УДК 510.67

Б.Ш.Кулпешов[1], А.Б.Алтаева[2]

[1]Международный университет информационных технологий;
[2]Институт информационных и вычислительных технологий, Алматы
(E-mail: b.kulpeshov@iitu.kz)

О почти бинарных слабо циклически минимальных структурах

В статье исследованы счетно-категоричные слабо циклически минимальные структуры, не являющиеся 1-транзитивными. Доказана теорема о свойствах счетно-категоричных не-1-транзитивных почти бинарных слабо циклически минимальных теорий ранга выпуклости 1.

Ключевые слова: циклически упорядоченная структура, слабая циклическая минимальность, счетная категоричность, ранг выпуклости.

Пусть $M = \langle M, =, <\rangle$ — линейный порядок. Если мы соединим два конца линейно упорядоченного множества M (возможно, это $-\infty$ и $+\infty$), то получим циклический порядок.

Более формально, *циклический порядок* описывается тернарным отношением K, которое удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{(co1)}\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (K(x, y, z) \to K(y, z, x));$$
$$\text{(co2)}\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (K(x, y, z) \wedge K(y, x, z) \Leftrightarrow x = y \vee y = z \vee z = x);$$
$$\text{(co3)}\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (K(x, y, z) \to \forall t\ [K(x, y, t) \vee K(t, y, z)]);$$
$$\text{(co4)}\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (K(x, y, z) \vee K(y, x, z)).$$

Следующая теорема связывает линейные и циклические порядки.

Теорема 1 ([1], теорема 11.9). Если $\langle M, \le\rangle$ — линейный порядок, K — тернарное отношение, получаемое из $\le$, по правилу $K(x, y, z): \Leftrightarrow (x \le y \le z) \vee (z \le x \le y) \vee (y \le z \le x)$, то K — отношение циклического порядка на M.

Обратно, если $\langle N, K\rangle$ — циклический порядок, $\alpha \in N$, то отношение $\le$, определяемое на $M := N \setminus \{\alpha\}$, по правилу $y \le z: \Leftrightarrow K(\alpha, y, z)$, является линейным порядком.

Более того, если мы расширим это отношение порядка на N по правилу $\beta < \alpha$ для всех $\beta \in M$, то получаемое отношение циклического порядка является исходным циклическим порядком K.

Обозначение 2.

(1) Пусть $M = \langle M, =, <, \ldots\rangle$ — линейно упорядоченная структура. Через $c(M)$ будем обозначать структуру $M^* = \langle M, =, K^3, \ldots\rangle$, в которой линейный порядок $<$ заменяется тернарным отношением K^3 следующим образом: для любых элементов $a, b, c \in M$ $K(a, b, c) \Leftrightarrow a \le b \le c \vee b \le c \le a \vee c \le a \le b$.

(2) $K_0(x, y, z) := K(x, y, z) \wedge y \ne x \wedge y \ne z \wedge x \ne z$.

(3) $K(u_1, \ldots, u_n)$ обозначает формулу, говорящую, что все подкортежи кортежа $\langle u_1, \ldots, u_n\rangle$ (в возрастающем порядке) удовлетворяют K; аналогичные обозначения и для K_0.

(4) Пусть A, B, C — попарно непересекающиеся выпуклые подмножества циклически упорядоченной структуры M. Будем писать $K(A, B, C)$, если для любых $a, b, c \in M$ всякий раз, когда $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, мы имеем $K(a, b, c)$. Мы расширяем данное обозначение естественным образом, например, употребляя следующую запись $K_0(A, b, C, D)$.

Пусть $I \subseteq M$, где M — циклически упорядоченная структура. Множество I называется *открытым интервалом*, если $I = \{c \in M: M \models K_0(a, c, b)\}$ для некоторых $a, b \in M$.

Если I — открытый интервал, то иногда мы будем писать $I = (a, b)$, если желаем указать концевые точки I. Аналогично мы можем определить *замкнутые, полуоткрытые-полузамкнутые* и т.п. *интервалы* в M. Под *интервалом* в M мы будем понимать любой из названных выше типов интервалов в M.

Следующее понятие было впервые введено Д. Макферсоном и Ч. Стейнхорном в [2]. Они описали циклически упорядоченные группы, которые являются циклически минимальными.

Определение 3 [2]. Циклически упорядоченная структура $M = \langle M, =, K^3, \ldots\rangle$ называется *циклически минимальной*, если любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M.

Пример 4. Пусть $G = \{z \in C \mid |z| = 1\}$, где C — множество комплексных чисел. Рассмотрим структуру $G = \langle G, =, *, K^3\rangle$, где $*$ — бинарная операция, являющаяся умножением на комплексных числах.

Очевидно, что $\langle G, *\rangle$ — группа. Нетрудно доказать, что G является циклически минимальной.

Пусть $A \subseteq M$, где M — циклически упорядоченная структура. Множество A называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ имеет место следующее: для любого $c \in M$ такого, что $K(a, c, b)$, мы имеем, что $c \in A$, или для любого $c \in M$ такого, что $K(b, c, a)$, мы имеем $c \in A$.

Очевидно, что как интервал, так и точка являются выпуклыми множествами.

По аналогии с линейным случаем было введено следующее понятие.

Определение 5 [3]. Циклически упорядоченная структура $M = \langle M, =, K^3, \ldots\rangle$ называется *слабо циклически минимальной*, если любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств.

