УДК 517.928

Д.Н. Нургабыл, У.А. Бекиш

Жетысуский государственный университет им. И. Жансугурова, Талдыкорган, Казахстан
(E-mail: kebek.kz@mail.ru)

Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной краевой задачи с граничными скачками

В статье рассмотрена сингулярно возмущенная общая краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка в условно устойчивом случае. Определен вид асимптотики искомого решения с помощью установленных асимптотических оценок решения исследуемой сингулярно возмущенной краевой задачи. Описан алгоритм, при помощи которого определяются последовательно все члены асимптотического разложения для рассматриваемой задачи. Установлены экспоненциальные оценки для пограничных функций. Получена оценка асимптотической точности, которую дает частичная сумма асимптотического разложения решения рассматриваемой сингулярно возмущенной общей краевой задачи. Доказана теорема о существовании, единственности и справедливости асимптотического разложения решения краевой задачи. Исследованы вопросы предельного перехода решения возмущенной задачи к решению невозмущенной задачи при стремлении малого параметра к нулю, существования явления граничных скачков. Найдены формулы для граничных скачков, порядки скачков.

Кючевые слова: дифференциальные уравнения, сингулярные возмущения, краевая задача, граничные скачки, малый параметр, асимптотика, предельный переход.

Введение

Для построения асимптотических приближений решений некоторых сингулярно возмущенных краевых задач возникает вопрос о предварительном определении характера роста производных искомого решения в граничной точке при стремлении малого параметра к нулю. К таким задачам можно отнести краевые задачи с начальными скачками [1, 2]. В [3, 4] выделены классы краевых задач, обладающих явлением начальных скачков, получены асимптотические оценки решения этих задач. Однако в этих работах ничего не говорится о точности асимптотических приближений. Естественно поставить вопрос о получении равномерной асимптотики решения и их производных с точностью до произвольного порядка. Именно это и является целью настоящей работы.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую сингулярно возмущенную краевую задачу:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t) y'' + B(t) y' + C(t) y = F(t); \tag{1}$$

$$\begin{gathered} L_1 y \equiv \alpha_{10} y(0,\varepsilon) + \alpha_{11} y'(0,\varepsilon) + \beta_{10} y(1,\varepsilon) = a_1;, \\ L_2 y \equiv \alpha_{21} y'(0,\varepsilon) + \beta_{20} y(1,\varepsilon) = a_2;, \\ L_3 y \equiv \alpha_{30} y(0,\varepsilon) + \beta_{30} y(1,\varepsilon) = a_3, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр; $a_i,\ \alpha_{ij},\ \beta_{ij}$ – константы.

В работе [1] были установлены следующие предельные равенства:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y\left(t,\varepsilon\right) = \bar{y}\left(t\right), \quad 0 \le t \le 1, \lim_{\varepsilon\to 0} y^{(j)}\left(t,\varepsilon\right) = \bar{y}^{(j)}\left(t\right), \ \ 0 < t < 1, \ \ j = 1, 2, \tag{3}$$

где $y\left(t,\varepsilon\right)$ — решение задачи (1), (2); $\bar{y}\left(t\right)$ — решение соответствующей вырожденной задачи. Из (3) видно, что $\bar{y}^{(j)}\left(t\right),\ j = 1,2,$ можно использовать в качестве асимптотического приближения к $y^{(j)}\left(t,\varepsilon\right),\ j = 1,2,$ только на промежутке $0 < t_0(\varepsilon) \le t \le t_1(\varepsilon) < 1$, причем эти предельные равенства ничего не говорят о точности этих приближений. Естественно поставить вопрос о получении равномерного приближения с любой точностью по малому параметру.

Построение асимптотического разложения решения краевой задачи

Для построения асимптотики решения задачи (1), (2) потребуем выполнения следующих условий:

I. Пусть коэффициенты $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и правая часть $F(t)$ уравнения (1) достаточное число раз дифференцируемы на отрезке $0 \le t \le 1$.

II. Пусть $B(t) \neq 0$ при $t \in [0,1]$ и $\tilde{\alpha} = \alpha_{10}\alpha_{21}\beta_{30} - \alpha_{30}\alpha_{21}\beta_{10} + \alpha_{11}\alpha_{30}\beta_{20} \neq 0$.

III. Дополнительное характеристическое уравнение

$$\mu^3 + A(t)\mu^2 + B(t)\mu = 0$$

имеет различные корни μ_1, μ_2, μ_3, причем $\mu_1 = 0$, $Re\mu_2 < 0$, $Re\,\mu_3 > 0$.

