УДК 517.925.46

Х.С.Рамазанова

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана
(E-mail: hanym1981@mail.ru)

О существовании фокусных и сопряженных точек полулинейного дифференциального уравнения второго порядка на заданном интервале

В статье установлены условия существования фокусных и сопряженных точек полулинейного дифференциального уравнения второго порядка на заданном интервале и даны условия его осцилляторности.

Ключевые слова: полулинейное дифференциальное уравнение, фокусная точка, сопряженные точки, осцилляторность.

1 Введение

На интервале $I=(a,b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, рассмотрим следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$(\rho(t)\left|y'(t)\right|^{p-2} y'(t))' + \vartheta(t)\left|y(t)\right|^{p-2} y(t) = 0, \quad t > 0, \qquad (1)$$

где $1 < \rho < \infty$, ρ и ϑ — непрерывные функции на I. Причем $\rho(t) > 0$ для всех $t \in I$.

Уравнение (1) называется полулинейным дифференциальным уравнением в силу того, что пространство решений уравнения (1) при $p \ne 2$ является однородным, но не аддитивным.

Когда $p=2$, уравнение (1) переходит к линейному уравнению Штурма-Лиувилля

$$(\rho(t)y'(t))' + \vartheta(t)y(t) = 0. \qquad (2)$$

Функция $y: I \to R$ называется решением уравнения (1), если $y(t)$ непрерывно дифференцируема вместе с $\rho(t)\left|y'(t)\right|^{p-2} y'(t)$ на I и удовлетворяет уравнению (1) на I.

Далее приведем основные понятия и утверждения, относящиеся к уравнению (1), придерживаясь терминологии, данной в книге О.Досли (O.Dosly) и П.Рехак (P.Rehak) [1].

Нетривиальное решение уравнения (1) называется осцилляторным при $t=b\ (t=a)$, если оно имеет бесконечное число нулей, сходящихся к $b\ (a)$, а в противном случае решение называется неосцилляторным при $t=b\ (t=a)$.

Уравнение (1) называется осцилляторным (неосцилляторным) при $t=b\ (t=a)$, если все его нетривиальные решения осцилляторны (неосцилляторны) при $t=b\ (t=a)$.

Известно, что в [1] для уравнения (1) справедливы теоремы Штурма о сравнении и разделении нулей. Поэтому уравнение (1) осцилляторно при $t=b\ (t=a)$, если одно его непрерывное решение осцилляторно при $t=b\ (t=a)$.

Пусть $I_0 \subset I$ — замкнутый, открытый или полуоткрытый интервал. В исследовании осцилляционных свойств важные значения имеют такие понятия, как уравнение с сопряженными точками и уравнения без сопряженных точек на I_0.

Точки $t_1, t_2 \in I$ называются сопряженными точками по отношению к уравнению (1), если существует нетривиальное решение $y(t)$ уравнения (1) такое, что $y(t_1) = y(t_2) = 0$.

Уравнение (1) называется уравнением без сопряженных точек на I_0, если любое его нетривиальное решение на I_0 имеет не более одного нуля, а в противном случае, т.е. если существует нетривиальное решение уравнения (1), имеющее два или более нулей на I_0, уравнение (1) называется уравнением с сопряженными точками на I_0.

Далее для краткости, следуя работе [1], мы будем говорить, что уравнение (1) бессопряжено на I_0, если оно является уравнением без сопряженных точек на I_0, и уравнение сопряжено на I_0, если оно является уравнением с сопряженными точками на I_0.

Теперь введем следующие понятия, относящиеся к уравнению (1), которые рассматриваются в данной работе [1; 193].

Точка $\beta \in I$ называется правой фокусной точкой точки $\alpha \in I, \alpha < \beta$ по отношению к уравнению (1), если существует нетривиальное решение $y(t)$ этого уравнения такое, что $y'(\alpha) = 0 = y(\beta)$.

Аналогично, точка $\alpha \in I$ называется левой фокусной точкой точки $\beta \in I, \alpha < \beta$ по отношению к уравнению (1), если существует нетривиальное решение $y(t)$ этого уравнения такое, что $y'(\beta) = 0 = y(\alpha)$.

Уравнение (1) называется право- (лево-) бесфокусным на (α, β), если не существует в (α, β) правой (левой) фокусной точки точки $\alpha, (\beta)$ по отношению к уравнению (1).

