УДК 517 514

А.Таскараев, А.Абжапбаров, Н.К.Аширбаев

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.О.Ауезова, Шымкент
(E-mail: abilbek_47@mail.ru)

Минимальные и выпуклые поверхности

В статье рассмотрено уравнение Монжа-Ампера, правая часть которого и есть сумма интегральных условных кривизн различных порядков. Интегрируя заданное уравнение, получено интегральное уравнение. Применяя теоремы И.Я.Бакельмана, построен нелинейный оператор U, переводящий конус выпуклых поверхностей на себя. Изучены функционально-топологические свойства оператора U. Даны важные оценки применения теоремы Штейнера, а также доказаны непрерывность и компактность этого оператора. С помощью теоремы Красносельского доказано существование неподвижной точки оператора, являющегося решением данной задачи.

Ключевые слова: поверхность, выпуклость, кривизна, оператор, интегральные уравнения.

Минимальные поверхности являются математическим объектом, достаточно хорошо моделирующим физические мыльные пленки. Обратно, многие глубокие свойства математических поверхностей проявляются в опытах с мыльными пленками.

В современном вариационном исчислении принято выделять так называемые одномерные и многомерные вариационные задачи. Под одномерными задачами подразумевается исследование функционалов, определенных, например, на пространстве кусочно-гладких кривых γ(t) в римановом многообразии. Классическими примерами таких функционалов являются функционал длины кривой $\int\left|\dot{\gamma}\right|dt$ и функционал действия $\int\left|\dot{\gamma}\right|^2 dt$. Экстремалями таких функционалов являются некоторые кривые в многообразии. Например, экстремалями функционала длины являются геодезические, параметризованные произвольным непрерывным параметром, а экстремалями функционала действия являются геодезические, параметризованные натуральным параметром.

Однако во многих вопросах физики и механики появляются важные функционалы, определенные на многомерных объектах и поверхностях, например, на пространстве двумерных поверхностей с фиксированной границей. Важным примером является функционал площади, сопоставляющей каждой такой поверхности ее площадь.

Другим примером, тесно связанным с предыдущим, является функционал Дирихле. В такой терминологии функционал площади и функционал Дирихле можно назвать двумерными функционалами. В работе Дао Чонг Тхи и А.Т.Фоменко [1] изучены многомерные функционалы.

Лагранж проводит уравнение минимальных поверхностей (т.е. экстремалей функционала площади) к форме, в которой функции p и q находятся из следующего условия: две дифференциальные 1-формы $pdx + qdy$ и $\dfrac{pdx - qdy}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ должны являться полными дифференциалами. Эти функции и задают минимальную поверхность.

Следующий важный шаг в направлении развития минимальных поверхностей (т.е. поверхностей локально минимальной площади) был сделан Гаспаром Монжем.

Сначала Монж развивает общую теорию кривых и двумерных поверхностей, в частности, анализирует свойства двух главных кривизн в произвольной точке поверхности. Затем он отдельно рассматривает случай, когда оба радиуса кривизны (в каждой точке поверхности) равны между собой и имеют противоположные знаки. Отсюда следует, что средняя кривизна поверхности, т.е. сумма величин, обратных к радиусам кривизны, тождественно равна нулю в каждой точке поверхности. Другими словами, эта поверхность минимальна, локально минимизирует функционал площади поверхности.

В частности, Монж прямо указывает на следующее важное свойство этой поверхности: если обвести ее часть непрерывным замкнутым контуром, то из всех поверхностей, проходящих через этот контур, ее площадь внутри контура будет наименьшей.

Катеноид и геликоид есть двумерные минимальные поверхности. Вообще, проблема нахождения поверхности наименьшей площади с заданной границей была названа «проблемой Плато» еще Лебегом в 1902 г.

Известно, что функционал площади и функционал Дирихле [1; 56] имеют вид

$$A(r) = \iint_{D^2} \sqrt{EG - F^2}\, dudv;$$

$$D(r) = \iint_{D^2} (E + G)\, dudv,$$

где $r = r(u, v)$ — радиус-вектор поверхности Φ в R^3; $D(\subset R^2)$ — диск в R^3, а E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, являющейся образом диска в R^3. Экстремальные критические радиус-векторы для этих функционалов устроены так. Для функционала площади ими являются те и только те радиус-векторы, для которых средняя кривизна соответствующей поверхности равна нулю (минимальные поверхности). Экстремальными радиус-векторами для функционала Дирихле являются те и только те векторы, которые являются гармоническими относительно u, v, т.е.

$$\Delta r = r_{uu} + r_{vv} = 0.$$

Функционал площади и функционал Дирихле связаны неравенством: $D(r) \geq A(r)$, причем равенство достигается в том и только в том случае, когда $E = G$, $F = 0$, т.е. когда координаты u, v конформны.

