

А.Н. Мырзашева, Г.К. Шамбилова, Н.К. Шаждекеева, В.Е. Махатова

*Атырауский государственный университет им. Х.Досмухамедова, Казахстан  
(E-mail: shambilova\_gulba@mail.ru)*

## Математическое моделирование и численное исследование зависимости термонапряженного состояния стержня от коэффициента теплообмена при наличии температуры постоянной интенсивности

В статье на основе энергетических принципов разработана математическая модель термонапряженно-деформированного состояния стержня из жаропрочного сплава. Энергетический принцип ориентирован на минимизацию потенциальной энергии упругих деформаций с применением метода квадратичного конечного элемента с тремя узлами. Стержень ограниченной длины и жестко зашпелен с обоих концов. Боковая поверхность участков  $(0 \leq x \leq L/3)$  и  $(2L/3 \leq x \leq L)$  стержня теплоизолированная. Через площадь поперечных сечений обоих концов данного стержня происходит теплообмен с окружающими их средами. На серединном участке стержня  $(L/3 \leq x \leq 2L/3)$  дана температура постоянной интенсивности  $T = \text{const} = 800^\circ\text{C}$ . Исследовано влияние коэффициента теплообмена на термонапряженное состояние стержня из жаропрочного сплава АНВ-300 при наличии температуры постоянной интенсивности, и приведены численные результаты исследования. Исследования проведены при разных значениях коэффициента теплообмена. В результате установлено, что при увеличении значения  $h_0$  — коэффициента теплообмена возрастает амплитуда перемещений против направления оси  $Ox$ ; координата сечения, амплитуда перемещения которого будет наибольшей, увеличивается; амплитуда перемещения по направлению оси  $Ox$  уменьшается; максимальное и среднее значения термоупругого напряжения  $\sigma$  уменьшаются.

*Ключевые слова:* метод конечных элементов, температура, теплоизоляция, теплообмен, коэффициент теплообмена, потенциальная энергия упругих деформаций, математическая модель.

Рассмотрим стержень ограниченной длины  $L$  (см), изготовленный из жаропрочного сплава АНВ-300. Площадь поперечного сечения стержня  $F$  (см<sup>2</sup>) постоянна по всей его длине. Коэффициент теплового расширения материала стержня  $\alpha(T)$  (1/°C) зависит от поля распределения температуры. Коэффициент теплопроводности материала стержня —  $K_{xx}$  (Вт/(см·°C)), модуль упругости —  $E$  (кГ/см<sup>2</sup>). Оба конца рассматриваемого стержня жестко зашпелены. Поэтому при наличии источников тепла из-за теплового расширения во внутренних сечениях стержня появляется напряженно-деформированное состояние. При этом составляющие деформации и напряжения будут соответственно упругие  $(\varepsilon_x, \sigma_x)$ , температурные  $(\varepsilon_T, \sigma_T)$  и термоупругие  $(\varepsilon, \sigma)$ . Если известно поле распределения температуры и коэффициента теплового расширения по длине стержня, то выражение функционала, которое характеризует потенциальную энергию упругих деформаций рассматриваемого стержня, имеет следующий вид:

$$\Pi = \int_V \frac{\sigma_x}{2} \varepsilon_x dV - \int_V \alpha(T(x)) \cdot E \cdot T(x) \cdot \varepsilon_x dV, \quad (1)$$

где  $V$  — объем стержня;  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$  — составляющая упругой деформации;  $u = u(x)$  — поле упругих перемещений по длине стержня;  $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$  — упругая составляющая напряжения;  $\alpha = \alpha(T(x))$  — закон распределения коэффициента теплового расширения по длине стержня;  $E$  — модуль упругости материала стержня;  $T = T(x)$  — закон распределения температуры по длине стержня [1, 2].

Учитывая, что рассматриваемый процесс является установившимся в пределах каждого дискретного элемента поля распределения температуры, коэффициент теплового расширения и упругого перемещения аппроксимируем полным полиномом второго порядка. Для этого в стержне выделим любой участок длиной  $\Delta x$  (см) — это так называемый дискретный элемент. Поле распределения температуры в пределах этого дискретного элемента будем рассматривать отдельно, как на рисунке 1.

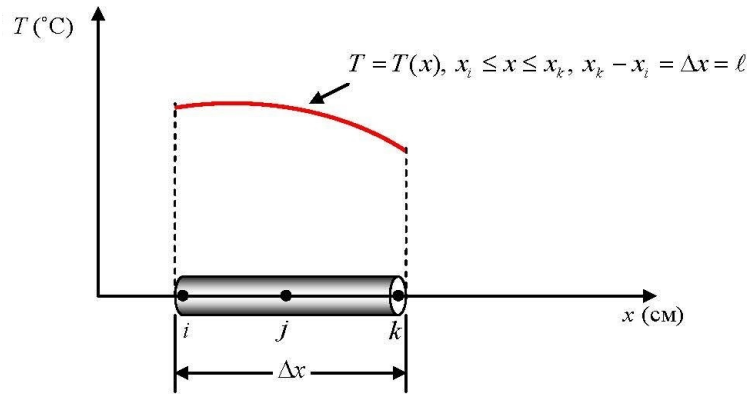


Рисунок 1. Поле распределения температуры на отрезке стержня

На рассматриваемом элементе длиной  $\Delta x$  возьмем сечения  $i$ ,  $j$  и  $k$  с координатами  $x = x_i$ ,  $x = x_j$  и  $x = x_k$ . Тогда в пределах рассматриваемого дискретного элемента поле распределения температуры  $T = T(x)$  можно представить как кривую второго порядка, проходящую через три точки  $x = x_i$ ,  $x = x_j$  и  $x = x_k$ .

