УДК 517.95

М.Т. Дженалиев[1], С.А. Искаков[2], М.И. Рамазанов[2]

[1] *Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан;*
[2] *Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова, Казахстан*
(E-mail: ramamur@mail.ru)

Об однородной параболической задаче в бесконечной угловой области

Рассмотрена однородная задача Солонникова-Фазано для уравнения параболического типа в вырождающейся бесконечной угловой области со специальными граничными условиями на подвижной границе. Используя тепловые потенциалы, данная задача сведена к решению особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода, к которому неприменим метод последовательных приближений. Решение интегрального уравнения найдено методом интегральных преобразований. Показано, что в классе существенно ограниченных функций с заданным весом однородная задача Солонникова-Фазано, помимо тривиального решения, имеет ненулевое решение с точностью до постоянного множителя.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение параболического типа, тепловые потенциалы, интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода, преобразование Лапласа.

Введение

Рассматривается однородная граничная задача

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,\ \{x,t\} \in G = \{x,t:\ 0 < x < t,\ t > 0\}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = 0,\quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=t} + \frac{d\tilde{u(t)}}{dt} = 0, \tag{2}$$

где $\tilde{u}(t) = u(t,t)$.

Отметим, что задача (1), (2) является однородным случаем задачи, изученной в [1], причем для простоты коэффициенты из указанной работы приняты равными $k = b = 1$. Эти изменения не противоречат постановке задачи из [1]. Как отмечено в [1], случай неоднородной граничной задачи «... оказывается полезным при изучении некоторых задач со свободными границами». Например, для однофазной задачи «... Стефана при следующих предположениях: жидкая фаза с положительной температурой $u(x,t)$ занимает отрезок $0 < x < s(t)$, при $x = 0$ задается положительный поток тепла, а свободная граница $x = s(t)$ начинается у твердой стенки $x = 0$, т.е. выполняется условие $s(0) = 0$». В [1] установлена теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой там граничной задачи в весовых гельдеровских пространствах.

В настоящей работе, наряду с тривиальным решением, мы устанавливаем в классе существенно ограниченных функций с заданным весом существование нетривиального решения с точностью до постоянного множителя и постоянного слагаемого. Введем этот класс следующим образом:

$$(x + t^{1/2})^{-1}\, u(x,t) \in L_\infty(G),\ \text{в.Г.}\ u(x,t) \in L_\infty(G;\, (x + t^{1/2})^{-1}). \tag{3}$$

1 Преобразование задачи (1), (2) и сведение ее к интегральному уравнению

Преобразуем задачу (1), (2). Для этого введем функцию $v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$. Далее, формально дифференцируя по переменной x уравнение (1), получаем

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < t,\ t > 0; \tag{4}$$

$$v(x,t)|_{x=0}=0,\ \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}+\frac{2}{a^2}v(x,t)\right)|_{x=t}=0. \tag{5}$$

Решение задачи (4), (5) ищем в виде суммы потенциалов двойного и простого слоя [2; 476–479]:

$$v(x,t)=\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\nu(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau, \tag{6}$$

где функции $\nu(t)$ и $\varphi(t)$ являются неизвестными и подлежат определению.

Удовлетворим решение (6) первому из условий (5). Имеем

$$v(x,t)_{|x=0}=\frac{\nu(t)}{2a^2}+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau=0. \tag{7}$$

Отсюда выразим функцию $\nu(t)$ через $\varphi(t)$

$$\nu(t)=-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau. \tag{8}$$

Используя представление (6) и равенство (8), получим следующее выражение для решения задачи (4), (5):

$$v(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\left[-\exp\left\{-\frac{(x+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}+\exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right]\varphi(\tau)d\tau. \tag{9}$$

Для того чтобы удовлетворить второму граничному условию из (5), найдем из (9) ее производную по переменной x:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \left[\frac{x+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{x-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right]\varphi(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Согласно второму граничному условию из (5) имеем

$$\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}+\frac{2}{a^2}v(x,t)\right)|_{x=t}=\frac{\varphi(t)}{2a^2}+\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\varphi(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{1}{a^3\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\varphi(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{a^3\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\varphi(\tau)d\tau=0. \tag{11}$$