Рассмотрим поверхности, задающиеся в R^3 графиком однозначной функции $z = f(x, y)$, т.е. допускающие гладкую ортогональную взаимно однозначную проекцию на двумерную плоскость или на область в ней. Пусть поверхность Φ проектируется в область G с выпуклой границей γ. Если поверхность задается графиком, то функционал площади имеет вид

$$A[f] = \iint_{G} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy.$$

Уравнение Эйлера для функционала площади имеет вид

$$\left(1 + f_x^2\right) f_{yy} - 2 f_x f_y f_{xy} + \left(1 + f_y^2\right) f_{xx} = 0.$$

Утверждение. Для любого замкнутого кусочно-гладкого контура γ', взаимно однозначного проектирующегося на плоскость в выпуклую замкнутую кривую γ, существует минимальная поверхность с данной границей, проектирующаяся, следовательно, на область, ограниченную на плоскости кривой γ.

Существование и единственность этого решения есть следствие проекции границы. Если от выпуклости области G отказаться, то утверждение становится неверным [1; 56].

Следующий параграф посвящен построению минимальной поверхности с невыпуклой проекцией.

§1. Построение минимальной поверхности с невыпуклой проекцией

Как известно, задача о построении минимальной поверхности с заданным краем, имеющей однозначную проекцию на плоскость x, y, эквивалентна задаче Дирихле

$$(1+Z_y^{2)})Z_{xx}-2Z_xZ_yZ_{xy}+(1+Z_x^2)Z_{yy}^2=0; \qquad (1.1)$$

$$Z\big|_{\partial\Omega}=h(s). \qquad (1.2)$$

Если область Ω имеет границей замкнутую выпуклую кривую Γ с существенно положительной кривизной, то задача Дирихле (1.1–1.2) всегда имеет единственное решение из класса $C^{m,\delta}$, при этом предполагается, конечно, что

$$h(s)\in C^{m,\delta+\varepsilon},\ \text{а}\ \delta+\varepsilon<1,\ \Omega\in L_m\ (m>3).$$

Здесь $C^{m,\delta}$ — класс функций на Ω, имеющих непрерывные производные всех порядков до m и удовлетворяющих условию Гельдера с показателем $\delta\in[0,1]$; L_m — класс областей, у которых для каждой кривой, входящей в состав границы области, функции $x(s)$, $y(s)$ имеют $m-1$ производные, а $L_{m,\lambda}$ — класс областей, у которых для каждой кривой, входящей в состав границы области, функции $x(s)$, $y(s)$ имеют $m-1$ производные, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем $\lambda\in[0,1]$.

Существование и единственность решения задачи Дирихле для уравнений (1.1–1.2) есть прямое следствие теоремы 28 из [2].

Если не предполагать строгой выпуклости контура Γ, то минимальной поверхности с заданным краем и однозначной проекцией на некоторую плоскость может не существовать [2]. Аналитически это означает, что краевая задача (1.1–1.2) не имеет решений.

Теперь докажем достаточное условие решение задачи Дирихле (1.1–1.2).

Рассмотрим оценки для функций

$$AC-B^2,\quad A^2+2B^2+C^2,\ D,$$

где

$$A=1+Z_y^2=1+q^2;$$
$$B=-Z_xZ_y=-pq;$$
$$C=1+Z_x^2=1+p^2;$$
$$D=0.$$

Отсюда

$$AC-B^2=1+p^2+q^2;$$
$$A^2+2B^2+C^2=1+(1+p^2+q^2).$$

Поэтому, если положить

$$R(p^2+q^2)=1+(1+p^2+q^2);$$
$$Q(p^2+q^2)=1+p^2+q^2;$$
$$S(p^2+q^2)=0,$$

то неравенства (13.2, 3–5) из [2] будут иметь место с постоянными

$$\mu=1,\ \nu=1,\ \delta=0.$$

Отметим, что $R(p^2+q^2)$ и $Q(p^2+q^2)$, очевидно, неубывающие функции величины p^2+q^2.