$$T(x) = a + bx + cx^2, \quad x_i \leq x \leq x_k, \quad a, b, c - \text{const.} \quad (2)$$

Считая, что значения температуры в узлах  $x = x_i$ ,  $x = x_j$  и  $x = x_k$  будут  $T(x_i) = T_i$ ,  $T(x_j) = T_j$ ,  $T(x_k) = T_k$ , из (2) имеем

$$\begin{cases} a + bx_i + cx_i^2 = T_i; \\ a + bx_j + cx_j^2 = T_j; \\ a + bx_k + cx_k^2 = T_k. \end{cases} \quad (3)$$

Учитывая, что  $x_i = 0$ ,  $x_j = \frac{\ell}{2}$ ,  $x_k = \ell$ , и, решая последнюю систему уравнений, находим значения констант  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Подставляя их в выражение (2), после упрощения получим, что [1, 2]

$$T(x) = \varphi_i(x) \cdot T_i + \varphi_j(x) \cdot T_j + \varphi_k(x) \cdot T_k \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (4)$$

где

$$\varphi_i(x) = \frac{\ell^2 - 3\ell x + 2x^2}{\ell^2}; \quad \varphi_j(x) = \frac{4(\ell x - x^2)}{\ell^2}; \quad \varphi_k(x) = \frac{2x^2 - \ell x}{\ell^2}, \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (5)$$

Эти функции являются функциями формы для квадратичного конечного элемента с тремя узлами. Следует отметить, что они имеют следующие свойства:

$$1. \begin{cases} \varphi_i(x) = 1 \\ \varphi_j(x) = 0 \\ \varphi_k(x) = 0 \end{cases} \text{ при } x = x_i; \quad \begin{cases} \varphi_i(x) = 0 \\ \varphi_j(x) = 1 \\ \varphi_k(x) = 0 \end{cases} \text{ при } x = x_j; \quad \begin{cases} \varphi_i(x) = 0 \\ \varphi_j(x) = 0 \\ \varphi_k(x) = 1 \end{cases} \text{ при } x = x_k. \quad (6)$$

2. Для любого  $x$ , принадлежащего интервалу  $x_i \leq x \leq x_k$ ,

$$\varphi_i(x) + \varphi_j(x) + \varphi_k(x) = 1. \quad (7)$$

3. Для любой точки интервала  $0 \leq x \leq \ell$ , т.е. в пределах каждого дискретного элемента,

$$\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Пользуясь соотношениями (5), можно доказать эти свойства.

Приведенные свойства функции форм обеспечат непрерывность искомых функций при переходе от одного элемента к следующему. По аналогии, поле распределения упругих перемещений  $u(x)$  и коэффициента теплового расширения материала стержня  $\alpha(T(x))$  в интервале  $x_i \leq x \leq x_k$  также можно представить в виде

$$u(x) = \varphi_i(x) \cdot u_i + \varphi_j(x) \cdot u_j + \varphi_k(x) \cdot u_k; \quad (9)$$

$$\alpha(T(x)) = \varphi_i(x) \cdot \alpha_i + \varphi_j(x) \cdot \alpha_j + \varphi_k(x) \cdot \alpha_k, \quad x \in (x_i \leq x \leq x_k), \quad (10)$$

где  $u_i, u_j, u_k$  — перемещения сечений по координате, которые являются координатами соответственно узлов  $i, j, k$ ;  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — const,  $\varphi_i(x), \varphi_j(x), \varphi_k(x)$  и функциями формы для дискретного квадратичного элемента с тремя узлами [2, 3].

Тогда выражение функционала, характеризующее потенциальную энергию упругой деформации при наличии источников тепла для одного дискретного элемента, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \int_{V_i} \frac{E}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dV - \int_{V_i} \alpha(T(x)) \cdot E \cdot T(x) \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dV = \\ &= \int_{V_i} \frac{E}{2} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} u_k \right)^2 dV - \int_{V_i} E (\varphi_i \alpha_i + \varphi_j \alpha_j + \varphi_k \alpha_k) (\varphi_i T_i + \varphi_j T_j + \varphi_k T_k) \times \\ &\quad \times \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} u_k \right) dV, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $V_i$  — объем рассматриваемого дискретного квадратичного элемента с тремя узлами.

Тогда выражение функционала, которое характеризует потенциальную энергию упругой деформации всего стержня при наличии источников тепла, выглядит следующим образом:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{\text{ЧДЭ}} \Pi_i, \quad (12)$$

где ЧДЭ — число дискретных элементов в стержне.

