УДК 517.51

А. Калыбай[1], Р. Ойнаров[2], С. Шалгинбаева[3]

[1] *Университет КИМЭП, Алматы, Казахстан;*
[2] *Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан;*
[3] *Казахский университет международных отношений и мировых языков им. Абылай хана, Алматы, Казахстан*
(E-mail: o_ryskul@mail.ru)

Дискретное весовое неравенство Харди в разностной форме

В статье мы находим необходимые и достаточные условия для выполнения дискретного неравенства Харди с весами, записанного в разностной форме. Задача исследуется на множестве финитных последовательностей. Ключевой результат данной статьи – это нахождение оценок для точной константы исследуемого неравенства. Данные оценки в дальнейшем будут нами применены для установления качественных характеристик, таких как условия осцилляторности и неосцилляторности, некоторых разностных уравнений. Более того, как следствие основных результатов, мы находим критерии вложения некоторых пространств и компактности этого вложения.

Ключевые слова: неравенство Харди, весовые последовательности, оператор, пространство последовательностей, вложение, компактность.

Введение

Пусть $0 < p, q \le \infty$. Пусть $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ – неотрицательная, а $\rho = \{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$ – положительная последовательности действительных чисел.

Дискретным весовым неравенством Харди называется неравенство вида

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

для всех последовательностей действительных чисел $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Неравенство для всех $0 < p, q \le \infty$ исследовано достаточно хорошо в работах [1-3], а в книге [4] даны история вопроса и сводка полученных результатов по неравенству Харди (1).

Если в (1) положим $y_1 = 0$, $y_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, $n = 1, 2, ...$, то неравенство (1) переходит в неравенство Харди в разностной форме

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i |\Delta y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

для всех последовательностей действительных чисел $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, у которых $y_1 = 0$, где $v_1 = 1$, $v_n = u_{n-1}$, $n \ge 2$.

Пусть $\dot{Y}$ – множество всех ненулевых последовательностей действительных чисел $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, которые имеют конечное число начальных членов, равных нулю. Обозначим через $\overset{\circ}{Y}$ множество нетривиальных элементов $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in \dot{Y}$, для которых существует целое $m = m(y) > 1$ такое, что $y_i = 0$ при $i \ge m$.

Пусть w_p^1 – пространство всех последовательностей $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которых конечна (квази) норма

$$\|y\|_{w_p^1} = |y_1| + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i |\Delta y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 < p < \infty. \tag{3}$$

Обозначим через $\dot{w}_p^1$ и $\overset{\circ}{w}{}_p^1$ соответственно замыкания множеств $\dot{Y} \cap w_p^1$ и $\overset{\circ}{Y}$ по (квази) норме (3).

Из определения множеств $\overset{\cdot}{w}{}_p^1$ и $\overset{\circ}{w}{}_p^1$ следует, что $\overset{\cdot}{w}{}_p^1 \supset \overset{\circ}{w}{}_p^1$ и $y_1 = 0$ для любого $y \in \overset{\cdot}{w}{}_p^1$. Следовательно, неравенство (1) эквивалентно неравенству (2) на множестве $\overset{\cdot}{w}{}_p^1$.

Рассмотрим неравенство (2) на множестве $\overset{\circ}{w}{}_p^1$. Отметим, что непрерывный аналог такой задачи исследован в работах [5-7]. Понятно, что если $\overset{\cdot}{w}{}_p^1 = \overset{\circ}{w}{}_p^1$, то неравенство (1) эквивалентно неравенству (2) на множестве $\overset{\circ}{w}{}_p^1$. Поэтому выясним, когда $\overset{\cdot}{w}{}_p^1 = \overset{\circ}{w}{}_p^1$.

Лемма 1. Равенство $\overset{\cdot}{w}{}_p^1 = \overset{\circ}{w}{}_p^1$ выполнено тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i^{1-p'} = \infty$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Если $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i^{1-p'} < \infty$, то $y_i \to 0$ при $i \to \infty$ для каждого $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in \overset{\circ}{w}{}_p^1$.

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{1-p'} = \infty. \tag{4}$$

Достаточно показать $\overset{\circ}{w}{}_p^1 \supset \overset{\cdot}{w}{}_p^1$. Пусть $z = \{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ – произвольный элемент из $\overset{\cdot}{w}{}_p^1$. Ввиду условия (4) для каждого $n > 1$ найдется целое n^* такое, что $n^* > n$ и

$$|z_n| \left(\sum_{i=n}^{n^*} \rho_i^{1-p'} \right)^{-\frac{1}{p'}} \le \left(\sum_{i=n}^{\infty} \rho_i |\Delta z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

Пусть

$$y_{n,i} = \begin{cases} z_i, & 1 \le i \le n-1, \\ z_n \left(\sum\limits_{i=n}^{n^*} \rho_i^{1-p'} \right)^{-1} \sum\limits_{j=i}^{n^*} \rho_j^{1-p'}, & n \le i \le n^*, \\ 0, & i > n^*. \end{cases}$$

Очевидно, что $y_n = \{y_{n,i}\}_{i=1}^{\infty} \in \overset{\circ}{Y}$ для всех n. Используя оценку (5), имеем

$$\|z - y_n\|_{w_p^1} \le \left(\sum_{i=n}^{n^*} \rho_i |\Delta z_i - \Delta y_{n,i}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=n^*}^{\infty} \rho_i |\Delta z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=n}^{n^*} \rho_i |\Delta z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=n}^{n^*} \rho_i |\Delta y_{n,i}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=n^*}^{\infty} \rho_i |\Delta z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le 2 \left(\sum_{i=n}^{\infty} \rho_i |\Delta z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + |z_n| \left(\sum_{i=n}^{n^*} \rho_i^{1-p'} \right)^{-\frac{1}{p'}} \le 3 \left(\sum_{i=n}^{\infty} \rho_i |\Delta z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Откуда $\|z - y_n\|_{w_p^1} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $z \in \overset{\circ}{w}{}_p^1$, т.е. $\overset{\circ}{w}{}_p^1 \supset \overset{\cdot}{w}{}_p^1$.

