DOI 10.31489/2019M2/26-32
UDC 51

U.K. Koilyshov[1], K.A. Beisenbaeva[2]

[1] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;*
[2] *Kazakh Academy of Transport and Communications, Almaty, Kazakhstan*
(E-mail: koylyshov@mail.ru)

A conjugation problem for the heat equation in the field where the boundary moves in linear order

Boundary-value problems for parabolic equations in domains with moving boundaries are fundamentally different from the classical parabolic equations. Due to the dependence of the region size on time, the methods of separation of variables and integral transformations are not applicable to this type of problems in general case, since remaining within the framework of classical methods of mathematical physics, it is not possible to coordinate the solution of the heat conduction equation with the motion of the boundary of the heat transfer region. The solution of this problem has been the subject of research of many domestic and foreign mathematicians [1–8]. A large number of works are devoted to boundary-value problems in non-degenerate domains; they considered the existence of classical solutions by the method of thermal potentials for both the heat conduction equation and for more general parabolic equations. But if the region degenerates at the initial moment of time, then the method of successive approximations for solving integral equations cannot be applied. Since at the degeneration of the domain integral operators become special, that is, when they affect the constant and the upper limit tends to zero, they do not tend to zero. Integral equations of this kind were obtained in [8] in the study of the thermal field of liquid contact bridges and an asymptotic solution was found that can be used to solve practical problems. This paper is devoted to the study of the first boundary value problem for the heat conduction equation with a discontinuous coefficient in the domain that degenerates at the initial moment of time when the boundary moves by linear law. An explicit form of the solution of this problem is obtained, afterwards that can be applied for a numerical approximations.

Keywords: parabolic equations, first boundary value problem, thermal potential method, Jacobi polynomials.

Formulation of the problem: formulation of the problem: it is required to find the function $u_1(x,t), u_2(x,t)$ satisfying following equations:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad ((x,t) \in D^-(-\alpha_1 t < x < 0, \quad t > 0)), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad ((x,t) \in D^+(0 < x < \alpha_2 t, \quad t > 0)) \tag{2}$$

boundary conditions:

$$u_1(-\alpha_1 t, t) = \varphi_1(t), \quad u_2(\alpha_2 t, t) = \varphi_2(t), \tag{3}$$

and conjugation conditions:

$$u_1\Big|_{x=-0} = u_2\Big|_{x=+0}, \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=-0} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=+0}, \tag{4}$$

where $\alpha_i > 0, k_i > 0, (i = 1,2)$.

With the help of a suitable substitute [9]: $u_i(x,t) = v_i(x_1,t_1)\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}}$, where $x_1 = \frac{x}{t}, t_1 = -\frac{1}{t}$ the problem (1)–(4) reduces to the problem without initial conditions in the area with a fixed boundary: required to find functions $v_1(x_1,t_1), v_2(x_1,t_1)$ satisfying following equations

$$\frac{\partial v_1}{\partial t_1} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}, \quad ((x_1,t_1) \in G^-(-\alpha_1 < x_1 < 0, \quad -\infty < t_1 < -\frac{1}{T})), \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t_1}=\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}, \quad ((x_1,t_1)\in G^+(0<x_1<\alpha_2, \quad -\infty<t_1<-\frac{1}{T})) \tag{6}$$

boundary conditions:

$$v_1(-\alpha_1,t_1)=\psi_1(t_1), \quad v_2(\alpha_2,t_1)=\psi_2(t_1), \tag{7}$$

and conjugation conditions:

$$v_1\Big|_{x_1=-0}=v_2\Big|_{x_1=+0}, \quad k_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0}=k_2\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}, \tag{8}$$

where $\psi_i(t_1)=\varphi_i\left(-\frac{1}{t_1}\right)\frac{e^{-\frac{\alpha_i^2}{4t_1}}}{\sqrt{-t_1}}$, $(i=1,2)$.