Пример 6. Пусть $M = \langle c(\omega + \omega^* + Q + \omega + \omega^* + Q), K\rangle$, где ω — упорядочение натуральных чисел; ω^* — обратный порядок на натуральных числах и Q — упорядочение рациональных чисел. Тогда M является слабо циклически минимальной структурой. Обозначим первые элементы копий $\omega + \omega^*$ через a и c, а последние элементы — через b и d. Рассмотрим следующую формулу:

$$\varphi(x) := \forall y \, \forall z \, [K_0(y, x, z) \to \exists t_1 \, \exists t_2 \, (K_0(y, t_1, x) \wedge K_0(x, t_2, z))].$$

Тогда $\varphi(M) = \{x \in M \mid M \models K_0(b, x, c) \vee K_0(d, x, a)\}$, причем $\varphi(M)$ является множеством реализаций полного типа, но оно не является выпуклым; это невозможно в o-минимальных (или слабо o-минимальных) структурах.

Определение 7 [3]. Пусть M — циклически упорядоченная структура.

(i) Пусть $p \in S_1(\varnothing)$. Будем говорить, что p является *n-выпуклым*, если для любого элементарного расширения N структуры M $p(N)$ является непересекающимся объединением n максимальных выпуклых множеств (которые называются *выпуклыми компонентами* множества $p(N)$). Будем говорить, что p является *выпуклым*, если p является 1-выпуклым. В противном случае будем говорить, что p — *невыпуклый.*

(ii) Будем говорить, что M является *n-выпуклой*, если каждый тип $p \in S_1(\varnothing)$ является n-выпуклым, и мы говорим, что $Th(M)$ является *n-выпуклой*, если это имеет место для всех $N \equiv M$.

(iii) Пусть $\varphi(x)$ – $\varnothing$-определимая формула. Будем говорить, что $\varphi(x)$ является *выпуклой*, если $\varphi(M)$ выпукло. Будем говорить, что невыпуклая формула $\varphi(x)$ является *n-выпуклой* (где $n \geq 2$), если n — наименьшее число, такое, что $\varphi(M)$ является непересекающимся объединением n выпуклых подмножеств структуры M.

Ранее была доказана следующая теорема.

Теорема 8 [3]. Пусть M — слабо циклически минимальная структура. Тогда существует $n < \omega$ такой, что M – n-выпуклая.

В качестве следствия мы получаем, в частности, что если M — слабо циклическая минимальная структура и $p \in S_1(\varnothing)$, то $p(M)$ является объединением конечного числа выпуклых множеств.

Напомним, что циклически упорядоченная структура M является k*-транзитивной*, если для любых различных $a_1, a_2, ..., a_k \in M$ и различных $b_1, b_2, ..., b_k \in M$ существует $g \in Aut(M)$ такой, что $g(a_1) = b_1, g(a_2) = b_2, ..., g(a_k) = b_k$. В [3–5] были исследованы счетно-категоричные 1-транзитивные слабо циклически минимальные структуры и получено их описание с точностью до бинарности. Здесь мы исследуем счетно-категоричные слабо циклически минимальные структуры, не являющиеся 1-транзитивными. Также вспомним, что полная теория T является *бинарной*, если любая формула эквивалентна булевой комбинации формул, самое большее от двух свободных переменных. В [6] были описаны счетно-категоричные слабо o-минимальные бинарные теории ранга выпуклости 1, а в [7] установлена бинарность счетно-категоричных слабо o-минимальных теорий ранга выпуклости 1. Также отметим, что в [8] был получен критерий бинарности счетно-категоричных слабо o-минимальных теорий.

Заметим, что не существует бинарной слабо циклически минимальной структуры, поскольку циклический порядок определяется тернарным отношением. Будем говорить, что слабо циклически минимальная теория T является *почти бинарной*, если любая формула эквивалентна булевой комбинации формул, самое большее от двух свободных переменных, и формулы $K(x, y, z)$, выражающей отношение циклического порядка.

В [9] были исследованы свойства бинарных формул в слабо o-минимальных структурах. И наконец, в [10] доказана теорема, описывающая поведение бинарных формул, действующих во множестве реализаций неалгебраического 1-типа (так называемых p-стабильных выпуклых вправо формул). В настоящей работе мы даем полное описание счетно-категоричных не-1-транзитивных n-выпуклых почти бинарных слабо циклически минимальных теорий ранга выпуклости 1.

Сечением в циклически упорядоченной структуре M называется максимальное непротиворечивое множество формул над M вида $K(a, x, b)$, где $a, b \in M$. Будем говорить, что сечение является *алгебраическим*, если существует $c \in M$, реализующий это сечение. В противном случае такое сечение называется *неалгебраическим*. Пусть $C(x)$ — неалгебраическое сечение. Если существует некоторый $a \in M$, такой, что либо для любого $b \in M$ $K(a, x, b) \in C(x)$, либо для любого $b \in M$ $K(b, x, a) \in C(x)$, тогда сечение $C(x)$ называется *рациональным*. В противном случае такое сечение называется *иррациональным*. *Определимое сечение* в M есть сечение $C(x)$ со следующим свойством: существуют $a, b \in M$, такие, что $K(a, x, b) \in C(x)$ и $\{y \in M : K(a, y, b)$ и $K(a, x, y) \in C(x)\}$ является определимым. *Определимое пополнение* $\overline{M}$ структуры M состоит из M вместе со всеми определимыми сечениями структуры M, которые являются иррациональными. Существует естественный способ расширить циклический порядок K на $\overline{M}$, который мы не даем явно. Заметим, что $\overline{M}$ является существенно объединением некоторых сортов структуры M^{eq}. Мы будем рассматривать определимые (строго говоря, *интерпретируемые*) частичные функции $M \to \overline{M}$.