Обратно, пусть $\overset{\cdot}{w}{}_p^1 = \overset{\circ}{w}{}_p^1$, но

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{1-p'} < \infty. \tag{6}$$

Пусть $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in \overset{\cdot}{w}{}_p^1$ и последовательность $y_n = \{y_{n,i}\}_{i=1}^{\infty} \in \overset{\circ}{w}{}_p^1$ такая, что $\|y - y_n\|_{w_p^1} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда в силу (6) для любого $j > 1$ имеем

$$|y_j - y_{n,j}| \le \sum_{i=1}^{j} |\Delta(y_i - y_{n,i})| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{1-p'} \right)^{-\frac{1}{p'}} \|y - y_n\|_{w_p^1}. \tag{7}$$

Если $y_i = 1$ для достаточно больших i, то, в силу (6), принадлежность $y \in \overset{\cdot}{w}{}_p^1$ не нарушается и из (7) следует $y_{n,j} \to y_j$ при $n \to \infty$ для всех $j \geq 1$. Поэтому для достаточно больших j имеем $y_{n,j} > 0$. Но $y_{n,j} = 0$ при $j > m = m(n) > 1$. Полученное противоречие доказывает, что из $\overset{\cdot}{w}{}_p^1 = \overset{\circ}{w}{}_p^1$ следует (4).

Если выполнено (6), то из (7) имеем $y_j \to 0$ при $j \to \infty$. Лемма 1 доказана.

Отметим, что следование из (4) равенства $\overset{\cdot}{w}{}_p^1 = \overset{\circ}{w}{}_p^1$ доказано в [8] несколько другим путем.

Пусть $-\infty \leq m < n \leq \infty$. Обозначим через $\overset{\circ}{Y}(m,n)$ совокупность ненулевых последовательностей, для которых $y = \{y_i\}_{i=m}^n$ существуют целые числа такие, что $t = t(y)$, $s = s(y)$: $m < t \leq s < n$ и $y_i = 0$ при $m \leq i < t$ и $s < i \leq n$.

В настоящей работе исследуется неравенство

$$\left(\sum_{i=m}^{n} v_i |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=m}^{n} \rho_i |\Delta y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \; y \in \overset{\circ}{Y}(m,n). \tag{8}$$

При $m = 1$ и $n = \infty$ неравенство (8) совпадает с неравенством (2) на множестве $\overset{\circ}{w}{}_p^1$. Неравенство (8) при конечных m и n имеет самостоятельное значение.

Положим

$$B_{p,q}(m,n) = \sup_{m<t\leq s<n} \frac{\left(\sum\limits_{i=t}^{s} v_i \right)^{\frac{1}{q}}}{\left[\left(\sum\limits_{i=m}^{t-1} \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} + \left(\sum\limits_{i=s}^{n} \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} \right]^{\frac{1}{p}}},$$

$$\alpha_q = \inf_{\lambda>1} \frac{\lambda(\lambda^q - 1)^{\frac{1}{q}}}{(\lambda - 1)}, \; \gamma_0 = \gamma_0(q) = \frac{2q}{q+1} \left(\frac{2q}{q+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{2q}{q-1} \right)^{\frac{1}{q'}};$$

$$\gamma_1 = \gamma_1(q) = \frac{2q}{q+1} q^{\frac{1}{q}} \left(\frac{2q}{q-1} \right)^{\frac{1}{q'}}, \; \gamma_2 = \gamma_2(q) = q q^{\frac{1}{q}} (q')^{\frac{1}{q'}},$$

где $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Основные результаты

Теорема 1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и $-\infty \leq m < n \leq \infty$. Неравенство (8) выполнено тогда и только тогда, когда $B_{p,q}(m,n) < \infty$. При этом

$$B_{p,q}(m,n) \leq C \leq 2^{\frac{1}{p}} \alpha_q B_{p,q}(m,n), \tag{9}$$

где

$$\gamma_0 < \alpha_q < \min\{\gamma_1, \gamma_2, 4\} \text{ при } q \neq 2; \tag{10}$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}-1} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ при } q = 2,$$

и C – наименьшая постоянная в (8).

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $f(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda^q-1)^{\frac{1}{q}}}{\lambda-1}$, $1 < q < \infty$. Существует точка λ_q такая, что

$$\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } \frac{2q}{q+1} < \lambda_q < \min\{q, 2\} \text{ при } q \neq 2; \tag{11}$$

$$\inf_{\lambda>1} f(\lambda) = f(\lambda_q) = \frac{\lambda_q^2}{(\lambda_q - 1)^{\frac{1}{q'}}} \text{ и } f(\lambda_2) = \left(\frac{\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}-1} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

и при $q \neq 2$ имеет место оценка

$$\gamma_0 < f(\lambda_q) < \min\{\gamma_1, \gamma_2, 4\}. \tag{13}$$

Доказательство. Функция $f(\lambda)$ непрерывно дифференцируема при $\lambda > 1$ и $\lim\limits_{\lambda\to 1+} f(\lambda) = \infty$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = \infty$. Следовательно, она имеет минимум. Производную функции f представим в виде

$$f'(\lambda) = \frac{(\lambda^q - 1)^{\frac{1}{q}}}{\lambda - 1}\varphi(\lambda) = \frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda^q-1)^{\frac{1}{q'}}}d(\lambda),$$

где $\varphi(\lambda) = \frac{\lambda^q}{\lambda^q - 1} - \frac{1}{\lambda - 1}$ и $d(\lambda) = \lambda^{q+1} - 2\lambda^q + 1$.

При $q = 2$ имеем $d(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-1)$. Откуда $d(\lambda_2) = f'(\lambda_2) = 0$, где $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Следовательно, при $q = 2$ имеем $\inf\limits_{\lambda>1} f(\lambda) = f(\lambda_2) = \left(\frac{\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Теперь рассмотрим случай $q \neq 2$. Пусть $\lambda = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Применяя формулу конечных приращений Лагранжа, имеем

$$\varphi(\lambda) = \frac{(1+\varepsilon)^q}{(1+\varepsilon)^q - 1} - \frac{1}{\varepsilon} \geq \frac{(1+\varepsilon)^q}{q\varepsilon(1+\varepsilon)^{q-1}} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{q\varepsilon}(\varepsilon - (q-1)).$$

Откуда $\varphi(\lambda) > 0$, а тем самым $f'(\lambda) > 0$ при $\lambda > q$.

Функция $d(\lambda)$ в точке $\lambda = \frac{2q}{q+1}$ достигает своего минимума, убывает при $1 < \lambda < \frac{2q}{q+1}$ и возрастает при $\lambda > \frac{2q}{q+1}$. Так как $d(2) = 1 > 0$, то $d(\lambda) > 0$ и $f'(\lambda) > 0$ при $\lambda \geq 2$. Таким образом, $f'(\lambda) > 0$ при $\lambda \geq \min\{q, 2\}$.

