

А.Г.Животов, Г.А.Есенбаева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова  
(E-mail:esenbaevagulsima@mail.ru)

### О расчете прямоугольных пластин методом тригонометрических рядов

В статье представлены расчеты прямоугольных пластин методом тригонометрических рядов. Для пластины, свободно или шарнирно опертой по всему контуру, решение определяется в двойных тригонометрических рядах (решение Навье). В более общем случае для пластины, у которой только два противоположных края имеют шарнирное опирание, а два других края — произвольные граничные условия, решение находится в виде одинарных тригонометрических рядов (решение М. Леви). Проведен сравнительный анализ полученных результатов.

*Ключевые слова:* прямоугольная пластина, функция прогибов, усилия, изгибающие моменты, крутящий момент, поперечные силы, цилиндрическая жесткость пластины, шарнирное опирание, равномерно распределенная нагрузка.

#### Решение в двойных тригонометрических рядах (решение Навье)

Рассмотрим прямоугольную пластину, свободно (или шарнирно) опертую по всему контуру (рис. 1).

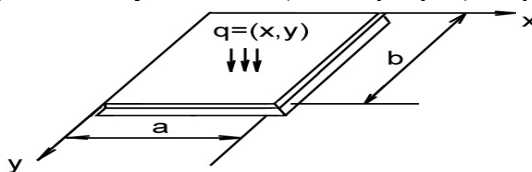


Рисунок 1

Поместив начало координат в точке 0, представим искомую функцию прогибов пластины  $W(x, y)$  в виде двойного тригонометрического ряда [1]

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y, \quad (1)$$

где  $A_{mn}$  — подлежащие определению коэффициенты, причем

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}; \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}.$$

Решение в виде (1) возможно здесь потому, что тригонометрические функции  $\sin \alpha_n x$ ,  $\sin \beta_m y$  удовлетворяют граничным условиям шарнирного опирания на контуре пластины:

при  $x = 0$  или  $x = a$

$$W = 0, \quad M_x = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0;$$

при  $y = 0$  или  $y = b$

$$W = 0, \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Разложим в аналогичный тригонометрический ряд и заданную нагрузку  $q(x, y)$ :

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{mn} \sin \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y, \quad (2)$$

где коэффициенты  $q_{mn}$  определяются по известной формуле

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y dx dy.$$

В частном случае равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q_0$  получим

$$q_{mn} = \frac{16}{nm\pi^2} q_0.$$

При действии сосредоточенной силы  $P$ , приложенной в точке пластины с координатами  $x = c$ ,  $y = d$ , будем иметь

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} P \sin \alpha_n c \cdot \sin \beta_m d.$$

Подставив теперь выражения (1) и (2) в основное разрешающее уравнение

$$D \nabla^2 \nabla^2 W = q_0$$

и произведя необходимые операции дифференцирования, далее, приравняв коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях уравнения, получим

$$A_{mn} = \frac{q_{mn}}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 D}.$$

Прогибы пластины могут быть теперь найдены по формуле (1), а усилия — по формулам компонентов усилий [2]:

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right), \quad Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 W); \\ M_2 &= -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \right), \quad Q_2 = -D \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla^2 W); \\ M_{12} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \nabla^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $M_1, M_2$  — изгибающие моменты;  $M_{12}$  — крутящий момент;  $Q_1, Q_2$  — поперечные силы,  $D = \frac{\bar{E} h^3}{12}$  — цилиндрическая жесткость пластины,  $\nabla^2 W$  — оператор Лапласа от функции прогибов, при подстановке в последние выражения (1):

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 D} \sin \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y; \\ M_x(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 + \nu \beta_m^2}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} q_{mn} \sin \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y; \\ M_y(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu \alpha_n^2 + \beta_m^2}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} q_{mn} \sin \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y; \\ M_{xy}(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-\nu) \alpha_n \beta_m}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} q_{mn} \cos \alpha_n x \cdot \cos \beta_m y; \\ Q_x(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} q_{mn} \cos \alpha_n x \cdot \cos \beta_m y; \\ Q_y(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} q_{mn} \sin \alpha_n x \cdot \cos \beta_m y. \end{aligned} \quad (4)$$