Пусть функции

$$u=f(x,y);$$
$$v=g(x,y)$$

принадлежат классу $H(J_1, J_2, T_0, \tau_0, \chi_0, m_0, M_0^+, M_0^-)$ (см. [9, §14] и удовлетворяют условию

$$W_{f,g}\le W_0(H)+\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ — произвольно взятое малое число. Тогда имеют место неравенства

$$\frac{1}{\tau_0}\left(p_1^2+q_1^2\right)\le p^2+q^2\le T_0\left(p_1^2+q_1^2\right).$$

По формуле (13.2.6) из [2] строим функцию

$$N(p_1^2+q_1^2)=\frac{Q\left(\dfrac{1}{r_0}(p_1^2+q_1^2)\right)}{R\left[T_0(p_1^2+q_1^2)\right](p_1^2+q_1^2)}=$$

$$=\frac{\tau+(p_1^2+q_1^2)}{\tau_0\left[1+\left(1+T_0(p_1^2+q_1^2)\right)^2\right](p_1^2+q_1^2)}.$$

Обозначим через M^{+}, M^{-} — верхнее и нижнее извивания кривой γ, построенной по краевому условию

$$Z\big(_{\partial G}=H(S),$$

и будем считать, что M^{+}, M^{-} строго положительны.

Далее полагаем, что

$$N_H(p_1^2+q_1^2;\gamma;N)=\inf N(\overline{p}_1^2+\overline{q}_1^2);$$

$$N_b(p_1^2+q_1^2;\gamma;N)=\inf N(\overline{p}_1^2+\overline{q}_1^2),$$

где точная нижняя грань берется соответственно в кругах

$$\left(\overline{p}_1-p_1\right)^2+\left(\overline{q}_1-q_1\right)^2\le M^{-};$$

$$\left(\overline{p}_1-p_1\right)^2+\left(\overline{q}_1-q_1\right)^2\le M^{+}.$$

Очевидно, что функции N_H и N_b в нуле ограничены снизу и допускают оценки

$$N_H\ge\frac{\tau_0+\left(\sqrt{W}-\sqrt{M^{-}}\right)^2}{\tau\left(1+\left[1+T_0\left(\sqrt{W}+\sqrt{W^{-}}\right)^2\right]^2\right)\left(\sqrt{W}+\sqrt{M^{-}}\right)^2}=$$

$$=n_H(W);$$

$$N_b\ge\frac{\tau_0+\left(\sqrt{W}-\sqrt{M^{-}}\right)^2}{\tau\left(1+\left[1+T_0\left(\sqrt{W}+\sqrt{W^{+}}\right)^2\right]^2\right)\left(\sqrt{W}+\sqrt{M^{+}}\right)^2}=$$

$$=n_b(W),$$

где в обоих соотношениях положено $W=p_1^2+q_1^2$.

В соответствии с обозначениями §9 из [1] имеем

$$A(n_H)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}n_H(p_1^2+q_1^2)dp_1dq_1<$$

$$<\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}N_H(p_1^2+q_1^2)dp_1dq_1=$$

$$=A(N_H),$$

$$=A(n_b)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}n_b\left(p_1^2+q_1^2\right)dp_1dp_1<$$

$$<\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}N_b(p_1^2+q_1^2)dp_1dq_1=$$

$$=A(N_b),$$

Важно отметить, что числа $A(n_H)$ и $A(n_b)$ находятся, явно, по свойствам краевого условия и именно по числам M^{-} и M^{+}. Поэтому в дальнейшем для получения эффективно проверяемых достаточных условий существования минимальной поверхности с данным краем удобно пользоваться величинами $A(n_H)$ и $A(n_b)$.

В соответствии с § 13 из [2] для отображения

$$\begin{aligned} u &= f(x, y); \\ v &= g(x, y), \end{aligned} \tag{1.3}$$

переводящего Ω в строго выпуклую область G, имеем

$$W_{f,g} = \frac{\pi}{\chi_0^2} \frac{\delta^2 + \mu(\beta(f) + \beta(g))}{J_1^2 \nu} =$$
$$= \frac{\pi(\beta(f) + \beta(g))}{\chi_0^2 J_1^2},$$

так как $\delta = 0$, а $\mu = \nu = 1$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — наименьшая из разностей $A(N_H) - A(n_H)$ и $A(N_b) - A(n_b)$. Подберем отображение (1.3) так, чтобы было

$$W_0(H) \le W_{f,g} + \varepsilon.$$

Тогда, если выполнены неравенства

$$W_{f,g} \le A(n_H);$$
$$W_{f,g} \le A(n_b),$$

или развернуто

$$\begin{aligned} &\sup_{\Omega \cup \partial} \left\{ f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 + g_{xx}^2 + 2g_{xy}^2 + g_{yy}^2 \right\} \le \\ &\le \frac{J_1^2 \chi_0^2}{\pi} A(n_H), \\ &\sup_{\Omega \cup \partial} \left\{ f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 + g_{xx}^2 + 2g_{xy}^2 + g_{yy}^2 \right\} \le \\ &\le \frac{J_1^2 \chi_0^2}{\pi} A(n_b), \end{aligned} \tag{1.4}$$