Из $d(1) = 0$ и убывания функции $d(\lambda)$ при $1 < \lambda \leq \frac{2q}{q+1}$ следует, что $f'(\lambda) < 0$ при $1 < \lambda \leq \frac{2q}{q+1}$. Поэтому, в силу непрерывности функции f', существует точка λ_q, удовлетворяющая условию (11). Так как $f'(\lambda_q) = \varphi(\lambda_q) = 0$ и точка λ_q является точкой пересечения графиков двух убывающих функций $\frac{\lambda^q}{\lambda^q-1}$ и $\frac{1}{\lambda-1}$, то функция $f(\lambda)$ убывает при $1 < \lambda < \lambda_q$, возрастает при $\lambda > \lambda_q$ и в точке λ_q принимает минимум, т.е. $\inf\limits_{\lambda>1} f(\lambda) = f(\lambda_q)$. Подставляя $\lambda_q^q - 1 = \lambda_q^q(\lambda_q - 1)$, вытекающее из $\varphi(\lambda_q) = 0$, в выражение $f(\lambda_q)$, получим $f(\lambda_q) = \frac{\lambda_q^2}{(\lambda_q-1)^{\frac{1}{q'}}}$. Таким образом, выполнено (12).

Функция $g(t) = \frac{t^2}{(t-1)^{\frac{1}{q'}}}$ в точке $t = \frac{2q}{q+1}$ принимает минимум. Так как $\lambda_q > \frac{2q}{q+1}$, то $f(\lambda_q) > g\left(\frac{2q}{q+1}\right)$. Поэтому

$$f(\lambda_q) > g\left(\frac{2q}{q+1}\right) = \frac{2q}{q+1}\left(\frac{2q}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{2q}{q-1}\right)^{\frac{1}{q'}} = \gamma_0(q). \tag{14}$$

С другой стороны, из (11) имеем

$$f(\lambda_q) < \min\left\{f\left(\frac{2q}{q+1}\right), f(q), f(2)\right\}. \tag{15}$$

Нетрудно заметить, что $f(2) < 4$. Из $\varphi(\lambda_q) = 0$ и $\lambda_q < q$ следует $\frac{q^q}{q^q-1} > \frac{1}{q-1}$ или $q(q-1)^{\frac{1}{q}} > (q^q-1)^{\frac{1}{q}}$. Поэтому

$$f(q) = \frac{q(q^q-1)^{\frac{1}{q}}}{q-1} < \frac{q^2}{(q-1)^{\frac{1}{q'}}} = qq^{\frac{1}{q}}(q')^{\frac{1}{q'}} = \gamma_2(q). \tag{16}$$

Оценим $f\left(\frac{2q}{q+1}\right)$:

$$f\left(\frac{2q}{q+1}\right) = \frac{2q}{q-1}\left[\left(1 + \frac{q-1}{q+1}\right)^q - 1\right]^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \frac{2q}{q-1}\left[q\frac{q-1}{q+1}\left(\frac{2q}{q+1}\right)^{q-1}\right]^{\frac{1}{q}} = \frac{2q}{q+1}q^{\frac{1}{q}}\left(\frac{2q}{q-1}\right)^{\frac{1}{q'}} = \gamma_1(q). \tag{17}$$

Из (14)–(17), с учетом $f(2) < 4$, имеем (13). Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть выполнено неравенство (8) с наименьшей постоянной $C>0$. Пусть α,t,s,β — целые числа, удовлетворяющие условию $m<\alpha\le t\le s\le\beta<n$.

Построим пробную последовательность $y=\{y_k\}$ следующим образом

$$y_k\equiv y_k^{\alpha,t,s,\beta}=\begin{cases}\sum\limits_{i=\alpha-1}^{k-1}\rho_i^{1-p'}\left(\sum\limits_{i=\alpha-1}^{t-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{-1}, & \alpha\le k\le t,\\ 1, & t\le k\le s,\\ \sum\limits_{i=k}^{\beta}\rho_i^{1-p'}\left(\sum\limits_{i=s}^{\beta}\rho_i^{1-p'}\right)^{-1}, & s\le k\le\beta,\\ 0, & m\le k<\alpha \text{ или } \beta<k\le n.\end{cases}$$

Очевидно, что $y\in\overset{\circ}{Y}(m,n)$. Тогда

$$\left(\sum_{i=m}^{n}\rho_i|\Delta y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left[\left(\sum_{i=\alpha-1}^{t-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}+\left(\sum_{i=s}^{\beta}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right]^{\frac{1}{p}} \tag{18}$$

и

$$\left(\sum_{i=m}^{n}v_i|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\ge\left(\sum_{i=t}^{s}v_i\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{19}$$

Из (8), (18) и (19) имеем

$$\left(\sum_{i=t}^{s}v_i\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left[\left(\sum_{i=\alpha-1}^{t-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}+\left(\sum_{i=s}^{\beta}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Откуда, в силу независимости левой части от α и β, а также независимости постоянной C от t и s, имеем

$$B_{p,q}(m,n)\le C. \tag{20}$$

Достаточность. Пусть $B_{p,q}(m,n)<\infty$. Пусть $y=\{y_i\}\in\overset{\circ}{Y}(m,n)$. Не ограничивая общности, будем считать $y_i\ge 0$ для всех i. Пусть $\lambda>1$. Для любого целого числа k определим множество $T_k\equiv T_k(\lambda,y)=\{i: y_i>\lambda^k\}$. В силу ограниченности множества $\{y_i\}$ существует целое число $\tau=\tau(y,\lambda)$ такое, что $T_\tau\neq\oslash$, $T_{\tau+1}=\oslash$. Положим $\Delta T_k=T_k\backslash T_{k+1}$. Тогда

$$[m,n]=\bigcup_{k=-\infty}^{\tau}T_k=\bigcup_{k=-\infty}^{\tau}\Delta T_k. \tag{21}$$