A problem without initial conditions (5)–(8) can be solved as follows [10]: required to find functions $w_1(x_1,t_1)$, $w_2(x_1,t_1)$ satisfying equations

$$\frac{\partial w_1}{\partial t_1}=\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}, \quad ((x_1,t_1)\in G^-(-\alpha_1<x_1<0,\ t_0<t_1<-\frac{1}{T})) \tag{9}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t_1}=\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1^2}, \quad ((x_1,t_1)\in G^+(0<x_1<\alpha_2,\ t_0<t_1<-\frac{1}{T})) \tag{10}$$

initial conditions:

$$w_1(x_1,t_0)=f_1(x_1,t_0), \quad w_2(x_1,t_0)=f_2(x_1,t_0) \tag{11}$$

boundary conditions:

$$w_1(-\alpha_1,t_1)=\psi_1(t_1), \quad w_2(\alpha_2,t_1)=\psi_2(t_1), \tag{12}$$

and conjugation conditions:

$$w_1\Big|_{x_1=-0}=w_2\Big|_{x_1=+0}, \quad k_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0}=k_2\frac{\partial w_2}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}, \tag{13}$$

where $-\infty<t_0<-\frac{1}{T}<0$.

Explicit solution of the problem (9)–(13) found in the [7]:

$$w_1(x_1,t_1)=\int_{-\alpha_1}^{0}G_{11}(x_1,\xi,t_1-t_0)f_1(\xi,t_0)d\xi+\int_0^{\alpha_2}G_{12}(x_1,\xi,t_1-t_0)f_2(\xi,t_0)d\xi+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial G_{11}(x_1,-\alpha_1,t_1-\tau_1)}{\partial\xi}\psi_1(\tau_1)d\tau_1-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial G_{12}(x_1,\alpha_2,t_1-\tau_1)}{\partial\xi}\psi_2(\tau_1)d\tau_1,$$

$$w_2(x_1,t_1)=\int_{-\alpha_1}^{0}G_{21}(x_1,\xi,t_1-t_0)f_1(\xi,t_0)d\xi+\int_0^{\alpha_2}G_{22}(x_1,\xi,t_1-t_0)f_2(\xi,t_0)d\xi+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial G_{21}(x_1,-\alpha_1,t_1-\tau_1)}{\partial\xi}\psi_1(\tau_1)d\tau_1-\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial G_{22}(x_1,\alpha_2,t_1-\tau_1)}{\partial\xi}\psi_2(\tau_1)d\tau_1,$$

where

$$G_{11}(x_1,\xi,t_1)=G(x_1-\xi,t_1)-G(2\alpha_1+x_1+\xi,t_1)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{(n)}(G(2(n-k+1)\alpha_1+2(k-1)\alpha_2+x_1-\xi,t_1)+$$

$$+G(2(n-k+1)\alpha_1+2(k-1)\alpha_2-x_1+\xi,t_1)-$$

$$-G(2(n-k+2)\alpha_1+2(k-1)\alpha_2+x_1+\xi,t_1)-G(2(n-k)\alpha_1+2(k-1)\alpha_2-x_1-\xi,t_1)$$

$$G_{12}(x_1,\xi,t_1)=\mu_2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^{(n)}(G(2(n-k+1)\alpha_1+2k\alpha_2+x_1-\xi,t_1)+$$

$$+G(2(n-k)\alpha_1+2(k-1)\alpha_2-x_1+\xi,t_1)-G(2(n-k+1)\alpha_1+2(k-1)\alpha_2+x_1+\xi,t_1)-$$
$$-G(2(n-k)\alpha_1+2k\alpha_2-x_1-\xi,t_1))$$

$$G_{21}(x_1,\xi,t_1)=\mu_1\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}(G(2(n-k)\alpha_1+2(k-1)\alpha_2+x_1-\xi,t_1)+$$
$$+G(2(n-k+1)\alpha_1+2k\alpha_2-x_1+\xi,t_1)-$$
$$-G(2(n-k+1)\alpha_1+2(k-1)\alpha_2+x_1+\xi,t_1)-G(2(n-k)\alpha_1+2k\alpha_2-x_1-\xi,t_1))$$

