УДК 51

Е. Төлеуғазы

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана
(E-mail: erzhan1996@yandex.ru)

Теоремы вложения, теоремы о следах и продолжении для анизотропных пространств Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$

В статье на основе использования интерполяционных свойств анизотропных пространств Лоренца получены неравенства разных метрик и разных измерений для тригонометрических полиномов. На основе теоремы о представлении определены анизотропные пространства Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ по метрике анизотропных пространств Лоренца. Заметим, что в случае, когда $\mathbf{d} = d_1$, указанные пространства совпадают с классическими изотропными пространствами Никольского-Бесова, а в случае $\mathbf{d} = (1, \dots, 1)$ – с анизотропными пространствами Никольского-Бесова, имеющими характер пространств с доминирующими смешанными производными. Описаны элементарные вложения для этих пространств относительно всех параметров, участвующих в их определении. На основе неравенства разных метрик получена предельная теорема вложения для данных пространств относительно сильных параметров. Построен пример, показывающий неулучшаемость условий на параметры пространств для сохранения свойства вложения. На основе неравенства разных измерений получены предельные теоремы о следе и продолжении для функций из рассматриваемых пространств. Отметим, что условия в указанных теоремах также являются неулучшаемыми. В случае $\mathbf{d} = d_1$ из полученных теорем вытекают соответствующие результаты, ранее полученые в работах С.М. Никольского и О.В. Бесова для изотропных пространств, а в случае $\mathbf{d} = (1, \dots, 1)$ – результаты К.А. Бекмаганбетова и Е.Д. Нурсултанова для анизотропных пространств с доминирующими смешанными производными. Полученные результаты показывают, что рассматриваемые пространства имеют гибридную структуру классических изотропных пространств и анизотропных пространств с доминирующими смешанными производными. А именно функции из указанных пространств имеют одинаковые гладкостные и метрические свойства по переменным, входящим в один блок переменных, и разные гладкостные и метрические свойства относительно переменных, входящих в разные блоки. Полученные в работе результаты в дальнейшем могут быть использованы в теории краевых задач уравнений математической физики, в задачах гармонического анализа и теории приближений в анизотропных пространствах.

Ключевые слова: анизотропные пространства Бесова, анизотропные пространства Лоренца, вложение, след, продолжение, неравенство разных метрик, неравенство разных измерений.

Пусть мультииндекс $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$, $\mathbb{T}^d = \{ x = (x_1, \dots, x_n) : x_i = (x_1^i, \dots, x_{d_i}^i) \in [0, 2\pi)^{d_i}$, $i = 1, \dots, n\}$. В случае $d = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n-\text{штук}})$ для тора $\mathbb{T}^d$ введем обозначение $\mathbb{T}^n$.

Пусть $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ — измеримая в $\mathbb{T}^d$ функция. Через $f^*(t) = f^{*_1,\dots,*_n}(t_1, \dots, t_n)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки к функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ последовательно по мультипеременным $x_1, \dots, x_n$ при фиксированных остальных переменных.

Пусть мультииндексы $p = (p_1, \dots, p_n)$, $r = (r_1, \dots, r_n)$ такие, что если $1 \leq p_i < \infty$, то $1 \leq r_i \leq \infty$, если же $p_i = \infty$, то и $r_i = \infty$, $i = 1, \dots, n$.

Анизотропным пространством Лоренца $L_{pr}(\mathbb{T}^d)$ (см. [1]) назовем множество функций, для которых конечна следующая величина:

$$\|f\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)} = \left(\int_0^{2\pi} \left(t_n^{1/p_n} \dots \left(\int_0^{2\pi} \left(t_1^{1/p_1} f^{*_1,\dots,*_n}(t_1, \dots, t_n) \right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{r_2/r_1} \dots \right)^{r_n/r_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/r_n}.$$

При $r = \infty$ выражение $\left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r}$ понимается как $\sup\limits_{0 \leq t < 2\pi} |f(t)|$.

Лемма 1 ([1]). а) Пусть $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \infty$ и $1 \leq r \leq \infty$, тогда $L_{p_1 r}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow L_{p_0 r}(\mathbb{T}^d)$.

б) Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $1 \leq r_0 \leq r_1 \leq \infty$, тогда $L_{pr_0}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow L_{pr_1}(\mathbb{T}^d)$.

Пусть $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0$ или $\varepsilon_i = 1, i = 1, \ldots, n\}$ — вершины n-мерного единичного куба в $\mathbb{R}^n$, $A = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ — семейство банаховых пространств, являющихся подпространствами некоторого линейного хаусдорфова пространства, которое называется совместимым семейством банаховых пространств [2]. Для элемента a пространства $\sum_{\varepsilon \in E} A_\varepsilon$ определим функционал

$$K(\ t, a;\ A) = \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} t^\varepsilon \|a_\varepsilon\|_{A_\varepsilon},$$

где $t^\varepsilon = t_1^{\varepsilon_1} \ldots t_n^{\varepsilon_n}$.