Пусть f — унарная функция в $\overline{M}$, с областью определения $Dom(f) = I \subseteq M$, где I — открытое выпуклое множество. Мы говорим, что f является *монотонной функцией вправо (влево)* на I, если она сохраняет (обращает) отношение K_0, т.е. для любых $a, b, c \in I$, таких, что $K_0(a, b, c)$, мы имеем $K_0(f(a), f(b), f(c))$ ($K_0(f(c), f(b), f(a))$.

Пусть $p \in S_1(\varnothing)$ и $F(x, y)$ – $\varnothing$-определимая формула, такая, что для каждого $b \in p(M)$ $F(M, b)$ — выпуклое бесконечное кобесконечное множество, $F(M, b) \subset p(M)$. Пусть $F^l(y)$ — формула, говорящая, что y является левой концевой точкой множества $F(M, y)$:

$$\exists z_1 \exists z_2 [K_0(z_1, y, z_2) \wedge \forall t_1(K(z_1, t_1, y) \wedge t_1 \neq y \to \neg F(t_1, y)) \wedge$$
$$\wedge \forall t_2 (K(y, t_2, z_2) \wedge t_2 \neq y \to F(t_2, y))].$$

Мы говорим, что $F(x, y)$ является p-стабильной выпуклой вправо, если для любого элемента $b \in p(\mathrm{M})$ $M \models \forall x [F(x, b) \to F^l(b) \wedge \forall z (K(b, z, x) \to F(z, b))]$.

Пусть $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ — произвольные выпуклые вправо формулы. Будем говорить, что F_2 больше, чем F_1, если существует $a \in p(M)$, такой, что $F_1(M, a) \subset F_2(M, a)$. Это дает тотальное упорядочение на (конечном) множестве всех p-стабильных выпуклых вправо формул $F(x, y)$, рассматриваемых по модулю эквивалентности $\mathrm{Th}(M)$. Будем писать $f(y) :=$ rend $F(M, y)$, подразумевая, что $f(y)$

является правой концевой точкой множества $F(M, y)$, которая лежит в определимом пополнении $\bar{M}$ структуры M. Тогда f является функцией, которая отображает $p(M)$ в $\bar{M}$.

Лемма 9. Пусть M — счетно-категоричная слабо циклически минимальная структура, $p \in S_1(\varnothing)$ — неалгебраический, $f: M \to \bar{M}$ – $\varnothing$-определимая функция, область определения которой содержит $p(M)$. Предположим, что функция f является локально монотонной (не строго монотонной) или локально константой (не константой) на $p(M)$. Тогда существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E_f(x, y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Доказательство леммы 9. Не умаляя общности, предположим, что f — локально монотонная функция вправо на $p(M)$. В силу счетной категоричности M существует $\varnothing$-определимая формула $U^p(x)$, такая, что $p(M) = U^p(M)$. Тогда

$$E_f(x,y) := [\forall t(K(x,t,y) \to U^p(t)) \to \forall u(K_0(x,u,y) \to K_0(f(x), f(u), f(y))] \wedge$$
$$\wedge[\forall t(K(y,t,x) \to U^p(t)) \to \forall u(K_0(y,u,x) \to K_0(f(y), f(u), f(x))].$$

Следствие 10 [9]. Пусть M — счетно-категоричная не 1-транзитивная слабо циклически минимальная структура ранга выпуклости 1, $p \in S_1(\varnothing)$ — неалгебраический. Тогда не существует p-стабильной выпуклой вправо формулы.

Следующая теорема полностью описывает счетно-категоричные слабо циклически минимальные n-выпуклые почти бинарные теории ранга выпуклости 1, не являющиеся 1-транзитивными $(n \in \omega,\ n > 1)$.

Теорема 11. Пусть T — счетно-категоричная слабо циклически минимальная n-выпуклая почти бинарная теория ранга выпуклости 1, $M \models T, |M| = \aleph_0$. Тогда имеет место следующее:

(1) $C := acl(\varnothing)$ конечно. При этом если $C \neq \varnothing$, то существует число k, кратное n, и такое, что $C = \{c_0, c_1, ..., c_{k-1}\}$, $K_0(c_0, c_1, ..., c_{k-1})$ и для каждого $0 \le j \le \frac{k}{n} - 1$ элементы $c_j, c_{j+k/n}, c_{j+2k/n}, ..., c_{j+k(n-1)/n}$ удовлетворяют одному и тому же типу над $\varnothing$, для каждого $1 \le j \le k$ либо $M \models \neg\exists x K_0(c_{j-1}, x, c_j)$, либо $I_j = \{x \in M : M \models K_0(c_{j-1}, x, c_j)\}$ является плотно упорядоченным множеством без концевых точек.

