УДК 517.95

Б.Х. Турметов[1], К.И. Усманов[2]

[1] *Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан;*
[2] *Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы*
(E-mail: turmetovbh@mail.ru)

О разрешимости одной внешней краевой задачи с граничным оператором дробного порядка

В статье в классе регулярных гармонических функций изучены свойства некоторых интегро-дифференциальных операторов, обобщающих операторы дробного дифференцирования в смысле Адамара. Эти операторы переводят регулярные гармонические функции в такие же функции и являются взаимно обратными на регулярных гармонических функциях. Во внешности единичного шара изучена краевая задача с граничным оператором дробного порядка. Рассматриваемая задача обобщает известную задачу Неймана на граничные операторы дробного порядка. Доказана теорема о существовании и единственности решения задачи. Получено интегральное представление решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: внешняя задача, уравнения Лапласа, дробная производная, оператор Адамара, регулярная гармоническая функция, задача Неймана.

Введение

Пусть D — ограниченная область из $R^n, n \geq 3$, с гладкой границей S. Известно (см., например, [1]), что любая функция $u(x)$, принадлежащая классу $C^2(D)$ и удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D,$$

называется гармонической функцией в области D.

При исследовании краевых задач для уравнения Лапласа в бесконечных областях дополнительно требуется регулярность решения. А именно функция $u(x)$, гармоническая в области $D_+ = R^n \backslash D$, называется регулярной (на бесконечности), если при $|x| \to \infty$ выполняется условие

$$|u(x)| \leq C|x|^{-(n-2)}, \quad n \geq 3, \tag{1}$$

где $C = const$.

Заметим, что если для функции $u(x)$ выполняется оценка (1), то для любого мультииндекса $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ с $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$ выполняется оценка (см., например, [2; 373]

$$\frac{\partial^{|\beta|} u(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} ... \partial x_n^{\beta_n}} = O\left(|x|^{-(n+|\beta|-2)}\right), \quad n \geq 3. \tag{2}$$

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ — единичный шар, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ — единичная сфера. Обозначим через $\Omega_+ = R^n \setminus \overline{\Omega}$ — внешность единичного шара, где $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial(\Omega)$. Пусть далее $u(x)$ — регулярная гармоническая функция в области Ω_+ и $r = |x|, \theta = x/r$.

Для постановки задачи нам необходимо привести определение оператора дробного дифференцирования. Для произвольного положительного числа $\alpha > 0$ оператором дробного интегрирования порядка α в смысле Адамара назовем выражение [3]

$$J_-^{\alpha} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_r^{\infty} \left(\ln \frac{t}{r}\right)^{\alpha-1} \frac{u(t\theta)}{t} dt.$$

Пусть $m-1<\alpha\le m, m=1,2,\ldots$, $\delta=r\frac{d}{dr}\equiv\sum\limits_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}$ — оператор Дирака и $\delta^k=\delta\left(\delta^{k-1}\right)$, $k=2,3,\ldots$ Выражение

$$D_{-}^{\alpha}u\left(x\right)=\left(-\delta\right)^{m}J_{-}^{m-\alpha}u\left(x\right)\equiv\frac{(-1)^{m}}{\Gamma\left(m-\alpha\right)}\left(r\frac{d}{dr}\right)^{m}\int\limits_{r}^{\infty}\left(\ln\frac{t}{r}\right)^{m-1-\alpha}\frac{u\left(t\theta\right)}{t}dt$$

называется оператором дифференцирования порядка α в смысле Адамара. В дальнейшем будем полагать $J_{-}^{0}u(x)=u(x)$.

Рассмотрим в области Ω_{+} следующую задачу:

$$\Delta u(x)=0,\quad x\in\Omega_{+};\tag{3}$$

$$D_{-}^{\alpha}u(x)=f(x),\quad x\in\partial\Omega_{+}.\tag{4}$$

Решением задачи (3), (4) назовем регулярную гармоническую функцию $u(x)\in C^{2}(\Omega_{+})\cap C(\overline{\Omega}_{+})$, $\overline{\Omega}_{+}=\Omega_{+}\cup\partial\Omega$, для которой $D^{\alpha}u(x)\in C^{2}(\overline{\Omega}_{+})$ и которая удовлетворяет условию (4) в классическом смысле.