Рассмотрим каждый интеграл в выражении (11) по отдельности:

$$1) \int_{V_i} \frac{E}{2} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} u_k \right)^2 dV = \frac{EF}{2} \int_0^\ell \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} u_k \right)^2 dx.$$

Здесь  $F$  — площадь поперечного сечения элемента стержня, которая постоянна по его длине. Из (5), находя выражение для частных производных  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}$

$$\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} = \frac{1}{\ell^2}(-3\ell + 4x); \quad \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} = \frac{4}{\ell^2}(\ell - 2x); \quad \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x} = \frac{1}{\ell^2}(4x - \ell)$$

и, подставляя их в последнее выражение, получим, что

$$\begin{aligned} &\frac{EF}{2} \int_0^\ell \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} u_k \right)^2 dx = \\ &= \frac{EF}{2} \left[ \frac{7}{3\ell} u_i^2 - \frac{16}{3\ell} u_i u_j + \frac{2}{3\ell} u_i u_k + \frac{16}{3\ell} u_j^2 - \frac{16}{3\ell} u_j u_k + \frac{7}{3\ell} u_k^2 \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Дальше переходим к интегрированию второго интеграла в выражении (11)

$$\begin{aligned} 2) \int_{V_i} \alpha(T(x)) \cdot E \cdot T(x) \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dV &= \\ &= \int_{V_i} E (\varphi_i \alpha_i + \varphi_j \alpha_j + \varphi_k \alpha_k) (\varphi_i T_i + \varphi_j T_j + \varphi_k T_k) \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} u_k \right) dV = \\ &= EF \int_0^\ell [\varphi_i^2 \alpha_i T_i + \varphi_i \varphi_j \alpha_i T_j + \varphi_i \varphi_k \alpha_i T_k + \varphi_i \varphi_j \alpha_j T_i + \varphi_j^2 \alpha_j T_j + \varphi_j \varphi_k \alpha_j T_k + \varphi_i \varphi_k \alpha_k T_i + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \varphi_j \varphi_k \alpha_k T_j + \varphi_k^2 \alpha_k T_k \cdot \left[ \frac{-3\ell+4x}{\ell^2} u_i + \frac{4\ell-8x}{\ell^2} u_j + \frac{4x-\ell}{\ell^2} u_k \right] dx = \\
 & = EF \left\{ \left[ -\frac{1}{3} \alpha_i T_i - \frac{1}{5} \alpha_i T_j + \frac{1}{30} \alpha_i T_k - \frac{1}{5} \alpha_j T_i - \frac{8}{15} \alpha_j T_j + \frac{1}{15} \alpha_j T_k + \frac{1}{30} \alpha_k T_i + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{15} \alpha_k T_j + \frac{1}{15} \alpha_k T_k \left. \right] u_i + \left[ \frac{2}{5} \alpha_i T_i + \frac{4}{15} \alpha_i T_j + 0 + \frac{4}{15} \alpha_j T_i + 0 - \frac{4}{15} \alpha_j T_k + 0 - \right. \\
 & - \frac{4}{15} \alpha_k T_j - \frac{2}{15} \alpha_k T_k \left. \right] u_j + \left[ -\frac{1}{15} \alpha_i T_i - \frac{1}{15} \alpha_i T_j - \frac{1}{30} \alpha_i T_k - \frac{1}{15} \alpha_j T_i + \frac{8}{15} \alpha_j T_j + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{5} \alpha_j T_k - \frac{1}{30} \alpha_k T_i + \frac{1}{5} \alpha_k T_j + \frac{1}{3} \alpha_k T_k \right] u_k \left. \right\}. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Теперь, подставляя (13) и (14) в (11), получим интегрированный вид выражения функционала, который характеризует потенциальную энергию упругой деформации дискретного элемента при наличии поля температуры [2, 3]:

$$\begin{aligned}
 \Pi_i = & \frac{EF}{2} \left[ \frac{7}{3\ell} u_i^2 - \frac{16}{3\ell} u_i u_j + \frac{2}{3\ell} u_i u_k + \frac{16}{3\ell} u_j^2 - \frac{16}{3\ell} u_j u_k + \frac{7}{3\ell} u_k^2 \right] - \\
 & - EF \left\{ \left[ -\frac{1}{3} \alpha_i T_i - \frac{1}{5} \alpha_i T_j + \frac{1}{30} \alpha_i T_k - \frac{1}{5} \alpha_j T_i - \frac{8}{15} \alpha_j T_j + \frac{1}{15} \alpha_j T_k + \frac{1}{30} \alpha_k T_i + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{15} \alpha_k T_j + \frac{1}{15} \alpha_k T_k \left. \right] u_i + \left[ \frac{2}{5} \alpha_i T_i + \frac{4}{15} \alpha_i T_j + 0 + \frac{4}{15} \alpha_j T_i + 0 - \frac{4}{15} \alpha_j T_k + 0 - \right. \\
 & - \frac{4}{15} \alpha_k T_j - \frac{2}{15} \alpha_k T_k \left. \right] u_j + \left[ -\frac{1}{15} \alpha_i T_i - \frac{1}{15} \alpha_i T_j - \frac{1}{30} \alpha_i T_k - \frac{1}{15} \alpha_j T_i + \frac{8}{15} \alpha_j T_j + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{5} \alpha_j T_k - \frac{1}{30} \alpha_k T_i + \frac{1}{5} \alpha_k T_j + \frac{1}{3} \alpha_k T_k \right] u_k \left. \right\}. \tag{15}
 \end{aligned}$$