(2) Существует $m \ge 1$ неалгебраических 1-типов над $\varnothing$ $p_1, p_2, ..., p_m$, так что $p_i(M) = \bigcup_{t=1}^{n} U_{p_i}^t$, где $U_{p_i}^t$ выпукло для каждого $1 \le t \le n$, и $K_0(U_1^{p_1}, ..., U_1^{p_m}, U_2^{p_1}, ..., U_2^{p_m}, ..., U_n^{p_1}, ..., U_n^{p_m})$. При этом для любых $1 \le i, j \le n$, $s < \omega$ и $\langle a_1, ..., a_s \rangle \in \left[\bigcup_{t=1}^{m} U_i^{p_t}\right]^s$ существует $\langle b_1, ..., b_s \rangle \in \left[\bigcup_{t=1}^{m} U_j^{p_t}\right]^s$ такой, что $tp(\langle a_1, ..., a_s \rangle / \varnothing) = tp(\langle b_1, ..., b_s \rangle / \varnothing)$, т.е. существует автоморфизм структуры M, переводящий $\bigcup_{t=1}^{m} U_i^{p_t}$ в $\bigcup_{t=1}^{m} U_j^{p_t}$.

(3) Существуют отношения эквивалентности $E_1, E_2 \subseteq (\{s : 1 \le s \le mn\})^2$, где $\{U_s \mid s \le mn\}$ — произвольное перечисление выпуклых компонентов неалгебраических 1-типов над $\varnothing$ с условием $K_0(U_1, U_2, ..., U_s)$, такие, что:

- для каждого $(i, j) \in E_1$ существует единственная $\varnothing$-определимая монотонная вправо (или влево) биекция $f_{i,j} : U_i \to U_j$, так что $f_{i,i} = id_{U_i}$ и $f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$ для всех $(i, j), (j, k) \in E_1$, причем для некоторого $l \le n$ $f_{i,j}^l(a) = a$ для всех $a \in U_i$;
- для каждого $(i, j) \in E_2$ существует единственная $\varnothing$-определимая формула $R_{i,j}(x, y)$, такая, что для любого $a \in U_i$ $R_{i,j}(a, M) \subset U_j$, $lend\, R_{i,j}(a, M) = lend\, U_j$, $R_{i,j}(a, M)$ выпукло и открыто и $g_{i,j}(x) := rend\ R_{i,j}(x, M)$ является монотонной вправо (или влево) на U_i;

- для каждого $(i,j)\in E_1$ мы имеем $(i,j)\in E_2$ и

$$R_{i,j}(x,y)\equiv U_{p_i}(x)\wedge U_{p_j}(y)\wedge K_0(x,y,f_{i,j}(x))\wedge y\neq f_{i,j}(x),$$

где $U_i\subset U^{p_l}(M), U_j\subset U^{p_r}(M)$ для некоторых $l,k\le m,$ так что T допускает элиминацию кванторов до языка

$$\{=,K^3\}\cup\{c_i : i\le k-1\}\cup\{U_{p_j}(x):\ j\le m\}\cup\{f_{i,j}:(i,j)\in E_1\}\cup;$$
$$\cup\{R_{i,j}(x,y):(i,j)\in E_2\setminus E_1\},$$

где $U_{p_j}(x)$ изолирует тип p_j для каждого $j\le m.$

Более того, любому циклическому упорядочению с выделенными элементами, как в (1)–(2), и любыми подходящими отношениями эквивалентности E_1,E_2, как в (3), соответствует счетно-категоричная слабо циклически минимальная n-выпуклая почти бинарная теория ранга выпуклости 1, как выше.

Доказательство теоремы 11.

1. В силу счетной категоричности теории T множество C конечно. Если $C\neq\varnothing,$ то существует $a\in M,$ лежащий в алгебраическом замыкании пустого множества. Следовательно, существует алгебраический тип $p\in S_1(\varnothing)$ такой, что $a\models p.$ Так как M n-выпуклая, то $p(M)$ состоит в точности из n элементов. Поэтому множество C состоит из конечного числа элементов, причем это число кратно числу $n.$ Обозначим его через $k.$ Пусть C перечислено следующим образом: $C=\{c_0,c_1,...,c_{k-1}\},$ причем $K_0(c_0,c_1,...,c_{k-1}).$ Тогда для каждого $0\le j\le\frac{k}{2}-1$ элементы $c_j,\, c_{j+k/n},\, c_{j+2k/n},...,\ c_{j+k(n-1)/n}$ удовлетворяют одному и тому же типу над пустым множеством. Если для некоторого $j:1\le j\le k$ c_{j+1} является непосредственным последователем элемента $c_j,$ то $M\models\neg\exists xK_0(c_{j-1},x,c_j).$ Если же c_{j+1} не является непосредственным последователем элемента $c_j,$ то поймем, что $I_j=\{x\in M : M\models K_0(c_{j-1},x,c_j)\}$ является плотно упорядоченным множеством без концевых точек. Действительно, если бы во множестве I_j существовали дискретно упорядоченные элементы (т.е. у некоторого элемента существовал бы непосредственный последователь или непосредственный предшественник), то в силу слабой циклической минимальности существовало бы конечное число выпуклых множеств, состоящих из таких элементов. Если бы одно из этих выпуклых множеств являлось бесконечным, то определимое замыкание любого элемента из этого множества являлось бы бесконечным, противореча счетной категоричности $T.$ Поэтому каждое из этих выпуклых множеств должно быть конечно, но тогда все элементы этих выпуклых множеств лежат в алгебраическом замыкании пустого множества, противореча тому, что между c_j и c_{j+1} нет элементов из $C.$