Для того чтобы оценить быстроту сходимости приведенных рядов и точность получаемых решений, рассмотрим пример расчета квадратной пластины ( $a = b$ ), загруженной равномерно распределенной нагрузкой  $q_0$ . Коэффициент Пуассона материала пластины  $\nu$  примем равным 0,3. Ограничившись в рядах (4) одним первым членом ( $n = 1, m = 1$ ), получим следующие значения для прогиба и изгибающего момента в центре пластинки:

$$W_{\max} = 0.00416 \frac{q_0 a^4}{D} \left( 0.00406 \frac{q_0 a^4}{D} \right);$$

$$M_{x,\max} = 0.0534 q_0 a^2 \quad (0.0479 q_0 a^2)$$

и для поперечной силы Кирхгофа в точке  $x = 0, y = \frac{b}{2}$ :

$$Q_{x,\max}^* = 0.348 q_0 a \quad (0.420 q_0 a).$$

Здесь в скобках приведены точные значения соответствующих величин, сопоставляя которые с полученными данными, можно видеть, что погрешность для прогиба составляет около 2,5 %, для изгибающего момента — 11,5, а для поперечной силы — 17,1 %.

Отсюда следует, что сходимость тригонометрических рядов ухудшается при их дифференцировании: если для нахождения прогибов с достаточной точностью в рядах можно ограничиться одним первым членом, то для определения моментов в них следует удержать не менее 2–4 членов, а для определения поперечных сил — 5–7 членов.

Сходимость рядов будет ухудшаться и в случае внешних нагрузок, представленных разрывными функциями и сосредоточенными силами: решение Навье приведет здесь к громоздким выкладкам из-за необходимости удерживать в рядах большое число членов.

Рассмотренное выше решение пригодно лишь для шарнирно опертой по всему контуру прямоугольной пластины.

Более общим является решение М. Леви, которое рассмотрено ниже. Оно пригодно для прямоугольной пластины, два противоположных края которой шарнирно оперты, а два других — имеют любое закрепление (защемление, шарнирное опирание) или свободны.

*Решение в одинарных тригонометрических рядах (решение М. Леви)*

Рассмотрим теперь более общий случай для пластины, у которой только два противоположных края (например,  $x = 0$  и  $x = a$ ) имеют шарнирное опирание, а два других края – произвольные граничные условия (рис. 2).

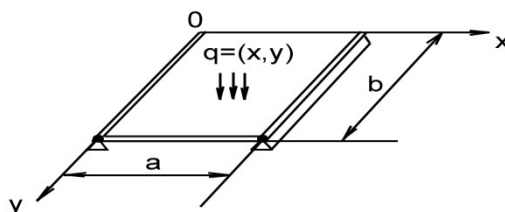


Рисунок 2

Искомая функция прогибов пластины  $W(x, y)$  может быть представлена здесь в виде одинарного ряда

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \tag{5}$$

где  $Y_n = Y_n(y)$  — неизвестная функция одного переменного, которая выбирается так, чтобы выражение (5) удовлетворяло разрешающему уравнению и условиям закрепления на краях  $y = 0$  и  $y = b$ . Видно, что выражение (5) удовлетворяет тем граничным условиям, которые заданы на сторонах  $x = 0, x = a$  пластины.

