УДК 517.22+519.614

А.Б.Оспанова

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана
(E-mail: o.ademi111@gmail.com)

Теоремы вложения разностных весовых пространств. I

В статье исследованы вложения разностных весовых пространств $w_p^2(\upsilon)$. Получены необходимые и достаточные условия вложения этих пространств в пространство суммируемых последовательностей $l_q(u)$, $1 \le p \le q < \infty$. Работа состоит из двух частей. Первая часть посвящена получению описания достаточных условий вложения $w_p^2(\upsilon)$ в $l_q(u)$.

Ключевые слова: разностное весовое пространство, весовое пространство Соболева, вложения.

Настоящая работа посвящена изучению вложений разностных весовых пространств $w_p^2(\upsilon)$ в пространство последовательностей $l_q(u)$ ($1 \le p \le q < \infty$).

Разностные функциональные пространства и соответствующие вопросы вложения естественным образом возникают, к примеру, в теории дифференциальных уравнений. В то время, как аппарат теории вложения пространств функций с непрерывным аргументом развит достаточно хорошо, теория вложения пространств функций с дискретным аргументом развита относительно слабо. Так как на практике дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами часто решают методом конечных разностей, что требует различных априорных оценок, то интерес к теоремам вложения весовых пространств функций с дискретным аргументом в настоящее время не утихает. Этому способствуют также различные полезные приложения данной теории.

По данной тематике известны работы Б. Мусилимова и М. Отелбаева [1], Г. Мухамедиева [2], Е. С. Смаилова [3], К. Т. Мынбаева и М. Отелбаева [4], Р. Ойнарова и А. П. Стихарного [5], А. Т. Булабаева и А. Т. Мухамбетжанова [6] и других [7, 8]. Так, М. Отелбаев ввел специальные усреднения весовых функций, благодаря которым он получил, в частности, двусторонние оценки норм некоторых операторов вложения, описание спектра и оценки функции распределения спектра некоторых полуограниченных операторов. В работах Е. С. Смаилова результаты из [1] были обобщены с точки зрения разностных теорем вложения, исследованы вопросы весового вложения

$$w_p^1(1,\upsilon) \to l_q. \tag{1}$$

В [3] были получены критерии компактного вложения (1), а также изучались некоторые спектральные вопросы для рассматриваемых там разностных операторов. Кроме этого, дискретный вариант усреднения М. Отелбаева как метод был использован и в работах Б. Мусилимова, А.Т. Булабаева, А.Т. Мухамбетжанова, Г. Мухамедиева и других математиков. В работах А.Т. Булабаева и А.Т. Мухамбетжанова исследованы вопросы вложения и оценки аппроксимативных чисел оператора одновесового вложения в двумерном случае. Двухвесовые теоремы вложения изучались в работах Р. Ойнарова, А.П. Стихарного [5], где был получен критерий непрерывного и компактного вложения

$$w_p^1(\rho,\upsilon) \to l_q(u),$$

выраженный в терминах дискретной функции $B_{t,s}^{p,q}$, здесь t,s — целые числа.

В данной работе получены теоремы вложения $w_p^2(1,\upsilon)\to l_q(u)$ в терминах локальных оценок. В первой части работы найдены достаточные условия вложения, во второй — необходимые.

Дадим определение пространств $w_p^2(\upsilon)$, $l_q(u)$ ($1\le p,q<\infty$). Пусть $\upsilon=(\upsilon_j)_{j=1}^{\infty}$ — неотрицательная числовая последовательность, удовлетворяющая условию невырожденности

$$\sum_{j=k}^{\infty}\upsilon_j>0\ (k=1,2,...).$$

Через $l_q(u)$ $(u_j\ge 0)$ обозначается пространство последовательностей $y=(y_j)_{j=1}^{\infty}$ с конечной нормой

$$\|y\|_{l_q(u)}=\left(\sum_{j=0}^{\infty}u_j\,|\,y_j\,|^q\right)^{1/q},\ 1\le q<\infty. \tag{2}$$

Обозначим через Δ разностный оператор

$$\Delta y=\left\{\Delta y_j\right\}_{j=1}^{\infty},\ \Delta y_j=y_{j+1}-y_j\quad (j=1,2...). \tag{3}$$

Оператор Δ^2 на $y=\left\{y_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ зададим равенством

$$\Delta^2 y_j=y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}=\Delta y_{j+1}-\Delta y_j\ (y_0=0). \tag{4}$$

Весовое разностное пространство $w_p^2(\upsilon)$ $(1<p<\infty)$ целой гладкости $m=2$ определяется как пространство всех последовательностей $y=(y_j)_{j=1}^{\infty}$, таких, что норма

$$\|y\|_{w_p^2(\upsilon)}=\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(|\,\Delta^2 y_j\,|^p+\upsilon_j\,|\,y_j\,|^p\right)\right\}^{1/p}<\infty\quad (y_0=0). \tag{5}$$

Имеет место дискретное равенство

$$y_{n+j}=y_n+\sum_{s=-1}^{j-2}\Delta y_{n+s}+\sum_{s=-1}^{j-2}\Delta^2 y_{n+1+s}\ (1\le j\le k+1), \tag{6}$$

которое легко доказывается методом индукции из рекуррентных формул (3)-(4), определяющих Δ и Δ^2.

