УДК 517.95

Т.Н. Бекжан[1], М.Т. Дженалиев[2], С.А. Искаков[3], М.И. Рамазанов[3,4]

[1] *Синьцзянский университет, Урумчи, Китай;*
[2] *Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан;*
[3] *Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова, Казахстан;*
[4] *Институт прикладной математики, Караганда, Казахстан*
(E-mail: ramamur@mail.ru)

К решению сингулярного неоднородного интегрального уравнения Вольтерра

В статье исследовано неоднородное сингулярное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, к которому редуцируется граничная задача теплопроводности, возникающая при решении некоторых задач со свободными границами. Найдено общее решение этого уравнения, представляющее сумму общего решения однородного и частного решений неоднородного уравнения. Дана оценка построенной резольвенты интегрального уравнения.

Ключевые слова: граничная задача теплопроводности, интегральное уравнение Вольтерра, резольвента, частное решение.

Введение

При исследовании граничной задачи теплопроводности вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x} = 0, \ \ \{x,t\} \in G = \{x,t: \ 0<x<1, \ t>0\};$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{x=0} = 0, \ \ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{x=t} + \left.\frac{d\tilde{u}(t)}{dt}\right|_{x=t} = 0, \tag{1}$$

где $\tilde{u}(t) = u(t,t)$, решение которой оказывается полезным при изучении некоторых задач со свободными границами [1], возникает необходимость решения особого интегрального уравнения Вольтерра

$$\varphi(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \sqrt{\frac{t}{\tau}}\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\sqrt{\frac{t}{\tau}}\cdot\varphi(\tau)d\tau + \frac{3}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\sqrt{\frac{t}{\tau}}\cdot\varphi(\tau)d\tau - \frac{2}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\sqrt{\frac{t}{\tau}}\cdot\varphi(\tau)d\tau = f(t). \tag{2}$$

Соответствующее однородное интегральное уравнение было исследовано в [2], где было показано, что оно имеет ненулевое решение. Целью данной работы является решение неоднородного интегрального уравнения (2), т.е. построение резольвенты для этого уравнения.

Решение интегрального уравнения (2) ищем в классе функций

$$\sqrt{t}\cdot\exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\}\cdot\varphi(t)\in L_\infty(G);$$

$$\sqrt{t}\cdot\exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\}\cdot f(t)\in L_\infty(G).$$

Подобного рода интегральные уравнения Вольтерра были исследованы в работах [3–5].

1 Сведение интегрального уравнения (2) к разностному

Используя равенство
$$\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} = \frac{(t-\tau)^2+4t\tau}{4a^2(t-\tau)} = \frac{t-\tau}{4a^2} + \frac{t\tau}{a^2(t-\tau)},$$
интегральное уравнение (2) примет вид
$$\varphi(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \left[\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} + \frac{3}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right]\times$$
$$\times\sqrt{\frac{t}{\tau}}\cdot\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\cdot\varphi(\tau)d\tau = f(t). \qquad (3)$$

Замечание 1. [6; 183]. Если (частное) решение интегрального уравнения
$$y(x) + \int\limits_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x)$$
дается формулой
$$y(x) = f(x) + \int\limits_a^x R(x,t)f(t)dt,$$
тогда (частное) решение интегрального уравнения (с измененным ядром)
$$y(x) + \int\limits_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x)$$
выражается формулой
$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x,t)\frac{g(x)}{g(t)}f(t)dt.$$
Это же самое имеет место и для решений соответствующих однородных уравнений.

С учетом замечания 1 для исследования интегрального уравнения (2) достаточно изучить интегральное уравнение
$$\varphi(t) + \int\limits_0^t K(t,\tau)\cdot\varphi(\tau)d\tau = f(t), \qquad (4)$$
где
$$K(t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left[\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} + \frac{3}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\cdot\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\right].$$

В интегральном уравнении(4) произведем замену независимой переменной и введем новые функции:
$$t = \frac{1}{t_1},\ \ \tau = \frac{1}{\tau_1};\ \ \varphi_1(t_1) = \frac{1}{\sqrt{t_1}}\varphi\left(\frac{1}{t_1}\right);\ \ f_1(t_1) = \frac{1}{\sqrt{t_1}}f\left(\frac{1}{t_1}\right),$$
тогда из уравнения (4) получим
$$\varphi_1(t_1) + \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_{t_1}^{\infty}\frac{1}{(\tau_1-t_1)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\}\cdot\varphi_1(\tau_1)d\tau_1 -$$
$$-\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_{t_1}^{\infty}\frac{1}{(\tau_1-t_1)^{\frac{1}{2}}}\left[5\exp\left\{-\frac{1}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\} - 3\right]\cdot\frac{1}{\tau_1}\varphi_1(\tau_1)d\tau_1 = f_1(t_1). \qquad (5)$$

2 Сведение к операторному уравнению

Для решения уравнения (5) будем использовать преобразование Лапласа. Имеем

$$\left[1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right]\cdot\widehat{\varphi}_1(p)-\frac{1}{2a\sqrt{-p}}\left[5\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}-3\right]\cdot\int\limits_p^\infty\widehat{\varphi}_1(q)dq=\widehat{f}_1(p). \tag{6}$$

Здесь были использованы следующие формулы преобразования Лапласа [7; 500] и [8; 158]:

$$L\left[\int\limits_{t_1}^\infty k(t_1-\tau_1)\varphi_1(\tau_1)d\tau_1\right]=\widehat{k}(-p)\cdot\widehat{\varphi}_1(p);$$

$$L\left[\frac{1}{t_1}\cdot\varphi_1(t_1)\right]=\int\limits_p^\infty\widehat{\varphi}_1(q)dq.$$