Вопросы осцилляторности и неосцилляторности уравнения (1) исследованы достаточно хорошо. Основные результаты и методы исследования даны в [1]. Однако получение необходимых и достаточных (совпадающих) условий в терминах коэффициентов уравнения (1) пока остается открытым.

Вопросы фокусности, сопряженности уравнения (1) на заданном интервале исследованы слабо (см. [2]). В основном даны только необходимые результаты, относящиеся к линейному уравнению (2) (см., например, [3–5] и приведенные там ссылки).

В разделе 5.1.8 книги [1] даны различные необходимые условия существования левой и правой фокусных точек относительно уравнения (1), когда функция $\rho \equiv 1$.

В данной работе сначала устанавливаются достаточные условия существования левой и правой фокусных точек на заданном интервале, далее на основе полученных результатов определяются сопряженность и осцилляторность уравнения (1).

2. Основные результаты

Пусть $a < \alpha < \beta < b$ и $W_p^1(\alpha, \beta)$ — пространство Соболева с нормой $\|f\|_{W_p^1} = \|f'\|_p + \|f\|_p$, где $\|\cdot\|_p$ — обычная норма пространства $L_p(\alpha, \beta)$, $1 < p < \infty$.

Положим

$$W_{p,r}^1(\alpha, \beta) = \left\{ f \in W_p^1(\alpha, \beta) : f(\beta) = 0 \right\};$$

$$W_{p,l}^1(\alpha, \beta) = \left\{ f \in W_p^1(\alpha, \beta) : f(\alpha) = 0 \right\}.$$

На основании теорем 5.8.3 и 5.8.4, а также с учетом замечания 5.8.1 [1], имеем

Теорема A^+. Уравнение (1) право бесфокусно на (α, β) тогда и только тогда, когда

$$\int_\alpha^\beta (\rho(t)|f'(t)|^p - \vartheta(t)|f(t)|^p) dt \geq 0 \tag{3}$$

для всех нетривиальных $f \in W_{p,r}^1(\alpha, \beta)$.

Теорема A. Уравнение (1) лево бесфокусно на (α, β) тогда и только тогда, когда выполнено (3) для всех нетривиальных $f \in W_{p,l}^1(\alpha, \beta)$.

В силу непрерывности функции ϑ и $f \in W_p^1(\alpha, \beta)$ на $[\alpha, \beta]$ интеграл $\int_\alpha^\beta \vartheta(t)|f(t)|^p) dt < \infty$. Поэтому неравенство (3) эквивалентно неравенству

$$\int_{\alpha}^{\beta} \vartheta(t)\left|f(t)\right|^{p} dt \le \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t)\left|f^{'}(t)\right|^{p} dt. \tag{4}$$

В случае $\vartheta \ge 0$ неравенство (4) является весовым неравенством Харди в дифференциальной форме (см. [6, 7]) с наилучшей постоянной меньше или равной единице. В [8], используя результаты по весовым неравенствам Харди, получено достаточное, а также необходимое условие существования фокусных точек уравнения (1), когда $\vartheta \ge 0$.

В данной работе исследуется более общий случай, когда функция ϑ может быть знаконепостоянной на (α,β).

Положим $\vartheta_{+}(t) = \max\{0, \vartheta(t)\}$, $v_{-}(t) = \max\{0, -\vartheta(t)\}$. Тогда $\vartheta(t) = \vartheta_{+}(t) - \vartheta_{-}(t)$, $\forall t \in I$. Так как функции ϑ, ϑ_{+} и ϑ_{-} — непрерывные на $[\alpha,\beta]$, то для $f \in W_{p}^{1}(\alpha,\beta)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \vartheta(t)\left|f(t)\right|^{p} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \vartheta_{+}(t)\left|f(t)\right|^{p} dt - \int_{\alpha}^{\beta} \vartheta_{-}(t)\left|f(t)\right|^{p} dt .$$

Поэтому неравенство (4), в свою очередь, эквивалентно неравенству

$$\int_{\alpha}^{\beta} \vartheta_{+}(t)\left|f(t)\right|^{p} dt \le \int_{\alpha}^{\beta} (\rho(t)\left|f'(t)\right|^{p} + \vartheta_{-}(t)\left|f(t)\right|^{p}) dt. \tag{5}$$

Теперь, объединяя утверждения теоремы A^{+} и теоремы A^{-}, сформулируем

Теорема 1. Уравнение (1) лево- (право-) бесфокусно на интервале (α,β) тогда и только тогда, когда неравенство (5) выполнено для всех нетривиальных $f \in W_{p,r}^{1}(\alpha,\beta)$ $\left(f \in W_{p,l}^{1}(\alpha,\beta)\right)$.

