

УДК 519.1

Л.П.Латкина

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д.Серикбаева, Усть-Каменогорск  
(E-mail: ludalat@yandex.ru)

## Графы, орбиты которых содержат не более чем три вершины

В статье рассмотрен усовершенствованный алгоритм Визинга-Назарца и изучена применимость этого полиномиального алгоритма для разбиения вершин обыкновенных графов на орбиты. С этой целью определены  $r$ -строго подобные, строго подобные вершины и множества вершин и изучены их свойства. Отмечено, что любая орбита графа полностью входит в один из классов строго подобных вершин. С другой стороны, доказано, что если классы строгого подобия состоят не более чем из трёх вершин, то эти классы и есть орбиты.

*Ключевые слова:* группы автоморфизмов, орбиты, полиномиальный алгоритм, индексированный дополненный список смежности,  $r$ -строго подобные вершины, строго подобные множества.

### Введение

Будем рассматривать простые графы  $G$  со множеством вершин  $V(G)$  и множеством ребер  $E(G)$  [1]. В этой статье используются определения и обозначения из [1].

В работе В. Г. Визинга [2] определяется разбиение вершин графа на  $k$ -подобные, а затем подобные вершины. Там же описывается полиномиальный алгоритм, производящий это разбиение, которое основано на анализе списка смежности вершин. В результате каждый класс подобия состоит из нескольких орбит группы автоморфизмов графа, но в общем случае классы подобия не совпадают с орбитами. В частности, такое разбиение относит все вершины регулярных графов к одному классу подобия. Мы для любого целого  $k > 0$  определим вначале  $k$ -строго подобие вершин, затем их строгое подобие. Разбиения, задаваемые этими эквивалентностями, являются более мелкими, чем разбиения на  $k$ -подобные и подобные вершины из работы [2]. Они позволяют в некоторых случаях выполнить разбиение вершин на орбиты даже у регулярных графов. Мы показываем, что каждая орбита графа содержится в каком-то классе строгого подобия. Однако пока неизвестно, даёт ли описываемый ниже полиномиальный алгоритм точное разбиение на орбиты в общем случае. Тем не менее удалось доказать, что для графов, у которых классы строгого подобия содержат не более трёх вершин, эти классы и есть орбиты. Это заметно улучшает результат из [2].

### 1. Строгое подобие вершин графа

Подмножество всех вершин графа  $G$ , смежных с вершиной  $v$ , называется окружением вершины  $v$  графа  $G$  и обозначается  $N(v)$ .

Подмножество всех вершин графа  $G$ , смежных с вершиной  $v$ , в графе  $\bar{G}$ , дополнительном к графу  $G$ , будем называть *антиокружением* вершины  $v$  графа  $G$  и обозначать  $AN(v)$ .

Для вершин  $v$  и  $x$  введем обозначения для *пересечения окружений*  $N(v, x) = N(v) \cap N(x)$  и *пересечения антиокружений*  $AN(v, x) = AN(v) \cap AN(x)$ .

Вводимые ниже термины и конструкции проиллюстрируем на графе из примера 1.

Пример 1. Регулярный граф  $G_9$  степени 4 имеет 9 вершин (рис. 1).

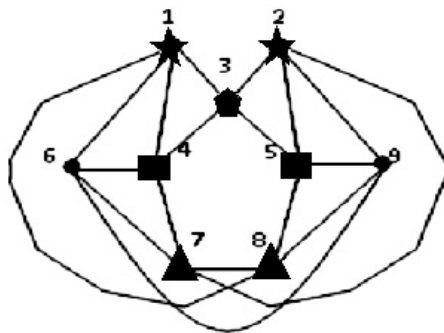


Рисунок 1. Граф  $G_9$

На рисунке 1 разными геометрическими фигурами отмечены пять орбит графа (орбита №1:  $\{1; 2\}$ , орбита №2:  $\{4; 5\}$ , орбита №3:  $\{7; 8\}$ , орбита №4:  $\{3\}$ , орбита №5:  $\{6; 9\}$ ).

*Определение 1.* Все вершины любого графа считаются  $\theta$ -строго подобными. Две вершины графа  $G$  считаем 1-строго подобными, если окружения этих вершин равномоощные, т. е. степени вершин одинаковые (как и в [2]).

Возвращаясь к примеру 1 регулярного графа  $G_9$  (рис. 1), видим, что все вершины этого графа являются 1-строго подобными.

Для каждой вершины  $v$  графа  $G$  выпишем *дополненный список смежности*. Он состоит из двух столбцов. В первом столбце находится  $|N(v)|$  строк. Каждая строка этого столбца начинается маркером одной из вершин  $x \in N(v)$ , затем после разделителя указываются маркеры всех вершин из пересечения окружений  $N(v, x) = N(v) \cap N(x)$ . Во втором столбце находится  $|AN(v)|$  строк. Здесь в каждой строке записывается маркер одной из вершин  $y \in AN(v)$ , за которым, как и в первом столбце, указываются маркеры всех вершин из пересечения антиокружений  $AN(v, y) = AN(v) \cap AN(y)$  (рис. 2). Во всех дополненных списках смежности каждую строку первого и второго столбцов заменяем числом, равным количеству маркеров вершин, составляющих её. В результате получаем *шаблоны дополненных списков смежности* вершин графа  $G$  (рис. 3).

Для наглядности вернёмся к примеру 1 и построим дополненные списки смежности и шаблоны дополненных списков смежности (рис. 2, 3).

*Определение 2.* Любые две вершины графа  $G$  считаем 2-строго подобными, если они имеют одинаковые шаблоны дополненных списков смежности.