Пусть $0 < \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) < 1$, $1 \leq r = (r_1, \ldots, r_n) \leq \infty$. Через $A_{\theta r} = (A_\varepsilon; \varepsilon \in E)_{\theta r}$ обозначим линейное подмножество множества $\sum_{\varepsilon \in E} A_\varepsilon$, для элементов которого верно

$$\|a\|_{\ A_{\theta \mathbf{r}}} = \left(\int_0^{2\pi} \left({t_n}^{-\theta_n} \ldots \left(\int_0^{2\pi} \left({t_1}^{-\theta_1} K(\ t, a;\ A) \right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{r_2/r_1} \ldots \right)^{r_n/r_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/r_n} < \infty.$$

Лемма 2 ([1]). Пусть $0 < \theta < 1$, $1 \leq r \leq \infty$, $A = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$, $B = \{B_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ — два совместимых семейства банаховых пространств. Если найдутся два вектора $M_0 = (M_1^0, \ldots, M_n^0), \ldots, M_1 = (M_1^1, \ldots, M_n^1)$ с положительными компонентами такие, что для линейного оператора имеет место $T:\ A_\varepsilon \to\ B_\varepsilon$ с оценкой нормы $C_\varepsilon \prod_{i=1}^{n} M_i^{\varepsilon_i}$ для любого $\varepsilon \in E$, то $T:\ A_{\theta r} \to\ B_{\theta r}$ с нормой

$$\|T\|_{\ A_{\theta r} \to\ B_{\theta r}} \leq \max_{\varepsilon \in E} C_\varepsilon \prod_{i=1}^{n} \left(M_i^0\right)^{1-\theta_i} \left(M_i^1\right)^{\theta_i}.$$

Лемма 3 ([1]). а) Пусть $1 \leq p_0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0) < p_1 = (p_1^1, \ldots, p_n^1) \leq \infty$, $p_\varepsilon = (p_1^{\varepsilon_1}, \ldots, p_n^{\varepsilon_n}), \varepsilon \in E$, $0 < \theta < 1$ и $1 \leq r \leq \infty$. Тогда для пространств Лебега со смешанной метрикой $\{L_{\ p_\varepsilon}(\mathbb{T}^{\ d})\}_{\varepsilon \in E}$ справедливо равенство

$$(L_{p_\varepsilon}(\mathbb{T}^d); \varepsilon \in E)_{\theta r} = L_{pr}(\mathbb{T}^{\ d}),$$

где $1/p = (1-\theta)/\ p_0 + theta/\ p_1$.

б) Пусть $1 \leq p_0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0) < p_1 = (p_1^1, \ldots, p_n^1) \leq \infty$, $1 \leq r_0 = (r_1^0, \ldots, r_n^0)$, $r_1 = (r_1^1, \ldots, r_n^1) \leq$ $\leq \infty$. Тогда для $0 < \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) < 1$ и $1 \leq q = (q_1, \ldots, q_n) \leq \infty$ справедливо равенство

$$\left(L_{\ p_\varepsilon r_\varepsilon}(\mathbb{T}^{\ d}); \varepsilon \in E\right)_{\theta q} \hookrightarrow L_{\ pq}(\mathbb{T}^d),$$

где $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Лемма 4 (неравенство разных метрик). Пусть $T_{\ s}(\ x)$ — тригонометрический полином порядка не выше $ss = (s_1^1, \ldots, s_{d_1}^1, \ldots, s_1^n, \ldots, s_{d_n}^n)$ по мультипеременной $x = (x_1^1, \ldots, x_{d_1}^1, \ldots, x_1^n, \ldots, x_{d_n}^n)$. Тогда при $1 < p_1 = (p_1^1, \ldots, p_n^1) \leq p_2 = (p_1^2, \ldots, p_n^2) < \infty$, $1 \leq r = (r_1, \ldots, r_n) \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|T_s\|_{L_{p_2 r}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \leq C \prod_{\{i:\ p_i^1 < p_i^2\}} \prod_{j=1}^{d_i} \left(s_j^i\right)^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{p_1 r}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})}, \tag{1}$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от s.

Доказательство. Из условия леммы мультииндексы $\dfrac{1}{p_1}$ и $\dfrac{1}{p_2}$ принадлежат открытому параллелепипеду $(0;1)^n$. Следовательно, существует параллелепипед $Q_h(\ 0)$ с центром в нуле такой, что $Q_h(\frac{1}{p_1}) \subset (0;1)^n$ и $Q_h(\frac{1}{p_2}) \subset (0;1)^n$. Здесь сторона h зависит только от параметров p_1 и p_2. Отметим, что для вершин $\left\{\dfrac{1}{p_1^\varepsilon}\right\}_{\varepsilon \in E}$ и $\left\{\dfrac{1}{p_2^\varepsilon}\right\}_{\varepsilon \in E}$ параллелепипедов $Q_h(\frac{1}{p_1})$ и $Q_h(\frac{1}{p_2})$ имеет место равенство

$$\frac{1}{p_1^\varepsilon} - \frac{1}{p_2^\varepsilon} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}, \quad \varepsilon \in E.$$

Из неравенства разных метрик для пространств Лебега со смешанной метрикой для тригонометрических полиномов имеют место

$$\|T_s\|_{L_{p_2^{\varepsilon}}(\mathbb{T}^d)} \le C_1 \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{d_i}\left(s_j^i\right)^{1/p_i^1-1/p_i^2}\|T_s\|_{L_{p_1^{\varepsilon}}(\mathbb{T}^d)}, \quad \varepsilon\in E,$$

где C_1 — абсолютная постоянная.