Внешняя нагрузка  $q(x, y)$  также должна быть представлена в виде аналогичного ряда

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a}, \tag{6}$$

где

$$q_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} dx .$$

Подставляя формулы (5) и (6) в основное дифференциальное уравнение

$$D\nabla^2\nabla^2 W = q(x_1, x_2),$$

получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^4 Y_n - 2\alpha_n^2 Y_n'' + Y_n^{IV}) \sin \frac{n\pi x}{a} = \frac{1}{D} \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad (7)$$

где  $\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$ . Равенство (7) будет удовлетворено, если

$$Y_n^{IV} - 2\alpha_n^2 Y_n'' + \alpha_n^4 Y_n = \frac{q_n}{D}. \quad (8)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (8) позволяет определить неизвестную функцию  $Y_n$  для любого номера разложения  $n$ . Его решение может быть записано в виде

$$Y_n = A_n \cdot ch\alpha_n y + B_n \cdot sh\alpha_n y + C_n \cdot y \cdot ch\alpha_n y + D_n \cdot y \cdot sh\alpha_n y + Y_n^0, \quad (9)$$

где  $A_n, B_n, C_n, D_n$  — произвольные постоянные интегрирования, а  $Y_n^0$  — частный интеграл, зависящий от вида заданной внешней нагрузки  $q_n(y)$ . Например, в случае  $q_n = const$  частный интеграл запишется в виде

$$Y_n^0 = \frac{q_n}{\alpha_n^4 D}.$$

Для определения четырех постоянных интегрирования используются граничные условия, заданные на краях  $y = 0$  и  $y = b$  пластины, которые могут быть различными [3]:

при шарнирном опирании

$$W(x_1, x_2) = 0, \quad M_1 = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right) = 0;$$

при жестком защемлении

$$W(x_1, x_2) = 0, \quad \alpha(x_1, x_2) = \frac{\partial W}{\partial x_1} = 0;$$

при свободном крае

$$M_1 = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right) = 0;$$

$$Q_1^* = Q_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = -D \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial x_1^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right] = 0,$$

где  $Q_1^*$  — поперечная сила Кирхгофа.

В общем случае это приводит к решению системы алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A_n, \dots, D_n$ .

Порядок этой системы будет повышаться, если нагрузка  $q_n$  задана в направлении оси  $y$  прерывным законом. Например, в случае, представленном на рисунке 3, нагрузка разбивает пластину в направлении оси  $y$  на три участка. Для каждого участка мы будем иметь по четыре неизвестных  $A_n, \dots, D_n$ , а общее число их составит 12. Таким образом, для определения постоянных интегрирования здесь придется составить систему 12 алгебраических уравнений, четыре из которых будут отражать граничные условия на краях пластинки, а 8 других — условия сопряжения участков I – II и II – III.

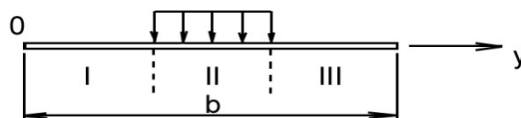


Рисунок 3

Для преодоления отмеченного неудобства решение уравнения (8) следует представить не в виде (9), а в форме метода начальных параметров. В этом случае при любом законе распределения нагрузки  $q_n(y)$  для нахождения постоянных интегрирования (начальных параметров) нужно будет решить систему только двух алгебраических уравнений.

После определения функции  $Y_n(y)$  прогибы пластины могут быть найдены по формуле (5), а изгибающие и крутящие моменты, а также поперечные силы — по формулам (3), которые с учетом (5) запишутся в виде

$$M_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D(\alpha_n^2 Y_n - \nu Y_n'') \sin \alpha_n x;$$

$$M_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D(-Y_n'' + \nu \alpha_n^2 Y_n) \sin \alpha_n x;$$

$$M_{xy}(x, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} D(1 - \nu) \alpha_n Y_n' \sin \alpha_n x;$$

$$Q_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D(\alpha_n^3 Y_n - \alpha_n Y_n''') \cos \alpha_n x;$$

$$Q_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D(\alpha_n^2 Y_n' - \nu Y_n''') \sin \alpha_n x.$$

Метод одинарных тригонометрических рядов является в принципе более точным, чем рассмотренный ранее метод Навье, так как в нем искомая функция  $W(x, y)$  аппроксимируется с помощью тригонометрических функций только в одном направлении, а в другом направлении разыскивается точно из дифференциального уравнения (8). Это можно видеть из сопоставления результатов, полученных двумя методами для рассмотренной ранее задачи об изгибе квадратной пластины, шарнирно опертой по всему контуру (см. табл.).