Пусть $n,k\ge 0$ — целые. Пусть $\mathsf{R}_{n,k}$ — множество последовательностей $r=\left\{r_j\right\}_{j=1}^{\infty}\in l^{\infty}$, для которых

$$\sum_{j=n}^{n+k}\left|r_j\right|^p=1. \tag{7}$$

Положим, что

$$S_{\upsilon}(n,k)=\inf_{r\in\mathsf{R}_{n,k}}\left\{\sum_{j=n}^{n+k}\left|r_j\right|^p\upsilon_j\right\}^{1/p}.$$

Введем характеристический размер k_n^* [9]:

$$k_n^*=k_n^*(\upsilon)=\begin{cases}\sup\left\{k:k^{1+1/p'}S_{\upsilon}(n,k)\le 1\right\}, & \text{если } \upsilon_n\le 1,\\ 0, & \text{если } \upsilon_n>1,\end{cases}\quad p'=\frac{p}{p-1}.$$

Для всех n — число $k_n^*\ge 0$. Это очевидно при $\upsilon_n>1$. Если $\upsilon_n\le 1$, то $S_{\upsilon}(n,0)=\upsilon_n^{1/p}\le 1$, откуда следует $k_n^*\ge 0$.

Класс (Π_p). Будем говорить, что последовательность $\upsilon=\left\{\upsilon_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ допустима (оформляем как $\upsilon\in\Pi_p$), если $k_n^*<\infty$ $(n=1,2,...)$.

Пример 1. Весовая последовательность $\upsilon=\{1\}_{j=1}^{\infty}\in\Pi_p$, здесь $k_n^*=1$.

Пример 2. Пусть $\upsilon_j\geq 1,\ j=1,2,...$ Тогда $S_\upsilon(n,k)\geq 1$, откуда следует, что $\{k:k^{1+1/p'}S_\upsilon(n,k)\leq 1\}\subset\{0,1\}$ и $k_n^*\leq 1$, т.е. $k_n^*=0$ либо $k_n^*=1$.

Ниже всюду

$$M_{p,\upsilon}(n,k)=\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=n}^{n+k}\upsilon_j\right)^{1/p}.$$

Очевидно, что $S_\upsilon(n,k)\leq M_{p,\upsilon}(n,k)$. Введем следующее условие регулярности. Будем говорить, что весовая последовательность $\upsilon=\{\upsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (I) ($\upsilon\in I$), если существует γ, $0<\gamma<1$, такое, что для всех $k,n\geq 0$ — целых

$$\gamma M_{p,\upsilon}(n,k)\quad\leq\quad S_\upsilon(n,k). \tag{8}$$

Пример 3. Последовательность $\upsilon=\{j^{-\mu}\}$, $0<\mu<1$, удовлетворяет условию (8). Действительно, если $k=0$, то $S_\upsilon(n,0)=M_{p,\upsilon}(n,0)$. Пусть $k\geq 1,\ n\geq 1$. Тогда $S_\upsilon(n,k)\geq(n+k)^{-\mu/p}$. С другой стороны,

$$M_{p,\upsilon}(n,k)=\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=n}^{n+k}j^{-\mu}\right)^{1/p}\leq\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=n}^{n+k}\int_{j-1}^{j}t^{-\mu}dt\right)^{1/p}=$$

$$=\left\{\frac{1}{1-\mu}\left[(n+k)^{1-\mu}-(n-1)^{1-\mu}\right]\frac{1}{k+1}\right\}^{1/p}=(n+k)^{-\mu/p}\left\{\frac{n+k}{1-\mu}\left[1-\left(\frac{n-1}{n+k}\right)^{1-\mu}\right]\frac{1}{k+1}\right\}^{1/p}\leq$$

$$\leq(n+k)^{-\mu/p}\left\{\left[\frac{n+k}{k+1}\left(1-\frac{n-1}{n+k}\right)\right]\frac{1}{1-\mu}\right\}^{1/p}=(1-\mu)^{-1/p}(n+k)^{-\mu/p}\leq(1-\mu)^{-1/p}S_\upsilon(n,k).$$

Пример 4. Всякая регулярная в смысле (I) последовательность $\upsilon=\{\upsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ допустима.