Продолжим рассматривать пример 1. На рисунке 3 легко увидеть, что вершины  $\{1; 2; 6; 9\}$  графа  $G_9$  являются 2-строго подобными из класса №1, вершины  $\{4; 5\}$  — 2-строго подобными из класса №2, вершины  $\{7; 8\}$  — 2-строго подобными из класса №3, вершина  $\{3\}$  составляет класс 2-строго подобия №4. На этом этапе все вершины графа  $G_9$  оказались разбиты на 4 класса строгого подобия.

Классы 2-строго подобных вершин нумеруем. Полученные номера в дополненном списке смежности ставим в качестве индексов у маркеров вершин из этих классов и получаем *индексированные дополненные списки смежности* вершин графа  $G$ . Убирая из полученных индексированных дополненных списков смежности только маркеры вершин, получаем *шаблоны индексированных дополненных списков смежности* вершин графа  $G$ .

$$\begin{array}{ccc}
 D(1): \left\{ \begin{array}{l|l} 4:3;6 & 7:5;9 \\ 3:4 & 5:7 \\ 6:4 & 9:7 \\ 8: & 2: \end{array} \right. & D(2): \left\{ \begin{array}{l|l} 5:3;9 & 8:4;6 \\ 3:5 & 4:8 \\ 9:5 & 6:8 \\ 7: & 1: \end{array} \right. & D(3): \left\{ \begin{array}{l|l} 1:4 & 6:8 \\ 2:5 & 7:9 \\ 4:1 & 8:6 \\ 5:2 & 9:7 \end{array} \right. \\
 \\
 D(4): \left\{ \begin{array}{l|l} 1:3;6 & 2:8 \\ 6:1;7 & 8:2 \\ 3:1 & 5: \\ 7:6 & 9: \end{array} \right. & D(5): \left\{ \begin{array}{l|l} 2:3;9 & 1:7 \\ 9:2;8 & 7:1 \\ 3:2 & 4: \\ 8:9 & 6: \end{array} \right. & D(6): \left\{ \begin{array}{l|l} 4:1;7 & 8:2;3 \\ 1:4 & 2:8 \\ 7:4 & 3:8 \\ 9: & 5: \end{array} \right. \\
 \\
 D(7): \left\{ \begin{array}{l|l} 4:6 & 1:5;9 \\ 6:4 & 9:1;3 \\ 2: & 3:9 \\ 8: & 5:1 \end{array} \right. & D(8): \left\{ \begin{array}{l|l} 5:9 & 2:4;6 \\ 9:5 & 6:2;3 \\ 1: & 3:6 \\ 7: & 4:2 \end{array} \right. & D(9): \left\{ \begin{array}{l|l} 5:2;8 & 7:1;3 \\ 2:5 & 1:7 \\ 8:5 & 3:7 \\ 6: & 4: \end{array} \right.
 \end{array}$$

Рисунок 2. Дополненные списки смежности

$$\begin{array}{cccc}
 ShD(1): \left\{ \begin{array}{l|l} 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right. & ShD(2): \left\{ \begin{array}{l|l} 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right. & ShD(3): \left\{ \begin{array}{l|l} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{array} \right. & ShD(4): \left\{ \begin{array}{l|l} 3 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right. \\
 \\
 ShD(5): \left\{ \begin{array}{l|l} 3 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right. & ShD(6): \left\{ \begin{array}{l|l} 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right. & ShD(7): \left\{ \begin{array}{l|l} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{array} \right. & ShD(8): \left\{ \begin{array}{l|l} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{array} \right. & ShD(9): \left\{ \begin{array}{l|l} 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Рисунок 3. Шаблоны дополненных списков смежности

Проиллюстрируем сказанное на примере 1 графа  $G$ , (рис. 4).

$$\begin{array}{ccc}
 ShI(1,2): \left\{ \begin{array}{l|l} 2 \cdot 4,1 & 3 \cdot 2,1 \\ 4 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot & 1 \cdot \end{array} \right. & ShI(4,5): \left\{ \begin{array}{l|l} 1 \cdot 4,1 & 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1,3 & 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 & 2 \cdot \\ 3 \cdot 1 & 1 \cdot \end{array} \right. & ShI(7,8): \left\{ \begin{array}{l|l} 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2,1 \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1,4 \\ 1 \cdot & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot & 2 \cdot 1 \end{array} \right. \\
 \\
 ShI(3): \left\{ \begin{array}{l|l} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 \end{array} \right. & ShI(6,9): \left\{ \begin{array}{l|l} 2 \cdot 1,3 & 3 \cdot 1,4 \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 & 4 \cdot 3 \\ 1 \cdot & 2 \cdot \end{array} \right.
 \end{array}$$

Рисунок 4. Шаблоны индексированных дополненных списков смежности

*Определение 3.* Пусть  $r$  — натуральное число, не меньше 3 и определены классы  $(r - 1)$ -строго подобных вершин и пронумерованы. Номером каждого класса помечаем в качестве индекса маркеры вершин этого класса. Получаем  $(r - 1)$ -обновленные индексированные дополненные списки смежности вершин графа  $G$ . Вершины  $x$  и  $y$  называются  $r$ -строго подобными, если они имеют одинаковые шаблоны  $(r - 1)$ -обновленных индексированных дополненных списков смежности.

