j\right).\end{cases}$$

Тогда

$$\left|r(\eta)\tilde{f}_x^{\mp}(\eta)-r(\xi)\tilde{f}_x^{\mp}(\xi)\right|=\left|r(\xi)\tilde{f}_x^{\mp}(\xi)\right|=$$

$$=\begin{cases} r\left(z^-\left(x_j\right)\right)\int\limits_{x_j^- - d^-\left(x_j^-\right)}^{z^-\left(x_j\right)}\rho^{-1}(\tau)d\tau=\sup\limits_{x_j^-\le z\le x_j} r(z)\int\limits_{x_j^- - d^-\left(x_j^-\right)}^{z}\rho^{-1}(\tau)d\tau\le\varepsilon,\ j<i^-;\\ r\left(z^+\left(x_j\right)\right)\int\limits_{z^+\left(x_j\right)}^{x_j^+ + d^+\left(x_j^+\right)}\rho^{-1}(\tau)d\tau=\sup\limits_{x_j\le z\le x_j^+} r(z)\int\limits_{z}^{x_j^+ + d^+\left(x_j^+\right)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\le\varepsilon,\ j<i^-;\\ r\left(z^-\left(x_j\right)\right)\int\limits_{x_j^- - d^-\left(x_j^-\right)}^{z^-\left(x_j\right)}\rho^{-1}(\tau)d\tau=\sup\limits_{x_j^-\le z\le x_j} r(z)\int\limits_{x_j^- - d^-\left(x_j^-\right)}^{z}\rho^{-1}(\tau)d\tau\le\varepsilon,\ j>i^+;\\ r\left(z^+\left(x_j\right)\right)\int\limits_{z^+\left(x_j\right)}^{x_j^+ + d^+\left(x_j^+\right)}\rho^{-1}(\tau)d\tau=\sup\limits_{x_j\le z\le x_j^+} r(z)\int\limits_{z}^{x_j^+ + d^+\left(x_j^+\right)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\le\varepsilon,\ j>i^+.\end{cases}$$

Отсюда для любого $\varepsilon>0$ существуют $i^+(\varepsilon), i^-(\varepsilon)$ такие, что для любого $j>i^+(\varepsilon)$ и $j<i^-(\varepsilon)$ $\mathrm{B}\left(x_j\right)<2\varepsilon$ и $\lim\limits_{\substack{x\to b\\(x\to a)}}\mathrm{B}(x)=0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполняется условие $\lim\limits_{\substack{x\to b\\(x\to a)}}\mathrm{B}(x)=0$, тогда существуют номера $-N,N$ такие, что для всех $x<-N$ и $x>N$ $\mathrm{B}(x)<\varepsilon$. В силу непрерывности составляющих $\mathrm{B}(x)$ непрерывна на отрезке $[-N,N]$ и поэтому ограничена на нем, т.е. $\sup\limits_{x\in[-N,N]}\mathrm{B}(x)\le C$. Следовательно, $\sup\limits_{x\in J}\mathrm{B}(x)<\infty$. Тогда согласно теореме 3 и из непрерывности функции из W'_∞ следует вложение $W'_\infty\subset C_r$. Надо показать компактность этого вложения.

Из условия (26) вытекает, что для любого $\varepsilon>0$ существуют $b_\varepsilon<b$, $\quad a_\varepsilon>a$ такие, что для всех x: $b_\varepsilon<x<b$ и $a<x<a_\varepsilon$ следует $\mathrm{B}(x)<\varepsilon$.

Для $f \in W'_\infty$ с нормой $\|f\|_{W'_\infty} \le 1$ по теореме 3 на интервалах $(a, a_\varepsilon]$ *и* $[b_\varepsilon, b)$ получим оценки

$$\sup_{\|f\|_{W'_\infty}\le 1}\ \sup_{\eta,\xi\in(a,a_\varepsilon]}\left|r(\eta)f(\eta)-r(\xi)f(\xi)\right| \le \sup_{\|f\|_{W'_\infty}\le 1}\ \sup_{\eta,\xi\in(a,a_\varepsilon]}\left|r(\eta)f(\eta)\right| +$$

$$+\sup_{\|f\|_{W'_\infty}\le 1}\ \sup_{\eta,\xi\in(a,a_\varepsilon]}\left|r(\xi)f(\xi)\right| = 2\sup_{\|f\|_{W'_\infty}\le 1}\left|rf\right|_{L_\infty(a,a_\varepsilon]} \le C_1 \sup_{\|f\|_{W'_\infty}\le 1}\ \sup_{x\in(a,a_\varepsilon]} \mathrm{B}(x)\|f\|_{W'_\infty} \le C_1\varepsilon.$$

Аналогично $\sup\limits_{\|f\|_{W'_\infty}\le 1}\ \sup\limits_{\eta,\xi\in[b_\varepsilon,b)}\left|r(\eta)f(\eta)-r(\xi)f(\xi)\right| \le C_2\varepsilon$.