Действительно, условие невырожденности $\sum_{j=n}^{\infty}\upsilon_j>0,\ n=1,2,...$, означает, что существуют такие числа $k\in\mathrm{N}$ и $\delta_n>0$, что $\sum_{j=n}^{n+k}\upsilon_j>\delta_n$. Из условия (I) имеем $S_\upsilon(n,k)\geq\gamma\left(\frac{1}{k+1}\delta_n\right)^{1/p}$, откуда вытекает, что:

$$\mathrm{D}_n=\{k\geq 0:(k+1)^{2-1/p}S_\upsilon(n,k)\leq 1\}\subset\left\{k\geq 0:\gamma(k+1)^{2-1/p}\left(\frac{1}{k+1}\delta_n\right)^{1/p}\leq 1\right\}=\mathrm{K}_n,$$

т.е. $k_n^*=\sup\mathrm{D}_n\leq\sup\mathrm{K}_n\leq(\delta_n\gamma)^{-2/p'}$.

Будем считать, что весовая последовательность $\upsilon=\{\upsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (I^*) и напишем $\upsilon\in I^*$, если существует γ, $0<\gamma<1$, такое, что для всех $n\geq 0$

$$\gamma M_{p,\upsilon}(n,k)\quad\leq\quad S_\upsilon(n,k),\ 0\leq k\leq k_n^*. \tag{9}$$

Пример 5. Пусть $\upsilon_j\geq 1$ и существует такая постоянная $c>1$, что

$$\frac{1}{c}<\frac{\upsilon_n}{\upsilon_{n+1}}<c,\ n=1,2,... \tag{10}$$

Тогда $\upsilon\in I^*$. Действительно, из примера 2 имеем $k_n^*\leq 1$. Рассмотрим $S_\upsilon(n,k)$ для $k=0,1$.
$S_\upsilon(n,0)=\upsilon_n^{1/p}=M_{p,\upsilon}(n,0)\geq\gamma M_{p,\upsilon}(n,0)$, $0<\gamma<1$. Для $k=1$

$$S_\upsilon(n,1)=\min_{\substack{x+y=1\\x,y\ge 0}}\left(x\upsilon_n+y\upsilon_{n+1}\right)^{1/p}\ge\min_{\substack{x+y=1\\x,y\ge 0}}\left(x\upsilon_n+\frac{1}{c}y\upsilon_n\right)^{1/p}\ge\left(\frac{\upsilon_n}{c}\right)^{1/p}=$$

$$=\frac{1}{c^{1/p}}\left(\frac{\upsilon_n}{2}+\frac{\upsilon_n}{2}\right)^{1/p}\ge\left(\frac{1}{2c}\right)^{1/p}\left(\upsilon_n+\frac{\upsilon_{n+1}}{c}\right)^{1/p}\ge\left(\frac{1}{2c^2}\right)^{1/p}\left(2\frac{\upsilon_n+\upsilon_{n+1}}{2}\right)^{1/p}=\gamma M_{p,\upsilon}(n,1),$$

где $\gamma=\dfrac{1}{c^{2/p}}$.

Пример 6. Весовая последовательность $\upsilon=\{\upsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\upsilon_n=e^{n^2}$, не удовлетворяет условию (10), однако для нее выполнено условие $\left(I^*\right)$.

Имеем $\upsilon_j>1$. Тогда $k_n^*=0$. Поэтому, очевидно, выполнено условие I^*. υ не удовлетворяет условию (10), так как

$$\frac{\upsilon_n}{\upsilon_{n+1}}=\frac{e^{n^2}}{e^{(n+1)^2}}=e^{-2n-1}\to 0,\, n\to\infty.$$

С другой стороны, $k_n^*=0$ при $n\ge 1$ и

$$S_\upsilon\left(n,0\right)=\upsilon_n^{1/p'}=M_{p,\upsilon}\left(n,0\right).$$

Для $\upsilon\in\Pi_p$ последовательность $\left\{k_n^*\right\}_{n\ge 0}$ будем называть характеристическим размером. Определим целочисленные отрезки Ω_n^* и Ω_n. Кроме того, будем называть целочисленным отрезком и обозначать $\left[m,k\right]$ ($m\le k$) множество целых чисел $\left\{m,m+1,...,k\right\}$. Целочисленный отрезок

$$\Omega_n^*=\left[n,n+k_n^*\right] \tag{11}$$

не пуст, так как $n\in\Omega_n^*$. Мера $\left|\Omega_n^*\right|=k_n^*+1$. Положим также

$$\Omega_n=\left[n,n+k_n^*+1\right]. \tag{12}$$

Если $k=k_n^*<\infty$, то, как легко увидеть,

$$k^{1+1/p'}S_\upsilon\left(n,k\right)\le 1<\left(k+1\right)^{1+1/p'}S_\upsilon\left(n,k+1\right).$$

Введем целочисленную функцию

$$\mathsf{A}_u\left(n,k\right)=\left(k+1\right)^{2-1/p}\left(\sum_{j=n}^{n+k}u_j\right)^{1/q},\,1\le q<\infty.$$

Пусть $\mathsf{A}_{\upsilon,u}^*\left(n\right)=\mathsf{A}_u\left(n,k_n^*\right)$, $k_n^*=k_n^*\left(\upsilon\right)$.