Продолжим рассматривать пример графа  $G_9$  (рис. 1). После построения шаблонов индексированных дополненных списков смежности вершин графа (рис. 4) сравниваем эти шаблоны. Мы видим, что вершины  $\{4; 5\}$  графа  $G_9$  имеют одинаковые шаблоны индексированных дополненных списков смежности и остаются отнесенными к классу №2 3-строго подобных вершин. То же можно сказать и о вершинах  $\{7; 8\}$ , которые остаются в классе №3 3-строго подобных вершин. Вершина  $\{3\}$  останется в отдельном классе № 4. При сравнении шаблонов индексированных дополненных списков смежности вершин  $\{1; 2\}$  и  $\{6; 9\}$  графа  $G_9$  замечаем их различие (рис. 4). Эти вершины не являются 3-строго подобными. Поэтому класс №1, в который они входят, разбиваем на два новых класса с номерами №1 и №5. Причем один из номеров будет равен прежнему номеру класса этих вершин. Обновляем индексированные дополненные списки смежности вершин графа  $G_9$ . Сравниваем полученные вновь шаблоны индексированных дополненных списков смежности вершин. Шаблоны индексированных дополненных списков смежности вершин 1 и 2 теперь одинаковые, эти вершины являются 4-строго подобными вершинами, принадлежащими классу №1. Шаблоны индексированных дополненных списков смежности вершин 6 и 9 графа  $G_9$  тоже одинаковые, эти вершины являются 4-строго подобными вершинами, принадлежащими классу №5. Распределение остальных вершин графа по классам осталось прежним. В результате убеждаемся, что все вершины графа  $G_9$  попадают в 5 разных классов 4-строго подобных вершин. В дальнейшем при любом целом  $r \geq 3$  вершины этих пяти классов являются  $r$ -строго подобными вершинами, состав классов при этом не изменяется (рис. 5).

$$\begin{array}{c}
 ShI(1,2): \left\{ \begin{array}{l|l} 2,4,5 & 3,2,5 \\ \cdot & \cdot \\ 4,2 & 2,3 \\ \cdot & \cdot \\ 5,2 & 5,3 \\ \cdot & \cdot \\ 3, \cdot & 1, \cdot \end{array} \right. & 
 ShI(4,5): \left\{ \begin{array}{l|l} 1,4,5 & 1,3 \\ \cdot & \cdot \\ 5,1,3 & 3,1 \\ \cdot & \cdot \\ 4,1 & 2, \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 3,5 & 5, \cdot \end{array} \right. & 
 ShI(7,8): \left\{ \begin{array}{l|l} 2,5 & 1,2,5 \\ \cdot & \cdot \\ 5,2 & 5,1,4 \\ \cdot & \cdot \\ 1, \cdot & 4,5 \\ \cdot & \cdot \\ 3, \cdot & 2,1 \\ \cdot & \cdot \end{array} \right. \\
 \\
 ShI(3): \left\{ \begin{array}{l|l} 1,2 & 5,3 \\ \cdot & \cdot \\ 1,2 & 3,5 \\ \cdot & \cdot \\ 2,1 & 3,5 \\ \cdot & \cdot \\ 2,1 & 5,3 \\ \cdot & \cdot \end{array} \right. & 
 ShI(6,9): \left\{ \begin{array}{l|l} 2,1,3 & 3,1,4 \\ \cdot & \cdot \\ 1,2 & 1,3 \\ \cdot & \cdot \\ 3,2 & 4,3 \\ \cdot & \cdot \\ 5, \cdot & 2, \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right.
 \end{array}$$

Рисунок 5. Обновлённые шаблоны дополненных списков смежности

*Определение 4.* При любом целом  $r \geq 0$  подмножества  $X, Y \subseteq V(G)$  графа  $G$  называются  $r$ -строго подобными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие друг другу вершины  $r$ -строго подобны.

Очевидно, отношение  $r$ -строго подобия является отношением эквивалентности.

Так же, как и в работе В.Г.Визинга, опираясь на определения, несложно доказываются следующие леммы 1 и 2.

*Лемма 1.* Пусть  $r$  — натуральное число, тогда  $(r - 1)$ -строго подобными являются:

- а)  $r$ -строго подобные вершины;
- б)  $r$ -строго подобные подмножества вершин.

*Доказательство.* Индукция по  $r$ . При  $r = 1$  утверждения а) и б) очевидны. Предположим, что  $r \geq 2$ . Пусть вершины  $x$  и  $y$  являются  $r$ -строго подобными вершинами. По определению,  $N(x)$  и  $N(y)$  являются  $(r - 1)$ -строго подобными множествами, более того, у любой пары соответствующих

вершин окружения  $z \in N(x)$  и  $u \in N(y)$  множества  $N(x, z)$ ,  $N(y, u)$   $(r-1)$ -строго подобны. Аналогичное утверждение имеет место и для любой пары соответствующих вершин  $z \in AN(x)$  и  $u \in AN(y)$  антиокружения. По предположению индукции  $N(x)$  и  $N(y)$  ( $AN(x)$  и  $AN(y)$ ), а также  $N(x, z)$  и  $N(y, u)$  являются  $(r-2)$ -строго подобными множествами. На основании всего этого можно утверждать, что до обновления на этапе  $r-2$  вершины  $x$  и  $y$  имели одинаковые шаблоны индексированных дополненных списков смежности. Следовательно,  $x$  и  $y$  являются  $(r-1)$ -строго подобными вершинами.

Пусть теперь  $X$  и  $Y$  являются  $r$ -строго подобными подмножествами вершин графа  $G$ . Это значит, что между элементами множеств  $X$  и  $Y$  можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие друг другу вершины окажутся  $r$ -строго подобны. Выше доказано, что  $r$ -строго подобные вершины являются  $(r-1)$ -строго подобными вершинами. Следовательно,  $X$  и  $Y$  являются  $(r-1)$ -строго подобными подмножествами. ▲

Из леммы 1 вытекает, что каждый класс, состоящий из  $r$ -строго подобных вершин графа  $G$ , принадлежит только одному классу, который состоит из  $(r-1)$ -строго подобных вершин ( $r \geq 1$ ). Иными словами, с ростом  $r$  число классов не убывает.