Далее, минимизируя последний функционал по узловым значениям упругого перемещения, получим математическую модель термонапряженного состояния дискретного элемента в виде разрешающих систем линейных алгебраических уравнений относительно перемещения узлов элемента:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0; \Rightarrow & \frac{EF}{2} \left[ \frac{14}{3\ell} u_i - \frac{16}{3\ell} u_j + \frac{2}{3\ell} u_k \right] - EF \left[ -\frac{1}{3} \alpha_i T_i - \frac{1}{5} \alpha_i T_j + \frac{1}{30} \alpha_i T_k - \frac{1}{5} \alpha_j T_i - \right. \\
 & \left. - \frac{8}{15} \alpha_j T_j + \frac{1}{15} \alpha_j T_k + \frac{1}{30} \alpha_k T_i + \frac{1}{15} \alpha_k T_j + \frac{1}{15} \alpha_k T_k \right] = 0. \tag{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_j} = 0; \Rightarrow & \frac{EF}{2} \left[ -\frac{16}{3\ell} u_i + \frac{32}{3\ell} u_j - \frac{16}{3\ell} u_k \right] - EF \left[ \frac{2}{5} \alpha_i T_i + \frac{4}{15} \alpha_i T_j + \frac{4}{15} \alpha_j T_i - \frac{4}{15} \alpha_j T_k - \right. \\
 & \left. - \frac{4}{15} \alpha_k T_j - \frac{2}{5} \alpha_k T_k \right] = 0. \tag{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_k} = 0; \Rightarrow & \frac{EF}{2} \left[ \frac{2}{3\ell} u_i - \frac{16}{3\ell} u_j + \frac{14}{3\ell} u_k \right] - EF \left[ -\frac{1}{15} \alpha_i T_i - \frac{1}{15} \alpha_i T_j - \frac{1}{30} \alpha_i T_k - \frac{1}{15} \alpha_j T_i + \right. \\
 & \left. + \frac{8}{15} \alpha_j T_j + \frac{1}{5} \alpha_j T_k - \frac{1}{30} \alpha_k T_i + \frac{1}{5} \alpha_k T_j + \frac{1}{3} \alpha_k T_k \right] = 0. \tag{18}
 \end{aligned}$$

Здесь следует отметить, что эти уравнения получены для узлов одного дискретного элемента. Так как мы дискретизируем рассматриваемый стержень множеством квадратичных элементов с тремя узлами, то для каждого элемента должно быть записано выражение функционала потенциальной энергии упругой деформации с учетом поля температур. Тогда общее выражение потенциальной энергии для рассматриваемого стержня в целом имеет вид (12). Общее число узлов будет равно:  $2 \times \text{чэ} + 1$ . В общем случае математической моделью термонапряженного состояния рассматриваемого стержня, защемленного с обоих концов, является следующая система линейных алгебраических  $2 \times \text{чэ} + 1$  уравнений:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0, \tag{19}$$

где  $i = 2 \div (2 \times \text{чэ} + 1)$ .

Из-за жесткого защемления двух концов стержня

$$u_1 = u_{2 \times 3 + 1} = 0. \quad (20)$$

Решая систему (19), находим узловые значения упругих перемещений. Значения упругого компонента деформации в первой половине элемента определяются следующим образом:

$$\varepsilon_x^I = \frac{\partial u}{\partial x} \left( x = \frac{x_j - x_i}{2} \right) = \frac{\partial u_i \left( x = \frac{x_j - x_i}{2} \right)}{\partial x} u_i + \frac{\partial u_j \left( x = \frac{x_j - x_i}{2} \right)}{\partial x} u_j + \frac{\partial u_k \left( x = \frac{x_j - x_i}{2} \right)}{\partial x} u_k. \quad (21)$$

Аналогично для второй половины элемента имеем

$$\varepsilon_x^{II} = \frac{\partial u}{\partial x} \left( x = \frac{x_k - x_j}{2} \right) = \frac{\partial u_i \left( x = \frac{x_k - x_j}{2} \right)}{\partial x} u_i + \frac{\partial u_j \left( x = \frac{x_k - x_j}{2} \right)}{\partial x} u_j + \frac{\partial u_k \left( x = \frac{x_k - x_j}{2} \right)}{\partial x} u_k. \quad (22)$$

Соответственно, по закону Гука, значения упругого компонента напряжения определяются следующим образом:

$$\sigma_x^I = E \cdot \varepsilon_x^I; \quad \sigma_x^{II} = E \cdot \varepsilon_x^{II}. \quad (23)$$

Значения температурного составляющего деформации и напряжения определяются следующим образом:

$$\varepsilon_T^I = -\alpha \left( x = \frac{x_j - x_i}{2} \right) \cdot T \left( x = \frac{x_j - x_i}{2} \right); \quad \varepsilon_T^{II} = -\alpha \left( x = \frac{x_k - x_j}{2} \right) \cdot T \left( x = \frac{x_k - x_j}{2} \right); \quad (24)$$

$$\sigma_T^I = E \cdot \varepsilon_T^I; \quad \sigma_T^{II} = E \cdot \varepsilon_T^{II}. \quad (25)$$