Из теоремы 1 вытекает эквивалентное ей утверждение.

Теорема 2. На интервале (α,β) существует левая (правая) точка точки $\beta, (\alpha)$ по отношению к уравнению (1) тогда и только тогда, когда существует нетривиальная функция $\tilde{f} \in W_{p,l}^{1}(\alpha,\beta)$ $\left(\tilde{f} \in W_{p,r}^{1}(\alpha,\beta)\right)$ такая, что

$$\int_{\alpha}^{\beta} \vartheta_{+}(t)\left|\tilde{f}(t)\right|^{p} dt > \int_{\alpha}^{\beta} (\rho(t)\left|\tilde{f}'(t)\right|^{p} + \vartheta_{-}(t)\left|\tilde{f}(t)\right|^{p}) dt .$$

Введем функции

$$\varphi_{p}^{+}(x) = \inf_{\alpha<t<x} \left\{ \left(\int_{t}^{x} \rho^{1-p'}(s) ds \right)^{1-p} + \int_{t}^{\beta} \vartheta_{-}(s) ds \right\};$$

$$\varphi_{p}^{-}(x) = \inf_{x<t<\beta} \left\{ \left(\int_{x}^{t} \rho^{1-p'}(s) ds \right)^{1-p} + \int_{\alpha}^{t} \vartheta_{-}(s) ds \right\}.$$

Функции $\varphi_{p}^{+}, \varphi_{p}^{-}$ ранее введены в [9], где показаны различные их свойства.

Теорема 3. Если

$$\sup_{\alpha<x<\beta} \left[\varphi_{p}^{+}(x) \right]^{-1} \int_{x}^{\beta} \vartheta_{+}(t) dt > 1, \tag{6}$$

то на интервале (α,β) существует левая фокусная точка точки β по отношению к уравнению (1).

Доказательство. Пусть выполнено (6). Тогда существует точка $x_{0} \in (\alpha,\beta)$, такая что

$$\int_{x_{0}}^{\beta} \vartheta_{+}(x) > \varphi_{p}^{+}(x_{0}). \tag{7}$$

В силу строгости неравенство в (7) и из определения функции φ_{p}^{+} существует точка $c \in (\alpha, x_{0})$ такая, что

$$\int_{x_{0}}^{\beta} \vartheta_{+}(t) dt > \left(\int_{c}^{x_{0}} \rho^{1-p'}(s) ds \right)^{1-p} + \int_{c}^{\beta} \vartheta_{-}(s) ds. \tag{8}$$

Построим функцию $\tilde{f}$, полагая

$$\tilde{f}(t)=\begin{cases}0,\ \alpha\le t<c;\\ \left(\int\limits_c^{x_0}\rho^{1-p'}(s)ds\right)^{-1}\int\limits_c^t\rho^{1-p'}(s)ds, \quad c\le t<x_0;\\ 1,\ x_0\le t\le\beta.\end{cases}$$

Функция $\tilde{f}$ — абсолютно непрерывная на $[\alpha,\beta]$ и принадлежит пространству $W^1_{p,l}(\alpha,\beta)$. Оценим правую и левую части (5) при $f=\tilde{f}$.