Если $n=\infty$, то $[m,n]=[m,\infty)$. Из определения T_k и из $T_\tau\neq\oslash$ следует, что $T_k\neq\oslash$ при всех $k\le\tau$. Пусть $k<\tau$. Множество T_k представим в виде $T_k=\bigcup\limits_j[t_k^j,s_k^j]$, $[t_k^j,s_k^j]\bigcap[t_k^i,s_k^i]=\oslash$ при $i\neq j$. Положим $M_k^j=T_{k+1}\bigcap[t_k^j,s_k^j]$, $\Omega_k=\{j: M_k^j\neq\oslash\}$ и для $j\in\Omega_k$ определим $x_k^j=\min M_k^j$, $z_k^j=\max M_k^j$. Тогда $t_k^j\le x_k^j$, $z_k^j\le s_k^j$ и

$$T_{k+1}\subset\bigcup_{j\in\Omega_k}[x_k^j,z_k^j],\ \Delta T_k\supset\bigcup_{j\in\Omega_k}\left([t_k^j,x_k^i-1]\bigcup[z_k^j+1,s_k^j]\right). \tag{22}$$

Пусть $t_k^j<x_k^j$. Тогда

$$y_{t_k^j-1}\le\lambda^k,\ y_{x_k^j}>\lambda^{k+1} \text{ и } \lambda^k(\lambda-1)=\lambda^{k+1}-\lambda^k\le y_{x_k^j}-y_{t_k^j-1}=$$

$$=\sum_{i=t_k^j}^{x_k^j-1}\Delta y_i\le\left(\sum_{i=t_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=t_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i|\Delta y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Откуда

$$\lambda^{pk}\left(\sum_{i=t_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\le\frac{1}{(\lambda-1)^p}\sum_{i=t_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i|\Delta y_i|^p. \tag{23}$$

Аналогично, если $z_k^j<s_k^j$, то

$$\lambda^{pk}\left(\sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\le\frac{1}{(\lambda-1)^p}\sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}\rho_i|\Delta y_i|^p. \tag{24}$$

Пусть $z_k^j=s_k^j$. Тогда $y_{s_k^j}=y_{z_k^j}>\lambda^{k+1}$, $y_{s_k^j+1}=y_{z_k^j+1}\le\lambda^k$ и

$$\lambda^k(\lambda-1)\le y_{z_k^j}-y_{z_k^j+1}=-\Delta y_{z_k^j}=\sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}(-\Delta y_i).$$

Откуда

$$\lambda^{pk}\rho_{z_k^j}=\lambda^{pk}\left(\sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\le\frac{\rho_{z_k^j}}{(\lambda-1)^p}|\Delta y_{z_k^j}|^p=\frac{1}{(\lambda-1)^p}\sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}\rho_i|\Delta y_i|^p. \tag{25}$$

Аналогично, если $t_k^j=x_k^j$, то

$$\lambda^{pk}\rho_{x_k^j-1}=\lambda^{pk}\left(\sum_{i=t_k^j-1}^{x_k^j-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\le\frac{\rho_{x_k^j-1}}{(\lambda-1)^p}|\Delta y_{x_k^j-1}|^p=\frac{1}{(\lambda-1)^p}\sum_{i=t_k^j-1}^{x_k^j-1}\rho_i|\Delta y_i|^p. \tag{26}$$

Неравенства (23)–(26) можно, объединив, написать в виде

$$\lambda^{pk}\left(\sum_{i=\tilde{t}_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\le\frac{1}{(\lambda-1)^p}\sum_{i=\tilde{t}_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i|\Delta y_i|^p; \tag{27}$$

$$\lambda^{pk}\left(\sum_{i=\tilde{t}_k^j}^{s_k^j}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\le\frac{1}{(\lambda-1)^p}\sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}\rho_i|\Delta y_i|^p, \tag{28}$$

где $\tilde{t}_k^j=t_k^j$, если $t_k^j<x_k^j$, и $\tilde{t}_k^j=t_k^j-1$, если $t_k^j=x_k^j$. Из $B_{p,q}(m,n)<\infty$ имеем

$$\sum_{i=x_k^j}^{z_k^j}v_i\le B_{p,q}^q(m,n)\left[\left(\sum_{i=\tilde{t}_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}+\left(\sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right]^{\frac{q}{p}}. \tag{29}$$

Положим

$$\omega_k^+=\left\{j\in\Omega_k:\ t_k^j<x_k^j,\ z_k^j<s_k^j\right\},\ \omega_{k,1}=\left\{j\in\Omega_k:\ t_k^j=x_k^j,\ z_k^j<s_k^j\right\};$$

$$\omega_{k,2}^+=\left\{j\in\Omega_k:\ t_k^j<x_k^j,\ z_k^j=s_k^j\right\},\ \omega_k^-=\left\{j\in\Omega_k:\ t_k^j=x_k^j,\ z_k^j=s_k^j\right\};$$

$$\Delta_{k,1}^+=\omega_k^+\bigcup\omega_{k,2},\ \Delta_{k,2}^+=\omega_k^+\bigcup\omega_{k,1},\ \Delta_{k,1}^-=\omega_k^-\bigcup\omega_{k,1},\ \Delta_{k,2}^-=\omega_k^-\bigcup\omega_{k,2}.$$

Очевидно, что $\Omega_k=\omega_k^+\bigcup\omega_{k,1}\bigcup\omega_{k,2}\bigcup\omega_k^-$. Из соотношения для ΔT_k в (22) имеем

$$\Delta T_k\supset\left(\bigcup_{j\in\Delta_{k,1}^+}[t_k^j,x_k^j-1]\right)\bigcup\left(\bigcup_{j\in\Delta_{k,2}^+}[z_k^j+1,s_k^j]\right). \tag{30}$$

Теперь мы готовы оценить левую часть неравенства (18). Далее будем считать, что сумма по пустому множеству равна нулю. Поэтому имеем

$$\sum_{i\in\Delta T_{k+1}} v_i|y_i|^q \le \lambda^{q(k+2)} \sum_{i\in\Delta T_{k+1}} v_i, \tag{31}$$