2. В силу счетной категоричности T существует конечное число полных 1-типов над пустым множеством. Поэтому неалгебраических 1-типов над $\varnothing$ так же конечное число, а так как множество реализаций всех алгебраических 1-типов над $\varnothing$ является конечным, то обязательно должен существовать хотя бы один неалгебраический 1-тип над пустым множеством. В силу n-выпуклости теории множество реализаций каждого неалгебраического 1-типа над $\varnothing$ должно состоять из n выпуклых компонент, являющихся бесконечными и плотно упорядоченными. Остальное следует из симметричного строения n-выпуклых структур. Допустим противное: для некоторых $i,j\le n$ не существует автоморфизма структуры $M,$ переводящего $\bigcup_{t=1}^{m}U_i^{p_t}$ в $\bigcup_{t=1}^{m}U_j^{p_t}.$ Следовательно, существуют $s<\omega$ и $\langle a_1,...,a_s\rangle\in\left[\bigcup_{t=1}^{m}U_i^{p_t}\right]^s,$ такие, что для любого $\langle b_1,...,b_s\rangle\in\left[\bigcup_{t=1}^{m}U_j^{p_t}\right]^s$ $tp(\langle a_1,...,a_s\rangle/\varnothing)\neq tp(\langle b_1,...,b_s\rangle/\varnothing),$ откуда существует $\varnothing$-определимая формула $\varphi(x_1,...,x_s)$ такая, что $M\models\varphi(a_1,...,a_s)\wedge\neg\varphi(b_1,...,b_s).$ Не умаляя общности, предположим, что для некоторого $t'\le m$ подкортеж $\langle a_1,...,a_{s'}\rangle\in\left[U_i^{p_{t'}}\right]^{s'}.$ Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$\varphi'(x_1,...,x_{s'}) := \exists y_{s'+1},...,\exists y_s \varphi(x_1,...,x_{s'},y_{s'+1},...,y_s).$$

Очевидно, что $M \models \varphi'(a_1,...,a_{s'}) \wedge \neg\varphi'(b_1,...,b_{s'})$. Но тогда выпуклые компоненты $U_i^{p_{t'}}$ и $U_j^{p_{t'}}$ отделимы $\varnothing$-определимой формулой, противореча n-выпуклости типа $p_{t'}$.

3. Рассмотрим две произвольные выпуклые компоненты U_i и U_j. Если существует $a \in U_i$, такой, что $dcl(\{a\}) \cap U_j \neq \varnothing$, то существует $\varnothing$-определимая биекция U_i на U_j. Поймем, что такая биекция единственна. Допустим противное: существуют $\varnothing$-определимые биекции f и g, отображающие U_i на U_j, причем $f \neq g$. Поскольку $f \neq g$, то существует элемент $a \in U_i$, такой, что $f(a) \neq g(a)$. Пусть для определенности $f(a) = b_1$, $g(a) = b_2$ для некоторых $b_1, b_2 \in U_j$. Тогда $b_1, b_2 \in dcl(\{a\}) \setminus dcl(\varnothing)$, откуда по лемме о замене для алгебраического замыкания получаем, что $b_2 \in dcl(\{b_1\})$. Отсюда мы можем доказать, что $dcl(\{b_1\})$ бесконечно, противореча счетной категоричности T. Монотонность вправо (или влево) такой биекции обеспечивается тем, что теория имеет ранг выпуклости 1. Если $i = j$, то это будет тождественная биекция (иначе по ранее доказанному получим, что определимое замыкание элемента из U_i является бесконечным).

Очевидно, что если существуют биекции $f_{i,j} : U_i \to U_j$ и $f_{j,k} : U_j \to U_k$, то $f_{i,k} = f_{j,k} \circ f_{i,j}$ является биекцией U_i на U_k, поэтому E_1 является требуемым отношением эквивалентности.

Предположим теперь, что для любого $a \in U_i$ $dcl(\{a\}) \cap U_j = \varnothing$ и существует $\varnothing$-определимая формула $F(x,y)$ такая, что существуют $a \in U_i$, $b_1, b_2 \in U_j$ и $M \models F(a,b_1) \wedge \neg F(a,b_2)$. Тогда нетрудно построить формулу $R_{i,j}(x,y)$ такую, что для любого $a \in U_i$ $R_{i,j}(a,M) \subset U_j$, $lend\, R_{i,j}(a,M) = lend\, U_j$, $R_{i,j}(a,M)$ выпукло и открыто. Функция $g_{i,j}(x) := rend\ R_{i,j}(x,M)$ является строго монотонной (монотонной вправо или влево) на U_i в силу леммы 9. Поймем, что такая формула $R_{i,j}(x,y)$ единственна. Допустим противное: существуют $\varnothing$-определимые формулы $R_{i,j}(x,y)$ и $R'_{i,j}(x,y)$ с требуемыми свойствами, и пусть для определенности для некоторого $a \in U_i$ $R_{i,j}(a,M) \subset R'_{i,j}(a,M)$. Следовательно, существуют $b, b' \in U_j$ такие, что $M \models K_0(a,b,b') \wedge R_{i,j}(a,b) \wedge \neg R'_{i,j}(a,b) \wedge R'_{i,j}(a,b')$. Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$\Phi(x,b') := U^{p_r}(x) \wedge \exists t \exists z [U^{p_l}(t) \wedge \neg R'(t,b') \wedge R(t,z) \wedge K(b',x,z)],$$

где $U_i \subset U^{P_l}(M), U_j \subset U^{p_r}(M)$ для некоторых $l,k \leq m.$

Нетрудно понять, что $\Phi(x,y)$ – p_r-стабильная выпуклая вправо формула противореча следствию 10.