$$\int\limits_\alpha^\beta\vartheta_+(t)\left|\tilde{f}(t)\right|^p dt>\int\limits_{x_0}^\beta\vartheta_+(t)dt; \tag{9}$$

$$\int\limits_\alpha^\beta\rho(t)\left|\tilde{f}'(t)\right|^{p'}dt=\left(\int\limits_c^{x_0}\rho^{1-p'}(s)ds\right)^{-p}\int\limits_c^{x_0}\rho(t)\left|\rho^{1-p'}(t)\right|^p dt=\left(\int\limits_c^{x}\rho^{1-p'}(s)ds\right)^{1-p}; \tag{10}$$

$$\int\limits_\alpha^\beta\vartheta_-(t)\left|\tilde{f}(t)\right|^p dt=\left(\int\limits_c^{x_0}\rho^{1-p'}(s)ds\right)^{-p}\int\limits_c^{x_0}\vartheta_-(t)\left|\int\limits_c^t\rho^{1-p'}(s)ds\right|^p dt+\int\limits_{x_0}^\beta\vartheta_-(t)dt\le\int\limits_c^{x_0}\vartheta_-(t)dt+\int\limits_{x_0}^b\vartheta_-(t)dt=\int\limits_c^b\vartheta_-(t)dt. \tag{11}$$

Из (8)–(11) имеем

$$\int\limits_\alpha^\beta\vartheta_+(t)\left|\tilde{f}(t)\right|^p dt>\int\limits_\alpha^\beta(\rho(t)\left|\tilde{f}'(t)\right|^p+\vartheta_-(t)\left|\tilde{f}(t)\right|^p)dt.$$

Следовательно, по теореме 2 на интервале (α,β) существует левая фокусная точка точки β по отношению к уравнению (1).

Аналогично доказывается следующая

Теорема 4. Если

$$\sup_{\alpha<x<\beta}\left[\varphi_p^-(x)\right]^{-1}\int\limits_\alpha^x\vartheta_+(t)dt>1,$$

то на интервале (α,β) существует правая фокусная точка точки α по отношению к уравнению (1). В случае $\vartheta\ge 0$, т.е. $\vartheta\equiv\vartheta_+$, $\vartheta_-\equiv 0$, из теорем 3 и 4 вытекают результаты работы [8].

Из доказательств теорем 3 и 4 следуют:

Следствие 1. Если существуют точки $c,d:\alpha<c<d<\beta$ такие, что

$$\int\limits_\alpha^\beta\vartheta_+(t)dt>\left(\int\limits_c^d\rho^{1-p'}(s)ds\right)^{1-p}+\int\limits_c^\beta\vartheta_-(s)ds,$$

то на интервале (α,β) существует левая фокусная точка точки β по отношению к уравнению (1).

Следствие 2. Если существуют точки $c,d:\alpha<d<c<\beta$ такие, что

$$\int\limits_\alpha^d\vartheta_+(t)dt>\left(\int\limits_d^c\rho^{1-p'}(s)ds\right)^{1-p}+\int\limits_d^c\vartheta_-(s)ds,$$

то на интервале (α,β) существует правая фокусная точка точки α по отношению к уравнению (1).

Из теорем 3 и 4, следствий 1 и 2 при $p=2$ получаем условие существования левой (правой) фокусной точки точки $\beta\,(\alpha)$ по отношению к линейному уравнению (2).

Между фокусными и сопряженными точками по отношению к уравнению (1) имеется следующая связь.

Лемма 1. Уравнение (1) сопряжено на интервале (α,β) тогда и только тогда, когда существует точка $c\in(\alpha,\beta)$ и она имеет левую и правую фокусные точки соответственно на интервалах $(\alpha,c),(c,\beta)$ по отношению к уравнению (1).

Действительно, если уравнение (1) сопряженно на интервале (α,β), то существуют точки $t_1, t_2 \in (\alpha,\beta)$, $t_1 < t_2$, и нетривиальное решение y уравнения (1) такое, что $y(t_1) = y(t_2) = 0$. По определению решения функция y, непрерывно дифференцируемая на $[\alpha,\beta]$. Поэтому, по теореме Ролля, существует точка $c: t_1 < c < t_2$ такая, что $y'(c) = 0$. Тогда точка t_1 есть левая фокусная точка точки c на интервале (α,c), а t_2 — правая фокусная точка точки c на интервале (c,β) по отношению к уравнению (1).

Обратно, пусть существует точка $c \in (\alpha,\beta)$, имеющая левую $t^- \in (\alpha,c)$ и правую $t^+ \in (c,\beta)$ фокусные точки по отношению к уравнению (1), соответственно на интервалах (α,c), (c,β). Тогда существуют нетривиальные решения y_-, y_+ уравнения (1) такие, что $y'_-(c) = y_-(t^-) = 0$, $y'_+(c) = y_+(t^+) = 0$. Но по теореме 1.1.1 работы [1] пространство решений уравнения (1) однородно и задачи Коши имеет единственное решение, определенное на всем интервале (α,β). Поэтому $y = y_- = y_+$ и $y(t^-) = y(t^+) = 0$, т.е. уравнение (1) сопряжено на интервале (α,β). Лемма 1 доказана.