Так как $J_{-}^{0}u(x)=u(x)$, то при $\alpha=1$ получим $D_{-}^{\alpha}u\left(x\right)=\left(-r\frac{d}{dr}\right)^{m}u\left(x\right)$. Следовательно, в случае $\alpha=1$ рассматриваемая задача (3), (4) совпадает с внешней задачей Неймана для уравнения Лапласа.

Отметим, что внутренние краевые задачи с граничными операторами дробного порядка изучались в [4–9]. Свойства и применения операторов типа Адамара рассматривались в работах [10–12]. Заметим также, что внешние краевые задачи с граничным оператором Римана-Лиувилля изучены в работе [13].

2 Свойства операторов J_{-}^{α} и D_{-}^{α}

В этом пункте исследуем некоторые свойства операторов J_{-}^{α} и D_{-}^{α}.

Лемма 1. Пусть $\alpha>0$ и $u(x)$ — регулярная гармоническая функция в области Ω_{+}. Тогда справедливы неравенства

$$|J_{-}^{\alpha}u(x)|\le C|x|^{2-n},\quad |D_{-}^{\alpha}u(x)|\le C|x|^{2-m-n}.\tag{5}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ — регулярная гармоническая функция в Ω_{+}. В интеграле $J_{-}^{\alpha}u(x)$ меняем переменную t по формуле $t=rs$ и, используя регулярность функции$u(x)$, получим

$$|J_{-}^{\alpha}u(x)|=\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{1}^{\infty}(\ln s)^{\alpha-1}u(sx)\frac{ds}{s}\right|\le Cr^{2-n}\int\limits_{1}^{\infty}(\ln s)^{\alpha-1}s^{1-n}ds=Cr^{2-n}\int\limits_{0}^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-(n-2)t}dt=$$

$$=C(n-2)^{2-\alpha}r^{2-n}\int\limits_{0}^{\infty}s^{\alpha-1}e^{-s}ds=C_{1}|x|^{2-n}.$$

Первое неравенство из (5) доказано.

Для доказательства второго неравенства из (5) представим функцию $D_{-}^{\alpha}u(x)$ в виде

$$D_{-}^{\alpha}u(x)=\frac{(-1)^{m}}{\Gamma(m-\alpha)}\int\limits_{1}^{\infty}(\ln s)^{\alpha-1}\left(r\frac{d}{dr}\right)^{m}u(sx)\frac{ds}{s}.$$

Тогда, используя неравенство (2), получим

$$|D_{-}^{\alpha}u(x)|\le C|x|^{2-m-n}\int\limits_{1}^{\infty}(\ln s)^{\alpha-1}s^{1-n}ds=C_{1}|x|^{2-m-n},\quad |x|\to\infty.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать регулярные гармонические функции в Ω_+ и поэтому все исследуемые далее интегралы сходятся.

Лемма 2. Пусть $u(x)$ — регулярная гармоническая функция в области Ω_+. Тогда $J_-^\alpha u(x)$ и $D_-^\alpha u(x)$ также являются регулярными гармоническими функциями в Ω_+.

Доказательство. Регулярность функций $J_-^\alpha u(x)$ и $D_-^\alpha u(x)$, т.е. выполнение для них оценок типа (1), вытекает из (5). Докажем, что данные функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Представим $J_-^\alpha u(x)$ в виде $J_-^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_1^\infty (\ln s)^{\alpha-1} u(sx) \frac{ds}{s}$ и применим оператор Δ. Тогда

$$\Delta J_-^\alpha [u]\,(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int\limits_1^\infty (s-1)^{-\alpha} \Delta u\,(sx)\, ds \right] = 0.$$

Далее, так как

$$\Delta \left(r \frac{du(x)}{dr} \right) = \left(r\frac{d}{dr} + 2 \right) \Delta u(x), \quad \Delta \left(r\frac{d}{dr} \right)^m u(x) = \left(r\frac{d}{dr} + 2 \right)^m \Delta u(x),$$

то

$$\Delta D_-^\alpha\,[u]\,(x) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int\limits_1^\infty (\ln s)^{\alpha-1} \left(r\frac{d}{dr} + 2 \right)^m \Delta u(sx) \frac{ds}{s} = 0, \quad x \in \Omega_+.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $0 < \alpha$, $u\,(x)$ — регулярная гармоническая функция в Ω_+. Тогда для любого $x \in \Omega_+$ справедливы равенства

$$J_-^\alpha \left[D_-^\alpha u(x) \right] = u(x), D_-^\alpha \left[J_-^\alpha u(x) \right] = u(x). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $x \in \Omega_+$ и $t \geq 1$. Рассмотрим функцию

$$\Im_t\,[u]\,(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} \tau^{-1} D_-^\alpha\,[u]\,(\tau x)\, d\tau.$$