При известных  $\varepsilon_x^I$ ;  $\varepsilon_x^{II}$ ;  $\varepsilon_T^I$ ;  $\varepsilon_T^{II}$ ;  $\sigma_x^I$ ;  $\sigma_x^{II}$ ;  $\sigma_T^I$ ;  $\sigma_T^{II}$  определяются значения термоупругих составляющих деформаций и напряжений [1, 3]:

$$\varepsilon^I = \varepsilon_x^I + \varepsilon_T^I; \quad \varepsilon^{II} = \varepsilon_x^{II} + \varepsilon_T^{II}; \quad (26)$$

$$\sigma^I = \sigma_x^I + \sigma_T^I; \quad \sigma^{II} = \sigma_x^{II} + \sigma_T^{II}. \quad (27)$$

Применяя полученные математические модели, рассмотрим численное моделирование термонапряженного состояния стержня из жаропрочного сплава АНВ-300 при одновременном наличии теплообмена, теплоизоляции и температуры постоянной интенсивности  $T = \text{const} = 800 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Рассмотрим горизонтальный стержень из жаропрочного сплава АНВ-300, координатную ось  $Ox$  направим слева вправо (рис. 2).

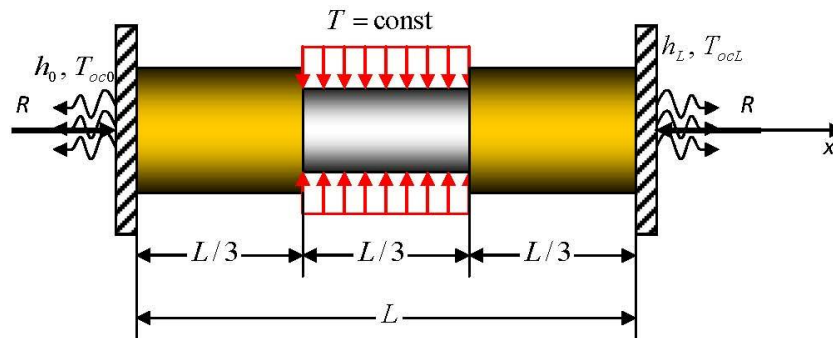


Рисунок 2. Расчетная схема задачи

Через площади поперечных сечений обоих концов происходит теплообмен с окружающими их средами. Коэффициент теплообмена и температура окружающих сред для левого конца  $h_0$  ( $\text{Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{ }^\circ\text{C})$ ) и  $T_{oc0}$  ( $^\circ\text{C}$ ). Аналогично для правого конца —  $h_L$  ( $\text{Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{ }^\circ\text{C})$ ) и  $T_{ocL}$  ( $^\circ\text{C}$ ).

Боковую поверхность участков  $(0 \leq x \leq L/3)$  и  $(2L/3 \leq x \leq L)$  стержня считаем теплоизолированной. На участке  $(L/3 \leq x \leq 2L/3)$  стержня дана температура постоянной интенсивности  $T = \text{const} = 800 \text{ }^\circ\text{C}$ . При наличии приведенных выше источников тепла и частичной теплоизоляции стержень старается расширяться. Но из-за защемления обоих концов появляются сжимающие усилия  $R$ . В связи с этим и из-за

неоднородного поля температуры во внутренних сечениях стержня возникает неоднородное поле напряжений. Составляющие деформации будут  $\varepsilon_x, \varepsilon_T, \varepsilon$ , а напряжений —  $\sigma_x, \sigma_T, \sigma$ . Требуется определить поле перемещений  $u = u(x)$ , упругую деформацию  $\varepsilon_x$ , температурную деформацию  $\varepsilon_T$ , термоупругую деформацию  $\varepsilon$ , а также упругие, температурные и термоупругие напряжения  $\sigma_x, \sigma_T$  и  $\sigma$ . Функционал, характеризующий потенциальную энергию упругих деформаций при наличии поля температур, минимизируется по узловым перемещениям

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0, \quad i = 2 \div 2n. \quad (28)$$

Решая последнюю систему, находим узловые значения перемещения. Далее по (21–27) определяются значения составляющих  $\varepsilon_x, \varepsilon_T, \varepsilon, \sigma_x, \sigma_T, \sigma$  в заданных сечениях стержня. За исходные данные принимаем следующие [3]:

$$L = 30 \text{ (см)}; \quad r = 1 \text{ (см)}; \quad F = \pi \cdot r^2 = \pi \text{ (см}^2\text{)}; \quad K_{xx} = 100 \text{ (Вт/(см} \cdot \text{°C))};$$

$$h_L = 10 \text{ (Вт/(см}^2 \cdot \text{°C))}; \quad T_{oc0} = T_{ocL} = 40 \text{ (°C)}; \quad T = \text{const} = 800 \text{ (°C)}.$$

При фиксированных значениях варьируем значение коэффициента теплообмена  $h_0 = 7,5; 10; 15; 30 \text{ (Вт/(см}^2 \cdot \text{°C))}$ .