Примем следующее соглашение.

Для любого $A \in R$ положим

$$(A)_+ = \begin{cases} A, \text{ если } A > 0; \\ 0, \text{ если } A \le 0. \end{cases} \tag{12}$$

Пусть для некоторого $c \in (\alpha,\beta)$

$$A^+(\alpha,c) = \sup_{\alpha<x<c} \left[\overset{+}{\varphi}_p(x) \right] \int_x^c \vartheta_+(t)dt - 1;$$

$$A^-(c,\beta) = \sup_{c<x<\beta} \left[\overset{-}{\varphi}_p(x) \right] \int_c^x \vartheta_+(t)dt - 1.$$

Теорема 5. Если

$$\sup_{\alpha<c<\beta} \left(A^+(\alpha,c) \right)_+ + \left(A^+(\alpha,c) \right)_+ > 0, \tag{13}$$

то уравнение (1) сопряжено на интервале (α,β).

Доказательство. Пусть имеет место (13). Супремум по $c: \alpha < c < \beta$ не может достигать при $c \to \alpha$ или при $c \to \beta$, так как в этом случае одна из скобок в (13) обращается в нуль. Поэтому в силу строгости неравенства (13) существует точка $c_0 \in (\alpha,\beta)$ и имеет место

$$\left(A^+(\alpha,c_0) \right)_+ + \left(A^-(c_0,\beta) \right)_+ > 0.$$

Откуда следует, что $\left(A^+(\alpha,c_0) \right)_+ \ne 0$ и $\left(A^-(c_0,\beta) \right)_+ \ne 0$. Тогда в силу (12)

$$\sup_{\alpha<x<c_0} \left[\overset{+}{\varphi}_p(x) \right]^{-1} \int_x^{c_0} \vartheta_+(t)dt > 1;$$

$$\sup_{c_0<x<\beta} \left[\overset{-}{\varphi}_p(x) \right]^{-1} \int_{c_0}^x \vartheta_+(t)dt > 1.$$

Полученные неравенства в силу теорем 3 и 4 означают, что точка c_0 имеет левую и правую точки по отношению к уравнению (1) соответственно на интервалах (α,c_0), (c_0,β). Тогда по лемме 1 уравнение (1) сопряженно на интервале (α,β). Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Пусть $b = \infty$. Если при некотором $h > 0$

$$\overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \sup_{\alpha<c<\alpha+h} \left(A^+(\alpha,c) - 1 \right)_+ \left(A^-(c,\alpha+h) - 1 \right)_+ > 0, \tag{14}$$

то уравнение (1) осцилляторно при $t = \infty$.

Доказательство. Пусть при некотором $h > 0$ выполнено (14). Тогда по определению верхнего предела и строгости неравенства в (14) существует последовательность $\{\alpha_k\}_{k\ge1} \subset I$ такая, что $\alpha_k \to \infty$ при $k \to \infty$ и

$$\sup_{\alpha_k < c < \alpha_k + h} \left(A^+(\alpha_k, c) - 1 \right)_+ \left(A^-(c, \alpha_k + h) - 1 \right)_+ > 0.$$

На основании теоремы 5 уравнение (1) сопряжено на интервалах $(\alpha_k, \alpha_k + h), k \geq 1.$ Так как $\alpha_k \to \infty$ при $k \to \infty,$ то можно выбрать подпоследовательность $\left\{\alpha_{k_n}\right\}_{n\geq 1} \subset \left\{\alpha_k\right\}_{k\geq 1}$ такую, что $\alpha_{k_n} + h < \alpha_{k_{n+1}}$ при всех $n \geq 1.$ Тогда уравнение (1) сопряжено на взаимно не пересекающихся интервалах $\left(\alpha_{k_n}, \alpha_{k_n} + h\right),$ $n \geq 1.$ Это означает, что для каждого $n \geq 1$ существует нетривиальное решение уравнения (1), имеющее два нуля на интервале $\left(\alpha_{k_n}, \alpha_{k_n} + h\right).$ Отсюда по теореме Штурма о разделении нуля существует нетривиальное решение $y(t)$ уравнения (1), имеющее на каждом $\left(\alpha_{k_n}, \alpha_{k_n} + h\right)$ по крайней мере по одному нулю $\alpha_{k_n} < t_k < \alpha_{k_n} + h.$ Так как $\alpha_{k_n} \to \infty$ при $n \to \infty,$ то $t_n \to \infty$ при $n \to \infty.$ Следовательно, решение $y(t)$ осцилляторно при $t = \infty,$ и уравнение (1) также осцилляторно при $t = \infty.$ Теорема 6 доказана.