Исходя из оценки (18) работы [1], заключаем, что асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) следует искать в виде

$$y\,(t,\varepsilon) = y_\varepsilon\,(t) + \varepsilon\, u_\varepsilon\,(\tau) + w_\varepsilon\,(s)\,,\ \tau = \frac{t}{\varepsilon},\ \ s = \frac{t-1}{\varepsilon},\ 0 \le t \le 1 \tag{4}$$

Подставим (4) в (1):

$$\varepsilon^2 y'''_\varepsilon\,(t) + \frac{d^3u_\varepsilon}{d\tau^3} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{d^3w_\varepsilon}{ds^3} + \varepsilon\,A\,(t)\left(y''_\varepsilon\,(t) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}\frac{d^2u_\varepsilon}{d\tau^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2w_\varepsilon}{ds^2}\right) +$$

$$+B\,(t)\left(y'_\varepsilon\,(t) + \frac{du_\varepsilon}{d\tau} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{dw_\varepsilon}{ds}\right) + C\,(t)\,(y_\varepsilon\,(t) + \varepsilon\,u_\varepsilon\,(\tau) + w_\varepsilon\,(s)) = F\,(t)\,. \tag{5}$$

Теперь, приравнивая в (5) выражения, зависящие от t, τи s по отдельности, получаем:

$$\varepsilon^2 y'''_\varepsilon\,(t) + \varepsilon A\,(t)\,y''_\varepsilon\,(t) + B\,(t)\,y'_\varepsilon\,(t) + C\,(t)\,y_\varepsilon\,(t) = F\,(t)\,; \tag{6}$$

$$\frac{d^3u_\varepsilon}{d\tau^3} + A\,(\varepsilon\tau)\,\frac{d^2u_\varepsilon}{d\tau^2} + B\,(\varepsilon\tau)\,\frac{du_\varepsilon}{d\tau} + \varepsilon C\,(\varepsilon\tau)\,u_\varepsilon\,(\tau) = 0; \tag{7}$$

$$\frac{d^3w_\varepsilon}{ds^3} + A\,(1+\varepsilon s)\,\frac{d^2w_\varepsilon}{ds^2} + B\,(1+\varepsilon s)\,\frac{dw_\varepsilon}{ds} + \varepsilon C\,(1+\varepsilon s)\,w_\varepsilon\,(s) = 0 \tag{8}$$

Решение уравнения (6) ищем в виде разложения

$$y_\varepsilon\,(t) = y_0\,(t) + \varepsilon y_1\,(t) + \varepsilon^2 y_2\,(t) + ..., \tag{9}$$

а решения (7) и (8) в виде

$$u_\varepsilon\,(\tau) = u_0\,(\tau) + \varepsilon u_1\,(\tau) + \varepsilon^2 u_2\,(\tau) + ...\ . \tag{10}$$

$$w_\varepsilon\,(s) = w_0\,(s) + w u_1\,(s) + \varepsilon^2 w_2\,(s) + ...\ . \tag{11}$$

Подставляя (9) в (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем:

$$B\,(t)\,y'_0\,(t) + C\,(t)\,y_0\,(t) = F\,(t)\,; \qquad (12)_0$$

$$B\,(t)\,y'_1\,(t) + C\,(t)\,y_1\,(t) = -A\,(t)\,y''_0(t); \qquad (12)_1$$

$$B\,(t)\,y'_k\,(t) + C\,(t)\,y_k\,(t) = -A\,(t)\,y''_{k-1}\,(t) - y'''_{k-2}\,(t)\,. \qquad (12)_k$$

Теперь, подставляя (10) в (7), представляя $A\,(\varepsilon\tau)\,,\ B\,(\varepsilon\tau)\,,\ C\,(\varepsilon\tau)$ в ряды по степеням ε и приравнивая выражения стоящих при одинаковых степенях ε, находим:

$$\frac{d^3u_0}{d\tau^3} + A(0)\frac{d^2u_0}{d\tau^2} + B(0)\frac{du_0}{d\tau} = 0; \qquad (13)_0$$

$$\frac{d^3u_1}{d\tau^3} + A(0)\frac{d^2u_1}{d\tau^2} + B(0)\frac{du_1}{d\tau} = \Phi_1\,(\tau)\,; \qquad (13)_1$$

$$\frac{d^3u_k}{d\tau^3}+A(0)\frac{d^2u_k}{d\tau^2}+B(0)\frac{du_k}{d\tau}=\Phi_k\left(\tau\right)\quad k=2,3,..., \tag{13$_k$}$$

где

$$\Phi_1\left(\tau\right)=-\frac{A'\left(0\right)\tau}{1!}\ddot{u}_0\left(\tau\right)-\frac{B'\left(0\right)\tau}{1!}\dot{u}_0\left(\tau\right)\ +C(0)u_0\left(\tau\right);$$

$$\Phi_k\left(\tau\right)=-\sum_{j=1}^{k}\frac{A^{(j)}\left(0\right)\tau^j}{j!}\ddot{u}_{k-j}\left(\tau\right)-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{B^{(j)}\left(0\right)\tau^j}{j!}\dot{u}_{k-j}\left(\tau\right)-\sum_{j=1}^{k}\frac{C^{(j-1)}\left(0\right)\tau^{j-1}}{(j-1)!}u_{k-j}\left(\tau\right) \tag{14}$$

Здесь точки сверху означают производные по τ.

