

М.А. Султанов<sup>1</sup>, Г.Б. Баканов<sup>1</sup>, И.Е. Светов<sup>2</sup>, Б.Б. Устемирова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан;

<sup>2</sup>Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия  
(E-mail: smurat-59@mail.ru)

## Численный алгоритм решения обратной задачи определения зоны малой проницаемости

В статье рассмотрена обратная задача восстановления границы зоны малой проницаемости в пласте по измерениям давления в скважинах. Исследованы постановка задачи и распределение давления внутри слоя в случае, когда давление не меняется поперек слоя. Методами теории решения краевых задач для эллиптических уравнений задача сведена к интегральному уравнению. Авторами предложен итерационный алгоритм решения задачи, проведены вычислительные расчеты для модельных задач.

*Ключевые слова:* вычислительная диагностика, измеримое поле, проницаемость, неоднородность, прямая и обратная задачи, интегральное уравнение.

### Введение

В настоящее время широко развиваются теоретические и прикладные исследования в области вычислительной диагностики, связанные с восстановлением параметров различных сред (естественных и искусственных) по измерениям различных полей (электромагнитных, акустических и др.). Этому способствуют огромные возможности современных быстродействующих компьютеров, так как в задачах вычислительной диагностики необходима сложная обработка поступающих входных данных (измерений полей, сигналов и т.п.). В большинстве случаев при решении подобных задач не удается получить аналитического точного решения, поэтому большое значение для практических приложений представляет разработка численных методов и алгоритмов их решения. В связи с интенсивным освоением месторождений (нефтяных, газовых, угольных и т.д.) и ростом количества ранее пробуренных скважин возникает необходимость определения зон малой проницаемости, что обусловлено нецелесообразностью бурения. Метод интегральных уравнений является одним из основных методов решения подобных задач [1–4], перспективным методом является метод объемных сингулярных интегральных уравнений [5, 6]. В настоящей работе для решения обратной задачи восстановления границы зоны малой проницаемости предложен итерационный алгоритм на основе сведения обратной задачи к интегральному уравнению Фредгольма первого рода с последующим применением метода регуляризации Тихонова.

### 1 Постановка прямой и обратной задачи

*Прямая задача.* Рассмотрим достаточно тонкий неоднородный слой и будем считать, что в нем давление не изменяется поперек, т.е.  $P(x, y, z) = P(x, y)$ . Будем считать, что внутри этого слоя проницаемость постоянна, за исключением некоторой зоны полной непроницаемости  $S$ , граница которой ограничена контуром  $C$ . Вне зоны непроницаемости пробурено  $K$  скважин, устья которых заданы координатами  $M_k = (x_k, y_k)$ ,  $k \in [1, K]$  (рис. 1).