Данную функцию можно представить в виде

$$\Im_t\,[u]\,(x) = -\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} t\frac{d}{dt} \left\{ \int\limits_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha} D_-^\alpha\,[u]\,(\tau x)\, \frac{d\tau}{\tau} \right\}.$$

Действительно,

$$t\frac{d}{dt} \left\{ \int\limits_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha} D_-^\alpha\,[u]\,(\tau x)\, \frac{d\tau}{\tau} \right\} =$$

$$= -t \lim_{\tau\to t} \left[\left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha} D_-^\alpha\,[u]\,(\tau x)\, \frac{1}{\tau} \right] + \alpha t \int\limits_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{t}{\tau} \left(-\frac{\tau}{t^2} \right) D_-^\alpha\,[u]\,(\tau x)\, \frac{d\tau}{\tau} =$$

$$= -\alpha \int\limits_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} D_-^\alpha\,[u]\,(\tau x)\, \frac{d\tau}{\tau}.$$

Так как $\left| D_-^\alpha\,[u]\,(\tau x) \right| \leq C|\tau x|^{2-n-m}, |\tau x| \to \infty$, то, используя определение оператора D_-^α и равенства

$$J_-^{m-\alpha} = J_-^{m-1-(\alpha-1)}, \quad (-1)^{m-1}\delta^{m-1} J_-^{m-1-(\alpha-1)} = D_-^{\alpha-1},$$

получаем

$$\Im_t\,[u]\,(x) = -\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} t\frac{d}{dt} \left\{ \int\limits_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha} \left(-\tau\frac{d}{d\tau} \right) D_-^{\alpha-1} u(\tau x) \frac{d\tau}{\tau} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} t \frac{d}{dt} \left\{ \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha} D_{-}^{\alpha-1} u(\tau x)\Big|_{\tau=t}^{\tau=\infty} - \alpha \int_{t}^{\infty} \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} D_{-}^{\alpha-1} u(\tau x) \frac{d\tau}{\tau} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t \frac{d}{dt} \left\{ \int_{t}^{\infty} \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} D_{-}^{\alpha-1} u(\tau x) \frac{d\tau}{\tau} \right\}.$$

Повторяя эту процедуру еще $(m-1)$ раз, для функции $\Im_t[u](x)$ получаем представление

$$\Im_t[u](x) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(\alpha)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^m \left\{ \int_{t}^{\infty} \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} J_{-}^{m-\alpha} u(\tau x) d\tau \right\}.$$

По определению оператора J_{-}^{α} последнее выражение представляется в виде

$$\frac{(-1)^m}{\Gamma(\alpha)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^m \left\{ \int_{t}^{\infty} \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} J_{-}^{m-\alpha} u(\tau x) d\tau \right\} = (-1)^m \left(t\frac{d}{dt}\right)^m J_{-}^{\alpha}\left[J_{-}^{m-\alpha}[u]\right](tx).$$

Покажем, что в классе регулярных гармонических в $\Omega+$ функций имеет место равенство

$$J_{-}^{\alpha}\left[J_{-}^{m-\alpha}[u]\right](tx) = J_{-}^{m}[u](tx).$$

Действительно,

$$J_{-}^{\alpha}\left[J_{-}^{m-\alpha}[u]\right](tx) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t}^{\infty} \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{\tau r}^{\infty} \left(\ln\frac{\xi}{\tau r}\right)^{m-\alpha-1} u(\xi\theta) \frac{d\xi}{\xi} \frac{d\tau}{\tau} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t}^{\infty} \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{\tau}^{\infty} \left(\ln\frac{s}{\tau}\right)^{m-\alpha-1} u(sx) \frac{ds}{s} \frac{d\tau}{\tau} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(m-\alpha)} \int_{t}^{\infty} u(sx) \int_{t}^{s} \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\ln\frac{s}{\tau}\right)^{m-\alpha-1} \frac{d\tau}{\tau} \frac{ds}{s}.$$

Далее, для внутреннего интеграла после замены переменных получаем

$$\int_{t}^{s} \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\ln\frac{s}{\tau}\right)^{m-\alpha-1} \frac{d\tau}{\tau} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m)}.$$