Аналогично, подставляя (11) в (8), представляя $A\left(1+\varepsilon s\right),\ B\left(1+\varepsilon s\right),\ C\left(1+\varepsilon s\right)$ в ряды по степеням ε и приравнивая выражения стоящих при одинаковых степенях ε находим:

$$\frac{d^3w_0}{ds^3}+A(1)\frac{d^2w_0}{ds^2}+B(1)\frac{dw_0}{ds}=0; \tag{15$_0$}$$

$$\frac{d^3w_1}{ds^3}+A(1)\frac{d^2w_1}{ds^2}+B(1)\frac{dw_1}{ds}=P_1\left(s\right); \tag{15$_1$}$$

$$\frac{d^3w_k}{ds^3}+A(1)\frac{d^2w_k}{ds^2}+B(1)\frac{dw_k}{ds}=P_k\left(s\right)\ ,\ k=2,3,..., \tag{15$_k$}$$

где

$$P_1\left(s\right)=-\frac{A'\left(1\right)\ s}{1!}\ddot{w}_0\left(s\right)-\frac{B'\left(1\right)s}{1!}\dot{w}_0\left(s\right)\ +C(1)w_0\left(s\right);$$

$$P_k\left(s\right)=-\sum_{j=1}^{k}\frac{A^{(j)}\left(1\right)s^j}{j!}\ddot{w}_{k-j}\left(s\right)-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{B^{(j)}\left(1\right)s^j}{j!}\dot{w}_{k-j}\left(s\right)-\sum_{j=1}^{k}\frac{C^{(j-1)}\left(1\right)\ s^{j-1}}{(j-1)!}w_{k-j}\left(s\right). \tag{16}$$

Здесь точки сверху означают производные по s.

Для однозначного определения $y_k\left(t\right), u_k\left(\tau\right),\quad w_k$(s) подставим разложения (4), (9), (10), (11) в краевые условия (2):

$$\alpha_{10}\left(y_0\left(0\right)+\varepsilon y_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k y_k\left(0\right)+...+\varepsilon u_0\left(0\right)+\varepsilon^2u_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k u_{k-1}\left(0\right)+...\right)+$$

$$+\alpha_{11}\left(y_0'\left(0\right)+\varepsilon y_1'\left(0\right)+...+\varepsilon^k y_k'\left(0\right)+...+\dot{u}_0\left(0\right)+\varepsilon\dot{u}_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k\dot{u}_k\left(0\right)+...\right)+$$

$$+\beta_{10}\left(y_0\left(1\right)+\varepsilon y_1\left(1\right)+...+\varepsilon^k y_k\left(1\right)+...+w_0\left(0\right)+\varepsilon w_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k w_k\left(0\right)+...\right)=a_1;$$

$$\alpha_{21}\left(y_0'\left(0\right)+\varepsilon y_1'\left(0\right)+...+\varepsilon^k y_k'\left(0\right)+...+\dot{u}_0\left(0\right)+\varepsilon\dot{u}_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k\dot{u}_k\left(0\right)+...\right)+$$

$$+\beta_{20}\left(y_0\left(1\right)+\varepsilon y_1\left(1\right)+...+\varepsilon^k y_k\left(1\right)+...+w_0\left(0\right)+\varepsilon w_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k w_k\left(0\right)+...\right)=a_2;$$

$$\alpha_{30}\left(y_0\left(0\right)+\varepsilon y_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k y_k\left(0\right)+...+\varepsilon u_0\left(0\right)+\varepsilon^2u_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k u_{k-1}\left(0\right)+...\right)+$$

$$+\beta_{30}\left(y_0\left(1\right)+\varepsilon y_1\left(1\right)+...+\varepsilon^k y_k\left(1\right)+...+w_0\left(0\right)+\varepsilon w_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k w_k\left(0\right)+...\right)=a_3.$$

Отсюда, приравнивая выражения стоящих при одинаковых степенях ε, получаем:

$$\begin{gathered}L_1y_0+\alpha_{11}\dot{u}_0\left(0\right)+\beta_{10}w_0\left(0\right)=a_1;\\ L_2y_0+\alpha_{21}\dot{u}_0\left(0\right)+\beta_{20}w_0\left(0\right)=a_2;\\ L_3y_0+\beta_{30}w_0\left(0\right)=a_3;\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}L_1y_k+\alpha_{11}\dot{u}_k\left(0\right)+\beta_{10}w_k\left(0\right)=-\alpha_{10}u_{k-1}\left(0\right);\\ L_2y_k+\alpha_{21}\dot{u}_k\left(0\right)+\beta_{20}w_k\left(0\right)=0;\\ L_3y_k+\beta_{30}w_k\left(0\right)=-\alpha_{30}u_{k-1}\left(0\right).\end{gathered} \tag{18$_k$}$$

Следовательно, условие для решения $\bar{y}(t)$ вырожденного уравнения $(12)_0$ можно получить из (17) в виде

$$H\bar{y} \equiv \tilde{\alpha}\,\bar{y}\,(0) = \tilde{a}, \tag{19}$$

где $\tilde{\alpha} = \alpha_{10}\alpha_{21}\beta_{30} - \alpha_{30}\alpha_{21}\beta_{10} + \alpha_{11}\alpha_{30}\beta_{20}, \tilde{a} = \alpha_{21}\beta_{30}a_1 - \alpha_{11}\beta_{30}a_2 + (\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10})a_3$, что является одним из особенностей исследуемой задачи. Условия I, II позволяют определить решение $\bar{y}(t)$ вырожденной задачи $(12)_0$, (19) однозначно на отрезке $0 \le t \le 1$:

$$\bar{y}(t) = \tilde{a}\frac{u_1(t)}{\tilde{\alpha}} + \int_1^t \frac{u_1(t)F(s)}{u_1(s)B(s)}ds, \bar{y}'(t) = \tilde{a}\frac{u_1'(t)}{\tilde{\alpha}} + \int_1^t \frac{u_1'(t)F(s)}{u_1(s)B(s)}ds + \frac{F(t)}{B(t)}.$$