Отметим, что при $p = 2$ из теоремы 5 и 6 получаем условия сопряженности на интервале (α, β) и осцилляторности при $t = b = \infty$ линейного уравнения (2).

Список литературы

1 *Dosly O., Rehark P.* Half-linear diferential equations // Math. studies. — 2005. — 202.

2 *Rodrigues M.M.* Lyapunov Inequalities for Nonlinear *p*-Laplacian Problems with Weight Functions // Int. Journal of Math. Analysis. — 2011. — Vol. 5. — № 30. — P. 1497–1506.

3 *Man Kam Kwong*. On Lyapunov's Inequality for Disfocality // Journal of Math.Analysis and Applications. — 1981. — Vol. 83. — P. 486–494.

4 *Pedro Almeniar, Lucas Jodar*. Convergent Disfocality and nondisfocality Criteria for second-Order Linear Differential Equations // Abstract and Applied Analysis. — Vol. 2013, Article ID 987976, II p.

5 *Panigrahi S.* Criteria for Disfocality for Third Order Differential Equations // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equation. — 2009. — № 23. — P. 1–17.

6 *Opic B., Kufner A.* Hardy-type inequalities // Longman Scientific and Technical. — 1990.

7 *Абылаева А.М., Байарыстанов А.О., Ойнаров Р.* Весовое дифференциальное неравенство Харди на множестве $\overset{\circ}{AC}(I)$ // Сиб. математический журнал. — 2014. — Т. 55. — № 3. — С. 477–493.

8 *Кудабаева С.Е., Ойнаров Р.* Критерии бессопряженности полулинейного дифференциального уравнения второго порядка // Математический журнал. — 2010. — Т. 10. — № 2 (36).

9 *Oiynarov R.* Reversion of Holder Type Inequalities for Sums of Weighted Norms and Additive Weighted Estimates of Integral Operators // Mathematical Inequalities & Applications. — 2003. — Vol. 6. — № 3. — P. 421–436.

Х.С.Рамазанова

Екінші ретті жартылай сызықты дифференциалдық теңдеудің берілген интервалда фокустық және түйіндестік нүктелерінің бар болуы

Мақалада екінші ретті жартылай сызықты дифференциалдық теңдеудің берілген интервалда фокустық және түйіндестік нүктелерінің бар болу шарттары алынған және оның тербелімділік шарты берілген.

Kh.S.Ramazanova

On the existence of focal and conjugate points of half-linear second-order differential equation on a given interval

Established conditions for the existence of focal points and conjugate points of half-linear second-order differential equations on a given interval and are given oscillatory conditions.

References

1 Dosly O., Rehark P. *Math. studies*, 2005, 202.
2 Rodrigues M.M. *Int. Journal of math. analysis*, 2011, 5, 30, p. 1497–1506.
3 Man Kam Kwong. *Journal of math. analysis and applications*, 1981, 83, p. 486–494.
4 Pedro Almeniar, Lucas Jodar. *Abstract and applied analysis*, 2013, Article ID 987976, II p.
5 Panigrahi S. *Electronic journal of qualitative theory of differential equation*, 2009, 23, p. 1–17.
6 Opic B., Kufner A. *Hardy-type inequalities*, Longman scientific and technical, 1990.
7 Abylayeva A.M., Baiyarystanov A.O., Oinarov R. *Siberian math. journal*, 2014, 55, 3, p. 477–493.
8 Kudabayeva S.Ye., Oiynarov R. *Math. journal*, 2010, 10, 2 (36), p. 56–66.
9 Oiynarov R. *Mathematical Inequalities & Applications*, 2003, 6, 3, p. 421–436.