Перейдем от интегрального уравнения (6) к дифференциальному уравнению, вводя новую неизвестную функцию-образ:

$$\widehat{\psi}(p)=\int\limits_p^\infty\widehat{\varphi}_1(q)dq,\ \text{т.е. }\widehat{\varphi}_1(p)=-\frac{d\widehat{\psi}(p)}{dp}; \tag{7}$$

$$\left[1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right]\cdot\frac{d\widehat{\psi}(p)}{dp}+\frac{1}{2a\sqrt{-p}}\left[5\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}-3\right]\cdot\widehat{\psi}(p)=\widehat{f}_1(p)$$

или

$$\frac{d\widehat{\psi}(p)}{dp}+\frac{5\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}-3}{2a\sqrt{-p}\left[1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right]}\cdot\widehat{\psi}(p)=\frac{\widehat{f}_1(p)}{1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}}. \tag{8}$$

3 Решение однородного операторного уравнения

Интегрируя однородное уравнение, получаем

$$\ln\left(\frac{\widehat{\psi}(p)}{C}\right)=-\int\frac{5\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}-3}{2a\sqrt{-p}\left[1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right]}dp=$$

$$=\left\|-\frac{2}{a}\sqrt{-p}=z,\quad dz=\frac{dp}{a\sqrt{-p}}\right\|=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{(5\exp\{z\}+5)-8}{1+\exp\{z\}}=-\frac{5}{2}z+4\int\frac{\exp\{-z\}dz}{1+\exp\{-z\}}=$$

$$=-\frac{5}{2}z-4\int\frac{d(1+\exp\{-z\})}{1+\exp\{-z\}}=-\frac{5}{2}z+4\ln(1+\exp\{-z\})=$$

$$=\left\|z=-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\|=-\frac{5}{2}\sqrt{-p}+\ln\left[\left(1+\exp\left\{\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^{-4}\right]. \tag{9}$$

Из (9) будем иметь ($Re\,p<0$)

$$\widehat{\psi}_0(p)=C\cdot\frac{\exp\left\{\frac{5}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1+\exp\left\{\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^4}=C\cdot\frac{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^4}. \tag{10}$$

Далее для нахождения оригинала для образа $\widehat{\psi}_0(p)$ используем следующее разложение:

$$\frac{1}{(1+z)^4}=\sum_{n=0}^\infty(-1)^nB_nz^n,\ z=\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\},|z|<1, \tag{11}$$

где $B_n=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$.

Отметим, что если $z=1$, то справедливо равенство

$$\left.\frac{1}{(1+z)^4}\right|_{z=1}=\frac{1}{16}.$$

Используя разложения (11), из соотношения (10) получим

$$\widehat{\psi}_0(p)=C\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nB_n\exp\left\{-(2n+3)\frac{\sqrt{-p}}{a}\right\},\ \text{ для } \forall\, p\in\left\{p:\ Re\,\sqrt{-p}>0\right\}. \tag{12}$$

Так как имеет место следующая формула обращения:

$$\exp\left\{-\beta\sqrt{q}\right\}\doteqdot\frac{\beta}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}\cdot\exp\left\{-\frac{\beta^2}{4t_1}\right\},$$

то из (12) получим функцию-оригинал $\widehat{\psi}_0(t_1)$ для всех $0<t_1<\infty$:

$$\psi_0(t_1)=\frac{C}{2a\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+3)B_n\exp\left\{-\frac{(2n+3)^2}{4a^2t_1}\right\}. \tag{13}$$

Из равенств

$$\widehat{\varphi}_1(p)=-\frac{d\widehat{\psi}(p)}{dp};-t_1\cdot\widehat{\psi}(t_1)\doteqdot\frac{d\widehat{\psi}(p)}{dp}$$

получим

$$\varphi_{1,0}(t_1)=t_1\psi_0(t_1)=\frac{C}{2\sqrt{\pi t_1}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+3)B_n\exp\left\{-\frac{(2n+3)^2}{4a^2t_1}\right\}.$$

Возвращаясь к исходной независимой переменной $0<t<\infty$, получим решение однородного уравнения (4)

$$\varphi_0(t)=\frac{C}{2\sqrt{\pi}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+3)B_n\exp\left\{-\frac{(2n+3)^2}{4a^2}\cdot t\right\}. \tag{14}$$

Решение $\varphi_0(t)$ действительно принадлежит к классу $L_\infty\left(G,\,\sqrt{t},\exp\left\{\frac{t}{4a}\right\}\right)$.

Действительно, если $f(t_1)=\widehat{f}(p)$, то справедливо равенство

$$\lim_{p\to 0}p\cdot\widehat{f}(p)=\lim_{t_1\to\infty}f(t_1),$$

отсюда, из равенства $\widehat{\psi}'(\sqrt{p})=-\varphi_1(\sqrt{p})$, имеем

$$\widehat{\varphi}_1(\sqrt{p})=\frac{1}{a\sqrt{-p}}\cdot\left[-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right]\cdot\frac{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^5};$$

$$\lim_{p\to 0}\sqrt{p}\cdot\widehat{\varphi}_1(\sqrt{p})=\lim_{t_1\to\infty}\varphi_1(t_1),\quad \lim_{t_1\to\infty}\varphi_1(t_1)=\lim_{t\to 0}\sqrt{t}\cdot\varphi_0(t)=\frac{1}{32a}.$$

4 Решение неоднородного операторного уравнения

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения (8)

$$\widehat{\psi}(p)=\frac{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^4}\cdot\int\limits_{-\infty}^{p}\exp\left\{\frac{3}{a}\sqrt{-q}\right\}\cdot\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-q}\right\}\right)^3\cdot\widehat{f}_1(q)dq,$$

$(Re\,p<0,\ Re\,q<0)$.