На характеристических отрезках Ω_n^* справедлива

Лемма. Пусть $1<p,q<\infty$ — последовательность $\upsilon=\left\{\upsilon_j\right\}_{j=1}^{\infty}\in\left(\Pi_p\right)$ и удовлетворяет условию (9). Тогда при $k=k_n^*$ справедлива оценка

$$\left(\sum_{j=n}^{n+k}u_j\left|y_j\right|^q\right)^{1/q}\le\frac{6}{\gamma}\mathsf{A}_{\upsilon,u}^*\left(n\right)\left\{\left(\sum_{j=n}^{n+k}\left|\Delta^2y_j\right|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=n}^{n+k}\upsilon_j\left|y_j\right|^p\right)^{1/p}\right\}. \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $k_n^*\ge 1$. Если $y_j=0$, $\forall j=n,\dots,n+k$, то неравенство леммы очевидно. Поэтому можно считать, что

$$\max_{n\le j\le n+k}\left|y_j\right|=\left|y_l\right|>0.$$

Более того, можно считать, что

$$y_l=1. \tag{14}$$

Отметим, что из (14) следует

$$\left(\sum_{j=n}^{n+k} u_j \left|y_j\right|^q\right)^{1/q} \le \left(\sum_{j=n}^{n+k} u_j\right)^{1/q}. \qquad (15)$$

Теперь заметим, что для доказательства (13) достаточно доказать следующее неравенство:

$$1 \le c\left(k+1\right)^{1+1/p'} \left\{\left(\sum_{j=n}^{n+k} \left|\Delta^2 y_j\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=n}^{n+k} \upsilon_j \left|y_j\right|^p\right)^{1/p}\right\}. \qquad (16)$$

Действительно, из (16) имеем

$$\left(\sum_{j=n}^{n+k} u_j\right)^{1/q} \le c\left(k+1\right)^{1+1/p'} \left(\sum_{j=n}^{n+k} u_j\right)^{1/q} \left\{\left(\sum_{j=n}^{n+k} \left|\Delta^2 y_j\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=n}^{n+k} \upsilon_j \left|y_j\right|^p\right)^{1/p}\right\}.$$

Далее из (15) имеем

$$\left(\sum_{j=n}^{n+k} u_j \left|y_j\right|^q\right)^{1/q} \le \mathsf{A}_u\left(n,k\right) \left\{\left(\sum_{j=n}^{n+k} \left|\Delta^2 y_j\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=n}^{n+k} \upsilon_j \left|y_j\right|^p\right)^{1/p}\right\}.$$

Если здесь $c \ge 6\gamma^{-1}$, то это неравенство (13). Итак, вместо (13) будем доказывать неравенство (16).

Пусть $c_0 > 1$ и $\eta,\ 0 < \eta < 1,$ — некоторые числа, значения которых будут определены позже.

1. Если

$$c_0\left(k+1\right)^{1+1/p'} \left(\sum_{j=n}^{n+k} \left|\Delta^2 y_j\right|^p\right)^{1/p} \ge \eta, \qquad (17)$$

то (16) справедливо с постоянной $c = c_0\eta^{-1}$.

2. Пусть

$$c_0\left(k+1\right)^{1+1/p'} \left(\sum_{j=n}^{n+k} \left|\Delta^2 y_j\right|^p\right)^{1/p} < \eta. \qquad (18)$$

Положим в равенстве (6)

$$r_{n+j} = \begin{cases} y_n + \sum_{s=-1}^{j-2} \Delta y_{n+s}; & j \ge 1; \\ y_n; & j = 0. \end{cases}$$

Имеем для $j: 1 \le j \le k+1$

$$\begin{aligned} &n+1+s \le n+1+j-2 = n+j-1 \le n+k+1-1 = n+k \text{ при } s \le j-2, \\ &n+1+s \le n \text{ при } s \ge -1. \end{aligned} \qquad (19)$$