Сначала принимаем  $h_0 = 7,5 \text{ (Вт/(см}^2 \cdot \text{°C))}$ . Узловые значения перемещения приведены в таблице 1. Соответствующее поле перемещений по длине стержня изображено на рисунке 3. Из этого рисунка видно, что сечения стержня, находящиеся на участке  $0 \leq x \leq 14 \text{ (см)}$ , перемещаются против направления оси  $Ox$ . В это время остальные сечения, находящиеся на участке  $14 \leq x \leq 28 \text{ (см)}$ , перемещаются по направлению оси  $Ox$ . При этом наибольшее перемещение против направления оси  $Ox$  соответствует сечению стержня  $x = 6,6 \text{ (см)}$ . Значение перемещения этого сечения равно  $u_{66} = -0,0113 \text{ (см)}$ . Наибольшее перемещение по направлению оси  $Ox$  соответствует сечению  $x = 23,1 \text{ (см)}$ , значение перемещения которого равно  $u_{232} = 0,015 \text{ (см)}$ . Сечение стержня с координатой  $x = 14,05 \text{ (см)}$  не перемещается.

Таблица 1

Узловые значения перемещений при  $T = 800 \text{ (°C)}$ ;  $h_0 = 7,5 \text{ (Вт/(см}^2 \cdot \text{°C))}$

Узл. точки	Узл. знач. перемещений $u$ (см)	Узл. точки	Узл. знач. перемещений $u$ (см)	Узл. точки	Узл. знач. перемещений $u$ (см)	Узл. точки	Узл. знач. перемещений $u$ (см)	Узл. точки	Узл. знач. перемещений $u$ (см)
1	0,0000000000	...	...	...	...	...	...	...	...
2	-0,0003374609	65	-0,0113061676	139	-0,0002715203	231	0,0150037799	299	0,0008018468
3	-0,0006670340	66	-0,0113075751	140	-0,0000738218	232	0,0150073841	300	0,0004052590
...	...	67	-0,0112980940	141	0,0001238766	233	0,0149983362	301	0,0000000000
		...	...	...	...	...	...		

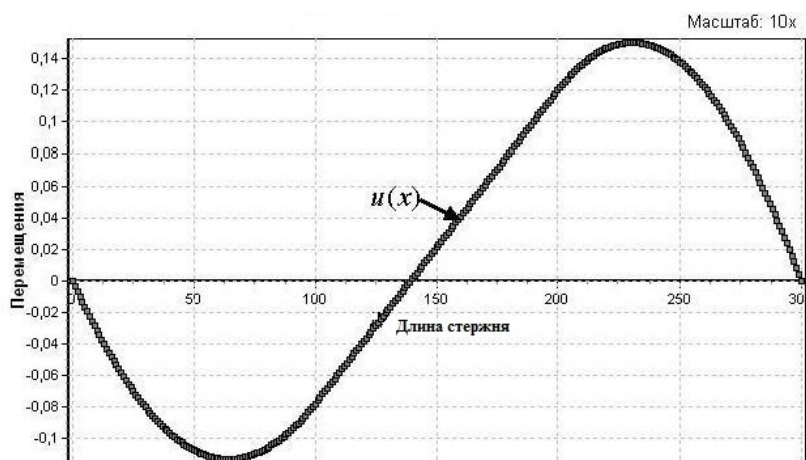


Рисунок 3. Поле распределения упругих перемещений по длине стержня

Поля распределения компонентов деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_T$  и  $\varepsilon$ , а также соответствующих напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_T$ ,  $\sigma$  приводятся на рисунках 4 и 5.

Из рисунка 4 видно, что характер упругого компонента деформации  $\varepsilon_x$  на участке стержня  $0 \leq x \leq 6,65$  (см) является сжимающим. Далее на участке  $6,65 < x \leq 23,25$  (см)  $\varepsilon_x$  имеет растягивающий характер. На остальном участке  $23,25 < x \leq 30$  (см) стержня она имеет также сжимающий характер. В то время поведение температурного компонента деформаций  $\varepsilon_T$  является всюду сжимающим. Также всюду является сжимающей термоупругая составляющая деформации  $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_T$ . Кроме того, что поля распределений  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon$  являются симметричными относительно прямой  $\varepsilon = -0,0000014x - 0,007654$ .