Учитывая, что $\widehat{f_1}(q) = \int\limits_0^\infty \exp\{q\tau_1\} f_1(\tau_1)d\tau_1$, получим

$$\widehat{\psi}(p) = \int\limits_0^\infty f_1(\tau_1)\left\{\frac{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^4}\int\limits_{-\infty}^p \exp\{\tau_1 q\}\cdot\left(\exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-q}\right\}+\exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-q}\right\}\right)^3 dq\right\}d\tau_1 \qquad (15)$$

или

$$\widehat{\psi}(p) = \int\limits_0^\infty \widehat{R}\,(p)\, f_1(\tau_1)d\tau_1, \qquad (15')$$

где

$$\widehat{R}(p) = \widehat{M}(p)\cdot\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}\cdot\widehat{N}(p).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\widehat{M}(p) = \frac{1}{\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^4};$$

$$\widehat{N}(p) = \int\limits_{-\infty}^p \exp\{\tau_1 q\}\cdot\left(\exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-q}\right\}+\exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-q}\right\}\right)^3\cdot\widehat{f_1}(q)dq.$$

Для нахождения решения $\psi(t_1)$ необходимо найти оригинал для $\widehat{R}(p)$. Это произведем в несколько этапов.

Предварительно вычислим интеграл, стоящий в фигурной скобке (15):

$$\widehat{N}(p) = \int\limits_{-\infty}^p \exp\{\tau_1 q\}\cdot\left(\exp\left\{\frac{3}{a}\sqrt{-q}\right\}+\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-q}\right\}+3\exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-q}\right\}+3\exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-q}\right\}\right)dq =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \sqrt{-q}=\eta \\ q=-\eta^2;\ dq=-2\eta d\eta \end{array}\right\| = 2\int\limits_{\sqrt{-p}}^\infty \eta\cdot\exp\left\{-\tau_1\eta^2\right\}\cdot\left(\exp\left\{\frac{3}{a}\eta\right\}+\right.$$

$$\left.+\exp\left\{-\frac{3}{a}\eta\right\}+3\exp\left\{\frac{1}{a}\eta\right\}+3\exp\left\{-\frac{1}{a}\eta\right\}\right)d\eta.$$

При вычислении этих интегралов используем формулу

$$2\int\limits_{\sqrt{-p}}^\infty \eta\cdot\exp\left\{-\tau_1\eta^2+\alpha\eta\right\}d\eta = \left\| \begin{array}{ll} u=\exp\{\alpha\cdot\eta\}; & du=\alpha\cdot\exp\{\alpha\eta\}\,d\eta \\ dv=2\eta\cdot\exp\left\{-\tau_1\eta^2\right\}d\eta; & v=-\frac{1}{\tau_1}\exp\left\{-\tau_1\eta^2\right\} \end{array}\right\| =$$

$$= -\frac{1}{\tau_1}\exp\left\{-\tau_1\eta^2+\alpha\eta\right\}\Big|_{\sqrt{-p}}^\infty + \frac{\alpha}{\tau_1}\int\limits_{\sqrt{-p}}^\infty \exp\left\{-\tau_1\eta^2+\alpha\eta\right\}d\eta =$$

$$= -\frac{1}{\tau_1}\exp\left\{\left(\frac{\alpha}{2\tau_1}\right)^2\right\}\cdot\exp\left\{-\left(\sqrt{\tau_1}\cdot\eta-\frac{\alpha}{2\tau_1}\right)^2\right\}\Big|_{\sqrt{-p}}^\infty + \exp\left\{\left(\frac{\alpha}{2\tau_1}\right)^2\right\}\cdot\frac{\alpha}{\tau_1^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\times$$

$$\times\int\limits_{\sqrt{-p}}^\infty \exp\left\{-\left(\sqrt{\tau_1}\cdot\eta-\frac{\alpha}{2\tau_1}\right)^2\right\}d\left(\sqrt{\tau_1}\cdot\eta-\frac{\alpha}{2\sqrt{\tau_1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\tau_1}\exp\left\{\tau_1 p+\alpha\sqrt{-p}\right\} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\alpha}{\tau_1^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{\frac{\alpha^2}{4\tau_1}\right\}\cdot erfc\left\{\sqrt{-\tau_1 p}-\frac{\alpha}{2\tau_1}\right\}.$$

Таким образом,
$$\widehat{N}(p) = \widehat{N}_0(p) + \widehat{N}_3^-(p) - \widehat{N}_3^+(p) + \widehat{N}_1^-(p) - \widehat{N}_1^+(p), \tag{16}$$
где
$$\widehat{N}_0(p) = \frac{1}{\tau_1}\exp\{\tau_1 p\}\cdot\left(\exp\left\{\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\} + \exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}\right) +$$
$$+\frac{3}{\tau_1}\exp\{\tau_1 p\}\cdot\left(\exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-p}\right\} + \exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-p}\right\}\right);$$
$$\widehat{N}_3^-(p) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{\frac{9}{4a^2\tau_1}\right\}\cdot erfc\left\{\sqrt{-\tau_1 p} - \frac{3}{2a\sqrt{\tau_1}}\right\};$$
$$\widehat{N}_3^+(p) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{\frac{9}{4a^2\tau_1}\right\}\cdot erfc\left\{\sqrt{-\tau_1 p} + \frac{3}{2a\sqrt{\tau_1}}\right\};$$
$$\widehat{N}_1^-(p) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{\frac{1}{4a^2\tau_1}\right\}\cdot erfc\left\{\sqrt{-\tau_1 p} - \frac{1}{2a\sqrt{\tau_1}}\right\};$$
$$\widehat{N}_1^+(p) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{\frac{1}{4a^2\tau_1}\right\}\cdot erfc\left\{\sqrt{-\tau_1 p} + \frac{1}{2a\sqrt{\tau_1}}\right\}.$$