$$G_{22}(x_1,\xi,t_1)=G(x_1-\xi,t_1)-G(2l_2-x_1-\xi,t_1)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\delta_k^{(n)}(G(2(n-k)\alpha_1+2k\alpha_2+x_1-\xi,t_1)+G(2(n-k)\alpha_1+2k\alpha_2-x_1+\xi,t_1)+$$
$$-G(2(n-k)\alpha_1+2(k-1)\alpha_2+x_1+\xi,t_1)-G(2(n-k)\alpha_1+2(k+1)\alpha_2-x_1-\xi,t_1))$$

$$\alpha_k^{(n)}=\begin{cases}(-\lambda)^n, & k=1,\quad n\geq 1\\ (-1)^{n+k}\sum_{m=0}^{M}(-1)^m C_{n-k+1}^{m+1}C_{k-2}^{m}\lambda^{n-2m-2}\mu^{2m+2}, & 2\leq k\leq n,\end{cases}$$
$$M=\min(k-2,n-k)$$

$$\beta_k^{(n)}=\gamma_k^{(n)}=(-1)^{n+k}\sum_{m=0}^{K}(-1)^m C_{k-1}^{m}C_{n-k}^{m}\lambda^{n-2m-1}\mu^{2m},\quad 1\leq k\leq n$$
$$K=\min(k-1,n-k)$$

$$\delta_k^{(n)}=\begin{cases}\lambda^n, & k=n,\quad n\geq 1\\ (-1)^{n+k+1}\sum_{m=0}^{N-1}(-1)^m C_{n-k-1}^{m}C_{k}^{m+1}\lambda^{n-2m-2}\mu^{2m+2}, & 1\leq k\leq n-1,\end{cases}$$
$$N=\min(k,n-k)$$

$$\mu^2=\mu_1\mu_2,\mu_i=\frac{2k_i}{k_1+k_2},\quad (i=1,2),\quad \lambda=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2};\quad G(y,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{y^2}{4\tau}}$$

By the definition of Jacobi polynomials [11]:

$$P_k(\theta;\alpha,\beta)=\sum_{m=0}^{k}C_{\alpha+k}^{m}C_{\beta+k}^{k-m}\left(\frac{\theta-1}{2}\right)^{k-m}\left(\frac{\theta+1}{2}\right)^{m},$$

then the coefficients $\alpha_k^{(n)}$, $\beta_k^{(n)}$, $\gamma_k^{(n)}$, $\delta_k^{(n)}$ can be expressed in terms of Jacobi polynomials. If we introduce the following notation $\mu^2-\lambda^2=\theta$ and by virtue of the fact $\mu^2+\lambda^2=1$, then we have

$$\alpha_k^{(n)}=\begin{cases}(-1)^n\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\frac{n-2k+1}{2}}, k=1,n\geq 1,\\ (-1)^n\frac{n-k+1}{k-1}\left(\frac{1+\theta}{2}\right)\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\frac{n-2k+2}{2}}P_{k-2}(\theta;n-2k+2,1), k-2\leq n-k,\\ \left(\frac{1+\theta}{2}\right)\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\frac{2k-n-2}{2}}P_{n-k}(\theta;2k-n-2,1), k-2>n-k,\end{cases}\tag{14}$$

$$\delta_k^{(n)}=\begin{cases}\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, k=n,n\geq 1,\\ \frac{k}{n-k}\left(\frac{1+\theta}{2}\right)\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\frac{2k-n}{2}}P_{n-k-1}(\theta;2k-n,1), k-1>n-k-1,\\ (-1)^n\left(\frac{1+\theta}{2}\right)\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\frac{n-2k}{2}}P_{k-1}(\theta;n-2k,1), k-1\leq n-k-1,\end{cases}\tag{15}$$

$$\beta_k^{(n)}=\gamma_k^{(n)}=\begin{cases}\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\frac{2k-n-1}{2}}P_{n-k}(\theta;2k-n-1,0), k-1>n-k,\\ (-1)^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\frac{n-2k+1}{2}}P_{k-1}(\theta;n-2k+1,0), k-1\leq n-k\end{cases}\tag{16}$$

Now we state some auxiliary result from [12].