вне зависимости, пустое множество ΔT_{k+1} или нет. Используя (21), (22), (31) и равенство $\lambda^{qk} = (1-\lambda^{-q})\sum\limits_{t=-\infty}^{k}\lambda^{qt}$, имеем

$$F \equiv \sum_{k=m}^{n} v_k|y_k|^q = \sum_{k=-\infty}^{\tau-1}\sum_{i\in\Delta T_{k+1}} v_i|y_i|^q \le \sum_{k=-\infty}^{\tau-1}\lambda^{q(k+2)}\sum_{i\in\Delta T_{k+1}} v_i =$$

$$= \lambda^{2q}\sum_{k=-\infty}^{\tau-1}\lambda^{qk}\sum_{i\in\Delta T_{k+1}} v_i = \lambda^{2q}(1-\lambda^{-q})\sum_{k=-\infty}^{\tau-1}\sum_{i\in\Delta T_{k+1}} v_i\sum_{t=-\infty}^{k}\lambda^{qt} \le$$

$$\le \lambda^{q}(\lambda^{q}-1)\sum_{t=-\infty}^{\tau-1}\lambda^{qt}\sum_{k\ge t}\sum_{i\in\Delta T_{k+1}} v_i = \lambda^{q}(\lambda^{q}-1)\sum_{t=-\infty}^{\tau-1}\lambda^{qt}\sum_{i\in\Delta T_{t+1}} v_i =$$

$$= \lambda^{q}(\lambda^{q}-1)\sum_{k=-\infty}^{\tau-1}\lambda^{qk}\sum_{j\in\Omega_k}\sum_{i=x_k^j}^{z_k^j} v_i. \tag{32}$$

Подставляя (29) в (32), а затем применяя (27), (28) и неравенство Йенсена, получим

$$F \le \lambda^{q}(\lambda^{q}-1)B_{p,q}^{q}(m,n)\sum_{k=-\infty}^{\tau}\sum_{j\in\Omega_k}\left[\lambda^{pk}\left(\sum_{i=\tilde{t}_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \lambda^{pk}\left(\sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right]^{\frac{q}{p}} \le$$

$$\le \frac{\lambda^{q}(\lambda^{q}-1)}{(\lambda-1)^{q}}B_{p,q}^{q}(m,n)\left(\sum_{k=-\infty}^{\tau}\sum_{j\in\Omega_k}\left[\sum_{i=\tilde{t}_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i|\Delta y_i|^p + \sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}\rho_i|\Delta y_i|^p\right]\right)^{\frac{q}{p}}. \tag{33}$$

Так как

$$\sum_{j\in\Omega_k}\left(\sum_{i=\tilde{t}_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i|\Delta y_i|^p + \sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}\rho_i|\Delta y_i|^p\right) = \sum_{j\in\omega_k^+}\left(\sum_{i=t_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i|\Delta y_i|^p + \sum_{i=z_k^j+1}^{s_k^j}\rho_i|\Delta y_i|^p + \rho_{z_k^j}|\Delta y_{z_k^j}|^p\right) +$$

$$+ \sum_{j\in\omega_{k,1}}\left(\rho_{x_k^j-1}|\Delta y_{x_k^j-1}|^p + \sum_{i=z_k^j+1}^{s_k^j}\rho_i|\Delta y_i|^p + \rho_{z_k^j}|\Delta y_{z_k^j}|^p\right) +$$

$$+ \sum_{j\in\omega_{k,2}}\left(\sum_{i=t_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i|\Delta y_i|^p + \rho_{z_k^j}|\Delta y_{z_k^j}|^p\right) + \sum_{j\in\omega_k^-}\left(\rho_{x_k^j-1}|\Delta y_{x_k^j-1}|^p + \rho_{z_k^j}|\Delta y_{z_k^j}|^p\right) =$$

$$= \left(\sum_{j\in\Delta_{k,1}^+}\sum_{i=t_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i|\Delta y_i|^p + \sum_{j\in\Delta_{k,2}^+}\sum_{i=z_k^j+1}^{s_k^j}\rho_i|\Delta y_i|^p\right) +$$

$$+ \left(\sum_{j\in\Delta_{k,1}^-}\rho_{x_k^j-1}|\Delta y_{x_k^j-1}|^p + \sum_{j\in\Delta_{k,2}^-\bigcup\Delta_{k,2}^+}\rho_{z_k^j}|\Delta y_{z_k^j}|^p\right) = F_{k,1} + F_{k,2},$$

то, подставляя полученное равенство в (33), имеем

$$F \leq \frac{\lambda^q(\lambda^q-1)}{(\lambda-1)^q} B^q_{p,q}(m,n) \left(\sum_{k=-\infty}^{\tau} (F_{k,1}+F_{k,2}) \right)^{\frac{q}{p}}. \tag{34}$$

На основании (30) имеем $F_{k,1} \leq \sum\limits_{i\in\Delta T_k} \rho_i |\Delta y_i|^p$. Поэтому

$$\sum_{k=-\infty}^{\tau} F_{k,1} \leq \sum_{k=-\infty}^{\tau} \sum_{i\in\Delta T_k} \rho_i |\Delta y_i|^p = \sum_{i=m}^{n} \rho_i |\Delta y_i|^p. \tag{35}$$

Так $t_k^j - 1 = x_k^j \leq \lambda^k$ при $j \in \Delta^-_{k,1}$ и $z_k^j > \lambda^{k+1}$ при $j \in \Delta^-_{k,2} \bigcup \Delta^+_{k,2}$, то существуют целые числа $k_1 = k_1(k,j) < k$, $k_2 = k_2(k,j) > k$ такие, что $x_k^j - 1 \in \Delta T_{k_1}$, $j \in \Delta^-_{k,1}$ и $z_k^j \in \Delta T_{k_2}$, $j \in \Delta^-_{k,2} \bigcup \Delta^+_{k,2}$. Отметим, что $\Delta T_\tau = T_\tau$. Поэтому

$$\sum_{k=-\infty}^{\tau} F_{k,2} \leq \sum_{k=-\infty}^{\tau} \sum_{i\in\Delta T_k} \rho_i |\Delta y_i|^p = \sum_{i=m}^{n} y_i |\Delta y_i|^p. \tag{36}$$

Таким образом, из (34), (35) и (36) получим

$$F \leq 2^{\frac{q}{p}} \frac{\lambda^q(\lambda^q-1)}{(\lambda-1)^q} B^q_{p,q}(m,n) \left(\sum_{i=m}^{n} \rho_i |\Delta y_i|^p \right)^{\frac{q}{p}}$$

или

$$\left(\sum_{i=m}^{n} v_i |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \frac{\lambda(\lambda^q-1)^{\frac{1}{q}}}{\lambda-1} B_{p,q}(m,n) \left(\sum_{i=m}^{n} \rho_i |\Delta y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Левая часть этого неравенства не зависит от $\lambda > 1$, поэтому, беря инфимум по $\lambda > 1$ в правой части, получим

$$\left(\sum_{i=m}^{n} v_i |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \alpha_q B_{p,q}(m,n) \left(\sum_{i=m}^{n} \rho_i |\Delta y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\alpha_q = \inf\limits_{\lambda>1} \frac{\lambda(\lambda^q-1)^{\frac{1}{q}}}{\lambda-1}$, т.е. неравенство (18) выполнено с оценкой

$$C \leq 2^{\frac{1}{p}} \alpha_q B_{p,q}(m,n)$$

для наименьшей постоянной C, которая вместе с (20) дает (9). Оценка (10) следует из леммы 2. Теорема 1 доказана.