Для непрерывных на $[a_\varepsilon, b_\varepsilon]$ функций $r(t), f(t)$ функция $r(t)f(t)$ непрерывна и, следовательно, равномерно непрерывна на отрезке $[a_\varepsilon, b_\varepsilon]$. Для такой функции для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что как только $|\eta - \varepsilon| < \varepsilon$, то $\left|r(\eta)f(\eta) - r(\xi)f(\xi)\right| < \xi$. Следовательно, разбивая отрезок $[a_\varepsilon, b_\varepsilon]$ на интервалы $\Delta(x_i)$ с длиной $\left|\Delta(x_i)\right| \le 2\delta$, получим на каждом из них такую оценку и $\sup\limits_i\ \sup\limits_{\eta,\xi\in\Delta(x_i)}\left|r(\eta)f(\eta)-r(\xi)f(\xi)\right| < \varepsilon$. Или, по-другому, на основании теоремы о предкомпактности ограниченного множества в C_r следует, что единичный шар $\|f\|_{W'_\infty} \le 1$предкомпактен в C_r, т.е. теорема доказана.

Список литературы

1 *Ойнаров Р.* О плотности финитных функций в весовых пространствах и весовые неравенства // РАН СССР. — 1988. — Т. 303. — № 3.

2 *Харди Г.Г, Литлвуд Дж.И., Пойа Г.* Неравенства. — М.: Изд. лит. на иностр. яз., 1948. — С. 41, 42.

3 *Мынбаев К.Т.* О существенной норме одного оператора вложения // Теоретические и прикладные вопросы моделирования. — Алма-Ата: Наука, 1986. — С. 34–40.

4 *Мынбаев К.Т., Отелбаев М.* Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1988. — 288 с.

5 *Sawer E.T.* A two weight weak type inequality for fractional integrals // Trans. Amer. Math. Soc. — 1984. — Vol. 281. — No. 1. — P. 339–345.

6 *Sawer E.T.* Norm inequalies relating singular integrals and the maximal function // Stud. Math. (PRL). — 1983. — Vol. 75. — No. 3. — P. 253–263.

7 *Sawer E.T.* A weighted Anequality and Eigenvalue Estimates for schralinger Operators // Indiana Univ. Math. G. — 1986. — Vol. 35. — No. 1. — P. 1–28.

8 *Ойнаров Р., Отелбаев М.* Критерий дискретности спектра общего оператора Штурма-Лиувилла и теоремы вложения, связанные с ним // Дифференциальные уравнения. — 1988. — Т.1, №. 4. — С. 584–591.

9 *Taspaganbetova Zh.* Two- sided estimates for matrix operators on the core of monotone sequences // Journal Math. Anal. — 2014. — Vol. 410.

10 *Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A.M.* Boundedness and Compactness criteria of a certain class of matrix operators // Mathematical Journal. — 2011. — Vol. 11. — No. 2(40). — P. 73–85.

11 *Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A.M.* Criteria on boundedness of matrix operators in weighted spaces of sequences and their applications // Annals of functional Analysis. — 2011. — Vol. 2. — No. 1. — P. 114–127.

12 Функциональный анализ. — М.: Наука, 1972. — С. 26–32.

Ш.Біләл, А.Қалыбекова

Харди типті жүктелген теңсіздік

Мақалада Харди жүктелген теңсіздігі орындалуы үшін жүктелген функцияларға қажетті және жеткілікті шарттар алынды. Жүктелген кеңістіктердің енуінің үздіксіздігі мен компактылығы дәлелденді. Ену компактылығының критерийі беріліп, негізгі теоремаларды дәлелдеуге қажетті леммалар келтірілді.

Sh.Bilal, A.Kalibekova

Weighted inequality of hardy type

In this article, are given necessary and additional conditions on the weight functions to perform weighted inequality of Hardy type or the corresponding estimate of the norm of the embedding operator. Established continuity and compactness of the embedding of weighted spaces. Are given compactness criterion for investments and some of the fundamental lemma used in the proof of the fundamental theorems.

References

1 Oinarov R. *Academy of Sciences of the USSR*, 1988, 303, 3.
2 Hardy G.G., Litlfut J.I., Polya G. *Inequalities,* Moscow: Edit. litas. on foreign. lang., 1948, p. 41, 42.
3 Mynbayev K.T. *Theoretical and applied questions of modeling,* Alma-Ata: Nauka, 1986, p. 34–40.
4 Mynbayev K.T., Otelbaev M. *Weighted function spaces and a range of differential operators,* Moscow: Nauka, 1988, 288 p.
5 Sawer E.T. *Trans. Amer. Math. Soc*., 1984, 281, 1, p. 339–345.
6 Sawer E.T. *Stud. Math. (PRL).* 1983, 75, 3, p. 253–263.
7 Sawer E.T. *Indiana Univ. Math. G.*, 1986, 35, 1, p. 1–28.
8 Oinarov R., Otelbaev M. *Differential equation,* 1988, 24, 4, p. 584–591.
9 Taspaganbetova Zh. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2*014, 410.
10 Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A.M. *Mathematical Journal,* 2011, 11, 2(40), p. 73–85.
11 Taspaganbetova Zh., Temirkhanova A.M. *Annals of functional Analysis,* 2011, 2, 1, p. 114–127.
12 *Functional analysis,* Moscow: Nauka, 1972, p.26–32.