Далее, согласно предыдущему неравенству и теореме М. Рисса об ограниченности частичных сумм в пространстве Лебега со смешанной метрикой, получаем

$$\|S_s(f)\|_{L_{p_2^{\varepsilon}}(\mathbb{T}^d)} \le C_1 \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{d_i}\left(s_j^i\right)^{1/p_i^1-1/p_i^2}\|S_s(f)\|_{L_{p_1^{\varepsilon}}(\mathbb{T}^d)} \le$$

$$\le C_2 \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{d_i}\left(s_j^i\right)^{1/p_i^1-1/p_i^2}\|f\|_{L_{p_1^{\varepsilon}}(\mathbb{T}^d)}, \quad \varepsilon\in E.$$

Применяя леммы и а) к оператору $S_s(f)$, получаем

$$\|S_s(f)\|_{L_{p_2 r}(\mathbb{T}^d)} \le C \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{d_i}\left(s_j^i\right)^{1/p_i^1-1/p_i^2}\|f\|_{L_{p_1 r}(\mathbb{T}^d)}.$$

Для доказательства точности в смысле порядка неравенства (1) достаточно рассмотреть полиномы $T_s^{(\beta)}(x)=\prod_{i=1}^{n}T_{s_i}^{(\beta_i)}(x_i)$, где $T_{s_i}^{(\beta_i)}(x_i)=\sum_{k_i=1}^{s_i}\frac{\cos k_i x_i}{k_i^{\beta_i}}$, так как согласно теореме Харди - Литтлвуда в пространствах Лоренца $L_{pr}\left(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}\right)$ (см. [3]) при $\beta_i\neq 1/p'_i$ имеем

$$\left\|T_s^{(\beta)}\right\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)}=\prod_{i=1}^{n}\left\|T_{s_i}^{(\beta_i)}\right\|_{L_{p_i r_i}(\mathbb{T})}\sim\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{l_i=1}^{s_i}l_i^{(1/p'_i-\beta_i)r_i-1}\right)^{1/r_i}\sim\prod_{i=1}^{n}s_i^{1/p'_i-\beta_i}.$$

Для мультииндекса $d=(d_1,\ldots,d_m,d_{m+1},\ldots,d_n)$ обозначим через $\bar{d}=(d_1,\ldots,d_m)$.

Лемма 5 (неравенство разных измерений). Пусть $T_s(x)$ — тригонометрический полином порядка не выше $s=(s_1,\ldots,s_m,s_{m+1},\ldots,s_n)$ по мультипеременной $x=(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n)$ и $1<p=(p_1,\ldots,p_m,p_{m+1},\ldots,p_n)<\infty$, $0<r=(r_1,\ldots,r_m,r_{m+1},\ldots,r_n)\le\infty$. Тогда для произвольной фиксированной мультиточки $(x_{m+1},\ldots,x_n)\in\mathbb{T}^{d_{m+1}}\times\ldots\times\mathbb{T}^{d_n}$ имеет место неравенство

$$\|T_s(\cdot,\ldots,\cdot,x_{m+1},\ldots,x_n)\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} \le C \prod_{i=m+1}^{n}\prod_{j=1}^{d_i}\left(s_j^i\right)^{1/p_i^1-1/p_i^2}\|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)},$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от s.

Доказательство. Согласно неравенству разных измерений для тригонометрических полиномов в пространстве Лебега со смешанной метрикой имеем

$$\|T_s(\cdot,\ldots,\cdot,x_{m+1},\ldots,x_n)\|_{L_{\bar{p}}([0,2\pi)^m)} \le C \prod_{i=m+1}^{n}\prod_{j=1}^{d_i}\left(s_j^i\right)^{1/p_i^1-1/p_i^2}\|T_s\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}.$$

Далее, применяя схему, использованную в доказательстве леммы, получаем доказательство леммы.

Пусть $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$, $1\le q=(q_1,\ldots,q_n)\le\infty$, $1\le p=(p_1,\ldots,p_n)<\infty$, $1\le r=(r_1,\ldots,r_n)\le\infty$. Для тригонометрического ряда $f\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}a_k e^{i\langle k,x\rangle}$ обозначим через

$$\Delta_s(f,\ x)=\sum_{k\in\rho(s)}a_k e^{i\langle k,\ x\rangle},$$

где $\langle k,\ x\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d_i} k_j^i x_j^i$ — скалярное произведение, а $\rho(s) = \{\ k = (\ k_1, \dots,\ k_n) \in \mathbb{Z}^{\ d} : [2^{s_i-1}] \leq$ $\leq \max_{j=1,\dots,d_i} |k_j^i| < 2^{s_i}, i = 1, \dots, n\}$.

По аналогии с [1, 4] анизотропным пространством Никольского-Бесова $B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)$ назовем множество рядов $f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^{\ d}} a_{\ k} e^{i\langle k,\ x\rangle}$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)} = \left\| \left\{ 2^{\langle \alpha, s\rangle} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)} \right\} \right\|_{l_q},$$

где $\|\cdot\|_{l_q}$ – норма дискретного пространства Лебега l_q.

Замечание 1. Определенное таким образом анизотропное пространство Бесова $B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)$ в случае $n = 1$ совпадает с изотропным пространством типа Никольского-Бесова $B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^{d_1})$ [2, 5], а в случае $d = (1, \dots, 1)$ – с анизотропным пространством с доминирующей смешанной производной типа Никольского-Бесова $B_{pr}^{\alpha q}([0, 2\pi)^n)$ [2, 5].