Остановимся на ситуации, когда это число не возрастает.

*Лемма 2.* Пусть натуральное  $r$  таково, что в графе  $G$  любой класс  $(r-1)$ -строго подобных вершин совпадает с одним из классов  $r$ -строго подобных вершин. Тогда любые две  $(r-1)$ -строго подобные вершины в  $G$  являются  $m$ -строго подобными при любом целом  $m \geq 0$ .

*Доказательство.* При  $m \leq r$  утверждение вытекает из леммы 1. Поэтому докажем справедливость леммы при  $m = r + 1$ .

Пусть вершины  $x$  и  $y$  являются  $(r-1)$ -строго подобными. Тогда по условию  $x$  и  $y$  являются  $r$ -строго подобными. Значит, множества  $N(x)$ ,  $N(y)$ ,  $AN(x)$ ,  $AN(y)$  –  $(r-1)$ -строго подобны, и для любой пары соответствующих вершин  $z \in N(x)$  и  $u \in N(y)$  из их окружения (или  $z \in AN(x)$  и  $u \in AN(y)$  из антиокружения) множества  $N(x, z)$ ,  $N(y, u)$  (или  $AN(x, z)$  и  $AN(y, u)$ ) являются  $(r-1)$ -строго подобными множествами. Так как по условию любые  $(r-1)$ -строго подобные вершины являются  $r$ -строго подобными, то множества  $N(x)$ ,  $N(y)$  и  $N(x, z)$ ,  $N(y, u)$ ,  $AN(x)$ ,  $AN(y)$  и  $AN(x, z)$ ,  $AN(y, u)$  являются  $r$ -строго подобными. Отсюда и из определения 3 следует, что вершины  $x$  и  $y$  являются  $(r+1)$ -строго подобными. ▲

*Определение 5.* Две вершины из  $V(G)$  называются строго подобными, если они  $r$ -строго подобны при любом целом  $r \geq 1$ . Два подмножества из  $V(G)$  называются строго подобными, если они  $r$ -строго подобны при любом целом  $r \geq 1$ .

*Лемма 3.* В любом  $n$ -вершинном графе строго подобными являются:

- а)  $(n-1)$ -строго подобные вершины;
- б)  $(n-1)$ -строго подобные подмножества вершин.

*Доказательство* дословно повторяет доказательство соответствующей леммы из [2].

*Следствие 1.* Окружения двух строго подобных вершин строго подобны. Антиокружения двух строго подобных вершин строго подобны.

Действительно, в  $n$ -вершинном графе  $G$  строго подобные вершины являются  $n$ -строго подобными. Поэтому окружения этих вершин  $(n-1)$ -строго подобны.

В графе  $\bar{G}$ , дополнительном к графу  $G$ , антиокружения вершин  $v$  являются окружениями этих же вершин в графе  $G$ , и наоборот. Поэтому антиокружения этих вершин  $(n-1)$ -строго подобны.

Пусть вершины  $x$  и  $y$  графа  $G$  принадлежат одной орбите и  $\varphi(x) = y$  для некоторого автоморфизма  $\varphi$ . Тогда эти вершины имеют одинаковые степени, следовательно, они являются  $1$ -строго подобными. Из определений вытекает, что окружения этих вершин  $1$ -строго подобны и антиокружения этих вершин тоже  $1$ -строго подобны, причём нужное для  $1$ -строго подобия взаимно однозначное соответствие задаётся посредством  $\varphi$ . Поскольку  $\varphi$  сохраняет отношение смежности, то вершины  $x$  и  $y$  имеют одинаковые шаблоны дополненных списков смежности, и их надо отнести к одному клас-

су 2-строго подобных вершин. Для любых вершин  $z$  и  $u$  множества  $N(x)$ ,  $N(y)$ ,  $N(x,z)$  и  $N(y,\varphi(z))$ ,  $AN(x)$ ,  $AN(y)$ ,  $AN(x,u)$  и  $AN(y,\varphi(u))$  будут 2-строго подобными, так как  $\varphi$  сохраняет отношение смежности и взаимно однозначно, следовательно,  $x$  и  $y$  имеют одинаковые шаблоны индексированных дополненных списков смежности. Поэтому эти вершины графа  $G$  являются 3-строго подобными. Аналогично этому убеждаемся, что они являются  $r$ -строго подобными для любого целого  $r > 3$ . Таким образом, имеет место следующая лемма.

*Лемма 4.* Вершины, лежащие в одной орбите, строго подобны.

Алгоритм разбиения множества вершин графа  $G$  на классы строго подобных множеств, приведенный выше, подробно описан в [3]. Покажем, что алгоритм имеет полиномиальную трудоёмкость порядка  $O(n^5)$ , где  $n$  — это число вершин графа.

Если графы задаются своими матрицами смежности, то для построения дополненных списков смежности вершин и индексированных дополненных списков смежности с их шаблонами потребуется  $4 \cdot n^2$  операций.

На каждом шаге уточнения разбиения вершин выполняется переопределение индексированных дополненных списков смежности с их шаблонами. При этом количество операций и память, отводимая на хранение результатов, имеют трудоёмкость не более чем  $n^2 \cdot 4 \cdot n^2 = 4 \cdot n^4$ . Таких шагов может быть выполнено максимум  $n$ , так как число возможных классов строго подобных вершин в графе  $G$  не более  $n$ . Поэтому общая трудоёмкость может быть оценена сверху величиной  $4 \cdot n^2 + n \cdot 4 \cdot n^4$ . В итоге, трудоёмкость алгоритма не превосходит  $O(n^5)$ .