Тогда

$$J_{-}^{\alpha}\left[J_{-}^{m-\alpha}[u]\right](tx) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_{t}^{\infty} \left(\ln\frac{s}{t}\right)^{m-1} u(sx) \frac{ds}{s} \equiv J_{-}^{m-\alpha}[u](tx).$$

Отсюда

$$\Im_t[u](x) = (-1)^m \left(t\frac{d}{dt}\right)^m J_{-}^{m}[u](x) =$$

$$= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m)} \left(t\frac{d}{dt}\right)^m \int_{t}^{\infty} \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{m-1} u(\tau x) \frac{d\tau}{\tau} = -t\frac{d}{dt} \int_{t}^{\infty} u(\tau x) \frac{d\tau}{\tau} = u(tx).$$

Таким образом, для любого $t \geq 1$ справедливо равенство

$$u(tx) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t}^{\infty} \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} \tau^{-1} D_{-}^{\alpha}[u](\tau x)\, d\tau.$$

Если теперь положим $t=1$, то

$$u\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_{1}^{\infty}\left(\ln\tau\right)^{\alpha-1}\tau^{-1}D_{-}^{\alpha}\left[u\right]\left(\tau x\right)d\tau=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_{r}^{\infty}\left(\ln\frac{s}{r}\right)^{\alpha-1}s^{-1}D_{-}^{\alpha}\left[u\right]\left(s\theta\right)ds\equiv J_{-}^{\alpha}\left[D_{-}^{\alpha}[u]\right](x).$$

Первое равенство из (6) доказано. Для доказательства второго равенства из (6) рассмотрим действие оператора D_{-}^{α} к функции $J_{-}^{\alpha}u(x)$. Имеем

$$D_{-}^{\alpha}\left[J_{-}^{\alpha}[u]\right](x)=(-1)^{m}\left(r\frac{d}{dr}\right)^{m}J_{-}^{m-\alpha}\left[J_{-}^{\alpha}[u]\right](x)=(-1)^{m}\left(r\frac{d}{dr}\right)^{m}\left[J_{-}^{m}[u]\right](x)=u(x).$$

Лемма доказана.

Таким образом, из утверждения леммы 3 следует, что операторы J_{-}^{α} и D_{-}^{α} являются взаимно обратными на регулярных гармонических в Ω_{+} функциях.

Основное утверждение

Пусть $v(x)$ — регулярное решение задачи Дирихле в области Ω_{+}, т.е.

$$\begin{cases}\Delta v(x)=0, & x\in\Omega_{+},\\ v(x)=f(x), & x\in\partial\Omega,\\ |v\left(x\right)|\leq C|x|^{-(n-2)}, & |x|\to\infty.\end{cases}\tag{7}$$

Известно (см., например, [1; 73], что если $f(x)\in C(\partial\Omega)$, то решение задачи (7) существует, единственно и представляется в виде

$$v(x)=\frac{1}{\omega_{n}}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{|x|^{2}-1}{|x-y|^{n-1}}f(y)dS_{y}.$$

Как мы уже отметили, в случае $\alpha=1$ задача (3), (4) совпадает с внешней задачей Неймана для уравнения Лапласа. Известно (см., например, [14]), что для любого $f(x)\in C\left(\partial\Omega\right)$ решение внешней задачи Неймана существует, единственно и представляется в виде

$$u\left(x\right)=\int\limits_{1}^{\infty}\frac{v\left(tx\right)}{t}dt,\tag{8}$$

где $v(x)$ — решение задачи Дирихле (7).

Сформулируем основное утверждение относительно задачи (3), (4).

Теорема. Пусть $\alpha>0, f(x)\in C(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи (3), (4) существует, единственно и представляется в виде

$$u\left(x\right)=J_{-}^{\alpha}\left[v\right]\left(x\right),\tag{9}$$

где $v(x)$ – решение задачи Дирихле (7).

Доказательство. Пусть решение задачи (3), (4) существует и это $u(x)$. Применим к функции $u\left(x\right)$ оператор D_{-}^{α} и обозначим $D_{-}^{\alpha}\left[u\right]\left(x\right)=v\left(x\right)$. По предположению $D_{-}^{\alpha}\left[u\right]\left(x\right)\in C(\Omega_{+}\cup\partial\Omega)$, тогда $v\left(x\right)\in C\left(\Omega_{+}\cup\partial\Omega\right)$. Поскольку $u(x)$ — гармоническая функция в Ω_{+}, регулярная в бесконечности, то в силу утверждения леммы 2 функция $v(x)$ также является гармонической в области Ω_{+} и регулярной в бесконечности. Кроме того,

$$v\left(x\right)|_{\partial\Omega}=D_{-}^{\alpha}\left[u\right]\left(x\right)|_{\partial\Omega}=f\left(x\right).$$