Lemma. Let $h(\theta)=\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\alpha}$ be a weight function defined on the interval $[-1,1]$, $\alpha>-1$. If $P_k(\theta;\alpha,0)$ is a sequence of the corresponding orthogonal Jacobi polynomials, then the function $\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}|P_k(\theta;\alpha,0)|$ attains its maximum in $[-1,1]$ at the point $\theta=-1$.

By lemma and formulas (14) - (16), we obtain the following estimates

$$\{|\beta_k^{(n)}|,|\gamma_k^{(n)}|\}<1,\quad \{|\alpha_k^{(n)}|,|\delta_k^{(n)}|\}<2.$$

By applying the last estimates it is easy to verify that

$$\lim_{t_0\to-\infty}\int_{-\alpha_1}^{0}G_{i1}(x_1,\xi,t_1-t_0)f_1(\xi,t_0)d\xi=0,\quad \lim_{t_0\to-\infty}\int_{0}^{\alpha_2}G_{i2}(x_1,\xi,t_1-t_0)f_2(\xi,t_0)d\xi=0, i=1,2.$$

Further, when $\tau_0\to-\infty$ the solution of the problem without initial conditions (5)–(8) is obtained [10].

$$v_1(x_1,t_1)=\int_{-\infty}^{t_1}\frac{\partial G_{11}(x_1,-\alpha_1,t_1-\tau_1)}{\partial\xi}\psi_1(\tau_1)d\tau_1-\int_{-\infty}^{t_1}\frac{\partial G_{12}(x_1,\alpha_2,t_1-\tau_1)}{\partial\xi}\psi_2(\tau_1)d\tau_1,$$

$$v_2(x_1,t_1)=\int_{-\infty}^{t_1}\frac{\partial G_{21}(x_1,-\alpha_1,t_1-\tau_1)}{\partial\xi}\psi_1(\tau_1)d\tau_1-\int_{-\infty}^{t_1}\frac{\partial G_{22}(x_1,\alpha_2,t_1-\tau_1)}{\partial\xi}\psi_2(\tau_1)d\tau_1.$$

Going back to the original variables we obtain an explicit solution to the problem (1)–(4):

$$u_1(x,t)=\int_0^t g_{11}(x,t-\tau)\varphi_1(\tau)d\tau+\int_0^t g_{12}(x,t-\tau)\varphi_2(\tau)d\tau,$$

$$u_2(x,t)=\int_0^t g_{21}(x,t-\tau)\varphi_1(\tau)d\tau+\int_0^t g_{22}(x,t-\tau)\varphi_2(\tau)d\tau,$$

where

$$g_{11}(x,t-\tau)=-2\frac{\partial G(x+\alpha_1 t,t-\tau)}{\partial x}e^{\frac{\alpha_1(\alpha_1 t+\alpha_1\tau+2x)}{4}}-$$
$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{(n)}\left(\frac{\partial G((2n-2k+3)\alpha_1 t+2(k-1)\alpha_2 t+x,t-\tau)}{\partial x}\cdot\right.$$
$$e^{\frac{((2n-2k+3)\alpha_1+2(k-1)\alpha_2)^2t+\alpha_1^2\tau+2(2n-2k+3)\alpha_1 x+4(k-1)\alpha_2 x}{4}}+\frac{\partial G((2n-2k+1)\alpha_1 t+2(k-1)\alpha_2 t-x,t-\tau)}{\partial x}\cdot$$
$$\left.e^{\frac{((2n-2k+1)\alpha_1+2(k-1)\alpha_2)^2t+\alpha_1^2\tau-2(2n-2k+1)\alpha_1 x-4(k-1)\alpha_2 x}{4}}\right)$$