Построим простой пример. Пусть $m = 1$ и $n = 3$. Тогда неравенство (8) для $y \in \overset{\circ}{Y}(m,n)$ имеет вид $(v_2|y_2|^q)^{\frac{1}{q}} \leq C(\rho_1|y_2|^p + \rho_2|y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$, и оно выполнено тогда и только тогда, когда

$$B_{p,q}(1,3) = \frac{v_2^{\frac{1}{q}}}{(\rho_1+\rho_2)^{\frac{1}{p}}} = \frac{\left(\sum\limits_{i=2}^{2} v_i \right)^{\frac{1}{q}}}{\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{1} \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} + \left(\sum\limits_{i=2}^{2} \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} \right]^{\frac{1}{p}}} < \infty,$$

и наименьшая его константа $C = B_{p,q}(1,3)$, т.е. в этом случае левая оценка в (9) точна.

Следствие 1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i^{1-p'} < \infty$. Неравенство (2) на множестве $\overset{\circ}{w}{}^1_p$ выполнено тогда и только тогда, когда $B_{p,q}(1,\infty) < \infty$. При этом

$$B_{p,q}(1,\infty) \leq C \leq 2^{\frac{1}{p}} \alpha_q B_{p,q}(1,\infty),$$

где $\alpha_2 = \left(\frac{\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}-1} \right)^{\frac{1}{2}}$, при $q \neq 2$ оценка для величины α_q дана в (10), а C – наименьшая постоянная в (2).

Следствие 1 дает критерий непрерывного вложения $E:\overset{\circ}{w}{}_p^1\to l_{q,v}$, где $l_{q,v}$ – совокупность всех последовательностей $y=\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|y\|_{l_{q,v}}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}v_i|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},\ 1<q<\infty,$$

причем норма $\|E\|$ оператора вложения $E:\overset{\circ}{w}{}_p^1\to l_{q,v}$ совпадает с наименьшей постоянной C в (2).

Дополнительные результаты

Теорема 2. Пусть $1<p\le q<\infty$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\rho_i^{1-p'}<\infty$. Тогда вложение $E:\overset{\circ}{w}{}_p^1\to l_{q,v}$ компактно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to\infty}(B_{p,q})_t=0, \tag{37}$$

где

$$(B_{p,q})_t=\sup_{s\ge t}\frac{\left(\sum\limits_{i=t}^{s}v_i\right)^{\frac{1}{q}}}{\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{t-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}+\left(\sum\limits_{i=s}^{\infty}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть вложение $E:\overset{\circ}{w}{}_p^1\to l_{q,v}$ компактно. Тогда множество $M=\{y:\ y\in\overset{\circ}{w}{}_p^1,\ \|y\|_{w_p^1}\le 1\}$ ограничено и относительно компактно в $l_{q,v}$. По критерию из [9] относительно компактности ограниченного множества в $l_{q,v}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in M}\sum_{i=n}^{\infty}v_i|y_i|^q=0. \tag{38}$$

Пусть $y^{\alpha,t,s,\beta}=\{y_i^{\alpha,t,s,\beta}\}$ – последовательность, введенная в необходимой части теоремы 1 при $m=1$ и $n=\infty$.

Положим, что

$$x\equiv x^{\alpha,t,s,\beta}=y^{\alpha,t,s,\beta}\left[\left(\sum_{i=\alpha-1}^{t-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}+\left(\sum_{i=s}^{\beta}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right]^{-\frac{1}{p}}. \tag{39}$$

Тогда из $y^{\alpha,t,s,\beta}\in\overset{\circ}{Y}(1,\infty)$ и (18) следует, что $x\in\overset{\circ}{w}{}_p^1$ и $\|x\|_{w_p^1}\le 1$. Значит, $x\in M$. Пусть $\{\alpha,t,s,\beta\}=$ $=\{\alpha,t,s,\beta:\ 1<\alpha\le t\le s\le\beta<\infty\}$. Из (38) имеем

$$0=\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in M}\sum_{i=n}^{\infty}v_i|y_i|^q\ge\lim_{n\to\infty}\sup_{\{\alpha,t,s,\beta\}}\sum_{i=n}^{\infty}v_i|x_i^{\alpha,t,s,\beta}|^q\ge$$

$$\ge\lim_{t\to\infty}\sup_{s\ge t}\frac{\sum\limits_{i=t}^{s}v_i}{\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{t-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}+\left(\sum\limits_{i=s}^{\infty}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right]^{\frac{q}{p}}}=\lim_{t\to\infty}(B_{p,q})_t,$$

т.е. выполнено (37).

Достаточность. Пусть выполнено (37). Тогда нетрудно заметить, что $B_{p,q}(1,\infty)<\infty$. Пусть $n\ge 1$ и $M_n=\{y:\ y\in\overset{\circ}{Y}(n,\infty),\ \|y\|_{w_p^1}\le 1\}$. Так как $B_{p,q}(1,\infty)\ge B_{p,q}(n,\infty)$, то на основании теоремы 1 имеем

$$\left(\sum_{i=n}^{\infty}v_i|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\le 2^{\frac{1}{p}}\alpha_q B_{p,q}(n,\infty),\ y\in M_n. \tag{40}$$

Из определения $B_{p,q}(n,\infty)$ следует, что

$$B_{p,q}(n,\infty) \leq \sup_{s\geq t>n} \frac{\left(\sum\limits_{i=t}^{s} v_i\right)^{\frac{1}{q}}}{\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{t-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\sum\limits_{i=s}^{\infty}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right]^{\frac{1}{p}}} = \sup_{t>n}(B_{p,q})_t. \tag{41}$$