Обратимся к системе (17). Используя первые два уравнения системы (17) и начальное условие (19), получаем:

$$w_0\,(0) = \frac{\bar{a} - \tilde{\alpha}y_0\,(1)}{\tilde{\alpha}}; \tag{20}$$

$$\dot{u}_0\,(0) = \frac{\bar{\bar{a}} - \tilde{\alpha}y_0'\,(0)}{\tilde{\alpha}}, \tag{21}$$

где $\bar{a} = \alpha_{11}\alpha_{30}a_2 - \alpha_{21}\alpha_{30}a_1 + \alpha_{21}\alpha_{10}a_3$, $\bar{\bar{a}} = \alpha_{30}\beta_{20}a_1 - \alpha_{10}\beta_{20}a_3 + (\alpha_{10}\beta_{30} - \alpha_{30}\beta_{10})a_2$.

Теперь в $(15)_0$, используя корень $\mu = \mu_3$, где $Re\mu_3 > 0$, и условие (20), получаем:

$$w_0\,(s) = \frac{\bar{a} - \tilde{\alpha}y_0\,(1)}{\tilde{\alpha}}e^{\mu_3(1)s}, \;\; s \le 0; \dot{w}_0\,(s) = \mu_3(1)\frac{\bar{a} - \tilde{\alpha}y_0\,(1)}{\tilde{\alpha}}e^{\mu_3(1)s}, \;\; s \le 0 \tag{22}$$

Аналогично в $(13)_0$ используя корень $\mu = \mu_2$, где $Re\mu_2 < 0$, и условие (21), получаем:

$$\dot{u}_0\,(\tau) = \frac{\bar{\bar{a}} - \tilde{\alpha}y_0'\,(0)}{\tilde{\alpha}}e^{\mu_2(0)\tau}, \;\; u_0\,(\tau) = \frac{\bar{\bar{a}} - \tilde{\alpha}y_0'\,(0)}{\mu_2(0)\tilde{\alpha}}e^{\mu_2(0)\tau}. \tag{23}$$

Кроме того, из (22) и (23) находим

$$\ddot{w}_0\,(s) = \mu_3^2(1)\frac{\bar{a} - \tilde{\alpha}y_0\,(1)}{\tilde{\alpha}}e^{\mu_3(1)s}\,, \; s \le 0; \quad \ddot{u}_0\,(\tau) = \mu_2(0)\frac{\bar{\bar{a}} - \tilde{\alpha}y_0'\,(0)}{\tilde{\alpha}}e^{\mu_2(0)\tau}. \tag{24}$$

Из формул (22)–(24) для $w_0\,(s)\,,\,\dot{w}_0\,(s)\,,\,\ddot{w}_0\,(s)\,,\,u_0\,(\tau)\,,\,\dot{u}_0\,(\tau)\,,\,\ddot{u}_0\,(\tau)$ получим экспоненциальные оценки

$$\left|u_0^{(j)}(\tau)\right| \le Ke^{\bar{\mu}_2(0)\tau}, \;\tau \ge 0; \quad \left|w_0^{(j)}(\tau)\right| \le Ke^{\bar{\mu}_3(1)s}, \; s \le 0, \;\; j = 0,1,2. \tag{25}$$

Итак, построены члены асимптотики нулевого порядка. В свою очередь из системы $(18)_k$ определяются начальные условия

$$y_k(0) = u_{k-1}(0), \;\; w_k(0) = y_k(0), \;\; \dot{u}_k(0) = -y_k'(1). \tag*{$(26)_k$}$$

Теперь обратимся к уравнению $(12)_1$ и условиям $(26)_1$. Откуда получаем задачу

$$B\,(t)\,y_1'\,(t) + C\,(t)\,y_1\,(t) = -A\,(t)\,y_0''(t), y_1(0) = u_0(0).$$

Отсюда определяется $y_1(t)$ при $0 \le t \le 1$.

Далее обратимся к уравнениям $(15)_1$, $(17)_1$ и равенствам (22). Откуда получаем задачи

$$\frac{d^3w_1}{ds^3} + A(1)\frac{d^2w_1}{ds^2} + B(1)\frac{dw_1}{ds} = P_1\,(s)\,, \dot{w}_1\,(0) = y_1\,(1)\,; \tag{27}$$

$$\frac{d^3u_1}{d\tau^3} + A(0)\frac{d^2u_1}{d\tau^2} + B(0)\frac{du_1}{d\tau} = \Phi_1\,(\tau)\,, \dot{u}_1\,(0) = -y_1'\,(0)\,, \tag{28}$$

где

$$\Phi_1\,(\tau) = e^{\mu_2(0)\tau}\,\tilde{\Phi}_1\,(\tau)\,, \;\; \tau \ge 0, P_1\,(s) = \tilde{P}_1\,(s)\,e^{\mu_3(1)s}\,, \;\; s \le 0,$$