## 2. Строго подобные графы

*Определение 6.* Пусть  $G$  и  $H$  — два  $n$  вершинных графа, таких, что  $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ . Графы  $G$  и  $H$  назовем строго подобными, если в графе  $G \cup H$  подмножества вершин  $V(G)$  и  $V(H)$  строго подобны.

*Теорема 1.* Два изоморфных графа  $G$  и  $H$  при  $V(G) \cap V(H) = \emptyset$  строго подобны.

*Доказательство.* Пусть графы  $G$  и  $H$  изоморфны. По определению, существует взаимно однозначное отображение множества вершин графа  $G$  на множество вершин графа  $H$ ,  $\varphi: V(G) \rightarrow V(H)$ , сохраняющее отношения смежности и несмежности. Отображение  $\varphi$  каждой вершине  $v$  из  $V(G)$  и её подграфам окружения и антиокружения ставит в соответствие вершину  $\varphi(v) = w$  из  $V(H)$  и её подграфы окружения и антиокружения соответственно:  $N(v) \rightarrow N(w) = \varphi(N(v))$ ,  $AN(v) \rightarrow AN(w) = \varphi(AN(v))$ . Если вершина  $x$  находится в окружении (антиокружении) вершины  $v$ , тогда отображение  $\varphi$  ставит ей в соответствие вершину  $y$ , которая находится в окружении (антиокружении) вершины  $w$ , так как  $\varphi$  сохраняет отношение смежности (несмежности). Пересечение окружений (антиокружений) вершины  $v$  и каждой вершины  $x \in N(v)$  ( $x \in AN(v)$ ) из её окружения (антиокружения) отображается в пересечении окружений (антиокружений) их образов  $\varphi(v) = w$  и  $\varphi(x) = y$ :  $\varphi(N(v) \cap N(x)) = \varphi(N(v)) \cap \varphi(N(x))$ ,  $\varphi(AN(v) \cap AN(x)) = \varphi(AN(v)) \cap \varphi(AN(x))$ , поскольку  $\varphi$  взаимно однозначно. Из рассуждений, подобных приведенным выше леммы 4, получаем, что классы строгого подобия графа  $G$  взаимно однозначно отобразятся на классы строгого подобия графа  $H$ . Опираясь на этот факт, произвольную нумерацию классов строгого подобия графа  $G$  перенесём на соответствующие классы графа  $H$ . Используя в качестве индексов полученную нумерацию классов строгого подобия, построим индексированный список смежности вершины  $w$  и его шаблон. Теперь вершины  $v$  и  $w$  имеют одинаковые шаблоны индексированных списков смежности в графах  $G$  и  $H$  соответственно.

Построим граф  $G \cup H$ . В графе  $G \cup H$  дополненный список смежности каждой вершины  $v$  из графа  $G$  в первом столбце будет содержать информацию об окружении вершины  $v$  и для каждой вершины  $x \in N(v)$  — о пересечении  $N(v) \cap N(x)$ , т.е. первый столбец индексированного дополненного списка смежности вершины  $v$  графа  $G \cup H$  точно такой же, какой он был в графе  $G$ . Аналогично в графе  $G \cup H$  преобразуются все дополненные списки смежности вершин  $w$  графа  $H$ . В первом столбце они будут содержать информацию об окружении вершины  $w$ , образа вершины  $v$  и о

пересечении  $N(w) \cap N(y)$  каждой вершины  $y = \varphi(x)$  из окружения  $N(w)$ , т.е. и здесь первый столбец будет таким же, каким он был в графе  $H$ . Так как вершины  $v$  и  $w$  имели одинаковые шаблоны индексированных дополненных списков смежности в графах  $G$  и  $H$ , то информация первых столбцов для этих вершин в графе  $G \cup H$  будет одинаковой.

Второй столбец дополненного списка смежности каждой вершины  $v$  будет состоять из строк, начинающихся маркерами вершин антиокружения  $x \in AN(v)$ , за которыми следуют пересечения антиокружений —  $AN(x) \cap AN(v)$ . Завершаться каждая такая строка будет перечнем всех вершин графа  $H$ . Далее во втором столбце будет находиться  $|V(H)|$  строк, начинающихся маркерами вершин  $y$  графа  $H$ , с последующим указанием пересечений антиокружений  $AN(y) \cap AN(w)$  в графе  $G \cup H$ . Заканчиваться каждая такая строка будет перечнем всех вершин антиокружения  $x \in AN(v)$  из графа  $G$ . Второй столбец дополненного списка смежности вершины  $w$  в графе  $G \cup H$  будет содержать строки, в которых каждая вершина  $x \in G$  заменится вершиной  $\varphi(x)$ , а любая вершина  $y \in H$  — вершиной  $\varphi^{-1}(y)$ , т.е. содержать информацию, аналогичную информации второго столбца для вершины  $v$  в графе  $G \cup H$ .

Информация первых и вторых столбцов шаблонов дополненных списков смежности для соответствующих при изоморфизме  $\varphi$  вершин одинаковая в графе  $G \cup H$ , и вершины  $v$  и  $w$  будут иметь одинаковые шаблоны индексированных дополненных списков смежности в графе  $G \cup H$ , так как они имели одинаковые такие шаблоны в графах  $G$  и  $H$ , где в качестве индексов использована полученная выше нумерация. Поэтому подмножества  $V(G)$  и  $V(H)$  графа  $G \cup H$  будут строго подобны. Отсюда следует, что графы  $G$  и  $H$  строго подобны.  $\blacktriangle$

В [2] при доказательстве теоремы 4 использовалось утверждение, которое мы выделим в следующую лемму, для удобства ссылок.