Докажем теперь, что E_2 является отношением эквивалентности. Возьмем произвольный $i < \omega$ с условием $1 \leq i \leq s$. Тогда существует $l \leq m$ такой, что $U_i \subset U^{P_l}(M)$. Рассмотрим следующую формулу:

$$R_{i,i}(x,y) := U^{p_l}(x) \wedge U^{p_l}(y) \wedge \forall t [K(y,t,x) \to U^{p_l}(t)] \wedge y \neq x.$$

Тогда для любого $a \in U_i$ $R_{i,i}(a,M) \subset U_i$, $lend\, R_{i,i}(a,M) = lend\, U_i$, $R_{i,i}(a,M)$ выпукло и открыто и $g_{i,i}(x) := rend\ R_{i,i}(x,M)$ является монотонной вправо на U_i, т.е. $(i,i) \in E_2$.

Пусть $(i,j) \in E_2$ (где $U_i \subset U^{P_l}(M), U_j \subset U^{p_r}(M)$ для некоторых $l,r \leq m$) и $R_{i,j}(x,y)$ – $\varnothing$-определимая формула с требуемыми свойствами. Если функция $g_{i,j}(x) := rend\ R_{i,j}(x,M)$ является монотонной вправо на U_i, тогда

$$R_{j,i}(x,y) \equiv U^{p_r}(x) \wedge U^{p_l}(y) \wedge \neg R_{i,j}(y,x).$$

Если функция $g_{i,j}(x) := rend\ R_{i,j}(x,M)$ является монотонной влево на U_i, тогда

$$R_{j,i}(x,y) \equiv U^{p_r}(x) \wedge U^{p_l}(y) \wedge R_{i,j}(y,x).$$

Следовательно, $(j,i) \in E_2$.

Предположим теперь, что $(i,j),(j,k)\in E_2$, где $U_i\subset U^{p_l}(M), U_j\subset U^{p_r}(M)$ и $U_k\subset U^{p_t}(M)$ для некоторых $l,r,t\le m.$ Тогда существуют $\varnothing$-определимые формулы $R_{i,j}(x,y)$ и $R_{j,k}(x,y)$ с требуемыми свойствами. Если функция $g_{j,k}$ является монотонной вправо на U_j, то

$$R_{i,k}(x,y)\equiv U^{p_l}(x)\wedge U^{p_r}(y)\wedge \exists z[U^{p_t}(z)\wedge R_{i,j}(x,z)\wedge R_{j,k}(z,y)]$$

и функции $g_{i,k}$ и $g_{i,j}$ являются одновременно монотонными вправо или влево на U_i. Если же функция $g_{j,k}$ является монотонной влево на U_j, то

$$R_{i,k}(x,y)\equiv U^{p_l}(x)\wedge U^{p_r}(y)\wedge \exists z[U^{p_t}(z)\wedge \neg R_{i,j}(x,z)\wedge R_{j,k}(z,y)]$$

и функция $g_{i,k}$ — монотонная влево (вправо) на U_i тогда и только тогда, когда функция $g_{i,j}$ монотонная вправо (влево) на U_i. Таким образом, $(i,k)\in E_2$ и E_2 является требуемым отношением эквивалентности.

Остается только проверить, что T допускает утверждаемую элиминацию кванторов. Мы докажем, что полный тип любого l-кортежа $\langle a_1,\ldots,a_l\rangle$ элементов из M определяется формулой Ψ, состоящей из конъюнкции всех предложений и отрицательных предложений формул вида $x=y$, $K(x,y,z)$, $U^{p_r}(x)$, $y=f_{i,j}(x)$, $R_{i,j}(x,y)$, которые имеют место на координатах кортежа $\langle a_1,\ldots,a_l\rangle$.

Случай $l=1$. Очевидно.

Случай $l=2$. Возможны следующие подслучаи:

Случай 2a. $a_1,a_2\in C$. Тогда формула $\Psi(x,y):=x=a_1\wedge x=a_2$ определяет тип кортежа $\langle a_1,a_2\rangle$.

Случай 2b. $a_1\in C, a_2\in U_i$ для некоторого $i\le s$. Тогда существует $l\le m$, такой, что $U_i\subset U^{p_l}(M)$ и, следовательно, формула $\Psi(x,y):=x=a_1\wedge U^{p_l}(y)$ определяет тип кортежа $\langle a_1,a_2\rangle$.

Случай 2c. $a_1,a_2\in p_j(M)$ для некоторого $j\le m$. Поскольку $p_j(M)=\bigcup_{t=1}^{n}U_t^{p_j}$, то возможны $\left\lfloor \frac{n}{2}+1\right\rfloor$ случаев расположения этих точек во множестве реализаций типа p_j (здесь $\lfloor x\rfloor$ означает наибольшее целое число, не превосходящее x):

(1) a_1,a_2 лежат в одной и той же выпуклой компоненте типа p_j.

(2) a_1,a_2 лежат в разных выпуклых компонентах типа p_j и между этими компонентами (слева направо) не существует другой выпуклой компоненты типа p_j.