$\tilde{\Phi}_1\,(\tau)$ — многочлен первой степени относительно τ; $\tilde{P}_1\,(s)$ — многочлен первой степени относительно s. Тогда, в силу условия III, задача (27) имеет решение

$$\dot{w}_1\,(s) = y_1\,(1)\,e^{\mu_3(1)s} + s\,z_1\,(s)\,e^{\mu_3(1)s}, \;\; s \le 0, \tag{29}$$

где функция $z_1(s)$ — многочлен первой степени. Из (29), используя требования $w_1(s) \to 0$ при $s \to -\infty$, получаем:

$$w_1(s) = \frac{y_1(1)}{\mu_3(1)} e^{\mu_3(1)s} - \int_s^{-\infty} p\, z_1(p)\, e^{\mu_3(1)p} dp\,, \;\; s \le 0, w_1(0) = \frac{y_1(1)}{\mu_3(1)} - \int_0^{-\infty} p\, z_1(p)\, e^{\mu_3(1)p} dp;$$

$$\ddot{w}_1(s) = \mu_3(1) y_1(1)\, e^{\mu_3(1)s} + \left(z_1(s) + s\, z_1'(s) + s\, z_1(s)\, \mu_3(1)\right) e^{\mu_3(1)s}\,, \quad s \le 0. \tag{30}$$

В силу условия III задача (28) имеет решение

$$\dot{u}_1(\tau) = -y_1'(0)\, e^{\mu_2(0)\tau} + \tau\, x_1(\tau)\, e^{\mu_2(0)\tau}\,, \tau \ge 0. \tag{31}$$

Здесь функция $x_1(\tau)$ — многочлен первой степени. Отсюда, используя требования $u_1(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$, получаем:

$$u_1(\tau) = -\frac{y_1'(0)}{\mu_2(0)} e^{\mu_2(0)\tau} - \int_\tau^{\infty} p\, x_1(p)\, e^{\mu_2(0)p} dp \quad u_1(0) = -\frac{y_1'(0)}{\mu_2(0)} - \int_0^{\infty} p\, x_1(p)\, e^{\mu_2(0)p} dp, \tag{32}$$

а также имеем

$$\ddot{u}_1(\tau) = -y_1'(0)\, \mu_2(0) e^{\mu_2(0)\tau} + \left(x_1(\tau) + \tau\, x_1'(\tau) + \tau\, x_1(\tau)\, \mu_2(0)\right) e^{\mu_2(0)\tau}\,, \tau \ge 0. \tag{33}$$

Из формул (29)–(33) вытекают оценки для $w_1(s)\,,\ \dot{w}_1(s)\,,\ \ddot{w}_1(s)\,,\ u_1(\tau)\,,\ \dot{u}_1(\tau)\,,\ \ddot{u}_1(\tau)$:

$$\left|u_1^{(j)}(\tau)\right| \le K e^{\bar{\mu}_2(0)\tau},\ \tau \ge 0, \left|w_1^{(j)}(s)\right| \le K e^{\bar{\mu}_3(1)s},\ s \le 0,\ \ j = 0,1,2. \tag{34}$$

Таким образом, определены члены разложения (4) с номером 1.

Определение следующих членов асимптотики проходит по такой же схеме для любого $k \ge 2$. Допустим, что уже определены все члены с номерами до $k-1$ включительно, причем для функций $w_i(s)\,,\ \dot{w}_i(s)\,,\ \ddot{u}_i(s)\,,$ $u_i(\tau)\,,\ \dot{u}_i(\tau)\,,\ \ddot{u}_i(\tau)\,,\quad i = 0,1,...,k-1$, получаются выражения типа (22)–(24), (29)–(33):

$$\ddot{u}_i(\tau) = -y_i'(0)\, \mu_2(0) e^{\mu_2(0)\tau} + \left(x_i(\tau) + \tau\, x_i'(\tau) + \tau\, x_i(\tau)\, \mu_2(0)\right) e^{\mu_2(0)\tau}\,, \tau \ge 0.$$

$$\dot{u}_i(\tau) = -y_i'(0)\, e^{\mu_2(0)\tau} + \tau\, x_i(\tau)\, e^{\mu_2(0)\tau}\,, \quad \tau \ge 0. \tag{35}$$

$$u_i(\tau) = -\frac{y_i'(0)}{\mu_2(0)} e^{\mu_2(0)\tau} - \int_\tau^{\infty} p\, x_i(p)\, e^{\mu_2(0)p} dp\,, \;\; \tau \ge 0.$$

$$\ddot{w}_i(s) = \mu_3(1) y_i(1)\, e^{\mu_3(1)s} + \left(z_i(s) + s\, z_i'(s) + s\, z_i(s)\, \mu_3(1)\right) e^{\mu_3(1)s}\,, \quad s \le 0.$$

$$\dot{w}_i(s) = y_i(1)\, e^{\mu_3(1)s} + s\, z_i(s)\, e^{\mu_3(1)s}\,, \quad s \le 0. \tag{36}$$

$$w_i(s) = \frac{y_i(1)}{\mu_3(1)} e^{\mu_3(1)s} - \int_s^{-\infty} p\, z_i(p)\, e^{\mu_3(1)p} dp\,, \;\; s \le 0.$$