$$g_{12}(x,t-\tau)=2\mu_2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^{(n)}\left(\frac{\partial G(2(n-k+1)\alpha_1 t+(2k-1)\alpha_2 t+x,t-\tau)}{\partial x}\cdot\right.$$
$$e^{\frac{(2(n-k+1)\alpha_1+(2k-1)\alpha_2)^2t+\alpha_2^2\tau+4(n-k+1)\alpha_1 x+2(2k-1)\alpha_2 x}{4}}+\frac{\partial G(2(n-k)\alpha_1 t+(2k-1)\alpha_2 t-x,t-\tau)}{\partial x}\cdot$$
$$\left.e^{\frac{(2(n-k)\alpha_1+(2k-1)\alpha_2)^2t+\alpha_2^2\tau-4(n-k)\alpha_1 x-2(2k-1)\alpha_2 x}{4}}\right)$$

$$g_{21}(x,t-\tau)=-2\mu_1\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}\left(\frac{\partial G((2n-2k+1)\alpha_1 t+2(k-1)\alpha_2 t+x,t-\tau)}{\partial x}\cdot\right.$$
$$e^{\frac{((2n-2k+1)\alpha_1+2(k-1)\alpha_2)^2t+\alpha_1^2\tau+2(2n-2k+1)\alpha_1 x+4(k-1)\alpha_2 x}{4}}+\frac{\partial G((2n-2k+1)\alpha_1 t+2k\alpha_2 t-x,t-\tau)}{\partial x}\cdot$$
$$\left.e^{\frac{((2n-2k+1)\alpha_1+2k\alpha_2)^2t+\alpha_1^2\tau-2(2n-2k+1)\alpha_1 x-4k\alpha_2 x}{4}}\right)$$

$$g_{22}(x,t-\tau) = 2\frac{\partial G(\alpha_2 t - x, t-\tau)}{\partial x} e^{\frac{\alpha_2(\alpha_2 t + \alpha_2 \tau - 2x)}{4}} -$$
$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\delta_k^{(n)} \left(\frac{\partial G(2(n-k)\alpha_1 t + (2k-1)\alpha_2 t + x, t-\tau)}{\partial x} \cdot \right.$$
$$e^{\frac{(2(n-k)\alpha_1 + (2k-1)\alpha_2)^2 t + \alpha_2^2 \tau + 4(n-k)\alpha_1 x + 2(2k-1)\alpha_2 x}{4}} + \frac{\partial G(2(n-k)\alpha_1 t + (2k+1)\alpha_2 t - x, t-\tau)}{\partial x} \cdot$$
$$\left. e^{\frac{(2(n-k)\alpha_1 + (2k+1)\alpha_2)^2 t + \alpha_2^2 \tau - 4(n-k)\alpha_1 x - 2(2k+1)\alpha_2 x}{4}} \right)$$

References

1 Gevrey M. Sur les equations aux derives partielles du type parabolique / M. Gevrey // J. Math. Pures et Appl. — 1913. — 9 — № 4. — P. 305–471.

2 Petrovsky I.G. Zur ersten Randwertaufgabe der Warmeleitungsgleichungen // Compos. Math. — 1935. — 1 — № 3. — P. 383–419.

3 Камынин Л.И. О решении IV и V краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка в криволинейной области / Л.И. Камынин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1969. — Т. 9, № 3. — С. 558–572.

4 Михайлов В.П. Теорема существования и единственности решения одной задачи для параболического уравнения в области с особыми точками на границе / В.П. Михайлов // Тр. МИАН СССР. — 1967. — Т. 91. — С. 47–58.

5 Кондратьев В.А. Краевые задачи для параболических уравнений в замкнутых областях / В.А. Кондратьев // Тр. Москов. мат. общ-ва. — 1966. — Т. 15. — С. 400–451.

6 Ким Е.И. Решение в малом задачи с нелинейным граничным условием для уравнения теплопроводности в расширяющейся области / Е.И. Ким, А.А. Кавокин // Изв. АН КазССР. Сер. физ-мат. — 1977. — № 1. — С. 41–46.