Следующая лемма показывает элементарные вложения анизотропных пространств Никольского-Бесова [6].

Лемма 6. Пусть $-\infty \leq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) \leq \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) < \infty$, $1 \leq q_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0) \leq$ $\leq q_1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \leq \infty$, $1 \leq p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < \infty$ и $1 \leq r_0 = (r_1^0, \dots, r_n^0) \leq r_1 =$ $= (r_1^1, \dots, r_n^1) \leq \infty$. Тогда

$$B_{p_0 r_0}^{\alpha_0 q_0}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow B_{p_1 r_1}^{\alpha_1 q_1}(\mathbb{T}^d).$$

Доказательство следует из свойств пространств $l_q^\alpha(A)$ и $L_{pr}(\mathbb{T}^d)$.

Далее сформулированы предельные теоремы вложения разных метрик для анизотропных пространств Никольского-Бесова.

Теорема 1. Пусть $-\infty < \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) \leq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) < \infty$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, $1 < p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$, $p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$ и $1 \leq r = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$. Тогда при $\alpha_0 - d/p_0 =$ $= \alpha_1 - d/p_1$ справедливо вложение

$$B_{p_1 r}^{\alpha_1 q}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow B_{p_0 r}^{\alpha_0 q}(\mathbb{T}^d).$$

Доказательство. Пусть $f \in B_{p_1 r}^{\alpha_1 q}(\mathbb{T}^d)$. Тогда, согласно неравенству разных метрик (лемма 4), получаем оценку

$$\|f\|_{B_{p_1 r}^{\alpha_1 q}(\mathbb{T}^d)} = \left\| \left\{ 2^{\langle \alpha_0, s\rangle} \|\Delta_s(f)\|_{L_{p_0 r}(\mathbb{T}^d)} \right\} \right\|_{l_q} \leq$$

$$\leq C_1 \left\| \left\{ 2^{\langle \alpha_0 + d(1/p_1 - 1/p_0), s\rangle} \|\Delta_s(f)\|_{L_{f p_1 r}(\mathbb{T}^d)} \right\} \right\|_{l_q} =$$

$$= C_1 \left\| \left\{ 2^{\langle \alpha_1, s\rangle} \|\Delta_s(f)\|_{L_{p_1 r}(\mathbb{T}^d)} \right\} \right\|_{l_q} = C_1 \|f\|_{B_{p_1 r}^{\alpha_1 q}(\mathbb{T}^d)},$$

которая доказывает искомое вложение.

Условие, при котором справедливо вложение из теоремы, неулучшаемо, а именно справедливо следующее

Утверждение. Пусть $-\infty < \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) \leq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) < \infty$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$,; $1 < p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$, $p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$, $1 \leq r = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$ и $\alpha_0 - 1/p_0 = = \alpha_1 - 1/p_1$. Тогда для произвольных $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$ и $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) > 0$ найдется функция $f_0 \in B_{p_1 r}^{\alpha_1 q}(\mathbb{T}^d)$ такая, что $f_0 \notin B_{p_0\ \ r}^{(\alpha_0+\varepsilon) q}(\mathbb{T}^d) \cup B_{(p_0+\delta) r}^{\alpha_0\ \ \ \ q}(\mathbb{T}^d)$.

Доказательство. Для функции $f_\beta(x) = \prod_{i=1}^{n} f_{\beta_i}(x_i)$, где

$$f_{\beta_i}(x_i) = \sum_{k_1^i=1}^{\infty} \dots \sum_{k_{d_i}^i=1}^{\infty} \frac{\cos k_1^i x_1^i \dots \cos k_{d_i}^i x_{d_i}^i}{(k_1^i \cdot \dots \cdot k_{d_i}^i)^{\beta_i}},$$

согласно оценке нормы одномерного ядра Бернулли, имеем

$$\|\Delta_k(f_\beta)\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^d)} = \prod_{i=1}^{n} \|\Delta_{k_i}(f_{\beta_i})\|_{L_{p_i r_i}(\mathbb{T}^{d_i})} \sim$$

$$\sim \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{l_i=2^{k_i-1}}^{2^{k_i}-1} l_i^{d_i(1/p'_i-\beta_i)r_i-1}\right)^{1/r_i} \sim \prod_{i=1}^{n} 2^{d_i(1/p'_i-\beta_i)k_i} = 2^{d(1/p'-\beta)k}.$$

Тогда при

$$\alpha_1 + \frac{d}{p_1{}'} < d\beta \le \min\left((\alpha_0+\varepsilon) + \frac{d}{p_0{}'}, \alpha_0 + \frac{d}{(p_0+\delta)'}\right)$$

функция $f_\beta \in B^{\alpha_1 q}_{p_1 r}(\mathbb{T}^d)$ и $f_\beta \notin B^{(\alpha_0+\varepsilon)q}_{p_0\ \ r}(\mathbb{T}^d) \cup B^{\alpha_0\ \ \ \ q}_{(p_0+\delta)r}(\mathbb{T}^d)$.