отсюда последовательно получаем, что функции $w_i(s)\,,\ \dot{w}_i(s)\,,\ \ddot{u}_i(s)\,,$ $(i = 0,1,...,k-1)$, при $s \to -\infty$, функции $u_i(\tau)\,,\ \dot{u}_i(\tau)\,,\ \ddot{u}_i(\tau)\,,$ $(i = 0,1,...,k-1)$, при $\tau \to +\infty$ будут экспоненциально убывающими:

$$\left|u_i^{(j)}(\tau)\right| \le K e^{\bar{\mu}_2(0)\tau},\ \tau \ge 0, \left|w_i^{(j)}(s)\right| \le K e^{\bar{\mu}_3(1)s},\ s \le 0,\ \ j = 0,1,2. \tag{37}$$

Тогда из $(12)_k$, $(26)_k$ получим задачу

$$B(t)\, y_k'(t) + C(t)\, y_k(t) = -A(t)\, y_{k-1}''(t) - y_{k-2}'''(t)\,, \quad y_k(0) = u_{k-1}(0).$$

Отсюда однозначно определяется $y_k(t)$ при $0 \le t \le 1$.

Рассмотрим $\Phi_k(\tau)\,,\ P_k(s)$ из (14), (16), где $\Phi_k(\tau)$ выражается через $u_i^{(j)}(\tau)$ $(j = 0,1,2;\ i < k)$, а $P_k(s)$ — через $w_i^{(j)}(s)$ $(j = 0,1,2;\ i < k)$. Тогда с учетом (22)–(24), (29)–(33), (35), (36) функции $\Phi_k(\tau)$,$P_k(s)$ записываются в виде

$$\Phi_k(\tau) = e^{\mu_2(0)\tau}\,\tilde{\Phi}_k(\tau)\,; \quad \tau \geq 0, P_k(s) = \tilde{P}_k(s)\,e^{\mu_3(1)s}\,,\ s \leq 0, \tag{38}$$

$\tilde{\Phi}_k(\tau)$ — многочлен первой степени относительно τ; $\tilde{P}_k(s)$ — многочлен первой степени относительно s.

С учетом (38) из $(13)_k$, $(15)_k$ для $w_k(\tau)$, $u_k(\tau)$ получаем уравнение

$$\frac{d^3 w_k}{ds^3} + A(1)\frac{d^2 w_k}{ds^2} + B(1)\frac{dw_k}{ds} = \tilde{P}_k(s)\,e^{\mu_3(1)s}\,,\ \ s \leq 0; \tag{39}$$

$$\frac{d^3 u_k}{d\tau^3} + A(0)\frac{d^2 u_k}{d\tau^2} + B(0)\frac{du_k}{d\tau} = e^{\mu_2(0)\tau}\,\tilde{\Phi}_k(\tau)\,,\ \ \tau \geq 0. \tag{40}$$

Решая (49), (50) с учетом $(26)_k$:

$$w_k(0) = y_k(1),\ \ \dot{u}_k(0) = -y_k'(1),$$

получаем решения

$$\dot{u}_k(\tau) = -y_k'(1)\,e^{\mu_2(0)\tau} + \tau\,x_k(\tau)\,e^{\mu_2(0)\tau}\,,\ \ \ \tau \geq 0; \tag{41}$$

$$\dot{w}_k(\tau) = y_k(1)\,e^{\mu_3(1)s} + s\,z_k(s)\,e^{\mu_3(1)s}\,,\ \ \ s \leq 0. \tag{42}$$

Решая (41), (42), с учетом требований $u_k(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$, $w_k(\tau) \to 0$ при $s \to -\infty$, получаем решения

$$u_k(\tau) = -\frac{y_k'(0)}{\mu_2(0)}e^{\mu_2(0)\tau} - \int_\tau^\infty p\,x_k(p)\,e^{\mu_2(0)p}dp\,,\ \ \tau \geq 0;$$

$$w_k(\tau) = -\frac{y_k'(1)}{\mu_3(1)}e^{\mu_3(1)s} - \int_s^{-\infty} p\,z_k(p)\,e^{\mu_3(1)p}dp\,,\ \ s \leq 0. \tag{43}$$

и начальные условия

$$w_k(0) = -\frac{y_k'(1)}{\mu_3(1)} - \int_0^{-\infty} p\,x_k(p)\,e^{\mu_3(1)p}dp; \quad u_k(0) = -\frac{y_k'(0)}{\mu_2(0)} - \int_0^{\infty} p\,x_k(p)\,e^{\mu_2(0)p}dp \tag{44}$$

Из (41), (42) будем иметь

$$\ddot{w}_k(s) = -\mu_3(1)y_k'(1)\,e^{\mu_3(1)s} + (z_k(s) + s\,z_k'(s)\ + s\,z_k(s)\,\mu_3(1))\,e^{\mu_3(1)s}\,,\ \ \ s \leq 0;$$

$$\ddot{u}_k(\tau) = -y_k'(0)\,\mu_2(0)e^{\mu_2(0)\tau} + (x_k(\tau) + \tau\,x_k'(\tau) + \tau\,x_k(\tau)\,\mu_2(0))\,e^{\mu_2(0)\tau}\,, \tau \geq 0. \tag{45}$$

Из (41), (52), (43), (45) вытекает справедливость следующих оценок:

$$\left|u_k^{(j)}(\tau)\right| \leq Ke^{\bar{\mu}_2(0)\tau}\ \ \tau \geq 0; \quad \left|w_k^{(j)}(s)\right| \leq Ke^{\bar{\mu}_3(1)s},\ \ s \leq 0,\ \ j = 0, 1, 2. \tag{46}$$

Таким образом, члены разложения (4) при всех $k = 1, 2, ...$ построены.