Используя равенства

$$t+\tau=2t-(t-\tau),\ (t+\tau)^2=(t-\tau)^2+4t\tau,$$

из (11) получим интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{2t}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)} - \frac{t-\tau}{4a^2}\right\} \varphi(\tau) d\tau -$$

$$-\frac{5}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)} - \frac{t-\tau}{4a^2}\right\} \varphi(\tau) d\tau +$$

$$+\frac{3}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\} \varphi(\tau) d\tau = 0, \ t > 0. \tag{12}$$

Решение интегрального уравнения (12) мы будем искать в классе $\sqrt{t}\ \varphi(t) \in L_\infty(G)$, т.е. $\varphi(t) \in L_\infty(G; \sqrt{t})$.

Отметим, что подобные интегральные уравнения Вольтерра второго рода нами были исследованы в работах [3–5].

2 Решение интегрального уравнения (12)

Если ввести новую неизвестную функцию

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) \exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\},$$

то из (12) следует, что

$$\varphi_1(t) + \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{t}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} \varphi_1(\tau) d\tau -$$

$$-\frac{5}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\} \varphi_1(\tau) d\tau + \frac{3}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \varphi_1(\tau) d\tau = 0. \tag{13}$$

В интегральном уравнении (13) произведем замену независимой переменной и введем новую неизвестную функцию:

$$t = \frac{1}{t_1}, \ \tau = \frac{1}{\tau_1}, \ \varphi_2(t_1) = \frac{1}{\sqrt{t_1}} \varphi_1(1/t_1),$$

в результате этого из (13) получим

$$\varphi_2(t_1) + \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int\limits_{t_1}^\infty \frac{1}{(\tau_1 - t_1)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{a^2(\tau_1 - t_1)}\right\} \varphi_2(\tau_1) d\tau_1 -$$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_{t_1}^\infty \frac{1}{(\tau_1 - t_1)^{1/2}} \left[5 \exp\left\{-\frac{1}{a^2(\tau_1 - t_1)}\right\} - 3\right] \frac{1}{\tau_1} \varphi_2(\tau_1) d\tau_1 = 0. \tag{14}$$

Отметим, что из решения интегрального уравнения (14), возвращаясь к первоначальному независимому переменному и исходной неизвестной функции, мы можем получить решение исходного интегрального уравнения (12).

Для решения уравнения (14) будем использовать преобразование Лапласа. Имеем

$$\left[1 + \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right] \hat{\varphi}_2(p) - \frac{1}{2a\sqrt{-p}} \left[5 \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - 3\right] \int\limits_p^\infty \hat{\varphi}_2(q) dq = 0. \tag{15}$$

Здесь были использованы следующие формулы преобразования Лапласа [6; 472] и [7; 158]:

$$\mathcal{L}\left[\int_{t_1}^{\infty} k(t_1-\tau_1)\varphi_2(\tau_1)d\tau_1\right] = \hat{k}(-p)\cdot\hat{\varphi}_2(p);$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t_1}\cdot\varphi_2(t_1)\right] = \int\limits_p^{\infty}\hat{\varphi}_2(q)dq.$$

Перейдем от интегрального уравнения (15) к дифференциальному уравнению, вводя новую неизвестную функцию-образ:

$$\hat{\psi}(p) = \int\limits_p^{\infty}\hat{\varphi}_2(q)dq, \qquad \text{т.е.} \qquad \hat{\varphi}_2(p) = -\frac{d\hat{\psi}(p)}{dp}. \tag{16}$$

$$\left[1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right]\frac{d\hat{\psi}(p)}{dp} + \frac{1}{2a\sqrt{-p}}\left[5\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}-3\right]\hat{\psi}(p) = 0$$

или

$$\frac{d\hat{\psi}(p)}{\hat{\psi}(p)} = -\frac{5\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}-3}{2a\sqrt{-p}\left[1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right]}dp. \tag{17}$$