Теперь представим выражение $\widehat{R}(p)$в следующем виде:
$$\widehat{R}(p) = \widehat{R}_1^*(p) + \widehat{R}_2(p), \tag{17}$$
где
$$\widehat{R}_1^*(p) = \widehat{M}(p)\cdot\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}\cdot\widehat{N}_0(p);$$
$$\widehat{R}_2(p) = \widehat{M}(p)\cdot\exp\{\tau 1p\}\cdot\underline{\underline{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p} - \tau 1p\right\}}}\cdot\widehat{N}_3^- -$$
$$-\widehat{M}(p)\cdot\exp\left\{\tau_1 p - \frac{6}{a}\sqrt{-p}\right\}\cdot\underline{\underline{\exp\left\{\frac{3}{a}\widehat{\sqrt{-p}} - \tau_1 p\right\}\cdot\widehat{N}_3^+(p)}}+$$
$$+\widehat{M}(p)\cdot\exp\left\{\tau_1 p - \frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\cdot\underline{\underline{\exp\left\{-\frac{1}{a}\widehat{\sqrt{-p}} - \tau 1p\right\}\cdot\widehat{N}_1^-(p)}}-$$
$$-\widehat{M}(p)\cdot\exp\left\{\tau_1 p - \frac{4}{a}\sqrt{-p}\right\}\cdot\underline{\underline{\exp\left\{\frac{1}{a}\widehat{\sqrt{-p}} - \tau 1p\right\}\cdot\widehat{N}_1^+(p).}} \tag{17*}$$

Вначале найдем оригинал для первого слагаемого из (17), представив его в виде
$$\widehat{R}_1^*(p) = \widehat{M}(p)\cdot\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}\cdot\widehat{N_0}(p) = \frac{\exp\{-\tau_1(-p)\}}{\tau_1\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^4}\times$$
$$\times\left\{\left(1+\exp\left\{-\frac{6}{a}\sqrt{-p}\right\}\right) + 3\cdot\left(\exp\left\{-\frac{2}{a}sqrt{-p}\right\} + \exp\left\{-\frac{4}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)\right\} =$$
$$= \frac{\exp\{-\tau_1(-p)\}}{\tau_1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n\cdot\exp\left\{-n\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\times$$
$$\times\left[1+3\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} + 3\exp\left\{-\frac{4}{a}\sqrt{-p}\right\} + \exp\left\{-\frac{6}{a}\sqrt{-p}\right\}\right].$$

В последнем равенстве слагаемое при $n = 0$ запишем отдельно, затем после перехода к оригиналу внесем его обратно под знак суммы, тогда получим
$$\widehat{R}_1^*(p) = \frac{\exp\{-\tau_1(-p)\}}{\tau_1}\cdot\left\{1+3\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} + 3\exp\left\{-\frac{4}{a}\sqrt{-p}\right\} + \exp\left\{-\frac{6}{a}\sqrt{-p}\right\}\right\} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n B_n\cdot\left\{\exp\left\{-n\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}+3\exp\left\{-(n+1)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}+3\exp\left\{-(n+2)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}+\right.$$

$$\left.+\exp\left\{-(n+3)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right\}.$$

Опять, используя формулы [7; 525]

$$\exp\{-p\tau\}\doteqdot\delta(t-\tau);\quad \exp\{-k\sqrt{s}\}\doteqdot\frac{k}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{k^2}{4t}\right\},$$

будем иметь

$$\exp\{-\tau_1(-p)\}\doteqdot\delta(\tau_1-t_1);\quad \exp\left\{-\frac{\alpha}{a}\sqrt{-p}\right\}\doteqdot\frac{\alpha}{2a\sqrt{\pi}(\tau_1-t_1)^{\frac{3}{2}}}\cdot\exp\left\{-\frac{\alpha^2}{4a^2(\tau_1-t_1)}\right\}.$$

Значит, оригинал для первого слагаемого из (17) будет иметь следующее представление:

$$R_1^*(t_1,\tau_1)=\frac{1}{\tau_1}\delta(\tau_1-t_1)+R_1(t_1,\tau_1), \tag{18}$$

где

$$R_1(t_1,\tau_1)=\frac{1}{a\sqrt{\pi}(\tau_1-t_1)^{\frac{3}{2}}\tau_1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n\cdot\left[n\cdot\exp\left\{-\frac{n^2}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\}+3(n+1)\cdot\exp\left\{-\frac{(n+1)^2}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\}+\right.$$

$$\left.+3(n+2)\cdot\exp\left\{-\frac{(n+2)^2}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\}+(n+3)\cdot\exp\left\{-\frac{(n+3)^2}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\}\right]. \tag{19}$$

Прежде чем найти оригинал для $\widehat{R}_2(p)$ в соотношении (17), найдем оригиналы для выражений вида

$$\exp\left\{\frac{\alpha}{a}\sqrt{-p}-\tau_1 p\right\}\cdot\widehat{N}_\alpha^{\mp}(p),\quad(\alpha=\pm3;\pm1),$$

при этом будем использовать формулу [9; 311]

$$\exp\{\beta\cdot p\}\cdot erfc\sqrt{\beta\cdot p}\doteqdot\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\beta}{t}}\cdot\frac{1}{t+\beta}.$$

Рассмотрим четыре случая:

1. $\alpha=-3$,

$$\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}-\tau_1 p\right\}\cdot\widehat{N}_3^-(p)=\frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}}\cdot\exp\left\{\frac{9}{4a^2\tau_1}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}-\tau_1 p\right\}\times$$

$$\times erfc\left\{\sqrt{-\tau_1 p}-\frac{3}{2a\sqrt{\tau_1}}\right\}=\left\|\begin{array}{c}\sqrt{-\tau_1 p}-\frac{3}{2a\sqrt{\tau_1}}=\sqrt{-\tau_1 q};\ \sqrt{-p}=\sqrt{-q}+\frac{3}{2a\tau_1};\\ (-p)=(-q)+\frac{3}{a\tau_1}\sqrt{-q}+\frac{9}{4a^2\tau_1^2}\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}}\cdot\exp\left\{\frac{9}{4a^2\tau_1}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-q}-\frac{9}{2a^2\tau_1}\right\}\cdot\exp\left\{\frac{3}{a}\sqrt{-q}+\frac{9}{4a^2\tau_1}\right\}\cdot\exp\{-\tau_1 q\}\cdot erfc\left\{\sqrt{-\tau_1}\right\}=$$

$$=\frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}}\cdot\exp\{-\tau_1 q\}\cdot erfc\left\{\sqrt{-\tau_1 q}\right\}\doteqdot\frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{\tau_1}{t_1}}\cdot\frac{1}{\tau_1+t_1}=\frac{3}{2a\sqrt{\pi}\tau_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{t_1}(\tau_1+t_1)}.$$