Доказательство справедливости асимптотического разложения решения краевой задачи

Для доказательства справедливости асимптотического разложения решения задачи (1), (2) определим члены разложения (4), (9)–(11) до номера N включительно и образуем частичную сумму $Y_N(t,\varepsilon)$ разложения (4):

$$Y_N(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k y_k(t) + \varepsilon\sum_{k=0}^{N} u_k\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\varepsilon^k + \sum_{k=0}^{N} w_k\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\varepsilon^k. \tag{47}$$

Лемма. Пусть выполнены условия I–III. Тогда функция $Y_N(t,\varepsilon)$, выражаемая формулой (47), удовлетворяет сингулярно возмущенную задачу (1), (2) с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$ при $\varepsilon \to 0$:

$$L_\varepsilon Y_N\left(t,\varepsilon\right)-F\left(t\right)=O\left(\varepsilon^{N+1}\right),\ 0\le t\le 1; \tag{48}$$

$$L_1 Y_N-a_1=O(\varepsilon^{N+1}),\quad L_2 Y_N-a_2=O\left(\exp\left(-\frac{\nu}{\varepsilon}\right)\right),\quad L_3 Y_N-a_3=O\left(\varepsilon^{N+1}\right).$$

Доказательство леммы непосредственно следует из самого способа построения функций $y_k\left(t\right)$, $W_k\left(\tau\right)$.

Теорема. Пусть выполнены условия I–III. Тогда при достаточно малых $\varepsilon>0$ на сегменте $0\le t\le 1$ решение задачи (1), (2) существует, единственно и удовлетворяет оценке

$$y\left(t,\varepsilon\right)=Y_N\left(t,\varepsilon\right)+O\left(\varepsilon^{N+1}\right),\ 0\le t\le 1. \tag{49}$$

Доказательство. Положим $R\left(t,\varepsilon\right)=y\left(t,\varepsilon\right)-Y_N\left(t,\varepsilon\right)$, где $y\left(t,\varepsilon\right)$ — решение задачи (1), (2); $Y_N\left(t,\varepsilon\right)$ — частичная сумма разложения (4). Подставив $y\left(t,\varepsilon\right)=R\left(t,\varepsilon\right)+Y_N\left(t,\varepsilon\right)$ в задачу (1), (2), для остаточного члена $R\left(t,\varepsilon\right)$ получим задачу

$$L_\varepsilon R=\varepsilon^2 R'''+\varepsilon A\left(t\right)R''+B\left(t\right)R'+C\left(t\right)R=F\left(t,\varepsilon\right); \tag{50}$$

$$L_1 R=a_1-L_1 Y_N=O(\varepsilon^{N+1}),\ \ L_2 R=\ a_2-L_2 Y_N=-H(t,\varepsilon),\ L_3 R=\ a_3-\ L_3 Y_N=O\left(\varepsilon^{N+1}\right), \tag{51}$$

где $F\left(t,\varepsilon\right)=F\left(t\right)-\left[\varepsilon^2 Y_N'''+\varepsilon A\left(t\right)Y_N''+B\left(t\right)Y_N'+C\left(t\right)Y_N\right]$, которая в силу (49), удовлетворяет при достаточно малых ε оценкам

$$F\left(t,\varepsilon\right)=O\left(\varepsilon^{N+1}\right),\ 0\le t\le 1. \tag{52}$$

Задача (50), (51) удовлетворяет всем условиям теоремы 1 работы [1]. Применяя теперь утверждения этой теоремы к краевой задаче (50), (51) и оценку (52), получим, что при достаточно малых ε решение задачи (61), (62) существует, единственно и удовлетворяет оценке $\max\limits_{0\le t\le 1}\left|R\left(t,\varepsilon\right)\right|=O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y(t,\varepsilon)=y_0(t),\quad 0\le t<1,\lim_{\varepsilon\to 0}y'(t,\varepsilon)=y_0'(t),\quad 0<t<1;$$

$$\Delta_1^0=\lim_{\varepsilon\to 0}y(1,\varepsilon)-y_0(1)=\frac{1}{\tilde\alpha}\left(\bar a-H_1^0\bar y\right),\ \ y'(1,\varepsilon)=\frac{\mu_3(1)}{\varepsilon\tilde\alpha}\left(\bar a-H_0^1\bar y+O(\varepsilon)\right);$$

$$\Delta_0^1=\lim_{\varepsilon\to 0}y'(0,\varepsilon)-y_0'(0)=\frac{1}{\tilde\alpha}\left(\bar{\bar a}-H_0^1\bar y\right),\ \ y''(1,\varepsilon)=\frac{\mu_2(0)}{\varepsilon\tilde\alpha}\left(\bar{\bar a}-H_0^1\bar y+O(\varepsilon)\right),$$

где $H_1^0\bar y=\ \tilde\alpha y(0)$, $H_0^1\bar y=\tilde\alpha\bar y'(0)$.