Интегрируя уравнение (17), получим

$$\ln\left(\frac{\hat{\psi}(p)}{C}\right) = -\int\frac{5\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}-3}{2a\sqrt{-p}\left[1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right]}dp =$$

$$= \left\|-\frac{2}{a}\sqrt{-p} = z,\ dz = \frac{dp}{a\sqrt{-p}}\right\| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{(5\exp\{z\}+5)-8}{1+\exp\{z\}}dz = -\frac{5}{2}z + 4\int\frac{\exp\{-z\}dz}{1+\exp\{-z\}} =$$

$$= -\frac{5}{2}z - 4\int\frac{d(1+\exp\{-z\})}{1+\exp\{-z\}} = -\frac{5}{2}z - 4\ln\left(1+\exp\{-z\}\right) =$$

$$= \left\|z = -\frac{2}{a}\sqrt{-p},\right\| = \frac{5}{a}\sqrt{-p} + \ln\left[\left(1+\exp\left\{\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^{-4}\right]. \tag{18}$$

Из (18) будем иметь

$$\hat{\psi}(p) = C\cdot\frac{\exp\left\{\frac{5}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1+\exp\left\{\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^4} = C\cdot\frac{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^4}. \tag{19}$$

Используя формулу (16), из равенства (19) находим решение интегрального уравнения (15):

$$\hat{\varphi}_2(p) = -\frac{3}{2a\sqrt{-p}}\cdot\frac{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^4} +$$

$$+4\frac{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^5}\cdot\frac{\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}}{a\sqrt{-p}} =$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}}{a\sqrt{-p}\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^5}\left[-\frac{3}{2}\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)+4\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right] =$$

$$= \left[-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right]\cdot\frac{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}}{a\sqrt{-p}\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^5}. \tag{20}$$

Далее для нахождения оригинала для функции $\hat{\varphi}_2(p)$ будем пользоваться следующим разложением:

$$\frac{1}{(1+z)^5} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A_k z^k, \ \ z = \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}, \ \ |z| < 1, \tag{21}$$

где

$$A_k = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4!}.$$

Отметим, что если $z = 1$, то верно равенство

$$\left.\frac{1}{(1+z)^5}\right|_{z=1} = \frac{1}{32}.$$

Используя разложение (21) из равенства (20), получим представление функции $\hat{\varphi}_2(p)$ в виде ряда

$$\hat{\varphi}_2(p) = \frac{1}{2a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A_k \left[\frac{5}{\sqrt{-p}}\exp\left\{-\left(k+\frac{5}{2}\right)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - \right.$$

$$\left. -\frac{3}{\sqrt{-p}}\exp\left\{-\left(k+\frac{3}{2}\right)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right], \ \ \text{для} \ \ \forall\, p \in \{p:\ \mathrm{Re}\,\{\sqrt{-p}\} > 0. \tag{22}$$

Так как имеет место формула обращения для образа Лапласа [6; 497]

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp\{-\alpha\sqrt{q}\}}{\sqrt{q}}\right] = \frac{\exp\{-\alpha^2/(4t_1)\}}{\sqrt{\pi t_1}}, \ \ 0 < t_1 < \infty,$$

то из (22) имеем функцию-оригинал $\varphi_2(t_1)$ для всех $0 < t_1 < \infty$

$$\varphi_2(t_1) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t_1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A_k \left[5\exp\left\{-\left(k+\frac{5}{2}\right)^2\frac{1}{a^2 t_1}\right\} - 3\exp\left\{-\left(k+\frac{3}{2}\right)^2\frac{1}{a^2 t_1}\right\}\right].$$

Далее, возвращаясь к исходной независимой переменной $0 < t < \infty$, получим

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\varphi_{1,k}^{(1)}(t) - \varphi_{1,k}^{(2)}(t)\right], \tag{23}$$

где

$$\varphi_{1,k}^{(1)}(t) = \frac{5A_k}{2a\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\left(k+\frac{5}{2}\right)^2\frac{t}{a^2}\right\}, \ \varphi_{1,k}^{(2)}(t) = \frac{3A_k}{2a\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\left(k+\frac{3}{2}\right)^2\frac{t}{a^2}\right\}. \tag{24}$$