2. $\alpha=3$,

$$\exp\left\{\frac{3}{a}\sqrt{-p}-\tau_1 p\right\}\cdot\widehat{N}_3^+(p)=\frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}}\cdot\exp\left\{\frac{9}{4a^2\tau_1}\right\}\cdot\exp\left\{\frac{3}{a}\sqrt{-p}-\tau_1 p\right\}\times$$

$$\times erfc\left\{\sqrt{-\tau_1 p}+\frac{3}{2a\sqrt{\tau_1}}\right\}=\left\|\begin{array}{c}\sqrt{-\tau_1 p}+\frac{3}{2a\sqrt{\tau_1}}=\sqrt{-\tau_1 q};\ \sqrt{-p}=\sqrt{-q}-\frac{3}{2a\tau_1};\\ (-p)=(-q)-\frac{3}{a\tau_1}\sqrt{-q}+\frac{9}{4a^2\tau_1^2}\end{array}\right\|=$$

$$= \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{\frac{9}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-q} - \frac{9}{2a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{3}{a}\sqrt{-q} + \frac{9}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\{-\tau_1 q\} \cdot erfc\{\sqrt{-\tau_1 q}\} =$$

$$= \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\{-\tau_1 q\} \cdot erfc\left\{\sqrt{-\tau_1 q}\right\} \doteqdot \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\tau_1}{t_1}} \cdot \frac{1}{\tau_1 + t_1} = \frac{3}{2a\sqrt{\pi}\tau_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_1}(\tau_1 + t_1)}.$$

3. $\alpha = -1$,

$$\exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \cdot \widehat{N}_1^-(p) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{\frac{1}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \times$$

$$\times erfc\left\{\sqrt{-\tau_1 p} - \frac{1}{2a\sqrt{\tau_1}}\right\} = \left\| \begin{array}{c} \sqrt{-\tau_1 p} - \frac{1}{2a\sqrt{\tau_1}} = \sqrt{-\tau_1 q};\ \sqrt{-p} = \sqrt{-q} + \frac{1}{2a\tau_1}; \\ (-p) = (-q) + \frac{1}{a\tau_1}\sqrt{-q} + \frac{1}{4a^2\tau_1^2} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{\frac{1}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-q} - \frac{1}{2a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-q} + \frac{1}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{-\tau_1 q\right\} \cdot erfc\left\{\sqrt{-\tau_1 q}\right\} =$$

$$= \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\{-\tau_1 q\} \cdot erfc\left\{\sqrt{-\tau_1 q}\right\} \doteqdot \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\tau_1}{t_1}} \cdot \frac{1}{\tau_1 + t_1} = \frac{3}{2a\sqrt{\pi}\tau_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_1}(\tau_1 + t_1)}.$$

4. $\alpha = 1$,

$$\exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \cdot \widehat{N}_1^+(p) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{\frac{1}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-p} - \tau_1 p\right\} \times$$

$$\times erfc\left\{\sqrt{-\tau_1 p} + \frac{1}{2a\sqrt{\tau_1}}\right\} = \left\| \begin{array}{c} \sqrt{-\tau_1 p} + \frac{1}{2a\sqrt{\tau_1}} = \sqrt{-\tau_1 q};\ \sqrt{-p} = \sqrt{-q} - \frac{1}{2a\tau_1}; \\ (-p) = (-q) - \frac{1}{a\tau_1}\sqrt{-q} + \frac{1}{4a^2\tau_1^2} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left\{\frac{1}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{-q} - \frac{1}{2a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{a}\sqrt{-q} + \frac{1}{4a^2\tau_1}\right\} \cdot \exp\{-\tau_1 q\} \cdot erfc\left\{\sqrt{-\tau_1 q}\right\} =$$

$$= \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\{-\tau_1 q\} \cdot erfc\left\{\sqrt{-\tau_1 q}\right\} \doteqdot \frac{3\sqrt{\pi}}{2a\tau_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\tau_1}{t_1}} \cdot \frac{1}{\tau_1 + t_1} = \frac{3}{2a\sqrt{\pi}\tau_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_1}(\tau_1 + t_1)}.$$

Учитывая, что оригиналы «подчеркнутых» выражений в (17*) совпадают, нам необходимо найти оригинал выражения

$$\widehat{M}(p) \cdot \exp\{\tau_1 p\} \cdot \left[1 - \exp\left\{-\frac{6}{a}\sqrt{-p}\right\} + \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - \exp\left\{-\frac{4}{a}\sqrt{-p}\right\}\right] =$$

$$= \left\|\widehat{M}(p) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n \cdot \exp\left\{-n\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right\| =$$

$$= \exp\{\tau_1 p\} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n \times \left[\exp\left\{-n\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} + \exp\left\{-(n+1)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} + \right.$$

$$\left. + \exp\left\{-(n+2)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - \exp\left\{-(n+3)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right] =$$

$$= \exp\{\tau_1 p\} \cdot \left[1 + \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - \exp\left\{-\frac{4}{a}\sqrt{-p}\right\} - \exp\left\{-\frac{6}{a}\sqrt{-p}\right\}\right] +$$

$$+ \exp\left\{\tau_1 p\right\} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n B_n \cdot \left[\exp\left\{-n\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} + \exp\left\{-(n+1)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - \exp\left\{-(n+2)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - \right.$$

$$\left. - \exp\left\{-(n+3)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right] \doteqdot \delta(\tau_1 - t_1) + \frac{1}{a\sqrt{\pi}(\tau_1 - t_1)^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n B_n \left[n \cdot \exp\left\{-\frac{n^2}{a^2(\tau_1 - t_1)}\right\} + \right.$$

$$+(n+1)\cdot\exp\left\{-\frac{(n+1)^2}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\}-(n+2)\cdot\exp\left\{-\frac{(n+2)^2}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\}-(n+3)\exp\left\{-\frac{(n+3)^3}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\}\Bigg].$$