Если $j: 1 \le j \le k+1,$ то, в силу (18) и числовых неравенств (19), получим

$$\begin{aligned} \left|y_{n+j} - r_{n+j}\right| &= \left|\sum_{s=-1}^{j-2} \Delta^2 y_{n+1+s}\right| \le \sum_{s=-1}^{j-2} \left|\Delta^2 y_{n+1+s}\right| \le \sum_{s=n}^{n+k} \left|\Delta^2 y_s\right| \le \\ &\le \left(k+1\right)^{1/p'} \left(\sum_{s=n}^{n+k} \left|\Delta^2 y_s\right|^p\right)^{1/p} \le \left(k+1\right)^{1/p'} c_0^{-1}\eta\left(k+1\right)^{-1-1/p'} = c_0^{-1}\eta\left(k+1\right)^{-1}. \end{aligned} \qquad (20)$$

В свою очередь, из (20) вытекают оценки:

$$\left(\sum_{s=n}^{n+k} \left|y_s - r_s\right|^p\right)^{1/p} \le c_0^{-1}\eta\left(k+1\right)^{-1}\left(k+1\right)^{1/p} = c_0^{-1}\eta\left(k+1\right)^{-1/p'}. \qquad (21)$$

Также из (6), (19), неравенства Гельдера, (18), (9), в силу утверждения (6), имеем

$$\left(\sum_{s=n}^{n+k}\upsilon_s\left|y_s-r_s\right|^p\right)^{1/p}=\left\{\sum_{j=1}^{k}\upsilon_{n+j}\left|\sum_{s=-1}^{j-2}\Delta^2 y_{n+1+s}\right|^p\right\}^{1/p}\le\left\{\sum_{j=1}^{k}\upsilon_{n+j}\left(\sum_{s=n}^{n+j-1}\left|\Delta^2 y_s\right|\right)^p\right\}^{1/p}\le$$

$$\le\sum_{j=n}^{n+k}\left|\Delta^2 y_j\right|\left(\sum_{j=n}^{n+k}\upsilon_j\right)^{1/p}\le(k+1)^{1/p'}\left(\sum_{j=n}^{n+k}\left|\Delta^2 y_j\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=n}^{n+k}\upsilon_j\right)^{1/p}\le$$

$$\le(k+1)^{1/p'}c_0^{-1}\eta(k+1)^{-1-1/p'}\left(\sum_{j=n}^{n+k}\upsilon_j\right)^{1/p}=c_0^{-1}\eta(k+1)^{-1/p'}M_\upsilon(n,k)\le \tag{22}$$

$$\le c_0^{-1}\eta(k+1)^{-1/p'}\left[\gamma^{-1}S_\upsilon(n,k)\right]=c_0^{-1}\eta\gamma^{-1}(k+1)^{-1/p'-1}\frac{k+1}{k}\left(kS_\upsilon(n,k)\right)\le$$

$$\le 2c_0^{-1}\eta\gamma^{-1}(k+1)^{-1/p'-1}\le\frac{1}{3}(k+1)^{-1-1/p'},$$

если $\eta=\gamma$, $c_0\ge 6$. Обозначим

$$b=\left(\sum_{j=n}^{n+k}\left|r_j\right|^p\right)^{1/p}.$$

Тогда, в силу (21) и равенства (14), имеем оценки:

$$b\ge\left|\left(\sum_{j=n}^{n+k}\left|r_j-y_j\right|^p\right)^{1/p}-\left(\sum_{j=n}^{n+k}\left|y_j\right|^p\right)^{1/p}\right|\ge\left|y_s\right|-c_0^{-1}\eta(k+1)^{-1/p'}>1-c_0^{-1}\eta\ge 1-c_0^{-1}\ge\frac{1}{2}, \tag{23}$$

если $c_0\ge 2$. Далее пусть $\tilde r=\left\{\tilde r_j\right\}_{j=1}^{\infty}\in l_+$, где $\tilde r_j=b^{-1}r_j$ для $j=n,\dots,n+k$, тогда $\tilde r=\left\{\tilde r_j\right\}_{j=1}^{\infty}\in \mathrm{R}_{n,k}$ и, полагая $\beta_j=r_j/b$ $\forall j:\ n\le j\le n+k$, $\beta_{n+k+1}=0$, ввиду (23) имеем

$$\left(\sum\nolimits_{j=n}^{n+k}\upsilon_j\left|r_j\right|^p\right)^{1/p}=b\left(\sum\nolimits_{j=n}^{n+k}\upsilon_j\left|\frac{r_j}{b}\right|^p\right)^{1/p}\ge bS_\upsilon(n,k+1)=$$

$$=b(k+1)^{-1-1/p'}\left[(k+1)^{1+1/p'}S_\upsilon(n,k+1)\right]>b(k+1)^{-1-1/p'}\ge\frac{1}{2}(k+1)^{-1-1/p'},$$