7 Ким Е.И. Решение задачи теории теплопроводности с разрывным коэффициентом и вырождающимися подвижными границами / Е.И. Ким, У.К. Койлышов // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. — 1984. — № 3. — С. 35–39.

8 Харин С.Н. Тепловые процессы в электрических контактах и связанные с ними сингулярные интегральные уравнения: дис. ... канд. физ-мат. наук / С.Н. Харин. — Алма-Ата, 1968. — 131 с.

9 Миллер У. Симметрия и разделение переменных / У. Миллер, мл.; пер. с англ. Г.П. Бабенко. — М.: Мир, 1981. — 342 с.

10 Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1977. — 736 с.

11 Сеге Г. Ортогональные многочлены / Г. Сеге; пер. с англ. В.С. Виденского. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. — 500 с.

12 Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены / П.К. Суетин. — М.: Наука, 1979. — 419 с.

Ү.Қ. Қойлышов, К.А. Бейсенбаева

Шекарасы сызықты заңмен қозғалатын облыста жылуөткізгіштік теңдеу үшін бір түйіндес есеп

Шекарасы қозғалмалы облыстағы параболалық типті теңдеулер үшін шекаралық есептер әдеттегі классикалық есептерден айтарлықтай ерекшеленеді. Облыстың өлшемі уақытқа тәуелді болғандықтан, бұл типтегі есептерге жалпы жағдайда Фурьенің айнымалыларды жіктеу және интегралдық түрлендіру әдістерін қолдануға болмайды, себебі математикалық физиканың классикалық әдістерін қолдансақ, жылуөткізгіш теңдеудің шешімі жылутасымалдау облысының шекарасының қозғалысымен келіспейді. Бұл мәселенің шешімі көптеген отандық және шетелдік математиктердің зерттеу объектісі болып табылды [1–8]. Шекарасы қозғалмалы облыстағы жылуөткізгіш есептер көптеген авторлардың жұмыстарында қарастырылған. Көптеген жұмыстар азғындалмаған облыстағы шекаралық есептерге арналған, оларда жылуөткізгіш теңдеу үшін жылу потенциалдар әдісі арқылы классикалық шешімнің бар болу сұрағы зерттелген. Облыс азғындалған жағдайда тізбектеп жуықтау әдісі интегралдық теңдеудің шешімін табуға жарамайды. Мұндай типтегі интегралдық теңдеу сұйық контактілі жылу өрістерін зерттеу барысында [8] жұмыста алынған және онда практикалық есептердің шешімі ретінде қарастыруға болатын асимптотикалық шешімі табылған. Берілген жұмыс шекарасы сызықты заң бойынша қозғалатын, бастапқы уақыт сәтінде азғындалатын облыста жылуөткізгіштік теңдеу үшін бір түйіндес есептің шешімін зерттеуге арналған. Қойылған есептің сандық әдіспен шешуге қолдануға болатын айқын шешімі алынған.

Кілт сөздер: жылуөткізгіш теңдеу, түйіндес есеп, қозғалмалы шекара, азғындалатын облыс, айқын шешім.

У.К. Койлышов, К.А. Бейсенбаева

Об одной задаче сопряжения для уравнения теплопроводности в области при движении границы по линейному закону

Краевые задачи для уравнений теплопроводности в областях с движущейся границей принципиально отличны от классических. Вследствие зависимости размера области от времени, к этому типу задач в общем случае не применимы методы разделения переменных и интегральных преобразований, так как, оставаясь в рамках классических методов математической физики, не удается согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границы области теплопереноса. Решение этой проблемы являлось предметом исследования многих отечественных и зарубежных математиков [1–8]. Большое число работ посвящены краевым задачам в невырождающихся областях, в них рассматривались вопросы существования классических решений методом тепловых потенциалов для уравнений параболического типа. Когда область вырождается в начальный момент времени, то метод последовательных приближений решения интегральных уравнений невозможно применить. Так как при вырождении области интегральные операторы становятся особыми, т.е. при их воздействии на постоянную и стремлении верхнего предела к нулю, они не стремятся к нулю. Интегральные уравнения такого рода были получены в работе [8], при изучении теплового поля жидких контактных мостиков, и найдено асимптотическое решение, которое можно использовать для решения практических задач. Данная работа посвящена исследованию одной задачи сопряжения для уравнения теплопроводности в области, вырождающейся в начальный момент времени, когда граница движется по линейному закону. Получен явный вид решения данной задачи, который впоследствии можно применять и для численного решения.