Таким образом, искомое решение исходного интегрального уравнения (12) определяется по формуле

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\varphi_k^{(1)}(t) - \varphi_k^{(2)}(t)\right], \ \ 0 < t < \infty, \tag{25}$$

где

$$\varphi_k^{(1)}(t) = \varphi_{1,k}^{(1)}(t)\exp\left\{-\frac{t}{4a^2}\right\}, \ \varphi_k^{(2)}(t) = \varphi_{1,k}^{(2)}(t)\exp\left\{-\frac{t}{4a^2}\right\}. \tag{26}$$

Решение (25) действительно принадлежит классу $L_\infty(G;\sqrt{t})$.

3 Решение граничной задачи (1), (2)

Решение $v(x,t)$ граничной задачи (4), (5) определяется согласно формулам (9) и (25), (26), а решение исходной граничной задачи (1), (2) будет иметь вид

$$u(x,t) = C_2\int_0^x v(\xi,t)d\xi + C_1 = C_2\tilde{u}(x,t) + C_1, \tag{27}$$

так как ее решение находится с точностью до постоянного множителя C_2 и постоянного слагаемого C_1, где $v(x,t)$ определяется согласно формуле (9).

Для установления ограниченности полученного решения $u(x,t)$ (27) задачи (1), (2) нам необходимо изучить свойства решения $v(x,t)$ (9) задачи (4), (5). Так как $\varphi(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+, \sqrt{t})$, то нам необходимо оценить и показать ограниченность интеграла $I(x,t)$ для всех $\{x,t\} \in G$:

$$I(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t I_1(x,t,\tau) \frac{\exp\left\{-\frac{\tau}{4a^2}\right\}}{\sqrt{\tau}} d\tau, \tag{28}$$

где

$$I_1(x,t,\tau) = \int\limits_0^x \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[-\exp\left\{ -\frac{(x_1+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} + \exp\left\{ -\frac{(x_1-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \right] dx_1. \tag{29}$$

Вычислим интеграл (28). Для этого после замены

$$\left\| z = \frac{x_1 \pm \tau}{2a\sqrt{t-\tau}},\ dz = \frac{dx_1}{2a\sqrt{t-\tau}} \right\|$$

из (29) имеем

$$I_1(x,t,\tau) = a\sqrt{\pi} \left[-\mathrm{erf}\left(\frac{x+\tau}{2a\sqrt{t-\tau}} \right) + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\tau}{2a\sqrt{t-\tau}} \right) \right]. \tag{30}$$

И далее, подставляя значение интеграла $I_1(x,t,\tau)$ (30) в (28), получим

$$I(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t \left[-\mathrm{erf}\left(\frac{x+\tau}{2a\sqrt{t-\tau}} \right) + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\tau}{2a\sqrt{t-\tau}} \right) \right] \frac{\exp\left\{-\frac{\tau}{4a^2}\right\}}{\sqrt{\tau}} d\tau. \tag{31}$$

Отсюда непосредственно вытекает оценка для интеграла (31):

$$I(x,t) \le 4a \int\limits_0^{\sqrt{t}/(2a)} \exp\{-\xi^2\} d\xi = 2a\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{2a} \right). \tag{32}$$

Таким образом, мы установили равномерную ограниченность интеграла (28) по переменным $\{x,t\} \in G$, т.е. показали, что решение $\tilde{u}(x,t)$ (26) граничной задачи (1), (2) принадлежит классу $L_\infty(G)$. Заметим, что решение $\tilde{u}(x,t)$ определяется с точностью до постоянного множителя C_2, т.е. формула

$$u(x,t) = C_2 \tilde{u}(x,t) + C_1,\ u(x,t) \in L_\infty(G)$$

определяет общее решение граничной задачи (1), (2). Оценка (32) также позволяет получить ее порядок малости при любых $\{x,t\} \in G$, т.е. имеет место включение

$$\tilde{u}(x,t) \in L_\infty(G;\ (x + t^{1/2})^{-1}).$$

Это следует из асимптотики для функции $\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right)$ при малых значениях переменной t (имеющей место и для малых значений x), а для больших значений переменных $\{x,t\} \in G$ зависит от свойства ограниченности решения $u(x,t)$ на G и ограниченности выражения $(x + \sqrt{t})^{-1}\, \tilde{u}(x,t)$.