$\left(\left\lfloor \frac{n}{2}+1\right\rfloor\right)$ a_1,a_2 лежат в разных выпуклых компонентах типа p_j и между этими компонентами (слева направо) существует ровно $\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$ других выпуклых компонент типа p_j.

Каждый из этих случаев расположения точек описывается $\varnothing$-определимой формулой: например, (1) описывается формулой $\varphi_0(x,y):=\forall u[K(x,u,y)\to U^{p_j}(u)]$, а (2) описывается с помощью следующей формулы:

$$\varphi_1(x,y):=\exists u_1(K(x,u_1,y)\wedge\neg U^{p_j}(u_1))\wedge\forall u[K(x,u,u_1)\wedge U^{p_j}(u)\to\forall t(K(x,t,u)\to U^{p_j}(t))]\wedge$$
$$\wedge\forall u'[K(u_1,u',y)\wedge U^{p_j}(u')\to\forall t'(K(u',t',y)\to U^{p_j}(t'))]).$$

Если выполняется (1), тогда утверждаем, что формула $\Psi(x,y):=U^{p_j}(x)\wedge U^{p_j}(y)\wedge\varphi_0(x,y)$ определяет тип кортежа $\langle a_1,a_2\rangle$. Если это не так, тогда нетрудно построить p_j-стабильную выпуклую вправо формулу, противореча следствию 10.

Предположим теперь, что выполняется (2). Тогда $a_1\in U_{i_1}^{p_j}$ и $a_2\in U_{i_2}^{p_j}$ для некоторых $i_1,i_2\le n.$ Возможны следующие подслучаи:

(A) Существует $\varnothing$-определимая строго монотонная биекция $f:U_{i_1}^{p_j}\to U_{i_2}^{p_j}$.

(B) $\neg(A)$ и существует $\varnothing$-определимая формула $R(x,y)$, такая, что для каждого $a \in U_{i_1}^{p_j}$ $R(a,M) \subset U_{i_2}^{p_j}$, $lend\, R(a,M) = lend\, U_{i_2}^{p_j}$, $R(a,M)$ выпукло и открыто и $g(x) := rend\ R(x,M)$ является строго монотонной на $U_{i_1}^{p_j}$.

$$(C)\ \neg(A) \text{ и } \neg(B).$$

Предположим, что выполняется (A). Тогда либо $f(a_1) = a_2$, либо $K_0(a_1, f(a_1), a_2)$, либо $K_0(a_1, a_2, f(a_1))$. Если $f(a_1) = a_2$, тогда следующая формула:

$$\Psi(x,y) := U^{p_j}(x) \wedge U^{p_j}(y) \wedge \varphi_1(x,y) \wedge f(x) = y$$

определяет тип кортежа $\langle a_1, a_2 \rangle$. Если $K_0(a_1, f(a_1), a_2)$, тогда формула

$$\Psi(x,y) := U^{p_j}(x) \wedge U^{p_j}(y) \wedge \varphi_1(x,y) \wedge K_0(x, f(x), y)$$

определяет тип кортежа $\langle a_1, a_2 \rangle$. Если это не так, тогда существует $a_2' \in U_{i_2}^{p_j}$ такой, что $\Psi(a_1, a_2')$ и существует $\varnothing$-определимая формула $\theta(x,y)$ такая, что $M \models \theta(a_1,a_2) \wedge \neg\theta(a_1,a_2')$. Пусть для определенности $K_0(a_1,a_2,a_2')$. В силу слабой циклической минимальности $\theta(a_1,M)$ есть объединение конечного числа выпуклых множеств. Пусть тогда $\theta'(a_1,M)$ – $\{a_1\}$-определимое выпуклое множество, содержащее a_2. Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$\Phi(x,a) := U^{p_j}(x) \wedge \exists t \exists z [f(t) = a \wedge \theta'(t,z) \wedge K(a,x,z)],$$

где $a = f(a_1)$. Нетрудно понять, что $\Phi(x,y)$ – p_j-стабильная выпуклая вправо формула, противореча следствию 10.

Предположим теперь, что выполняется (B). Тогда либо $R(a_1,a_2)$, либо $\neg R(a_1,a_2)$. Не умаляя общности, предположим первое. Тогда формула

$$\Psi(x,y) := U^{p_j}(x) \wedge U^{p_j}(y) \wedge \varphi_1(x,y) \wedge R(x,y)$$

определяет тип кортежа $\langle a_1, a_2 \rangle$. Если это не так, тогда существует $a_2' \in U_{i_2}^{p_j}$ такой, что $\Psi(a_1, a_2')$ и существует $\varnothing$-определимая формула $R'(x,y)$ такая, что $M \models R'(a_1,a_2) \wedge \neg R'(a_1,a_2')$ и $R'(a_1,M)$ выпукло. Пусть для определенности $K_0(a_1,a_2,a_2')$. В силу леммы 9 функция $f'(x) := rend\ R'(x,M)$ является строго монотонной на $p_j(M)$. Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$\Phi(x,a_2') := U^{p_j}(x) \wedge \exists t \exists z [\neg R'(t,a_2') \wedge R(t,z) \wedge K(a_2',x,z)].$$

Нетрудно понять, что $\Phi(x,y)$ – p_j-стабильная выпуклая вправо формула противореча следствию 10.

Если выполняется (C), тогда формула $\Psi(x,y) := U^{p_j}(x) \wedge U^{p_j}(y) \wedge \varphi_1(x,y)$ определяет тип кортежа $\langle a_1, a_2 \rangle$. Если это не так, тогда появится $\varnothing$-определимая формула $R(x,y)$, как в (B), противореча нашему предположению.