Теорема 2. Пусть $0 < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) < \infty$, $1 \le q = (q_1, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots, q_n) \le * \le \infty$, $1 < p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) < \infty$, $1 \le r = (r_1, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_n) \le \infty$. Тогда при $\alpha_i = d_i/p_i$, $q_i = 1$ для $i = m+1, \dots, n$ имеет место вложение

$$B^{\alpha q}_{pr}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow B^{\bar\alpha\bar q}_{\bar p\bar r}(\mathbb{T}^{\bar d}).$$

Доказательство. Согласно неравенству разных измерений (лемма 5) и неравенству Минковского получаем

$$\|f(\cdot,\dots,\cdot,x_{m+1},\dots,x_n)\|_{B^{\bar\alpha\bar q}_{\bar p\bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})} = \left\|\left\{2^{\langle\bar\alpha,\bar s\rangle}\left\|\Delta_{\bar s}\left(f(\cdot,\dots,\cdot,x_{m+1},\dots,x_n)\right)\right\|_{L_{\bar p\bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})}\right\}\right\|_{l_{\bar q}} \le$$

$$\le \left\|\left\{2^{\langle\bar\alpha,\bar s\rangle}\left\|\sum_{s_n=0}^{\infty}\dots\sum_{s_{m+1}=0}^{\infty}\Delta_{s_{m+1}}\left(\dots\Delta_{s_n}\left(\Delta_{\bar s}(f)\right)\right)\right\|_{L_{\bar p\bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})}\right\}\right\|_{l_{\bar q}} \le$$

$$\le \left\|\left\{2^{\langle\bar\alpha,\bar s\rangle}\sum_{s_n=0}^{\infty}\dots\sum_{s_{m+1}=0}^{\infty}\left\|\Delta_{s_{m+1}}\left(\dots\Delta_{s_n}\left(\Delta_{\bar s}(f)\right)\right)\right\|_{L_{\bar p\bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})}\right\}\right\|_{l_{\bar q}} =$$

$$= \left\|\left\{2^{\langle\bar\alpha,\bar s\rangle}\sum_{s_n=0}^{\infty}\dots\sum_{s_{m+1}=0}^{\infty}\left\|\Delta_{s}(f)\right\|_{L_{\bar p\bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})}\right\}\right\|_{l_{\bar q}} \le$$

$$\le C_1\left\|\left\{2^{\langle\bar\alpha,\bar s\rangle}\sum_{s_n=0}^{\infty}2^{s_n/p_n}\dots\sum_{s_{m+1}=0}^{\infty}2^{s_{m+1}/p_{m+1}}\left\|\Delta_{s}(f)\right\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^{d})}\right\}\right\|_{l_{\bar q}} \le$$

$$\le C_1\sum_{s_n=0}^{\infty}\dots\sum_{s_{m+1}=0}^{\infty}\left\|\left\{2^{\langle\alpha,s\rangle}\left\|\Delta_{s}(f)\right\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^{d})}\right\}\right\|_{l_{\bar q}} =$$

$$= C_1\left\|\left\{2^{\langle\alpha,s\rangle}\left\|\Delta_{s}(f)\right\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^{d})}\right\}\right\|_{l_{q}} = C_1\|f\|_{B^{\alpha q}_{pr}(\mathbb{T}^d)},$$

где $\alpha_i = d_i/p_i$, $q_i = 1$ для $i = m+1, \dots, n$.

Покажем, что условия $\alpha_i = d_i/p_i$, $q_i = 1$ при $i = m+1, \dots, n$ обеспечивают выполнение свойства

$$\|f(x_1,\dots,x_m,h_{m+1},\dots,h_n) - \varphi(x_1,\dots,x_m)\|_{L_{\bar p\bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})} \to 0$$

при $\max\limits_{i=m+1,\dots,n}|h_i| \to 0$.

Действительно, пусть $N \in \mathbb{N}$ и

$$\Gamma_N = \left\{\mathbf{s} = (s_1,\dots,s_n) \in \mathbb{Z}^d : \prod_{i=1}^{n}\max(\max_{j=1,\dots,d_i}|k_j^i|, 1) \le N\right\},$$

тогда

$$\|f(x_1,\dots,x_m,h_{m+1},\dots,h_n) - \varphi(x_1,\dots,x_m)\|_{L_{\bar p\bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})} =$$

$$= \|f(x_1,\dots,x_m,h_{m+1},\dots,h_n) - f(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)\|_{L_{\bar p \bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})} = \|f(x_1,\dots,x_m,h_{m+1},\dots,h_n) -$$
$$-S_{\Gamma_N}(f;x_1,\dots,x_m,h_{m+1},\dots,h_n) + S_{\Gamma_N}(f;x_1,\dots,x_m,h_{m+1},\dots,h_n) - S_{\Gamma_N}(f;x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)+$$
$$+S_{\Gamma_N}(f;x_1,\dots,x_m,0,\dots,0) - Sf(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)\|_{L_{\bar p \bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})} \le \|f(x_1,\dots,x_m,h_{m+1},\dots,h_n) -$$
$$-S_{\Gamma_N}(f;x_1,\dots,x_m,h_{m+1},\dots,h_n)\|_{L_{\bar p \bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})} + \|S_{\Gamma_N}(f;x_1,\dots,x_m,h_{m+1},\dots,h_n) -$$
$$-S_{\Gamma_N}(f;x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)\|_{L_{\bar p \bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})} + \|S_{\Gamma_N}(f;x_1,\dots,x_m,0,\dots,0) - f(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)\|_{L_{\bar p \bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})} =$$
$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Здесь $S_{\Gamma_N}(f;x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n)$ – частичная сумма ряда Фурье функции $f(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n)$, соответствующая гиперболическому кресту Γ_N.