*Лемма Визинга 5.* Пусть  $q_{ij}$  — число вершин класса строгого подобия  $X_j$ , входящих в окружение вершин класса строгого подобия  $X_i$ ; аналогично  $q_{ji}$  — число вершин класса строгого подобия  $X_i$ , входящих в окружение вершин класса строгого подобия  $X_j$ . Тогда имеем  $|X_i| \cdot q_{ij} = |X_j| \cdot q_{ji}$ .

*Теорема 2.* Пусть графы  $G$  и  $H$  либо связны, либо не связны и  $|V(G)| = |V(H)|$ ,  $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ . Если в графе  $G \cup H$  две вершины  $x \in V(G)$  и  $y \in V(H)$  строго подобны, то множества вершин  $V(G)$  и  $V(H)$  строго подобны, т.е. графы  $G$  и  $H$  строго подобны.

*Доказательство.* Пусть оба графа связны, далее переходим к рассмотрению дополнительных к ним графов. Почти дословно повторяется доказательство соответствующего утверждения из [2], если соцветность заменить строгим подобием.

*Определение 7.* Два класса строгого подобия вершин  $X_i$  и  $X_j$  графа  $G$  сцеплены тривиально, если  $q_{ji} = 0$  (в окружении любой вершины из класса  $X_j$  нет вершин из класса  $X_i$ ) или  $q_{ji} = |X_i|$  (в окружении каждой вершины из класса  $X_j$  находятся все вершины из класса  $X_i$ ).

Пусть  $|X_i| = |X_j| = 3$ . Если сцепление между этими классами не тривиальное и  $q_{ji} = 1$ , то в дополненных списках смежности у каждой вершины класса  $i$  в первом столбце есть единственная строка, начинающаяся маркером вершины из класса  $j$ . В этом случае говорим, что вершины этих классов сцеплены по реальному ребру графа  $G$ . При  $q_{ji} = 2$  в дополненных списках смежности у каждой вершины класса  $i$  во втором столбце есть единственная строка, начинающаяся маркером вершины из класса  $j$ , полагаем, что вершины этих классов сцеплены по отсутствующему ребру графа  $G$ . Реальные или отсутствующие рёбра, по которым сцеплены вершины, назовём *рёбрами сцепления*. В случаях, когда тип сцепления не играет роли, будем говорить, что вершины классов  $i$  и  $j$  сцеплены.

*Лемма 6.* Если в трёх классах строгого подобия вершин  $\{x^1, y^1, z^1\}$ ,  $\{x^2, y^2, z^2\}$ ,  $\{x^3, y^3, z^3\}$  связного графа  $G$  вершина  $x^1$  сцеплена с  $x^2$  и  $x^3$ ,  $y^1$  — с  $y^2$  и  $y^3$ ,  $z^1$  — с  $z^2$  и  $z^3$ , то отображение  $\varphi$ , вершин класса  $x^1 \rightarrow y^1$ ,  $y^1 \rightarrow z^1$ ,  $z^1 \rightarrow x^1$  и попарно сцепленных с ними вершин классов 2,3:  $x^2 \rightarrow y^2$ ,

$y^2 \rightarrow z^2$ ,  $z^2 \rightarrow x^2$  и  $x^3 \rightarrow y^3$ ,  $y^3 \rightarrow z^3$ ,  $z^3 \rightarrow x^3$  не нарушает отношения смежности и несмежности между вершинами из классов 2 и 3.

*Доказательство.* Случай тривиального сцепления классов 2 и 3 очевиден. Рассмотрим нетривиальное сцепление классов. По условию при нетривиальном сцеплении классов  $\{x^1, y^1, z^1\}$  и  $\{x^2, y^2, z^2\}$  рёбрами сцепления являются:  $x^1x^2, y^1y^2, z^1z^2$ , а для классов  $\{x^1, y^1, z^1\}$  и  $\{x^3, y^3, z^3\}$  — это  $x^1x^3, y^1y^3, z^1z^3$ .

Непосредственно проверяется, что если между классами  $\{x^2, y^2, z^2\}$  и  $\{x^3, y^3, z^3\}$  рёбрами сцепления будут  $x^2x^3, y^2y^3, z^2z^3$  или  $x^2y^3, y^2z^3, z^2x^3$ , или  $x^2z^3, y^2x^3, z^2y^3$ , то выше определённое отображение сохраняет смежность между вершинами из классов 2 и 3. Разберём, например, случай с рёбрами сцепления  $x^2z^3, y^2x^3, z^2y^3$  (рис. 6а). По условию ребра  $x^2z^3, y^2x^3, z^2y^3$  существуют или отсутствуют одновременно. Если они существуют, тогда отсутствуют рёбра  $x^2x^3, y^2y^3, z^2z^3$  и  $x^2y^3, y^2z^3, z^2x^3$ , и наоборот, если они отсутствуют, то рёбра  $x^2x^3, y^2y^3, z^2z^3$  и  $x^2y^3, y^2z^3, z^2x^3$  существуют. Поэтому при отображении  $\varphi$  будет иметь место соответствие реальных или мнимых рёбер:  $x^2z^3 \mapsto y^2x^3$ ,  $y^2x^3 \mapsto z^2y^3$ ,  $z^2y^3 \mapsto x^2z^3$ ,  $x^2y^3 \mapsto y^2z^3$ ,  $y^2z^3 \mapsto z^2x^3$ ,  $z^2x^3 \mapsto x^2y^3$  и  $x^2x^3 \mapsto y^2y^3$ ,  $y^2y^3 \mapsto z^2z^3$ ,  $z^2z^3 \mapsto x^2x^3$ . Остальные случаи разбираются аналогично.