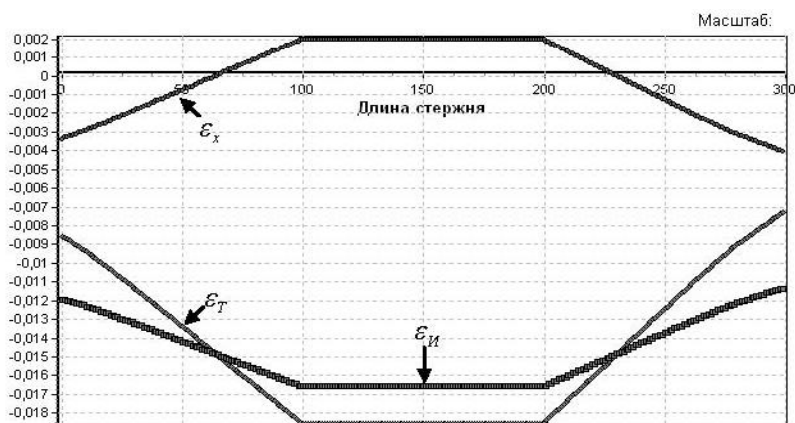


Рисунок 4. Поле распределения деформаций по длине стержня

Как видно из рисунка 5, поведение составляющих напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_T$  и  $\sigma$  будет аналогичным, как и  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_T$ ,  $\varepsilon$ . При этом наибольшее термоупругое напряжение, имеющее сжимающий характер, наблюдается на участке  $10,5 \leq x \leq 19,95$  (см) стержня, и его значение на этом участке будет равно  $\sigma = -33166,03$  (кГ/см<sup>2</sup>). На участке  $0 \leq x < 10,5$  (см) стержня  $\sigma$  растет монотонно от  $\sigma = -23869,66$  (кГ/см<sup>2</sup>) в сечении  $x = 0,05$  (см) до  $\sigma = -33066,48$  (кГ/см<sup>2</sup>) в сечении  $x = 9,95$  (см). Из рисунка 5 также видно, что  $\sigma_x$  и  $\sigma$  являются симметричными относительно горизонтальной оси симметрии. Здесь следует отметить, что если  $\alpha = \text{const}$ , то  $\sigma = \text{const}$  по всей длине стержня.

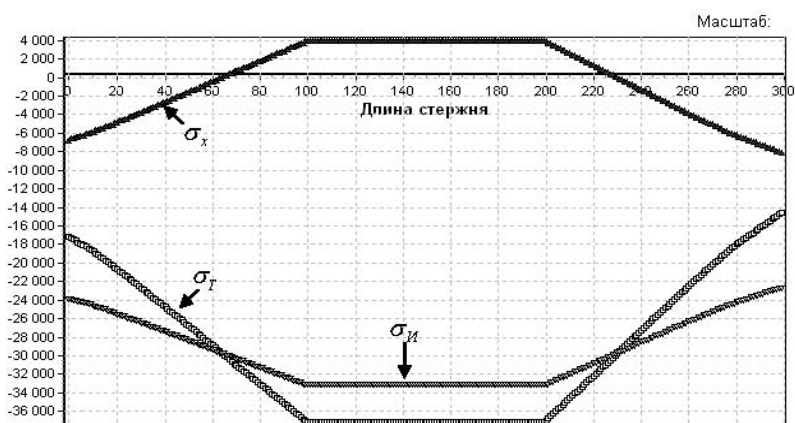


Рисунок 5. Поле распределения напряжений по длине стержня

Из полученных численных результатов видно, что в сечениях стержня, где большие температуры, значение термоупругого составляющего напряжения  $\sigma$  будет большим. В связи с этим по всей длине стержня поле распределения  $\sigma$  не будет горизонтальной прямой. В это время на участке  $19,95 \leq x < 30$  (см) поведение  $\sigma$  будет сжимающим, но его значение монотонно понижается от  $\sigma = -33166,03$  (кГ/см<sup>2</sup>) до  $\sigma = -22690,009$  (кГ/см<sup>2</sup>) соответственно.

Аналогично проведем численное исследование термонапряженного состояния данного стержня при разных значениях коэффициента теплообмена и по результатам проведенных численных экспериментов построим таблицу 2 [3].

Таблица 2

**Влияние коэффициента теплообмена  $h_0$  (Вт/(см<sup>2</sup> · °С)) на термонапряженно-деформированное состояние исследуемого стержня**

№ п/п	$h_0$ ( $\frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{°С}}$ )	$u_{\min}$ (см)	Координата соответ-го сечения (см)	$u_{\max}$ (см)	Координата соответ-го сечения (см)	$\sigma_{\max}$ ( $\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$ )	$\sigma_{\text{ср}}$ ( $\frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$ )	Координата соответ-го точки, где $u = 0$ (см)
1	7,5	0,0113	$x = 6,6$	0,015	$x = 23,1$	-33166	-29706,25	$x = 14,05$
2	10	0,01405	$x = 6,7$	0,01405	$x = 23,3$	-32885,9	-29181	$x = 15$
3	15	0,0177	$x = 7,1$	0,01282	$x = 23,5$	-32514,3	-28484,3	$x = 16,295$
4	30	0,0229	$x = 7,3$	0,011188	$x = 23,9$	-31991	-27503	$x = 17,695$

Анализируя данную таблицу, можно сделать следующие выводы:

- при увеличении значения  $h_0$  возрастает амплитуда перемещений против направления оси  $Ox$ ;
- при увеличении значения  $h_0$  координата сечения, амплитуда перемещения которого будет наибольшей, увеличивается;
- при увеличении значения  $h_0$  амплитуда перемещения по направлению оси  $Ox$  уменьшается;
- при увеличении значения  $h_0$  максимальное и среднее значения термоупругого напряжения  $\sigma$  уменьшаются.

Список литературы

- 1 Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. — М.: Мир, 1979. — 392 с.
- 2 Кудайкулов А.К. Математическое (конечно-элементное) моделирование прикладных задач распространения тепла в одномерных конструктивных элементах / А.К. Кудайкулов, Б.З. Кенжегулов, Р.У. Тулеуова, У.Б. Утебаев, Б.М. Токкулиев. — Туркестан: Байтерек, 2009. — 168 с.
- 3 Мырзашева А.Н. Моделирование нелинейных термомеханических процессов в жаропрочных сплавах / А.Н. Мырзашева. — Атырау: Ред. центр АТГУ, 2015. — 200 с.