Для оценки I_1 и I_3 воспользуемся неравенствами Минковского, разных измерений (лемма 5) и Гельдера. Пусть индекс $j=1$ или $j=3$, тогда

$$I_j \le \sup_{x_{m+1},\dots,x_n} \|f(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n) - S_{\Gamma_N}(f;x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n)\|_{L_{\bar p \bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})} =$$

$$= \sup_{x_{m+1},\dots,x_n} \left\| \sum_{s \notin \Gamma_N} \Delta_s(f;x) \right\|_{L_{\bar p \bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})} \le \sum_{s\notin\Gamma_N} \sup_{x_{m+1},\dots,x_n} \|\Delta_s(f;x)\|_{L_{\bar p \bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})} \le$$

$$\le C_1 \sum_{\mathbf{s}\notin\Gamma_N} 2^{-\langle \bar\alpha, \bar{\mathbf{s}}\rangle} 2^{\langle \alpha, s\rangle} \|\Delta_s(f;x)\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)} \le$$

$$\le C_1 \left\| \left\{ 2^{\langle \alpha, s\rangle} \|\Delta_s(f;x)\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)} \right\}_{s\notin\Gamma_N} \right\|_{l_q} \cdot \left\| \left\{ 2^{-\langle \bar\alpha, \bar s\rangle} \right\}_{s\notin\Gamma_N} \right\|_{l_{q'}} \le$$

$$\le C_2 \|f - S_{\Gamma_N}(f)\|_{B^{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{q}}_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Для оценки I_2 воспользуемся тем, что полиномы $S_{\Gamma_N}(f;x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n)$ являются непрерывными функциями, тогда

$$\|S_{\Gamma_N}(f;x_1,\dots,x_m,h_{m+1},\dots,h_n) - S_{\Gamma_N}(f;x_1,\dots,x_m,0,\dots,0)\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)} \to 0$$

при $\max\limits_{i=m+1,\dots,n} |h_i| \to 0$.

Замечание 2. В теореме, в отличие от теоремы о следах для пространств типа пространств Бесова с доминирующей смешанной производной [7, 8], доказанной для $\alpha_i > d_i/p_i$ при $i = m++1,\dots,n$, рассмотрен предельный случай $\alpha_i = d_i/p_i$ при условии $q_i = 1$ для $i = m+1,\dots,n$ (ранее этот эффект был замечен в работах О.В. Бесова [9, 10]).

Теорема 3. Пусть $0 < \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\dots,\alpha_n) < \infty$, $1 \le q = (q_1,\dots,q_m,q_{m+1},\dots,q_n) \le \infty$, $1 < p = (p_1,\dots,p_m,p_{m+1},\dots,p_n) < \infty$, $1 \le r = (r_1,\dots,r_m,r_{m+1},\dots,r_n) \le \infty$. Тогда для функции $\varphi(x_1,\dots,x_m) \in B^{\bar\alpha \bar q}_{\bar p \bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})$ при $\alpha_i = d_i/p_i$ и $q_i = 1$ для $i = m+1,\dots,n$ можно построить функцию $f(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n)$ от n мультипеременных, обладающую следующими свойствами:

1) $f \in B^{\alpha q}_{pr}(\mathbb{T}^d)$ и $\|f\|_{B^{\alpha q}_{pr}(\mathbb{T}^d)} \le C\|\varphi\|_{B^{\bar\alpha\bar q}_{\bar p\bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})}$;

2) $f(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0) = \varphi(x_1,\dots,x_m)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in B^{\bar\alpha\bar q}_{\bar p\bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})$. Ее можно представить в виде сходящегося к ней в смысле $L_{\bar p\bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})$ ряда

$$\varphi(x_1,\dots,x_m) = \sum_{\bar s=0}^{\infty} \Delta_{\bar s}(\varphi(x_1,\dots,x_m)).$$

Имеем

$$\|\varphi\|_{B^{\bar{\boldsymbol\alpha}\bar{\mathbf q}}_{\bar{\mathbf p}\bar{\mathbf r}}(\mathbb{T}^{\bar{\mathbf d}})} = \left\| \left\{ 2^{\langle \bar\alpha, \bar{\mathbf s}\rangle} \|\Delta_{\bar{\mathbf s}}(\varphi)\|_{L_{\bar{\mathbf p}\bar{\mathbf r}}(\mathbb{T}^{\bar{\mathbf d}})} \right\} \right\|_{l_{\bar{\mathbf q}}}.$$

Для $i = m+1,\dots,n$ выберем функции $f_i(x_i)$ из $B^{\alpha_i 1}_{p_i r_i}(\mathbb{T}^{d_i})$, где $\alpha_i = d_i/p_i$, такие, что $f_i(0) = 1$, и введем новую функцию

$$f(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n) = \sum_{s=0}^{\infty} \Delta_{\bar s}(\varphi(x_1,\dots,x_m)) \prod_{i=m+1}^{n} \Delta_{s_i}(f_i(x_i)).$$