Пусть $n>1$. Для $y\in M_1$ определим последовательность $y^n=\{y_i^n\}$ такую, что $y_n^n=y_n$ и $y_i^n=0$ при $i\neq n$. Положим $z_i=y_i-y_i^n$, $i\geq n$. Тогда $z=\{z_i\}_{i=n}^{\infty}\in M_n$. Поэтому на основании (40) и (41) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in M_1}\left(\sum_{i=n}^{\infty}v_i|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \lim_{n\to\infty}\sup_{y\in M_1}\left(\sum_{i=n}^{\infty}v_i|y_i-y_i^n|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \lim_{n\to\infty}\sup_{y\in M_1}\left(\sum_{i=n}^{\infty}v_i|y_i^n|^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sup_{z\in M_n}\left(\sum_{i=n}^{\infty}v_i|z_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \lim_{n\to\infty}v_ny_n \leq 2^{\frac{1}{p}}\alpha_q\lim_{n\to\infty}\sup_{t>n}(B_{p,q})_t = \lim_{t\to\infty}(B_{p,q})_t = 0. \tag{42}$$

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty}v_ny_n=0$ в силу $y\in\overset{\circ}{Y}(1,\infty)$. Так как $\overset{\circ}{Y}(1,\infty)$ всюду плотно в $\overset{\circ}{w}{}_p^1$, то из (42) имеем (38). Следовательно, вложение $E:\overset{\circ}{w}{}_p^1\to l_{q,v}$ компактно. Теорема 2 доказана.

Существенной нормой оператора A, действующего из банахового пространства X в банахово пространство Z, называется число $\|A\|_{ess}=\inf\limits_{T\in K}\|A-T\|_{X\to Z}$, где K – совокупность компактных операторов из X в Z.

Теорема 3. Пусть $1<p\leq q<\infty$. Тогда для существенной нормы оператора вложения $E:\overset{\circ}{w}{}_p^1\to l_{q,v}$ справедлива оценка $2^{\frac{1}{p'}}\leq\|E\|_{ess}\gamma_{p,q}^{-1}\leq 2^{\frac{1}{p}}\alpha_q$, где $\gamma_{p,q}=\lim\limits_{t\to\infty}\sup(B_{p,q})_t$.

Доказательство. Пусть $\{t_k\}$ – последовательность целых чисел такая, что $t_k\to\infty$ при $k\to\infty$ и

$$\lim_{k\to\infty}(B_{p,q})_{t_k} = \lim_{t\to\infty}\sup(B_{p,q})_t.$$

Из определения величины $(B_{p,q})_t$ для каждого t_k существует целое число $s_k=s_k(t_k)\geq t_k$ такое, что

$$(B_{p,q})_{t_k} = \frac{\left(\sum\limits_{i=t_k}^{s_k} v_i\right)^{\frac{1}{q}}}{\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{t_k-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\sum\limits_{i=s_k}^{\infty}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right]^{\frac{1}{p}}}. \tag{43}$$

Пусть α_k – наибольшее, а β_k – наименьшее целые числа, для которых выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{t_k-1}\rho_i^{1-p'} \leq 2\sum_{i=\alpha_k-1}^{t_k-1}\rho_i^{1-p'};\quad \sum_{i=s_k}^{\infty}\rho_i^{1-p'} \leq 2\sum_{i=s_k}^{\beta_k}\rho_i^{1-p'}. \tag{44}$$

Пусть $x^{t_k}\equiv x^{\alpha_k,t_k,s_k,\beta_k}$ – последовательность (39) при $\alpha=\alpha_k$, $t=t_k$, $s=s_k$ и $\beta=\beta_k$. Ясно, что $x^{t_k}\in\overset{\circ}{w}{}_p^1$, $\sup\limits_k\|x^{t_k}\|_{w_p^1}\leq 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{t_k}=0$ для всех $i\geq 1$. Кроме того, из (19) при $m=1$ и $n=\infty$ вместе с (43) и (44) имеем

$$\lim_{k\to\infty}\|x^{t_k}\|_{l_{q,v}} \geq 2^{\frac{1}{p'}}\lim_{k\to\infty}(B_{p,q})_{t_k} = 2^{\frac{1}{p'}}\gamma_{p,q}.$$

Пусть T – произвольный компактный оператор из $\overset{\circ}{w}{}_p^1$ в $l_{q,v}$. Из $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{t_k}=0$ для всех $i\geq 1$ следует, что последовательность $\{t_k\}$ сходится к нулю слабо в $l_{q,v}$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty}\|Tx^{t_k}\|_{l_{q,v}}=0$ и

$$\lim_{k\to\infty}\|x^{t_k}-Tx^{t_k}\|_{l_{q,v}} \geq \lim_{k\to\infty}\left|\|x^{t_k}\|_{l_{q,v}}-\|Tx^{t_k}\|_{l_{q,v}}\right| = \lim_{k\to\infty}\|x^{t_k}\|_{l_{q,v}} \geq 2^{\frac{1}{p'}}\gamma_{p,q}.$$

Это означает, что

$$\inf_{T\in K}\|E-T\|_{\overset{\circ}{w}{}^1_p\to l_{q,v}} \geq 2^{\frac{1}{p'}}\gamma_{p,q}. \tag{45}$$

Обозначим через T_n, $n>1$, оператор, действующий из $\overset{\circ}{w}{}^1_p$ в $l_{q,v}$ следующим образом: $Ty=\widetilde{y}^n$ для любого $y\in\overset{\circ}{w}{}^1_p$, где последовательность $\widetilde{y}^n=\{\widetilde{y}^n_i\}_{i=1}^\infty$ такая, что $\widetilde{y}^n_i=y_i$ при $1\leq i\leq n$ и $\widetilde{y}^n_i=0$ при $i>n$. Очевидно, что оператор T_n компактен из $\overset{\circ}{w}{}^1_p$ в $l_{q,v}$. Тогда $y-Ty\in M_n$ и, в силу (40) и (41), имеем

$$\|y-Ty\|_{l_{q,v}}=\left(\sum_{i=n}^\infty v_i|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq 2^{\frac{1}{p}}\alpha_q\sup_{t>n}(B_{p,q})_t.$$

Значит,

$$\inf_{T\in K}\|E-T\|_{\overset{\circ}{w}{}^1_p\to l_{q,v}} \leq 2^{\frac{1}{p}}\alpha_q\gamma_{p,q}.$$

Это неравенство и (45) доказывает теорему 3.

В качестве примера рассмотрим спектральную задачу

$$-\Delta(\rho_i\Delta y_i)=\lambda v_{i+1}y_{i+1},\ i=1,2,... \tag{46}$$

с условием Дирихле

$$y_1=0,\ y_\infty=\lim_{i\to\infty}y_i=0. \tag{47}$$

На основании теоремы Релиха изучение спектра задачи (46) и (47) можно свести к изучению оператора $E:\overset{\circ}{w}{}^1_2\to l_{2,v}$ (см. [10, глава VI]). Тогда теоремы 1–3 приводят к следующим результатам.