Здесь опять были использованы формулы [9; 248]

$$\exp\left\{-k\sqrt{s}\right\}\doteqdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}\cdot\exp\left\{-\frac{k^2}{4t}\right\};\;\;0<t<\infty,\;\;\exp\{p\tau\}\doteqdot\delta(\tau-t),\;\;Re\,p<0.$$

Остается теперь найти свёртку данной функции с выражением

$$\frac{3}{2a\sqrt{\pi}\tau_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{t_1}(\tau_1+t_1)},$$

которую обозначим

$$R_2(\tau_1,\tau_1-t_1)=\int\limits_{t_1}^{\tau_1}\frac{3}{2a\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\tau_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\eta-t_1}}\cdot\frac{1}{\tau_1+(\eta-t_1)}\left\{\delta(\tau_1-\eta)+\frac{1}{a\sqrt{\pi}(\tau_1-\eta)^{\frac{3}{2}}}\times\right.$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nB_n\left[n\cdot\exp\left\{-\frac{n^2}{a^2(\tau_1-\eta)}\right\}+(n+1)\cdot\exp\left\{-\frac{(n+1)^2}{a^2(\tau_1-\eta)}\right\}-\right.$$

$$\left.\left.-(n+2)\cdot\exp\left\{-\frac{(n+2)^2}{a^2(\tau_1-\eta)}\right\}-(n+3)\cdot\exp\left\{-\frac{(n+3)^2}{a^2(\tau_1-\eta)}\right\}\right]\right\}d\eta=$$

$$=\frac{3}{2a\sqrt{\pi}}\frac{1}{\tau_1\sqrt{\tau_1-t_1}(2\tau_1-t_1)}+\frac{3}{2a^2\pi\tau_1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nB_n\cdot\int\limits_{t_1}^{\tau_1}\frac{1}{\sqrt{\eta-t_1}(\tau_1-\eta)^{\frac{3}{2}}(\tau_1-t_1+\eta)}\times$$

$$\times\left[n\cdot\exp\left\{-\frac{n^2}{a^2(\tau_1-\eta)}\right\}+(n+1)\cdot\exp\left\{-\frac{(n+1)^2}{a^2(\tau_1-\eta)}\right\}-\right.$$

$$\left.-(n+2)\cdot\exp\left\{-\frac{(n+2)^2}{a^2(\tau_1-\eta)}\right\}-(n+3)\cdot\exp\left\{-\frac{(n+3)^2}{a^2(\tau_1-\eta)}\right\}\right]d\eta.$$

Вначале необходимо вычислить интеграл вида

$$r_m(\tau_1,t_1)=\int\limits_{t_1}^{\tau_1}\frac{m\cdot\exp\left\{-\frac{m^2}{a^2(\tau_1-\eta)}\right\}}{\sqrt{\eta-t_1}(\tau_1-\eta)^{\frac{3}{2}}(\tau_1-t_1+\eta)}d\eta=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\frac{\eta-t_1}{\tau_1-\eta}=z^2,\;\eta-t_1=z^2(\tau_1-\eta),\;\eta=\frac{\tau_1z^2+t_1}{1+z^2},\\ \eta-t_1=\frac{(\tau_1-t_1)z^2}{1+z^2},\;\tau_1-\eta=\frac{\tau_1-t_1}{1+z^2},\;d\eta=\frac{2z(\tau_1-t_1)dz}{1+z^2}\end{array}\right\|=$$

$$=\int\limits_0^{\infty}\frac{m\cdot\sqrt{1+z^2}(1+z^2)^{\frac{3}{2}}(\tau-t_1)\cdot 2z}{\sqrt{\tau_1-t_1}z(\tau_1-t_1)^{\frac{3}{2}}\left(\tau_1+(\tau_1-t_1)\frac{z^2}{z^2+1}\right)(1+z^2)^2}\cdot\exp\left\{-\frac{m^2}{a^2}\cdot\frac{(1+z^2)}{\tau_1-t_1}\right\}dz=$$

$$=\frac{2m}{\tau_1-t_1}\int\limits_0^{\infty}\frac{\exp\left\{-\frac{m^2(1+z^2)}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\}}{(\tau_1+(\tau_1-t_1)\frac{z^2}{z^2+1})}dz=$$

$$=\frac{2m}{\tau_1-t_1}\exp\left\{-\frac{m^2}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\}\cdot\int\limits_0^{\infty}\frac{1+z^2}{\tau_1+(2\tau_1-t_1)z^2}\exp\left\{-\frac{m^2z^2}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\}dz=$$

$$=\frac{2m}{\tau_1-t_1}\exp\left\{-\frac{m^2}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\}\cdot\frac{1}{(2\tau_1-t_1)}\int\limits_0^{\infty}\frac{1+z^2}{z^2+\frac{\tau_1}{2\tau_1-t_1}}\exp\left\{-\frac{m^2z^2}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\}dz=$$

$$= \frac{2m}{\tau_1 - t_1} \exp\left\{-\frac{m^2}{a^2(\tau_1 - t_1)}\right\} \cdot \frac{1}{(2\tau_1 - t_1)} \left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2\tau_1 - t_1}}{\sqrt{\tau_1}} \exp\left\{\frac{m^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\tau_1 - t_1} \cdot \frac{\tau_1}{2\tau_1 - t_1}\right\} \times\right.$$