Ключевые слова: уравнения теплопроводности, задача сопряжения, подвижная граница, вырождающаяся область, явное решение.

References

1 Gevrey, M. (1913). Sur les equations aux derives partielles du type parabolique. *J. Math. Pures et Appl., 9, 4,* 305–471.

2 Petrovsky, I.G. (1935). Zur ersten Randwertaufgabe der Warmeleitungsgleichungen. *Compos. Math., 1, 3,* 383–419.

3 Kamynin, L.I. (1969). O reshenii IV i V kraevykh zadach dlia odnomernoho parabolicheckoho uravneniia vtoroho poriadka v krivolineinoi oblacti [About IV and V solutions a one-dimensional boundary value problems for second order parabolic equation in a curvilinear region]. *Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoi fiziki – Journal of Calculated Math. and Math. Physiks E., 9, 3,* 558–572 [in Russian].

4 Mikhailov, V.P. (1967). Teorema sushchestvovaniia i edinstvennosti resheniia odnoi zadachi dlia parabolicheskoho uravneniia v oblasti s osobymi tochkami na hranitse [The existence and uniqueness theorem for solving a single problem for a parabolic equation in a domain with singular points on the boundary]. *Trudy MIAN SSSR – Proceedings MIAN USSR, 91,* 47–58 [in Russian].

5 Kondratyev, V.A. (1966). Krayevye zadachi dlia parabolicheskikh uravnenii v zamknutykh oblastiakh [Boundary value problems for parabolic equations in closed domains]. *Trudy Moskovskoho matematicheskoho obshchestva – Works of the Moscow Mathematical Society, 15,* 400–451 [in Russian].

6 Kim, E.I., & Kavokin, A.A. (1977). Reshenie v malom zadachi s nelineinym hranichnym usloviem dlia uravneniia teploprovodnosti v rasshiriaiushcheisia oblasti [Solution in a small problem with a nonlinear boundary condition for the heat equation in an expanding domain]. *Izvestie AN KazSSR. Seriia fiziko-matematicheskaiia – News of the Kazakh SSR. Ser. phys.-math., 1,* 41–46 [in Russian].

7 Kim, E.I., & Koilyshov, U.K. (1984). Reshenie zadachi teorii teploprovodnotsti s razryvnym koeffitsientom i vyrozhdaiushchimisia podvizhnymi hranitsami [Solution of the of heat conduction with a discontinuous coefficient and degenerate moving boundaries]. *Izvestie AN KazSSR. Seriia fiziko-matematicheskaiia – News of the Kazakh SSR. Ser. phys.-math.,* 35–39 [in Russian].

8 Kharin, S.N. (1968). Teplovye protsessy v elektricheskikh kontaktakh i svyazannye s nimi sinhulyarnye intehralnye uravneniia [Thermal processes in electrical contacts and associated singular integral equations]. *Candidate's thesis.* Almaty [in Russian].

9 Miller, W.Jr. (1981). *Simmetriia i razdelenie peremennykh [Symmetry and Separation of variables].* (G.P. Babenko, Trans.) Moscow: Mir [in Russian].

10 Tikhonov, A.N., & Samarskii, A.A. (1977). *Uravneniia matematicheckoi fiziki [Equations of Mathematical Physics].* Moscow: Nauka [in Russian].

11 Szego, G. (1962). *Ortohonalnye mnohochleny [Orthogonal polynomials].* (V.S. Videnski, Trans.). Moscow [in Russian].

12 Suetin, P.K. (1979). *Klassicheskie ortohonalnye mnohochleny [Classical orthogonal polynomials].* Moscow: Nauka [in Russian].