А.Н. Мырзашева, Г.К. Шамбилова, Н.К. Шаждекеева, В.Е. Махатова

**Температура тұрақты болған жағдайда стерженнің термокернеулік күйінің жылу алмасу коэффициентінен тәуелдігін сандық зерттеу және математикалық модельдеу**

Мақалада энергетикалық қағида негізінде қызуға төзімді күймадан жасалған стерженнің жылукернеулік-деформациялық жағдайының математикалық моделі жасақталды. Энергетикалық принцип үш түйінді квадраттық шекті элементтер әдісін қолданумен ұштастырылған серпімді деформацияның әлеуеттік энергиясын минималдауға негізделген. Стерженнің шекті ұзындығы бар және екі шеті мықты бекітілген. Оның ( $0 \leq x \leq L/3$ ) және ( $2L/3 \leq x \leq L$ ) бөліктері жылудан оқшауланған. Стерженнің екі жағының көлденең қимасының ауданы арқылы оларды қоршаған ортамен жылу алмасу жүреді, ал оның орта ( $L/3 \leq x \leq 2L/3$ ) бөлігіне  $T = \text{const} = 800 \text{ °С}$  болатын тұрақты температура түсірілген. Жылу алмасу коэффициентінің тұрақты температура әсеріндегі АНВ-300 қызуға төзімді күймасынан жасалған стерженнің жылукернеулік жағдайына әсері зерттеліп, зерттеудің сандық нәтижелері келтірілді. Зерттеулер жылу алмасу коэффициентінің әр түрлі мәндерінде жүргізілді. Нәтижесінде,  $h_0$  – жылу алмасу коэффициентінің мәнін арттырғанда орын ауысудың (жылжудың) амплитудасы  $Ox$  осіне қарсы бағытта өсетіндігі; орын ауысудың амплитудасы ең үлкен болатын қима



координатасы артатындығы;  $Ox$  осінің бағыты бойынша орын ауысудың амплитудасы азаятындығы;  $\sigma$  жылу серпімділік кернеудің ең үлкен және орташа мәндері азаятындығы анықталды.

*Кілт сөздер:* шекті элементтер әдісі, температура, жылудан оқшауланған, жылу алмасу, жылу алмасу коэффициенті, серпімді деформацияның потенциалдық энергиясы, математикалық модель.

A.N. Myrzasheva, G.K. Shambilova, N.K. Shazhdekeeva, V.E. Makhatova

## Mathematical modeling and computational investigation of the dependence of the thermal stressed state of the rod on the heat transfer coefficient in the presence of a temperature of constant intensity

In the article on the basis of energy principles, a mathematical model of thermal stressed-deformed state of a rod from a heat-resistant alloy. The energy principle is focused on minimizing the potential energy of elastic deformations in combination, the application of the method of a quadratic finite element with three nodes. Rod of limited length and rigidly pinched by two ends. The lateral surface of the rod sections ( $0 \leq x \leq L/3$ ) and ( $2L/3 \leq x \leq L$ ) is thermally insulated. Through the cross-sectional area of both ends of the rod, heat exchange takes place with their environment. The temperature of  $T = \text{const} = 800^\circ\text{C}$  constant intensity is given on the middle section of rod ( $L/3 \leq x \leq 2L/3$ ). Investigated effects of heat transfer coefficient on the thermally stressed state of the core of the high-temperature alloy ANV-300 in the presence of a temperature of constant intensity and numerical research results are represented. Research were conducted for different values of the heat transfer coefficient. As a result, it was found that with an increase in the value of the  $h_0$  – coefficient of heat transfer the amplitude of displacements increases against the direction of the axis  $Ox$ ; coordinate of section, displacement amplitude, which will be the largest, increases; the amplitude of the interchange of the axis  $Ox$  direction is reduced; the maximum and average values of the thermoelastic stress  $\sigma$  decrease.

*Keywords:* finite element method, temperature, heat insulation, heat transfer, heat transfer coefficient, potential energy of elastic deformations, mathematical model.

### References

- 1 Segerlind, L. (1979). *Primenenie metoda konechnykh elementov [The application of the finite element method]*. Moscow: Mir [in Russian].
- 2 Kudaykulov, A.K., Kenzhegulov, B.Z., Tuleuova, R.U., Utebaev, U.B., & Tokkuliev, B.M. (2009). *Matematicheskoe (konechno-elementnoe) modelirovanie prikladnykh zadach rasprostraneniia tepla v odnomernykh konstruktivnykh elementakh [Mathematical (finite element) modeling of applied problems of heat propagation in one-dimensional structural elements]*. Turkestan: Bayterek [in Russian].
- 3 Myrzhasheva, A.N. (2015). *Modelirovanie nelineinykh termomekhanicheskikh protsessov v zharoprochnykh splavakh [Modeling of nonlinear thermomechanical processes in high-temperature alloys]*. Atyrau: Red. tsentrAtHU [in Russian].