Применим к равенству $D_{-}^{\alpha}\left[u\right]\left(x\right)=v\left(x\right)$ оператор J_{-}^{α}. Поскольку интеграл вида

$$\int\limits_{1}^{\infty}\left(\ln\tau\right)^{\alpha-1}\tau^{-1}v\left(\tau x\right)\,d\tau$$

при $\alpha>0$ имеет слабые особенности при $\tau=1$ и $\tau=\infty$, то он является непрерывной функцией по $x\in\Omega_{+}\cup\partial\Omega$ при непрерывной регулярной гармонической функции $v(x)\in C\left(\Omega_{+}\cup\partial\Omega\right)$. Значит, оператор

J_{-}^{α} применим к регулярным функциям из $C\left(\Omega_{+}\cup\partial\Omega\right)$. В силу первого равенства (6) получаем (9). Кроме того, в силу утверждения леммы 2 функция $J_{-}^{\alpha}[v](x)$ является регулярной в бесконечности.

Таким образом, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (7). Причем, если $f(x)\in C\left(\partial\Omega\right)$, то решение этой задачи существует, единственно и $v(x)\in C\left(\Omega_{+}\cup\partial\Omega\right)$.

Пусть, наоборот, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (7) с граничным значением $f(x)\in\in C\left(\partial\Omega\right)$. Тогда $v(x)\in C\left(\Omega_{+}\cup\partial\Omega\right)$. Рассмотрим функцию $u\left(x\right)=J_{-}^{\alpha}\left[v\right]\left(x\right)$. В силу второго равенства из (6) будем иметь

$$D_{-}^{\alpha}\left[u\right]\left(x\right)=D_{-}^{\alpha}\left[J_{-}^{\alpha}\left[v\right]\right]\left(x\right)=v\left(x\right).$$

Значит, функция $u(x)$ является гармонической в Ω, регулярной в бесконечности и

$$D_{-}^{\alpha}\left[u\right]\left(x\right)|_{\partial\Omega}=v\left(x\right)|_{\partial\Omega}=f\left(x\right).$$

Теорема доказана.

Замечание 2. В случае $\alpha=1$ функция (9) совпадает с решением внешней задачи Неймана (8), полученным в работе [14].

Работа выполнена при финансовой поддержке финансирования научно-технических программ и проектов КН МОН РК (проект 0819/ГФ4).

Список литературы

1 *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1982. — С. 336.

2 *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1981. — С. 512.

3 *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam, Elsevier. North-Holland. Mathematics studies. — 2006. — P. 539.

4 *Турметов Б.Х., Мырзахасова А.* О разрешимости дробных аналогов задачи Неймана для бигармонического уравнения // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2015. — № 3(79). — С. 87–95.

5 *Турметов Б.Х., Торебек Б.Т.* Модифицированные операторы Баврина и их применения // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50. — № 2. — С. 240–250.

6 *Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Torebek B.T.* On some integro-differential operators in the class of harmonic functions and their applications // Siberian Advances in Mathematics. — 2012. — Vol. 22. — No. 2. — P. 115–134.

7 *Krasnoschok M., Vasylyeva N.* On a nonclassical fractional boundary-value problem for the Laplace operator // Journal of Differential Equations. — 2014. — Vol. 257(6). — P. 1814–1839.

8 *Torebek B.T., Turmetov B.Kh.* On solvability of a boundary value problem for the Poisson equation with the boundary operator of a fractional order // Boundary Value Problems. — 2013. — Vol. 2013. — No. 93. — [ER]. Access mode: doi:10.1186/1687-2770-2013-93.

9 *Umarov S.R., Luchko Yu.F., Gorenflo R.* On boundary value problems equations with boundary operators of fractional order // Fractional calculus and Applied analysis. — 2000. — Vol. 3. — No. 4. — P. 454–468.

10 *Бердышев А.С., Турметов Б.Х., Кадиркулов Б.Ж.* Некоторые свойства и применения интегро-дифференциальных операторов типа Адамара-Маршо в классе гармонических функций // Сибирский математический журн. — 2012. — Т. 53. — № 4. — С. 752–764.

11 *Турметов Б.Х., Байметова Н.* О разрешимости некоторых краевых задач с оператором типа Адамара-Маршо // Вестн. Карганд. ун-та. Сер. Математика. — 2012. — № 3(67). — С. 89–98.