Для этой функции получим

$$\|f\|_{B^{\alpha q}_{pr}(\mathbb{T}^d)} = \left\| \left\{ 2^{\langle\alpha,s\rangle} \left\|\Delta_s\left(\varphi\right)\right\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^{\bar d})} \right\} \right\|_{l_q} =$$

$$= \left\| \left\{ 2^{\langle\bar\alpha,\bar s\rangle} \left\|\Delta_{\bar s}\left(\varphi\right)\right\|_{L_{\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{r}}}(\mathbb{T}^{\bar d})} \right\} \right\|_{l_{\bar q}} \prod_{i=m+1}^{n} \|f_i\|_{B^{\alpha_i 1}_{p_i r_i}(\mathbb{T}^{d_i})} = C\,\|\varphi\|_{B^{\bar\alpha\bar q}_{\bar p\bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})}.$$

Из условия $f_i(0) = 1$ для $i = m+1,\dots,n$ имеем

$$f(x_1,\dots,x_m,0,\dots,0) = \varphi(x_1,\dots,x_m).$$

Условия $\alpha_i = d_i/p_i$, $q_i = 1$ при $i = m+1,\dots,n$ обеспечивают непрерывность функций $f_i(x_i)$. Тогда

$$\|f(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n) - \varphi(x_1,\dots,x_m)\|_{L_{\bar p\bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})} =$$

$$= \left\| \varphi(x_1,\dots,x_m) \left(\prod_{i=m+1}^{n} f_i(x_i) - 1 \right) \right\|_{L_{\bar p\bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})} \le$$

$$\le \|\varphi(x_1,\dots,x_m)\|_{L_{\bar p\bar r}(\mathbb{T}^{\bar d})} \left| \prod_{i=m+1}^{n} f_i(x_i) - 1 \right| \to 0$$

при $\max\limits_{i=m+1,\dots,n} |x_i| \to 0$.

Эти рассуждения показывают, что φ есть след функции f.

Замечание 3. Оператор продолжения, построенный при доказательстве теоремы, – линейный. Здесь следует отметить работу В.И. Буренкова и М.Л. Гольдмана [11], где показано, что в предельном случае для анизотропных пространств Бесова возможно построить только нелинейный оператор продолжения, однако этот эффект не наблюдается для пространств типа пространств Бесова с доминирующей смешанной производной.

Список литературы

1 *Нурсултанов Е.Д.* Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Докл. РАН. — 2004. — Т. 394. — № 1. — С. 22–25.

2 *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. — М.: Мир, 1980. — С. 264.

3 *Гулисашвили А.Б.* Тригонометрические ряды с монотонно убывающими коэффициентами и функциями распределения // Матем. заметки. — 1971. — Т. 10. — № 1. — С. 3–10.

4 *Bazarkhanov D.B.* Estimates for the widths of classes of periodic functions of several variables-I // Eurasian mathematical Journal. — 2010. — Vol. 1. — № 3. — P. 11–26.

5 *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980. — С. 400.

6 *Бекмаганбетов К.А., Нурсултанов Е.Д.* Теоремы вложения анизотропных пространств Бесова $B^{\alpha q}_{pr}([0,2\pi)^n)$ // Известия РАН. Сер. матем. — 2009. — Т. 73. — № 4. — С. 3–16.

7 *Аманов Т.И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(R_n)$ и $S^{(r)}_{p^*,\theta}B$ $(0 \le x_j \le 2\pi;\ j = 1,\dots,n)$ // Труды МИАН СССР. — 1965. — Т. 77. — С. 5–34.

8 *Джабраилов А.Д.* О некоторых функциональных пространствах. Прямые и обратные теоремы вложения // ДАН СССР. — 1964. — Т. 159. — С. 254–257.

9 *Бесов О.В.* Об условиях существования классического решения волнового уравнения // Сибирский мат. журн. — 1967. — Т. 7 — № 2. — С. 243–256.

10 *Бесов О.В.* Классы функций с обобщенным смешанным условием Гельдера // Труды МИАН СССР. — 1969. — Т. 105. — С. 21–29.

11 *Буренков В.И., Гольдман М.Л.* О продолжении функций в L_p // Труды МИАН СССР. — 1979. — Т. 150. — С. 31–51.

Е. Төлеуғазы

Анизотропты $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ Никольский-Бесов кеңістіктері үшін ену теоремалары, іздер және жалғасу туралы теоремалары