Докажем, что других случаев сцепления классов 2 и 3, кроме разобранных выше, быть не может. Предположим, что рёбрами сцепления будут, например,  $x^2y^3, y^2x^3, z^2z^3$  (рис. 6 б). Заметим, что из трёх сцепок — класса 1 с классами 2 и 3 и 2 с 3 — по крайней мере, две имеют одинаковый тип — по реальному или по отсутствующему ребру. Пусть, например, класс 3 сцеплен с классами 1 и 2 по отсутствующему ребру. Тогда в антиокружении вершины  $z^3$  имеется или отсутствует ребро  $z^1z^2$ , в зависимости от того, какой тип сцепления у классов 1 и 2. А в антиокружениях вершины  $x^3$  между вершинами  $x^1$  и  $y^2$  будет наблюдаться обратное, т.е. при наличии ребра  $z^1z^2$  ребро  $x^1y^2$  будет отсутствовать, и оно будет в наличии при отсутствии  $z^1z^2$ . Это противоречит тому, что вершины  $z^3$  и  $x^3$  строго подобны. Случаи рёбер сцепления  $y^2z^3, x^2x^3, z^2y^3$  и  $y^2y^3, x^2z^3, z^2x^3$  разбираются аналогично. Поэтому между классами строгого подобия  $\{x^2, y^2, z^2\}$  и  $\{x^3, y^3, z^3\}$  сцеплений  $x^2y^3, y^2x^3, z^2z^3$ ,  $y^2z^3, x^2x^3, z^2y^3$  и  $y^2y^3, x^2z^3, z^2x^3$  быть не может. ▲

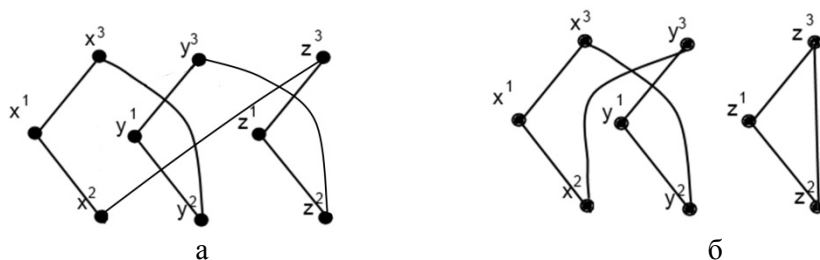


Рисунок 6. Варианты сцепления вершин трех классов строгого подобия

*Замечание.* Отображение  $\varphi$  сохраняет смежность и несмежность вершин внутри классов, а также между вершинами из классов 1 и 2 и классов 1 и 3. Из доказательства леммы видно, что при нетривиальном сцеплении класса 1 с 2 и 3 отображение  $\varphi$ , определённое на каждом классе циклическим образом, не нарушает смежности между вершинами этих классов строгого подобия, вне зависимости от того, какие конкретно имеются рёбра сцепления между классом 1 и классами 2 и 3.

*Теорема 3.* Пусть у графа  $G$  мощность каждого класса строгого подобия вершин не превосходит 3, тогда классы строгого подобия его вершин совпадают с орбитами.

*Доказательство.* Отметим простые факты: 1) по лемме Визинга каждая вершина классов строгого подобия мощности 2 либо смежна со всеми вершинами класса мощности 3, либо не смежна ни с одной; 2) все вершины одного класса либо между собой смежны, либо не смежны одновременно.



Пусть  $x$  и  $y$  — произвольные строго подобные вершины из класса мощности 2. Построим автоморфизм  $\varphi$  графа  $G$ , который переводит вершину  $x$  в  $y$ .

Сначала сопоставим все вершины  $C^l$  из классов строгого подобия мощности 1 самим себе  $\varphi(C^l) = C^l$ . Продолжая построение отображения  $\varphi$ , сопоставим данные вершины  $x$  и  $y$  друг другу  $\varphi(x) = y$  и  $\varphi(y) = x$ . Затем для каждого класса строгого подобия  $i = \{v^i, w^i\}$  мощности 2 вершину  $v^i$  сопоставляем вершине  $w^i$ :  $\varphi(v^i) = w^i$  и  $\varphi(w^i) = v^i$ . При таком продолжении отображения, очевидно, не нарушаются отношения смежности и несмежности вершин.

Вершины любого класса строгого подобия  $t$  мощности 3 оставляем на месте, отображая сами в себя:  $\varphi(w^t) = w^t$ ,  $\varphi(v^t) = v^t$ ,  $\varphi(u^t) = u^t$ .

Построенное отображение  $\varphi: V(G) \leftrightarrow V(G)$  является автоморфизмом графа  $G$ , как нетрудно убедиться, используя отмеченные в начале свойства 1) и 2).

Пусть  $x$ ,  $y$  и  $z$  — произвольные вершины из класса строгого подобия мощности 3. Построим автоморфизм  $\varphi$  графа  $G$ , который переводит вершину  $x$  в  $y$ :  $\varphi(x) = y$ , и определим  $\varphi(y) = z$ ,  $\varphi(z) = x$ .

Известно, что каждая вершина классов строгого подобия  $i$  мощности 2 либо смежна со всеми вершинами класса мощности 3, либо не смежна ни с одной, поэтому оставляем их на месте, отображая сами в себя:  $\varphi(w^i) = w^i$ ,  $\varphi(v^i) = v^i$ . Так же поступаем с вершинами класса строгого подобия мощности 1.