Т а б л и ц а

Искомая величина	Метод расчета			
	Навье	М. Леви	Ритца	Табличные значения
$W(0,5a, 0,5a)$	0,00416 (2,5%)	0,00411 (1,2%)	0,00413 (2%)	0,00406
$M_x(0,5a, 0,5a)$	0,0534 (11,556)	0,0517 (7,9%)	0,0517 (7,8%)	0,0479
$M_y(0,5a, 0,5a)$	0,0534 (11,5%)	0,0492 (2,7%)	0,0517 (7,9%)	0,0479
$Q_x^*(0, 0,5a)$	0,348 (17%)	0,345 (16,9%)	0,375 (10,7%)	0,420
$Q_y^*(0,5a, 0)$	0,348 (17%)	0,466 (11%)	0,375 (10,7%)	0,420

Следует отметить, что при одном члене разложения (5) в методе одинарных рядов существенно уточняются не только величины прогиба  $W(x, y)$  и изгибающего момента  $M_y$ , но и изгибающего момента другого направления  $M_x$ .

Заметим, что в обоих рассмотренных методах сходимость рядов будет тем выше и точность тем больше, чем лучше заданная нагрузка  $q(x, y)$  может быть представлена с помощью разложения по тригонометрическим функциям.

### Список литературы

- 1 Леонтьев Н.Н., Леонтьев А.Н., Соболев Д.Н., Травуш В.И. Аналитические и численные методы расчета прямоугольных пластинок. — М.: МИСИ, 1982. — 87 с.
- 2 Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. — М.: Высш. шк., 1990. — 397 с.
- 3 Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Расчет пластин. — Киев: Будивельник, 1970. — 320 с.

А.Г.Животов, Г.А.Есенбаева

**Тригонометриялық қатар әдісімен тікбұрышты  
пластиналарды есептеу туралы**

Мақалада тікбұрышты пластиналардың есебі тригонометриялық қатар әдісімен келтірілген. Контурға бос немесе шар тәріздес тірелген пластина жағдайында шешімі қос орынды тригонометриялық қатарда анықталады (Навье шешімі). Жалпыланған жағдайда екі қарама-қарсы шеті бар пластиналардың шешімі шар тәріздес тіреуде, ал екі өзге шеті ерікті шекаралық шарттармен болғанда шешімі бір орынды тригонометриялық қатарда болады (М.Леви шешімі). Алынған нәтижелердің салыстырмалы талдауы жүргізілген.

A.G.Zhivotov, G.A.Yessenbayeva

**On the calculation of rectangular plates by the method  
of trigonometric series**

In the article calculations of rectangular plates by the method of trigonometric series are presented. In the case of the plate, which have free or hinged bearing along the whole contour, the solution is determined in the double trigonometric series (the solution of the Navier). In the more general case of a plate in which only two opposite edges are hinged bearing, and the other two edges are arbitrary boundary conditions, the solution is sought in the form of the single trigonometric series (the solution of the M. Levi). The comparative analysis of the results is obtained.

## References

- 1 Leontiev N.N., Leontiev A.N., Sobolev D.N., Travush V.I. *Analytical and numerical methods of calculation of rectangular plates*, Moscow: MICI, 1982, 87 p.
- 2 Alexandrov A.V., Potapov V.D. *Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity*, Moscow: Vysshaya shkola, 1990, 397 p.
- 3 Weinberg D.V., Weinberg Ye.D. *Calculation of plates*, Kiev: Budivelnik, 1970, 320 p.