4 Основные результаты

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. Граничная задача (1), (2) имеет наряду с тривиальным решением и нетривиальное решение $u(x,t) = C_2\, \tilde{u}(x,t) + C_1$, где $\tilde{u}(x,t) \in L_\infty(G,\ (x + \sqrt{t})^{-1})$, и $C_1,\ C_2 = const$.

Теорема 2. В классе функций $L_\infty\left(G;\ [x^{1+\alpha} + t^{(1+\alpha)/2}]^{-1}\right)$ граничная задача (1), (2) имеет только тривиальное решение $u(x,t) \equiv 0$.

Список литературы

1 *Солонников В.А., Фазано А.* Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2000. — Т. 269. — С. 322–338.

2 *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 735 с.

3 *Jenaliyev M.T., Amangaliyeva M.M., Kostmakova M.T., Ramazanov M.I.* On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel // Advances in Difference Equations. — 2015 (March). — Vol. 71. — P. 14.

4 *Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kostmakova M.T., Ramazanov M.I.* About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain // Boundary Value Problems. — 2014. — Vol. 213. — P. 21.

5 *Амангалиева М.М., Дженалиев М.Т., Космакова М.Т., Рамазанов М.И.* Об одной однородной задаче для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области // Сиб. матем. журн. — 2015. — Т. 56, № 6. — С. 1234–1248.

М.Т. Дженалиев, С.А. Искаков, М.И. Рамазанов

Бұрыштық облыстағы бір параболалық есеп жайында

Мақалада қозғалмалы шекарада арнайы шекаралық шарттары бар шексіз бұрыштық облыста туындайтын параболалық теңдеулер үшін біртекті Солонников-Фазано есебі қарастырылды. Жылу потенциалдарын қолдана отырып, берілген есеп екінші текті Вольтер типті ерекше интегралдық теңдеудің шешімін табуға келтірілді. Мұндай есептерге біртіндеп жуықтау әдісін қолдану мүмкін емес. Берілген салмағы бар елеулі шектелген функциялар класында біртекті Солонников-Фазано есебінің нөлдік шешімінен басқа, тұрақты көбейткішке дейінгі дәлдікпен нөлдік емес шешімінің бар болатындығы дәлелденген.

Кілт сөздер: шекаралық есеп, параболалық типті теңдеу, жылу потенциалы, екінші текті Вольтер типті интегралдық теңдеу, Лаплас түрлендіруі.

M.T. Jenaliyev, S.A. Iskakov, M.I. Ramazanov

On a parabolic problem in an infinite corner domain

The paper deals with homogeneous problem of Solonnikov-Fasano for parabolic equations in the degenerating infinite angular domain with special boundary conditions on a moving boundary. Using heat potentials, this problem is reduced to solving a special Volterra integral equation of the second kind, to which the method of successive approximations is not applicable. The solution of the integral equation was found by the method of integral transformations. It is shown that in the class of essentially bounded functions with a given weight, the homogeneous problem of Solonnikov-Fasano, in addition to the trivial solution, has a nontrivial solution, up to a constant factor.

Keywords: boundary value problem, parabolic equation, heat potentials, integral equation of Volterra type of the second kind, Laplace transformation.

References

1 Solonnikov V.A., Fasano A. *Notes of scientific seminars of POMI,* 2000, 269, p. 322–338.

2 Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Equations of mathematical physics,* Moscow: Nauka, 1972, 735 p.

3 Jenaliyev M.T., Amangaliyeva M.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. *Advances in Difference Equations,* 2015, 71, p. 14.

4 Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. *Boundary Value Problems,* 2014, 213, p. 21.

5 Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. *Siberian mathematical Journal,* 2015, 56, 6, p. 1234–1248.