Пусть в графе  $G$  есть класс строгого подобия вершин  $j$  мощности 3, который сцеплен нетривиально с классом  $k_0 = \{x, y, z\}$ . Так как сцепление классов  $k_0$  и  $j$  нетривиальное, то в индексированных дополненных списках смежности у всех вершин  $x$ ,  $y$  и  $z$  есть либо только в первом, либо только во втором столбце по одной строке, начинающейся маркером вершины класса  $j$ :  $w^j$ ,  $v^j$  и  $u^j$  соответственно. Поэтому отображение  $\varphi$  доопределяем на классе  $j$ :  $\varphi(w^j) = v^j$ ,  $\varphi(v^j) = u^j$  и  $\varphi(u^j) = w^j$ . Подобным образом отображение  $\varphi$  продолжается на каждом классе  $j$ , который нетривиально сцеплен с классом  $k_0$ . Лемма 6 и замечание после неё гарантируют, что таким образом построенное отображение  $\varphi$  сохраняет отношения смежности и несмежности.

Пусть на классе строгого подобия  $i = \{w^i, v^i, u^i\}$  отображение  $\varphi$  ещё не определено, и этот класс нетривиально сцеплен с классом строгого подобия  $j$ , на котором отображение  $\varphi$  уже определено  $\varphi(w^j) = v^j$ ,  $\varphi(v^j) = u^j$  и  $\varphi(u^j) = w^j$ , но не сцеплено с  $k_0$ . Продолжаем отображение  $\varphi$  на вершинах класса  $k_i$  циклически:  $\varphi(w^i) = v^i$ ,  $\varphi(v^i) = u^i$ ,  $\varphi(u^i) = w^i$ . Подобным образом отображение  $\varphi$  продолжается на каждом классе  $i$ , нетривиально сцепленном с классом  $j$ . Лемма 6 гарантирует, что таким образом построенное отображение  $\varphi$  сохраняет отношение смежности и несмежности вершин.

Так как классов мощности 3 конечное число, то описанный выше процесс продолжения отображения  $\varphi$  прервётся за конечное число шагов. Но при этом могут остаться классы  $l$ , которые сцеплены тривиально с классами мощности 3, на которых отображение  $\varphi$  определено. Вершины каждого такого класса  $l$  отображаем сами в себя:  $\varphi(w^l) = w^l$ ,  $\varphi(v^l) = v^l$ ,  $\varphi(u^l) = u^l$ .

Ввиду фактов, изложенных в начале доказательства, в итоге получим взаимно однозначное отображение  $\varphi: V(G) \leftrightarrow V(G)$ , сохраняющее отношение смежности и несмежности вершин графа  $G$ . Поэтому отображение  $\varphi$  — это автоморфизм графа  $G$ . Отсюда следует, что классы строгого подобия вершин графа  $G$  совпадают с орбитами группы автоморфизмов графа  $G$ . ▲

*Следствие 3.* Если у связного графа  $G$  имеется один класс строгого подобия, состоящий только из доминирующих вершин графа  $G$ , а наибольшая мощность остальных классов строгого подобия вершин не превосходит 3, то классы строгого подобия вершин совпадают с орбитами группы автоморфизмов графа  $G$ .

*Работа выполнена при поддержке КН МОН РК (грант 0929/ГФЗ).*

### Список литературы

- 1 *Емеличев В.А и др.* Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990. — 384 с.
- 2 *Визинг В.Г.* Дистрибутивная раскраска вершин графа // Дискретный анализ и исследование операций. — 1995. — Т. 2. — № 4. — С. 3–12.
- 3 *Латкина Л.П.* Дополненный список смежности вершин и алгоритм разбиения на орбиты // Совместное издание. Вестн. ВКГТУ и Вычислительные технологии СО РАН. — Усть-Каменогорск: Изд-во ВКГТУ, 2013. — С. 211–219.

Л.П.Латкина

### Төбелері үш төбеден артық болмайтын орбиталары бар графтар

Мақалада кемелдендірілген Визинг-Назарц алгоритмі қарастырылды және осы полиномиалды алгоритмдердің қарапайым графтар төбелерін орбиталарға бөлу үшін қолданылуы менгерілді. Осы мақсатта  $r$ -қатаң ұқсас, қатаң ұқсас төбелер және төбелер жиындары, сондай-ақ олардың қасиеттері анықталды. Графтың кез келген орбитасы қатаң ұқсас төбелер кластарының біріне толық енетіні дәлелденді. Екінші жағынан, егер қатаң ұқсастық кластары үш төбеден артық емес төбелерден тұратын болса, онда осы кластар орбиталар болады.

L.P.Latkina

### Graphs, which orbits contain no more than three vertices

We consider the improved algorithm Vizing-Nazarets and study the applicability of this polynomial algorithm to the partition of the vertices of ordinary graphs on orbit. For this purpose the  $r$ -strictly similar and the strictly similar vertices and the sets of vertices are defined and their properties are studied. It is proved that any orbit of the graph is completely contained in one of the classes of strictly similar vertices. On the other hand, it is proved that if the classes of strict equivalence consist of no more than three vertices, then these same classes are orbits.

### Referenses

- 1 *Emelichev V.A. et al. Lectures on graph theory*, Moscow: Nauka, 1990, 384 p.
- 2 *Vizing V.G. Discrete analysis and operations research*, 1995, 2, 4, p. 3–12.
- 3 *Latkina L.P. Joint publ., the Bull. of the EKSTU and Computational technologies SB RAS*, Ust-Kamenogorsk: Publ. EKSTU, 2013, p. 211–219.