откуда следует, что

$$(k+1)^{1+1/p'}\left(\sum_{j=n}^{n+k}\upsilon_j\left|r_j\right|^p\right)^{1/p}\ge\frac{1}{2}. \tag{24}$$

В силу оценок (22) и (24) получаем

$$\begin{gathered}(k+1)^{1+1/p'}\left(\sum_{j=n}^{n+k}\upsilon_j\left|y_j\right|^p\right)^{1/p}\ge\\ \ge\left|(k+1)^{1+1/p'}\left(\sum_{j=n}^{n+k}\upsilon_j\left|r_j\right|^p\right)^{1/p}-(k+1)^{1+1/p'}\left(\sum_{j=n}^{n+k}\upsilon_j\left|r_j-y_j\right|^p\right)^{1/p}\right|\ge\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.\end{gathered} \tag{25}$$

Из последней оценки видно, что при условии (18) неравенство (16) справедливо с постоянной $c=6$. Возьмем в качестве c в (16) величину $c=\max\left\{6,c_0\eta^{-1}\right\}=\max\left\{6,6\gamma^{-1}\right\}$ при $c_0=6$, $\eta=\gamma$. Заметим, что для случая $k_n^*=0$ показать (13) достаточно легко. Лемма доказана.

Пусть X, Y — пространства с полунормами $\|\cdot;X\|$ и $\|\cdot;Y\|$ соответственно. Будем говорить, что X вложено в Y (запись $X\to Y$), если выполнены условия:

e1) $X\subset Y$;

e2) $\exists c>0:\ \|z;Y\|\le c\|z;X\|\ \ \forall z\in X$.

Из условия e2) следует, что тождественный оператор $Ex=x$ непрерывен, как и оператор из X в Y.

Теорема 1. Пусть $1 < p \le q < \infty$ — последовательность $\upsilon = \{\upsilon_j\}_{j=1}^{\infty} \in \Pi_p$ и удовлетворяет условию (9). Пусть $A_{\upsilon,u}^{*} = \sup_{n\ge 0} A_{\upsilon,u}^{*}(n) < \infty.$ Тогда

$$w_p^2(\upsilon) \to l_q(u) \tag{26}$$

и для нормы оператора вложения E имеет место оценка

$$\left\| E : w_p^2(\upsilon) \to l_q(u) \right\| \le 6 \cdot 2^{1+1/p} \gamma^{-1} A_{\upsilon,u}^{*}.$$

Доказательство. Введем последовательность точек $\{m_n\}_{n=0}^{\infty} = \{m_{n-1} + k_{m_{n-1}}^{*} + 1\}_{n=0}^{\infty}$ на Z_+, $m_0 = 0.$ Далее образуем интервалы $\Omega_{m_n}^{*}$ следующим образом: $\Omega_{m_n}^{*} = \left[m_n, m_n + k_{m_n}^{*} \right]$, $n = 0,1,\ldots,$ $m_0 = 0.$ Теперь представим Z_+ как дизъюнктное объединение интервалами $\Omega_{m_n}^{*}$:

$$Z_+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_{m_n}^{*}. \tag{27}$$

Заметим, что по построению $\Omega_{m_n}^{*}$ данное объединение действительно покрывает все точки Z_+. Имеет место равенство,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j\in\Omega_{m_n}^{*}} a_j \quad = \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j, \tag{28}$$

что в случае $a_j = j$ означает (27).

Отметим также, что $\Omega_{m_n}^{*}$ — это характеристические отрезки Ω_n^{*}, которые были введены в (11). Таким образом, (27) — это дизъюнктное покрытие Z_+ характеристическими интервалами Ω_n^{*}. По интервалам $\Omega_{m_n}^{*}$ построим интервалы $\Omega_{m_n} : \Omega_{m_n} = \left[m_n, m_n + k_{m_n}^{*} + 1 \right]$, $n = 0,1,\ldots,$ $m_0 = 0.$ Заметим, что по построению Ω_{m_n} $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_{m_n}$ есть покрытие Z_+, причем недизъюнктное: $Z_+ \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_{m_n}$, но

$$\sum_{j\in Z_+} j = \sum_{j=0}^{\infty} j < \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j\in\Omega_{m_n}} j = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=m_n}^{m_n + k_{m_n}^{*} + 1} j, \tag{29}$$

Ω_{m_n} — это отрезки Ω_n, введенные в (12).
Заметим далее, что

$$A_{m_n}^{*} \le \sup_{m_n \ge 0} A_{m_n}^{*} \le \sup_{n\ge 0} A_n^{*} = A^{*} < \infty, \tag{30}$$