$$\times erfc\left\{\frac{m}{a}\sqrt{\frac{\tau_1}{(\tau_1 - t_1)(2\tau_1 - t_1)}}\right\} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{a}{m} \cdot \sqrt{\tau_1 - t_1} - \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{\tau_1}{2\tau_1 - t_1}} \exp\left\{\frac{m^2}{a^2} \cdot \frac{\tau_1}{(\tau_1 - t_1)(2\tau_1 - t_1)}\right\} \times$$

$$\left.\times erfc\left\{\frac{m}{a}\sqrt{\frac{\tau_1}{(\tau_1 - t_1)(2\tau_1 - t_1)}}\right\}\right] = \frac{2m}{\tau_1 - t_1} \cdot \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{a}{m} \cdot \sqrt{\tau_1 - t_1} \frac{1}{2\tau_1 - t_1} \exp\left\{-\frac{m^2}{a^2(\tau_1 - t_1)}\right\} + \right.$$

$$\left.+ \frac{\pi}{2(2\tau_1 - t_1)} \exp\left\{-\frac{m^2}{a^2(2\tau_1 - t_1)}\right\} \cdot erfc\left\{\frac{m}{a}\sqrt{\frac{\tau_1}{(\tau_1 - t_1)(2\tau_1 - t_1)}}\right\} \cdot \left(\sqrt{\frac{2\tau_1 - t_1}{\tau_1}} - \sqrt{\frac{\tau_1}{2\tau_1 - t_1}}\right)\right] =$$

$$= \frac{2m}{\tau_1 - t_1} \cdot \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{a}{m} \cdot \sqrt{\tau_1 - t_1} \frac{1}{2\tau_1 - t_1} \exp\left\{-\frac{m^2}{a^2(\tau_1 - t_1)}\right\} + \right.$$

$$\left.+ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau_1 - t_1}{\sqrt{\tau_1}(2\tau_1 - t_1)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{m^2}{a^2(2\tau_1 - t_1)}\right\} \cdot erfc\left\{\frac{m}{a}\sqrt{\frac{\tau_1}{(\tau_1 - t_1)(2\tau_1 - t_1)}}\right\}\right] =$$

$$= \frac{a\sqrt{\pi}}{(\tau_1 - t_1)^{\frac{1}{2}}(2\tau_1 - t_1)} \exp\left\{-\frac{m^2}{a^2(\tau_1 - t_1)}\right\} + \frac{m\pi}{\sqrt{\tau_1}(2\tau_1 - t_1)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{m^2}{a^2(2\tau_1 - t_1)}\right\} \times$$

$$\times erfc\left\{\frac{m}{a}\sqrt{\frac{\tau_1}{(\tau_1 - t_1)(2\tau_1 - t_1)}}\right\}. \tag{20}$$

Таким образом,

$$R_2(t_1, \tau_1) = \frac{3}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{\tau_1\sqrt{\tau_1 - t_1}(2\tau_1 - t_1)} + \frac{3}{2a^2\pi\tau_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n \times$$

$$\times \left[r_n(t_1, \tau_1) + r_{n+1}(t_1, \tau_1) - r_{n+2}(t_1, \tau_1) - r_{n+3}(t_1, \tau_1)\right], \tag{21}$$

где $r_m(\tau_1, t_1)$ определяется из равенства (20).

Значит, для функции $\psi(t_1)$ получили следующее представление:

$$\psi(t_1) = \frac{1}{t_1} f_1(t_1) + \int_{t_1}^{\infty} \left[R_1(t_1, \tau_1) + R_2(t_1, \tau_1)\right] \cdot f_1(\tau_1) d\tau_1 + \psi_0(t_1).$$

Здесь справедлива оценка

$$|R_1(t_1, \tau_1) + R_2(t_1, \tau_1)| \leq C \cdot \left[\frac{1}{\tau_1(\tau_1 - t_1)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{a^2(\tau_1 - t_1)}} + \frac{1}{\sqrt{\tau_1 - t_1}\tau_1[\tau_1 + (\tau_1 - t_1)]}\right] \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{t - \tau}{4a^2}\right\}. \tag{22}$$

Функцию $\varphi_1(t_1)$ найдем из условия $\varphi_1(t_1) = t_1 \cdot \psi(t_1)$:

$$\varphi_1(t_1) = f_1(t_1) + t_1 \cdot \int_{t_1}^{\infty} \left[R_1(t_1, \tau_1) + R_2(t_1, \tau_1)\right] \cdot f_1(\tau_1) d\tau_1 + \psi_{1,0}(t_1).$$

Возвращаясь к старым переменным

$$\tau = \frac{1}{\tau_1}, \;\; t = \frac{1}{t_1}, \;\; f_1(t_1) = \sqrt{t} \cdot f(t), \;\; \varphi_1(t_1) = \sqrt{t} \cdot \varphi(t),$$

получим

$$\sqrt{t} \cdot \varphi(t) = \sqrt{t} \cdot f(t) + \frac{1}{t} \cdot \int_0^t \left[R_1\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{\tau}\right) + R_2\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{\tau}\right)\right] \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\tau^2} f(\tau) d\tau + C \cdot \sqrt{t} \cdot \varphi_0(t).$$

Или, учитывая замечание 1, окончательно будем иметь

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{1}{t} \cdot \int\limits_0^t \left[R_1\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{\tau}\right) + R_2\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{\tau}\right) \right] \cdot \frac{1}{\tau^2} f(\tau) d\tau + C \cdot \varphi_0(t),$$

или

$$\varphi(t) = f(t) + \int\limits_0^t R(t,\tau) f(\tau) d\tau + C \cdot \varphi_0(t),$$

где

$$R(t,\tau) = \frac{1}{t \cdot \tau^2} \left[R_1\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{\tau}\right) + R_2\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{\tau}\right) \right].$$

Для резольвенты справедлива следующая оценка:

$$|R(t,\tau)| \leq C \cdot \left[\frac{\sqrt{\tau} \cdot \sqrt{t}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}} + \frac{\sqrt{\tau} \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{t-\tau}(2t-\tau)} \right] \cdot e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}}.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Интегральное уравнение (2) для любой

$$\sqrt{t} \cdot f(t) \in L_\infty(0,\infty)$$

имеет общее решение $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = f(t) + \int\limits_0^t R(t,\tau) f(\tau) d\tau + C \cdot \varphi_0(t),$$

где $C = const$, $t^{\frac{3}{2}-\omega} \cdot \varphi(t) \in L_\infty(0,\infty)$, и для резольвенты

$$R(t,\tau) = R_1(t,\tau) + R_2(t,\tau),$$

которая определяется из равенств (19), (21), справедлива оценка (22).