12 *Muratbekova M.A., Shinaliev K.M., Turmetov B.Kh.* On solvability of a nonlocal problem for the Laplace equation with the fractional-order boundary operator // Boundary Value Problems. — 2014. — [ER]. Access mode: doi: 10.1186/1687-2770-2014-29.

13 *Turmetov B.Kh., Torebek B. T.* On solvability of exterior boundary value problem with fractional boundary condition // AIP Conference Proceedings. — 2015. — Vol. 1676, 020096. — [ER]. Access mode: doi: 10.1063/1.4930522.

14 *Лифанов И.К.* Сингулярное интегральное уравнение первого рода задачи Неймана // Дифференциальные уравнения. — 1988. — Т. 24. — № 1. — С. 110–115.

Б.Х. Турметов, К.Ы. Усманов

Бөлшек ретті операторлы шеттік шартты бір сыртқы есептің бірмәнді шешімділігі туралы

Мақалада регулярлы гармоникалық функциялар класында Адамар мағынасында бөлшек ретті туындыларды жалпылайтын, кейбір интегралды-дифференциалдық операторлардың қасиеттері зерттелді. Бұл операторлар регулярлы гармоникалық функцияларды регулярлы гармоникалық функцияларға өткізеді және регулярлы гармоникалық функциялар класында өзара кері болады. Бірлік шардың сыртқы облысы үшін бөлшек ретті оператор қатысқан шеттік есеп қарастырылған. Ол есептің шекарасында бөлшек ретті оператор қатысып, белгілі Нейман есебін жалпылайды. Есептің шешімінің бар болуы мен жалғыздығы туралы теорема дәлелденді. Сондай-ақ авторлар зерттелген есеп шешімінің интегралдық өрнектелуін келтірген.

B.Kh. Turmetov, K.I. Usmanov

On solvability of exterior boundary value problem with boundary operators of fractional order

In this paper, in the class of regular harmonic functions we study the properties of some integro-differential operators, generalizing the operators of fractional differentiation in the sense of Hadamard. These operators convert regular harmonic functions in the same functions and are mutually inverse on regular harmonic functions. In the exterior of the unit ball studied the boundary value problem with the boundary operator fractional order. This problem generalizes the known Neumann problem on the boundary operators of fractional order. We prove a theorem on the existence and uniqueness of the solution of the problem. Obtained an integral representation of the solution of this problem.

References

1 Bitsazde A.V. *Equations of Mathematical Physics,* Moscow: Nauka, 1980, p. 336.

2 Vladimirov V.S. *Equations of mathematical physics,* Moscow: Nauka, 1981, p. 512.

3 Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations,* Amsterdam: Elsevier, North-Holland, Mathematics studies, 2006, p. 539.

4 Turmetov B.Kh., Mirzakhasova A. *Bull. of Karaganda State University,* ser. Mathematic, 2015, 3(79), p. 87–95.

5 Turmetov B.Kh., Torebek B.T. *Differential Equations,* 2015, 51, 2, p. 243–254.

6 Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. *Siberian Advances in Mathematics,* 2012, 22, 2, p. 115–134.

7 Krasnoschok M., Vasylyeva N. *Differential Equations,* 2014, 257(6), p. 1814–1839.

8 Torebek B.T., Turmetov B.Kh. *Boundary Value Problems,* 2013, 2013, 93, [ER]. Access mode: doi:10.1186/1687-2770-2013-93.

9 Umarov S.R., Luchko Yu.F., Gorenflo R. *Fractional calculus and Applied analysis,* 2000, 3, 4, p. 454–468.

10 Berdyshev A.S., Turmetov B.Kh., Kadyrkulov B.Zh. *Siberian Mathematical Journal,* 2012, 53, 4, p. 752–764.

11 Turmetov B.Kh., Baymetova N. *Bull. of Karaganda University, Mathematics ser.,* 2012, 3(67), p. 89–98.

12 Muratbekova M.A., Shinaliev K.M., Turmetov B.Kh. *Boundary Value Problems,* 2014, [ER]. Access mode: DOI: 10.1186/1687-2770-2014-29.

13 Turmetov B.Kh., Torebek B. T. *AIP Conference Proceedings,* 2015, 1676, 020096, [ER]. Access mode: doi: 10.1063/1.4930522.

14 Lifanov I.K. *Differential Equations,* 1988, 24, 1, p. 110–115.