то для $\max\limits_{\Omega \cup \Gamma} |Z(x, y)|$ и $|\mathrm{gradZ}|$ на Г могут быть получены конечные оценки, в зависимости лишь от исходных данных задачи Дирихле (1.1.–1.2) и констант, определяющих класс отображений

$$H(T_0, \tau_0, \chi_0, m_0, M^+, M^-).$$

Эти оценки, как нетрудно заметить, будут равномерными в задаче Дирихле с параметрами $\xi \in [0, 1]$:

$$(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0; \tag{1.5}$$

$$Z\big|_{\partial} = \xi h(s). \tag{1.6}$$

Отсюда уже вытекают равномерные априорные оценки $|gradZ|$ во всей области $\Omega \cup \Gamma$, так как при всех $\xi \in [0,1]$ уравнение (1.5) в задаче Дирихле (1.5–1.6) принадлежит классу L и, следовательно, по теореме 21 из [2] исходная задача Дирихле (1.1–1.2) имеет единственное решение $Z \in C^{m+2,\delta}$, если выполняются неравенства (1.4). Тем самым получено достаточное условие для существования минимальной поверхности.

§2. Условная кривизна М-выпуклой поверхности

Пусть $G \subset E^n \subset E^{n+1}$ — замкнутая ограниченная выпуклая область. Через $M(G)$ обозначим класс минимальных гиперповерхностей с краем, край которого однозначно проектируется на ∂G, а сама поверхность — в область G. Ясно, что $M(G) = M_0^+ \cup M_0^-$, где $M^+(G)$ — подкласс минимальных гиперповерхностей, расположенных в полупространстве $Z > 0$, а $M^-(G)$ — подкласс минимальных гиперповерхностей, расположенных в полупространстве $Z < 0$. Мы рассмотрим один из них, например, $M^+(G)$.

Пусть $\Phi \in M^+(G)$ — минимальная гиперповерхность и задается уравнением $Z = \varphi(x)$, где $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Пусть

$$m_\varphi = \inf_{x\in\bar G} \varphi(x);\ M_\varphi = \sup_{x\in\bar G} \varphi(x);\ \ H_{M_\varphi} \text{ — график функции } Z = M_\varphi \text{ в } G.$$

Через T_Φ обозначим выпуклые оболочки Φ и H_{M_φ} т.е.

$$T_\Phi = C_0(\Phi,\ H_{M_\varphi}).$$

Пусть далее Z_Q — шаровой цилиндр с направляющей Q и образующими параллельными оси Z, где Q — наименьший замкнутый n-мерный шар на гиперплоскости E^n, содержащий в себе G.

Через Z_Φ обозначим часть Z_Q, отсекаемую от него гиперплоскостями $Z = M_\varphi$ и $Z = m_\varphi$.

Очевидно, имеют место включения

$$\Phi \subset \partial T_\Phi, a;$$
$$T_\Phi = Z_\Phi.$$

Исходя из фактов, изложенных в [1], для интегральных кривизн различных порядков имеем:

1) при всех $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ $\omega_k(\partial T_\Phi, \partial T_\Phi) \le \omega_k(\partial Z_\Phi, \partial Z_\Phi)$; (2.1)

2) при всех $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ $\tilde\omega_k(\Phi, G) \le \omega_k(\partial T_\Phi, \partial T_\Phi)$. (2.2)

Из (2.1) и (2.2) получим неравенство

$$\tilde\omega_k(\Phi, G) \le \omega_k(\partial Z_\Phi, \partial Z_\Phi). \tag{2.3}$$

Из соотношений (2.1–2.3) для интегральных кривизн различных порядков, перенесенных на гиперплоскость E^n, получим равенство

$$\begin{aligned}
&\omega_0(\partial Z_\Phi, \partial Z_\Phi) = 2\mu_n r^n + v_{n-1}(M_\varphi - m_\varphi) r^{n-1};\\
&\omega_0(\partial Z_\Phi, \partial Z_\Phi) = v_{n-2}\left[(M_\varphi - m_\varphi) r^{n-k+2} + \frac{2d_k \cdot k}{n-k+1} r^{n-k+1}\right];\\
&k = 1, 2, 3, \ldots, n-1;\\
&\omega_n(\partial Z_\Phi, \partial Z_\Phi) = n v_{n-1} d_{n-1},
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где μ_n — объем единичного n-мерного шара; v_{n-1} — площадь $(n-1)$-мерной сферы и

$$d_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k \psi d\psi,$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Доказательство этого утверждения аналогично, как и теоремы 1 из §5, гл. 2 [3].