Список литературы

1 Solonnikov V.A. One-dimensional parabolic problem arising in the study of some free boundary problems / V.A. Solonnikov, A. Fasano // Notes of scientific seminars PDMI. — 2000. — Vol. 269. — P. 322–338.

2 Jenaliyev M.T. On a homogeneous parabolic problem in an in nite corner domain / M.T. Jenaliyev, M.I. Ramazanov // AIP Conference Proceedings. — 1759. — 2016. — 020085, doi: 10.1063/1.4959699.

3 Jenaliev M.T. On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel / M.T. Jenaliev, M.M. Amangaliyeva, M.T. Kosmakova, M.I. Ramazanov // Advances in Difference Equations. — 2015. — Vol. 2015: 71. — P. 14.

4 Amangaliyeva M.M. About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain / M.M. Amangaliyeva, M.T. Jenaliev, M.T. Kosmakova, M.I. Ramazanov // Boundary Value Problems. — 2014. — P. 21.

5 Amangaliyeva M.M. On one homogeneous problem for the heat equation in an in nite angular domain / M.M. Amangaliyeva, M.T. Jenaliyev, M.T. Kosmakova, M.I. Ramazanov // Siberian Mathematical Journal. — 2015. — Vol. 56. — No. 6. — P. 1234–1248.

6 Polyanin A.D. Handbook of integral equations / A.D. Polyanin, A.V. Manzhirov. Moscow: FML, 2003. — P. 608.

7 Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. — М.: Наука, 1965. — 716 с.

8 Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию / М.Л. Краснов. — М.: Наука, 1975. — 302 с.

9 Диткин В.А. Справочник по операционному исчислению / В.А. Диткин, А.П. Прудников. — М.: Высш. шк., 1965. — 466 с.

Т.Н. Бекжан, М.Т. Дженалиев, С.А. Ысқақов, М.И. Рамазанов

Сингулярлы біртекті емес Вольтерра интегралдық теңдеуінің шешімі жайлы

Мақалада біртекті емес сингулярлы екінші текті Вольтерра теңдеуі зерттелген. Бұндай теңдеуге кейбір еркін шекаралы есептерді шешкенде пайда болатын шекаралық жылуөткізгіштік есептері редукцияланады. Бұл теңдеудің жалпы шешімі табылған, ол біртекті теңдеудің жалпы шешімінің және біртекті емес тендеудің дербес шешімінің қосындысы түрінде алынған. Интегралдық теңдеудің резольвентасы құрылып, оның бағасы берілген.

Кілт сөздер: жылуөткізгіштіктің шекаралық есебі, Вольтерраның интегралдық теңдеуі, резольвента, дербес шешім.

T.N. Bekjan, M.T. Jenaliyev, S.A. Iskakov, M.I. Ramazanov

To the solution of the singular inhomogeneous integral Volterra equation

In the article the inhomogeneous singular Volterra integral equation of the second kind is investigated, to which the boundary value problem of heat conduction is reduced, that arises at solving some problems with free boundaries. A general solution of this equation is found that represents the sum of the general solution to the homogeneous equation and the particular solution to the inhomogeneous equation. An estimate of the constructed resolvent for the integral equation is given.

Keywords: the boundary value problem of heat conduction, the Volterra integral equation, the resolvent, private solution.

References

1 Solonnikov, V.A., Fasano, A. (2000). One-dimensional parabolic problem arising in the study of some free boundary problems. *Notes of scientific seminars PDMI, Vol. 269,* 322–338.

2 Jenaliyev, M.T., Ramazanov, M.I. (2016). On a homogeneous parabolic problem in an in_nite corner domain. *AIP Conference Proceedings.* 1759. — 020085, doi: 10.1063/1.4959699.

3 Jenaliev, M.T., Amangaliyeva, M.M., Kosmakova, M.T., Ramazanov M.I. (2015). On a Volterra equation of the second kind with ‘incompressible‘ kernel. *Advances in Difference Equations, Vol. 2015, 71,* 14.

4 Amangaliyeva, M.M., Jenaliyev, M.T., Kosmakova, M.T., Ramazanov, M.I. (2014). About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain. *Boundary Value Problems,* 21.

5 Amangaliyeva, M.M., Jenaliyev, M.T., Kosmakova, M.T. Ramazanov, M.I. (2015). On one homogeneous problem for the heat equation in an in nite angular domain. *Siberian Mathematical Journal, Vol. 56, 6,* 1234–1248.

6 Polyanin, A.D., Manzhirov, A.V. (2003). *Handbook of integral equations.* Moscow: FML.

7 Lavrent’ev, M.A., Shabat, B.V. (1965). *Metody teorii funktsii kompleksnoho peremennoho [Methods of the theory of function of complex variable].* Moscow: Nauka [in Russian].

8 Krasnov, M.L. (1975). *Intehralnye uravneniia. Vvedenie v teoriiu [Integral equations. Introduction in theory].* Moscow: Nauka [in Russian].

9 Ditkin, V.A., Prudnikov, A.P. (1965). *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniiu [Handbook of operator calculus].* Moscow: Visshaya shkola [in Russian].