и, используя оценку (28) и лемму, получим оценку

$$\begin{aligned} \|y\|_{l_q(u)}^{q} &= \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q u_j = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j\in\Omega_{m_n}^{*}} |y_j|^q u_j \le 2^q \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{\gamma} A_u^{*}(m_n) \right)^q \left\{ \sum_{j\in\Omega_{m_n}} \left(|\Delta^2 y_j|^p + \upsilon_j |y_j|^p \right) \right\}^{q/p} \le \\ &\le \left(12 A^{*}\right)^q \gamma^{-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j\in\Omega_{m_n}} \left(|\Delta^2 y_j|^p + \upsilon_j |y_j|^p \right) \right\}^{q/p}. \end{aligned} \tag{31}$$

Полагая в (29) $j = a_j$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j\in\Omega_{m_n}} a_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \sum_{j=0}^{\infty} a_{\sum_{s=0}^{j} k_{m_s}^{*} + j+1} \le \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \sum_{j=0}^{\infty} a_j = 2\sum_{j=0}^{\infty} a_j. \tag{32}$$

Оценим теперь сверху выражение $\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j\in\Omega_{m_n}}\left(\left|\Delta^2 y_j\right|^p+\upsilon_j\left|y_j\right|^p\right)\right\}^{q/p}$ из (31). Из (32) следует

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j\in\Omega_{m_n}}\left(\left|\Delta^2 y_j\right|^p+\upsilon_j\left|y_j\right|^p\right)\right\}^{q/p}\le 2^{q/p}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\left|\Delta^2 y_j\right|^p+\upsilon_j\left|y_j\right|^p\right)\right\}^{q/p}=2^{q/p}\left\|y\right\|_{w_p^2(\upsilon)}^q. \qquad (33)$$

Подставим теперь (33) в (31):

$$\left\|y\right\|_{l_q(u)}^q\le\left(12A^*\right)^q\gamma^{-1}2^{q/p}\left\|y\right\|_{w_p^2(\upsilon)}^q.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $1<p\le q<\infty$ — последовательность $\upsilon=\left\{\upsilon_j\right\}_{j=1}^{\infty}$, удовлетворяет условию (8). Пусть $A_{\upsilon,u}^*<\infty.$ Тогда справедливо вложение (26).

Для доказательства теоремы 2 достаточно заметить, что, в силу условия (8), $\upsilon=\left\{\upsilon_j\right\}\in\Pi_p$.

Следствие 1. Пусть $1<p\le q<\infty.$ Справедлива оценка

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|y_j z_j\right|^q\right)^{1/q}\le c\sup_{j\ge1}\left|z_j\right|\left[\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left|\Delta^2 y_j\right|^p+\left|y_j\right|^p\right)\right]^{1/p}.$$

Доказательство. Здесь в теореме 1 нужно взять $\upsilon_j=1,\ u_j=\left|z_j\right|^q\ \ (j\ge1).$ Тогда $k_n^*=1\ \ (n\ge1),$ $A_{\upsilon,u}^*=\sup_{n\ge1}\left(\left|z_n\right|^q+\left|z_{n+1}\right|^q\right)^{1/q}.$

Следствие 2. Пусть $1<p\le q<\infty,\ 0<\mu<1$ и

$$A=\sup_{n\ge1,k\ge1}k^{1+1/p'}\left(\sum_{j=n}^{n+k}\left|z_j\right|^q\right)^{1/q}<\infty.$$

Тогда имеет место оценка

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|y_j z_j\right|^q\right)^{1/q}\le cA\left[\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left|\Delta^2 y_j\right|^p+j^{-\mu}\left|y_j\right|^p\right)\right]^{1/p}. \qquad (34)$$

Справедливость оценки (34) вытекает из теоремы 2.

Следствие 3. Пусть $1<p\le q<\infty$ и существуют такие $0<\beta<1<b<\infty,$ что для всех $n\ge1,\ k\ge0$

$$\beta\left(\sum_{j=n}^{n+k}\left|z_j\right|^q\right)^{1/q}\le\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=n}^{n+k}\upsilon_j\right)^{1/p}\le b\min_{j\in[n,n+k]}\upsilon_j^{1/p}. \qquad (35)$$

Тогда справедлива оценка

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|y_j z_j\right|^q\right)^{1/q}\le cb\beta^{-1}\left\|y\right\|_{w_{p,\upsilon}^2}. \qquad (36)$$

Доказательство. Из (35) имеем

$$S_\upsilon(n,k)\ge\left(\min_{n\le j\le n+k}\upsilon_j\right)^{1/p}\ge b^{-1}M_{q,\upsilon}(n,k).$$