В главе III из [3] доказано существование обобщенного решения уравнения в функциях множеств, имеющих вид

$$\omega(R, \Phi, B) = \sum_{k=0}^{n} \mu_k(a_k, \Phi, B) \tag{2.5}$$

в классе $\overset{\circ}{K}{}^{+}(G)$, где $\omega(R, \Phi, B)$ — условная кривизна выпуклой гиперповерхности Φ; $\mu_k = \mu_k(a_k, \Phi, B)$ — интегральные условные кривизны порядка k выпуклой гиперповерхности Φ; B — борелевское множество в ограниченной выпуклой области $G \subset E^n$; $a_k = a_k(x, z) > 0$ — непрерывные функции в области G.

Гиперповерхность называется m-выпуклой, если она является границей выпуклой оболочки некоторой минимальной гиперповерхности Φ.

Если $\Phi \in M^+(G)$, то через Φ_0 обозначим границу выпуклой оболочки Φ, т.е. $\Phi_0 = \partial C_0\Phi$. Совокупность таких выпуклых гиперповерхностей обозначим $M_0^+(G)$. Ясно, что

$$M_0^+(G) \subset \overset{\circ}{K}{}^{+}(G) \subset C(G).$$

Для $M_0^+(G)$ выполняются все условия теоремы §4 гл. III из [3]. Отсюда получим следующую теорему.

Теорема 1. Уравнение в функциях множествах (4.3.5) имеют хотя бы одно решение в классе $M_0^+(G)$.

Теперь рассмотрим естественное отображение

$$\chi\colon\ M_0^+(G) \to M^+(G),\ \text{т.е. если } \Phi \in M^+(G) \text{ и } \Phi_0 = \partial C_0\Phi, \text{ то } \chi(\Phi_0) = \Phi.$$

Это отображение взаимно-однозначное. Отсюда следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 существует минимальная гиперповерхность из класса $M^+(G)$, условная кривизна соответствующей m-выпуклой гиперповерхности есть сумма интегральных условных кривизн различных порядков.

Доказательство теоремы следует из теоремы 4, гл. III §§3 и 4 из [3].

Список литературы

1 *Дао Чонг Тхи, Фоменко А.Т.* Минимальные поверхности и проблема Плато. — М.: Наука, 1987. — 312 с.

2 *Бакельман И.Я.* Геометрические методы решения эллиптических уравнений. — М.: Наука, 1965. — 340 с.

3 *Таскараев А.* Выпуклые поверхности и условная кривизна. — Шымкент: Изд-во ЮКГУ, 2005. — 124 с.

Ә.Тасқараев, Ә.Әбжапбаров, Н.Қ.Әшірбаев

Кіші және дөңес беттер

Мақалада оң жағы әр түрлі ретті шартты интегралдық қисықтың қосындысы болып келетін Монж-Ампер теңдеуі қарастырылды. Берілген теңдеуді интегралдау арқылы интегралдық теңдеу алынады. И.Я.Бекельман теоремасын қолдана отырып, дөңес беттің конусын өзіне айналдыратын сызықтық емес U операторы құрылды. U-операторының функционалды топологиялық қасиеттері зерттелді. Штейнер теремасын қолданудың маңыздылығы көрсетіліп, U-операторының үзіліссіздігі мен ықшамдылығы дәлелденді. Красносельский теоремасын қолданып, қойылған есептің шешімі болатын нүкте оператордың жылымайтын нүктесі бар екені дәлелденді.

A.Taskarayev, A.Abzhapbarov, N.K.Ashirbayev

The minimal and convex surfaces

We consider the Monge-Ampere's right-hand side which is the sum of the integral conditional curvatures of different orders. Integrating the given equation we obtain an integral equation Applying Theorem I.Ya.Bakelmana construct nonlinear U operator mapping the cone of convex surfaces themselves. The functional-topological properties of the operator U. Obtained important assessment applying the theorem of Steiner, as well as to prove the continuity and compactness of the operator U. Applying the theorem of Krasnosel'skii prove the existence of a fixed point of this operator is the solution to this problem.

References

1 Dao Chong Thi, Fomenko A.T. *Minimal surfaces and Plateau problem*, Moscow: Nauka, 1987, 312 p.

2 Bakel'man I.Ya. *Geometric methods for solving elliptic equations*, Moscow: Nauka, 1965, 340 p.

3 Taskaraev A. *The convex curvature of the surface and the conditional*, Shymkent:Publ. YuKSU, 2005, 124 p.