Отсюда заключаем, что сингулярно возмущенная краевая задача (1), (2) в окрестности точки $t=0$ обладает явлением скачка первого порядка, а в окрестности точки $t=1$ — явлением скачка нулевого порядка, что является одной из особенностей изучаемой задачи.

Список литературы

1 Нургабыл Д.Н. Аналитический метод исследования решения начальной задачи для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных / Д.Н.Нургабыл // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2014. — № 1. — С. 68–72.

2 Nurgabyl D. Asymptotic estimates for the Solution of a Restoration Problem with Initial Jump / D.Nurgabyl // Journal of Applied Mathematics (USA). — Vol. 2014.

3 Нургабыл Д.Н. Асимптотические оценки решения краевой задачи с начальным скачком для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных / Д.Н.Нургабыл, К.А.Касымов, А.Б.Уаисов // Украинский математический журнал. — 2013. — №. 5. — С. 629–641.

4 Nurgabyl D. Boundary value problems with boundary jumps for singularly perturbed differential equations of conditionally stable type in the critical case / D.Nurgabyl, F.Boribekova, G.Nurgabylova // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2016. — No. 3. 4.

Д.Н. Нұрғабыл, Ұ.А. Бекіш

Шеттік секірісі бар ерекше ауытқыған шекаралық есеп шешімінің асимптотикалық жіктелісі

Мақалада шартты орнықты үшінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін ерекше ауытқыған шекаралық есеп қарастырылды. Зерттеліп отырған ерекше ауытқыған есеп шешімінің асимптотикалық бағамдары арқылы ізделінді, шешімнің асимптотикасының түрі анықталды. Қарастырылып отырған есеп шешімінің асимптотикалық жіктелісінің барлық мөшелерін тізбектей анықтау алгоритмі көрсетілді. Шеттік функциялардың экспоненциалдық бағамдары алынды. Қарастырылып отырған ерекше ауытқыған шекаралық есеп шешімінің асимптотикалық жіктелісінің дербес қосындысы беретін асимптотикалық дәлдіктің бағамы анықталды. Шекаралық есеп шешімінің бар болуы, жалғыздығы және асимптотикалық жіктелістің негізділігі туралы теорема дәлелденді. Кішкене параметр нөлге ұмтылғанда ауытқыған есеп шешімінің ауытқымаған есеп шешіміне шектік көшуі туралы, шеттік секірістер құбылысының барлығы туралы сұрақтары зерттелді. Шеттік секірістер формулалары, олардың реттері табылды.

Кілт сөздер: дифференциалдық теңдеулер, ерекше ауытқу, шекаралық есеп, шеттік секірістер, кіші параметр, асимптотика, шекке көшу.

D.N. Nurgabyl, U.A. Bekish

Asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed boundary value problem with boundary initial jumps

In this paper we consider a singularly perturbed general boundary value problem for a third-order differential equation in the conditionally stable case. The form of the asymptotics of the desired solution is determined with the help of the established asymptotic estimates for the solution of the singularly perturbed boundary-value problem under study. An algorithm is described with which all the terms of the asymptotic expansion for the problem under consideration are determined successively. Exponential estimates for boundary functions are established. An asymptotic accuracy estimate is obtained that is obtained by the partial sum of the asymptotic expansion of the solution of the singularly perturbed general boundary value problem under consideration. A theorem on the existence, uniqueness, and validity of the asymptotic expansion of the solution of the boundary value problem is proved. The questions of the limiting transition of the solution of the perturbed problem to the solution of the unperturbed problem are studied with the small parameter tending to zero, the existence of the boundary jump phenomenon. Formulas for boundary jumps, and the order of jumps are found.

Keywords: differential equations, singular perturbations, boundary value problem, boundary jumps, small parameter, asymptotic, limit transition.

References

1 Nurgabyl, D.N. (2014). Analiticheskii metod issledovaniia resheniia nachalnoi zadachi dlia lineinykh differentsialnykh uravnenii s malym parametrom pri proizvodnykh [An analytical method for investigating the solution of the initial problem for linear differential equations with a small parameter for derivatives]. *Vestnik Karahandinskoho universiteta. Seria Matematika – Bulletin of Karaganda University. Mathematics Series, 1,* 68–72 [in Russian].

2 Nurgabyl, D. (2014). Asymptotic estimates for the Solution of a Restoration Problem with Initial Jump. *Journal of Applied Mathematics (USA).*

3 Nurgabyl, D.N., Kasymov, K.A. & Uaisov, A.B. (2013). Asimptoticheskie otsenki resheniia kraevoi zadachi s nachalnym skachkom dlia lineinykh differentsialnykh uravnenii s malym parametrom pri proizvodnykh [Asymptotic estimates for the solutions of boundary-value problems with initial jump for linear differential equations with small parameter in the coefficients of derivatives]. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal – Ukrainian Mathematical Journal, 65,* 5, 694–708 [in Russian].

4 Nurgabyl, D., Boribekova, F. & Nurgabylova, G. (2016). Boundary value problems with boundary jumps for singularly perturbed differential equations of conditionally stable type in the critical case. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 3,* 4, 3425–3432.