Тем самым выполнено условие (I), где $\gamma=b^{-1}.$ Тогда

$$D_n=\left\{k\ge0:(k+1)^{2-1/p}S_\upsilon(n,k)\le1\right\}\subset\left\{k\ge0:b^{-1}(k+1)^{2-1/p}M_{q,\upsilon}(n,k)\le1\right\}=$$

$$=\left\{k\ge0:(k+1)^{2-1/p}M_{q,\upsilon/b^p}(n,k)\le1\right\}=D_n^{\#}.$$

Поэтому

$$k_n^*=\sup D_n\le\sup D_n^{\#}=k_n^{\#}.$$

Если $k = k_n^{\#}$, то

$$(k+1)^{2-1/p}\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=n}^{n+k} b^{-p}\upsilon_j\right)^{1/p} \le 1$$

и

$$A^{\#}(n) = (k+1)^{2-1/p}\left(\sum_{j=n}^{n+k}\left|z_j\right|^q\right)^{1/q} \le \frac{\left(\sum_{j=n}^{n+k}\left|z_j\right|^q\right)^{1/q}}{\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=n}^{n+k} b^{-p}\upsilon_j\right)^{1/p}} = b\beta^{-1} < \infty.$$

Мы показали, что выполнены все условия теоремы 2, откуда следует (36).

Список литературы

1 *Мусилимов Б., Отелбаев М.* Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующего разностному уравнению Штурма-Лиувилля // Журнал вычисл. мат. и мат. физики. — 1981. — Т. 21. — № 6. — С. 1430–1434.

2 *Мухамедиев Г.* Спектр одного разностного оператора и некоторые теоремы вложения. Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения в механике и технике. — Алма-Ата: Наука, 1983. — С. 104, 105.

3 *Смаилов Е.С.* Разностные теоремы вложения для пространств Соболева с весом и их приложения // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 270. — № 1. — С. 52–55.

4 *Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О.* Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. — М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 288 с.

5 *Ойнаров Р., Стихарный А.П.* Критерии ограниченности и компактности одного разностного вложения // Мат. заметки. — 1991. — Т. 50. — № 5. — С. 54–60.

6 *Булабаев А.Т., Мухамбетжанов А.Т.* О некоторых разностных теоремах вложения: Сб. КазГНУ. — Алматы, 1993.

7 *Трибель Х.* Теория функциональных пространств / Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 450 с.

8 *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — 3-е изд. — М.: Наука, 1988. — 336 с.

9 *Kussainova L., Ospanova A.* An Embedding Theorem for Difference Weighted Spaces // Proceedings of The World Congress on Engineering: Lecture Notes. — London: U.K., 2014. — P. 773, 774.

А.Б.Оспанова

Айырымдық салмақты кеңістіктердің енгізу теоремалары. I

Мақалада $w_p^2(\upsilon)$ айырымдық салмақты кеңістіктердің енгізулері зерттелген. Осы кеңістіктерді жинақталатын тізбектердің кеңістігіне $l_q(u), 1 \le p \le q < \infty$ енгізудің қажетті және жеткілікті шарттары алынған. Жұмыс екі бөлімнен тұрады. Бірінші бөлім $w_p^2(\upsilon)$ кеңістігін $l_q(u)$ кеңістігіне енгізудің жеткілікті шарттарының сипаттамасын алуға арналған.

A.B.Ospanova

Embedding theorems of difference weighted spaces. I

In the work we research embeddings of difference weighted spaces $w_p^2(\upsilon)$. Necessary and sufficient conditions of embedding of these spaces into the space of summable sequences $l_q(u)$, $1 \le p \le q < \infty$, are obtained. The work consists of two parts. The first part is devoted to obtain a description of conditions of embedding $w_p^2(\upsilon)$ into $l_q(u)$.

References

1 Musilimov B., Otelbaev M. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1981, 21, 6, p. 1430–1434.

2 Muhamediev G. *Spectrum of a difference operator and some embedding theorems. Boundary value problems for differential equations and their applications in mechanics and techniques*, Alma-Ata: Nauka, 1983, p. 104, 105.

3 Smailov E.S. *Difference embedding theorems for weighted Sobolev spaces and their applications*. Math. Dokl. AN SSSR, 1983, 270, 1, p. 52–55.

4 Mynbaev K.T., Otelbaev M.O. *Weighted functional spaces and spectrum of differential operators*, Moscow: Nauka; Ch. edit. of phis.math. lit., 1988, 288 p.

5 Oinarov R., Stikharnyi A.P. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1991, 50, 5, p. 1130–1135.

6 Bulabaev A.T., Muhambetzhanov A.T. *Collection KazGNU*, Almaty, 1993.

7 Triebel H. *Theory of Function Spaces*, transl. from Eng., Moscow: Mir, 1986, p. 450.

8 Sobolev S.L. *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, 3-d izd., Moscow: Nauka, 1988, p. 336.

9 Kussainova L., Ospanova A. *Proceedings of The World Congress on Engineering*: Lecture Notes, London: UK., 2014, p. 773, 774.