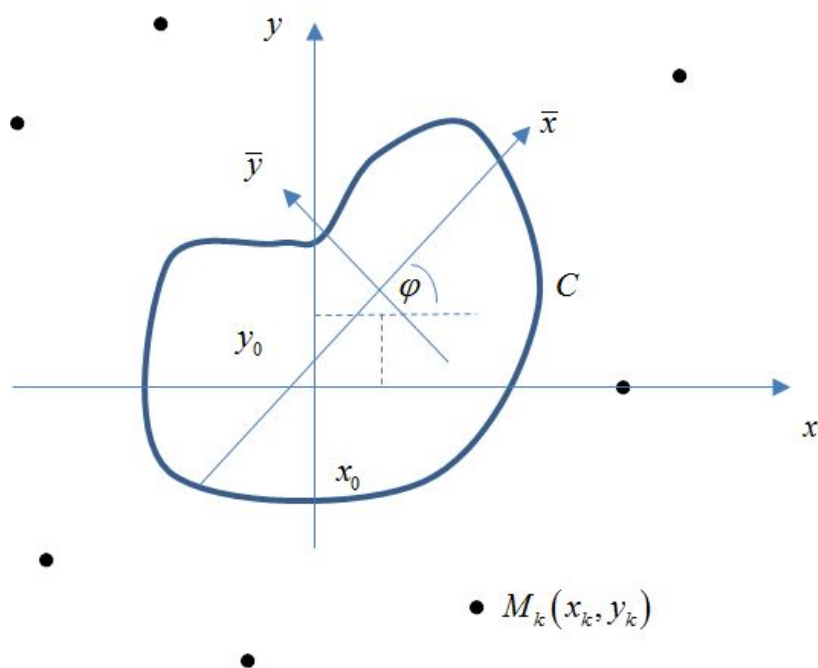


Рисунок 1. Схема зоны непроницаемости

Предполагается, что на большом расстоянии от исследуемой области давление равно постоянному пластовому давлению  $P_0$ . Если работает лишь одна  $k$ -я скважина, в которой давление равно  $P_k$ , то давление на пласте  $P^{(k)}(x, y)$  является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \Delta P^{(k)}(x, y) &= -P_k \cdot \delta(x - x_k) \delta(y - y_k), \\ \frac{\partial P^{(k)}}{\partial n} \Big|_C &= 0, \\ P^{(k)} \Big|_{C_{R_0}} &= P_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $C_{R_0}$  — окружность большого радиуса  $R_0$ .

*Обратная задача.* Определить контур  $C$  по дополнительной информации по измеренным давлениям в закрытых скважинах:

$$P_m^{(k)} = P^{(k)}(x_m, y_m), \quad m \in [1, K], \quad m \neq k, \quad k \in [1, K]. \quad (2)$$

Таким образом, мы имеем  $K(K - 1)$  измеренных данных:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} P_1^{(1)} & P_2^{(1)} & \dots & P_K^{(1)} \\ P_1^{(2)} & P_2^{(2)} & \dots & P_K^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_1^{(K)} & P_2^{(K)} & \dots & P_K^{(K)} \end{pmatrix} \triangleright. \quad (3)$$

## 2 Сведение краевой задачи к интегральному уравнению

Для того, чтобы свести краевую задачу для уравнения Пуассона к интегральному уравнению, будем рассматривать функцию Грина для задачи Дирихле в круге радиуса  $R_0$ :

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{d(M, M_0)}{r_0 \cdot R_0 \cdot \rho(M, M_0)}. \quad (4)$$

Здесь  $M$  — точка с координатами  $(x, y)$ ;  $M_0$  — точка с координатами  $(x_0, y_0)$ ,

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, d(M, M_0) = \sqrt{(r_0^2 x - R_0^2 x_0)^2 + (r_0^2 y - R_0^2 y_0)^2}.$$

Решение краевой задачи (1) будем искать в следующем виде:

$$P^{(k)}(M) = P_0 + P_k \cdot G(M, M_k) + P_k \cdot \oint_C \mu(M_0) \cdot G(M, M_0) dl_{M_0}. \quad (5)$$

Функция, определенная выражением (5), удовлетворяет уравнению и краевому условию на внешнем контуре  $C_{R_0}$ . Подставляя (5) в краевые условия на  $C$ , получим интегральное уравнение для плотности потенциала  $\mu(M)$ :

$$\frac{1}{2}\mu(M) - \oint_C \mu(M_0) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} dl_{M_0} = \frac{\partial G(M, M_k)}{\partial n_M}, \quad M \in C. \quad (6)$$

Определив из уравнения (6)  $\mu(M)$ , находим давление  $P(M)$  в точках  $M_m$  с координатами  $(x_m, y_m)$ , когда источник расположен в точке  $M_k$  с координатами  $(x_k, y_k)$  (для такого давления введено обозначение  $P_m^{(k)}$ ). Тогда согласно (5)

$$P_m^{(k)}(M) = P_0 + P_k \cdot G(M_m, M_k) + P_k \cdot \oint_C \mu(M_0) \cdot G(M_m, M_0) dl_{M_0}. \quad (7)$$

Если выполняется условие  $R_0 \gg D$ , где  $D$  — максимальный диаметр области  $S$ , то интегральное уравнение (6) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x - x_0}{\rho^2(M, M_0)}; \quad \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{y - y_0}{\rho^2(M, M_0)}. \quad (8)$$