Теорема 4. Пусть $\sum\limits_{i=1}^\infty\rho_i^{-1}<\infty$. Тогда

(i) нижняя граница спектра задачи (46) и (47) отделена от нуля тогда и только тогда, когда $B_{2,2}(1,\infty)<\infty$;

(ii) спектр задачи (46) и (47) дискретен, если и только если $\lim\limits_{t\to\infty}(B_{2,2})_t=0$;

(iii) для нижней грани μ точки накопления спектра задачи (46) и (47) справедлива оценка $\frac{1}{2}\alpha_2^{-2}\leq\mu\gamma^2_{2,2}\leq\frac{1}{2}$, где $\alpha_2=\left(\frac{\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и образования Казахстана. Грант № 5495/GF4 по направлению «Интеллектуальный потенциал страны».

Список литературы

1 Bennett G. Some elementary inequalities. I / G.Bennett // Quart. J. Math. Oxford. — 1987. — Vol. 38. — No. 2. — P. 401–425.

2 Bennett G. Some elementary inequalities. II / G.Bennett // Quart. J. Math. Oxford. — 1988. — Vol. 39. — No. 2. — P. 385–400.

3 Bennett G. Some elementary inequalities. III / G.Bennett // Quart. J. Math. Oxford. — 1991. — Vol. 42. — No. 2. — P. 149–174.

4 Kufner A. The Hardy inequality. About its history and some related results / A.Kufner, L.Maligranda, L.-E.Persson. — Pilsen: Vydavatelský servis, 2007.

5 Opic B. Hardy-type inequalities / B.Opic, A.Kufner. — Harlow: Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific and Technical, 1990.

6 Kufner A. Weighted Inequalities of Hardy type / A.Kufner, L.-E.Persson. — New Jersey, London, Singapore; Hong Kong: World Scientific, 2003.

7 Абылаева А.М. Весовое дифференциальное неравенство Харди на множестве $\overset{\circ}{AC}(I)$ / А.М.Абылаева, А.О.Байарыстанов, Р.Ойнаров // Сибирский математический журнал. — 2014. — Т. 55.— № 3. — С. 477–493.

8 Алимагамбетова А.З. Критерий осцилляторности и неосцилляторности полулинейного разностного уравнения второго порядка / А.З.Алимагамбетова, Р.Ойнаров // Математический журнал. — 2007. — Т. 7. — № 1(23). — С. 15–24.

9 Крейн С.Г. Функциональный анализ / С.Г.Крейн. — М.: Наука, 1972.

10 Мынбаев К.Т. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов / К.Т.Мынбаев, М.О.Отелбаев. — М.: Наука, 1988.

А. Қалыбай, Р. Ойнаров, С. Шалгинбаева

Айырымдық түрдегі дискретті салмақты Харди теңсіздігі

Мақалада айырымдық түрде жазылған салмақтары бар дискретті Харди теңсіздігінің орындалуы үшін қажетті және жеткілікті шарттар табылған. Есеп финитті тізбектер жиынында зерттелді. Бұл мақаланың негізгі нәтижесі зерттелетін теңсіздіктің нақты константасының бағалауларын алу болып табылады. Осы бағалаулар кейбір айырымдық теңдеулердің тербелімділігі және тербелімсіздігі шарттары сияқты сапалық қасиеттерін анықтау үшін қолданылады. Бұған қоса, осы негізгі нәтижелерінің салдары ретінде біз кейбір кеңістіктердің енгізілуін және бұл енгізілуінің шағын болуының критерийлерін табамыз.

Кілт сөздер: Харди теңсіздігі, салмақты тізбектер, оператор, тізбектер кеңістігі, енгізілу, теңсіздік.

A. Kalybay, R. Oinarov, S. Shalginbayeva

Discrete weighted Hardy inequality in difference form

In this paper we find necessary and sufficient conditions for the fulfillment of the discrete Hardy inequality with weights written in the difference form. The problem is investigated on the set of finitely supported sequences. The key result of this article is finding of estimates for the exact constant of this inequality. These estimates will be later used to establish qualitative characteristics, such as oscillation and non-oscillation conditions, of certain difference equations. Moreover, as a consequence of the main results, we find criteria for the embedding of some spaces and for the compactness of this embedding.

Keywords: Hardy inequality, weighted sequences, operator, space of sequences, embedding, compactness.

References

1 Bennett, G. (1987). Some elementary inequalities. I. *Quart. J. Math. Oxford, Vol. 38,* 2, 401–425.

2 Bennett, G. (1988). Some elementary inequalities. II. *Quart. J. Math. Oxford, Vol. 39,* 2, 385–400.

3 Bennett, G. (1991). Some elementary inequalities. III. *Quart. J. Math. Oxford, Vol. 42,* 2, 149–174.

4 Kufner, A., Maligranda, L. & Persson, L.-E. (2007). *The Hardy inequality. About its history and some related results.* Pilsen: Vydavatelský servis.

5 Opic, B. & Kufner, A. (1990). Hardy-type inequalities. Harlow: Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific and Technical.

6 Kufner, A. & Persson, L.-E. (2003). *Weighted Inequalities of Hardy type.* New Jersey, London, Singapore; Hong Kong: World Scientific.

7 Abylaeva, A.M. & Oinarov, R. (2014). Vesovoe differentsialnoe neravenstvo Khardi na mnozhestve $\overset{\circ}{AC}(I)$ [The weighted differential Hardy inequality on the set $\overset{\circ}{AC}(I)$]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal – Siberian Mathematical Journal, Vol. 55,* 3, 477–493 [in Russian].

8 Alimagambetova, A.Z. & Oinarov, R. (2007). Kriterii ostsilliatornosti i neostsilliatornosti polulineinoho raznostnogo uravneniia vtoroho poriadka [The criterion of oscillation and non-oscillation of a second-order semilinear difference equation]. *Matematicheskii zhurnal – Mathematical Journal, Vol. 7,* 1(23), 15–24 [in Russian].

9 Krein, S.G. (1972). *Funktsionalnyi analiz [Functional Analysis].* Moscow: Nauka [in Russian].

10 Mynbaev, K.T. & Otelbaev, M.O. (1988). Vesovye funktsionalnye prostranstva i spektr differentsialnykh operatorov [Weighted functional spaces and the spectrum of differential operators]. Moscow: Nauka [in Russian].