Аналогично рассматриваются остальные случаи расположения точек a_1 и a_2 относительно выпуклых компонент типа p_j.

Случай 2*d*. $a_1 \in p_l(M), a_2 \in p_r(M)$ для некоторых $l, r \le m$, причем $l \ne r$. Данный случай рассматривается с некоторыми незначительными вариациями аналогично случаю 2с. Таким образом, случай $l = 2$ рассмотрен полностью.

Общий случай. Согласно случаю $l = 2$ для любой пары $\langle a_i, a_j \rangle$ элементов кортежа $\langle a_1, ..., a_l \rangle$ существует $\varnothing$-определимая формула $\Psi_{i,j}(x,y)$, определяющая полный тип кортежа $\langle a_i, a_j \rangle$. В силу почти бинарности теории T формула $\Psi(x_1,...,x_l) := \wedge_{1 \le i,j \le l} \Psi_{i,j}(x_i,x_j)$ определяет полный тип кортежа $\langle a_1, ..., a_l \rangle$. Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке КН МОН РК № 0708/ГФ3 по теме «Теоретико-модельные свойства циклически упорядоченных структур» в рамках приоритета «Интеллектуальный потенциал страны» (подприоритет «Фундаментальные исследования в области естественных наук»).

Список литературы

1 *Bhattacharjee M., Macpherson H.D., Moller R.G., Neumann P.M.* Notes on Infinite Permutation Groups. — Lecture Notes in Mathematics 1698, Springer. — 1998. — 202 p.

2 *Macpherson H.D., Steinhorn Ch.* On variants of o-minimality // Annals of Pure and Applied Logic. — 1996. — No. 2 (79). — P. 165–209.

3 *Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D.* Minimality conditions on circularly ordered structures // Mathematical Logic Quarterly. — 2005. — No. 4 (51). — P. 377–399.

4 *Kulpeshov B.Sh.* On ℵ0-categorical weakly circularly minimal structures // Mathematical Logic Quarterly. — 2006. — No. 6 (52). — P. 555–574.

5 *Кулпешов Б.Ш.* Определимые функции в ℵ0-категоричных слабо циклически минимальных структурах // Сибирский математический журнал. — 2009. — № 2 (50). — С. 356–379.

6 *Кулпешов Б.Ш.* О бинарности ℵ0-категоричных слабо о-минимальных теорий // Алгебра и логика. — 2005. — № 4 (44). — С. 459–473.

7 *Кулпешов Б.Ш.* Бинарность ℵ0-категоричных слабо о-минимальных теорий ранга выпуклости 1 // Сибирские электронные математические известия. — 2006. — Т. 3. — С. 185–196.

8 *Kulpeshov B.Sh.* Criterion for binarity of ℵ0-categorical weakly o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic. — 2007. — No. 2 (45). — P. 354–367.

9 *Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh.* On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories, Mathematical Logic in Asia: Proceedings of the 9th Asian Logic Conference. — Singapore: World Scientific. — 2006. — P. 31–40.

10 *Алтаева А.Б., Кулпешов Б.Ш.* Эквивалентность-генерирующие формулы в слабо циклически минимальных структурах // Докл. НАН РК. — 2014. — № 2. — С. 5–10.

Б.Ш.Кұлпешов, А.Б.Алтаева

Бинарлық дерлік босаң циклдік минималдық құрылымдар туралы

Мақалада 1-транзитивтік емес есептік-категориялық босаң циклдік минималдық құрылымдар зерттелді. Дөңестік рангісі 1 есептік-категориялық бинарлық дерлік босаң циклдік минималдық теориялардың қасиеттері туралы теоремасы дәлелденді.

B.Sh.Kulpeshov, A.B.Altaeva

On almost binary weakly circularly minimal structures

Here countably categorical weakly circularly minimal structures being non-1-transitive are studied. A theorem on properties of countably categorical non-1-transitive almost binary weakly circularly minimal theories of convexity rank 1 has been proved.

References

1 Bhattacharjee M., Macpherson H.D., Moller R.G., Neumann P.M. *Notes on Infinite Permutation Groups*, Lecture Notes in Mathematics 1698, Springer, 1998, 202 p.

2 Macpherson H.D., Steinhorn Ch. *Annals of Pure and Applied Logic*, 1996, 2 (79), p. 165–209.

3 Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. *Mathematical Logic Quarterly*, 2005, 4 (51), p. 377–399.

4 Kulpeshov B.Sh. *Mathematical Logic Quarterly*, 2006, 6 (52), p. 555–574.

5 Kulpeshov B.Sh. *Siberian Mathematical Journal*, 2009, 2 (50), p. 356–379.

6 Kulpeshov B.Sh. *Algebra and Logic*, 2005, 4 (44), p. 459–473.

7 Kulpeshov B.Sh. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2006, 3, p. 185–196.

8 Kulpeshov B.Sh. *Annals of Pure and Applied Logic*, 2007, 2 (45), p. 354–367.

9 Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. *On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories, Mathematical Logic in Asia*: Proceedings of the 9th Asian Logic Conference, Singapore: World Scientific, 2006, p. 31–40.

10 Altayeva A.B., Kulpeshov B.Sh. *Reports of National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan*, 2014, 2, p. 5–10.