Мақалада анизотропты Лоренц кеңістіктерінің интерполяциялық қасиеттерін қолдану негізінде тригонометриялық полиномдар үшін әр түрлі метрикалық және өлшемдік теңсіздіктер алынды. Өкілдік туралы теорема негізінде анизотропты Лоренц кеңістіктері метрикасы бойынша анизотропты Никольский-Бесов $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ кеңістіктері анықталды. $\mathbf{d} = d_1$ жағдайында көрсетілген кеңістіктер классикалық изотропты Никольский-Бесов кеңістіктеріне сәйкес келетіні, ал $\mathbf{d} = (1, \ldots, 1)$ болған жағдайда сипаттамалары үстем аралас туындылары бар кеңістіктер сияқты болатын анизотропты Никольский-Бесов кеңістіктеріне сәйкес келетіні байқалды. Мақалада осы кеңістіктерді анықтауға қатысатын барлық параметрлерге қатысты осы кеңістіктер үшін қарапайым енулер сипатталды. Бұл кеңістіктер үшін күшті параметрлерге қатысты әр түрлі метрикалар теңсіздігі негізінде енудің шектік теоремасы алынды. Ену қасиеттерін сақтау үшін кеңістік параметрлеріне қойылатын шарттардың жақсартылмайтыны жайлы көрсететін мысал құрылды. Қарастырылатын кеңістіктердегі функциялар үшін әр түрлі өлшемдер теңсіздігі негізінде із және жалғасу туралы шектік теоремалар алынды. Айтылған теоремалардағы шарттардың жақсартылмайтынын айтуға болады. $\mathbf{d} = d_1$ болған жағдайда алынған теоремалардан изотропты кеңістіктер үшін С.М.Никольский және О.В.Бесов бұрын-соңды жариялаған жұмыстарындағы сәйкес нәтижелер шығады. Ал $\mathbf{d} = (1, \ldots, 1)$ болған жағдайда алынған теоремалардан үстем аралас туындылары бар анизотропты кеңістіктер үшін Қ.Ә.Бекмағанбетов және Е.Д.Нұрсұлтанов бұрын-соңды жариялаған жұмыстарындағы сәйкес нәтижелер шығады. Қарастырылған кеңістіктердің құрылымы гибридті болатынын алынған нәтижелер көрсетті: классикалық изотропты кеңістіктерден және үстем аралас туындылары бар анизотропты кеңістіктерден тұрады. Атап айтқанда, келтірілген кеңістіктердегі функциялардың бір айнымалылар блогіне енетін айнымалылар бойынша тегістік және метрикалық қасиеттері бірдей, ал әр түрлі блоктарға енетін айнымалыларға қатысты тегістік және метрикалық қасиеттері әр түрлі болады. Жұмыста алынған нәтижелерді әрі қарай математикалық физика теңдеулерінің шекаралық есептері теориясында, гармоникалық талдау есептерінде және анизотроптық кеңістіктеріндегі жуықтау теориясында қолдануға болады.

Ye. Toleugazy

Embedding theorems, theorems of a trace and approach for anisotropic $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ Nikol'skii-Besov spaces

In this paper, the inequalities of different metrics and different measurements for trigonometric polynomials are obtained by using the interpolation properties of anisotropic Lorentz spaces. Further, anisotropic Nikol'skii-Besov spaces $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ on the metric of anisotropic Lorentz spaces are defined by using the theorem on the representation. Note that in the case when $\mathbf{d} = d_1$, these spaces coincide with the classical isotropic Nikol'skii-Besov spaces, and in the case $\mathbf{d} = (1, \ldots, 1)$ these spaces coincide with anisotropic Nikol'skii-Besov spaces, having the character of spaces with dominant mixed derivatives. In this paper the elementary embeddings are describes for these spaces with respect to all the parameters involved in their definition. By using the inequalities in different metrics the limit embedding theorem is derived for this spaces with respect to the strong parameters. An example showing unimprovability conditions on the parameters of space for save the properties of the embedding is constructed. By using the inequality of different measurements the limit theorems about the track and the continuation for the functions of these spaces are obtained. Note that the conditions in these theorems are also the best possible. In the case $\mathbf{d} = d_1$ from the received theorems follows the corresponding results, which are obtained previously in the works S.M. Nikol'skii and O.V. Besov for isotropic spaces. In the case $\mathbf{d} = (1, \ldots, 1)$ from the received theorems follows the corresponding results, which are obtained previously in the works K.A. Bekmaganbetov and E.D. Nursultanov for anisotropic spaces with dominant mixed derivative. The obtained results show that the considered spaces have the hybrid structure of the classical isotropic spaces and anisotropic spaces with dominant mixed derivative. Namely, the function of these spaces have the same smoothness and metric properties to the variables included in one block, and different smoothness and metric properties with respect to the variables included in different blocks. The results obtained can be further used in the theory of boundary value problems of mathematical physics equations, in problems of harmonic analysis and approximation theory in anisotropic spaces.

References

1 Nursultanov E.D. *Reports the Russian Academy of Sciences RF,* 394:1, 2004, 1, p. 22–25.

2 Bergh J. and Löfström J. *Interpolation spaces. An introduction,* Moscow: Mir, 1980, p. 264

3 Gulisashvili A.B. *Mathematical notes,* 1971, 10, 1, p. 3–10.

4 Bazarkhanov D.B. *Eurasian Mathematical Journal,* 2010, 1, 3, p. 11–26.

5 Tribel H. *Interpolation theory, function spaces, differential operators,* 18. North-Holland Math. Library, North-Holland, Amsterdam; Moscow: Mir, 1980, p. 400.

6 Bekmaganbetov K.A., Nursultanov E.D. *Izvestiya: Mathematics,* 2009, 73 (4):655, p. 3–16.

7 Amanov T.I. *Proc. MIAN USSR,* 1965, 77, p. 3–16.

8 Jabrailov A.D. *Reports of the Academy of Sciences USSR,* 1964, 159, p. 254–257.

9 Besov O.V. *Siberian Mathematical Journal,* 1967, 7, 2, p. 243–256.

10 Besov O.V. *Trudy Proc. MIAN USSR,* 1969, 105, p. 21–29.

11 Burenkov V.I., Gol'dman M.L. *Proc. MIAN USSR,* 1981, 150, p. 33–53.