Как видно, решение интегрального уравнения (6) не зависит от  $R_0$ . Однако расчет давления по формуле (5) зависит от  $R_0$ , так как при  $R_0 \gg D_0$  ( $D_0$  — диаметр области, где рассчитывается давление) функция Грина (4) имеет следующий вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_0}{\rho(M, M_0)}. \quad (9)$$

Поэтому давление при  $\rho(M, M_0) \leq D_0$ , согласно (5), имеет вид

$$P^{(k)}(M) = P_0 + \frac{P_k}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho(M, M_k)} + \frac{P_k}{2\pi} \cdot \oint_C \mu(M_0) \ln \frac{1}{\rho(M, M_0)} dl_{M_0} + C. \quad (10)$$

Здесь  $C = \frac{P_k \ln R_0}{2\pi} \left(1 + \oint_C \mu(M_0) dl_{M_0}\right)$ . Присутствие множителя  $\ln R_0$  существенно влияет на точность расчетов, так как при больших  $R_0$  необходимо будет решить интегральное уравнение (6) с достаточно высокой степенью точности. В противном случае возникает существенная погрешность. В связи с этим приходится видоизменять постановку задачи (1) для случая больших значений  $R_0$ .

### 3 Постановка внешней задачи Неймана

Рассмотрим распределение давления в слое  $P(x, y)$  при больших  $R_0$ , тогда  $P(x, y)$  будет решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \Delta P^{(k)}(x, y) &= -P_k \cdot \delta(x - x_k) \delta(y - y_k); \\ \frac{\partial P^{(k)}}{\partial n} \Big|_C &= 0, \\ P^{(k)}(x, y) - u_0(x, y) &\rightarrow P_0, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$u_0(M) = \frac{P_k}{2\pi} \cdot \ln \frac{1}{\rho(M, M_0)} \quad (12)$$

— давление в точке  $M$  с координатами  $(x, y)$  в окрестности источника  $M_k$  и в отсутствие зоны непроницаемости.

Решение задачи (11) будем искать в виде

$$P_m^{(k)} = P_0 + u_0(M) + u(M), \quad (13)$$

где  $u(M)$  — давление, возникающее в результате наличия зоны непроницаемости  $S$ , а  $P_0$  — пластовое давление.

Давление  $u(M)$  удовлетворяет внешней задаче Неймана:

$$\begin{aligned} \Delta u(M) &= 0, \\ \frac{\partial u(M)}{\partial n} \Big|_C &= - \frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_C, \end{aligned} \quad (14)$$

$u(M) \rightarrow 0$  на бесконечности. Полученная задача сводится к интегральному уравнению. Для того чтобы удовлетворить условию на бесконечности, решение задачи (14) представим в виде

$$u(M) = \frac{P_k}{2\pi} \cdot \oint_C \mu(M_0) \ln \frac{r(M, O)}{\rho(M, M_0)} dl_{M_0}. \quad (15)$$

Будем считать, что начало координат принадлежит неоднородности  $S$ . Это представление является решением уравнения Лапласа и стремится к нулю на бесконечности, так как  $\frac{r(M, O)}{\rho(M, M_0)} \rightarrow 1$  при  $M \rightarrow \infty$ .

Подставляя (15) в граничное условие, получим интегральное уравнение

$$\pi \mu(M) - \oint_C \mu(M_0) K(M, M_0) dl_{M_0} = f(M), \quad (16)$$

где  $K(M, M_0) = \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \frac{r(M)}{\rho(M, M_0)}$ ,  $f(M) = \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \frac{1}{\rho(M, M_k)}$ .

В случае, когда неоднородность есть круг радиуса  $a$ , решение можно получить в явном виде:

$$u(r, \varphi) = \frac{P_k}{2\pi} \ln \frac{r}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \varphi}}, \quad (17)$$

где  $\left\{ r_1 = \frac{a^2}{r_0}, \varphi_1 = 0 \right\}$  — точка положения источника. Функция (17) является решением уравнения Лапласа и стремится к нулю на бесконечности. Остается проверить выполнение граничного условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \frac{P_k}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{r - r_1 \cos \varphi}{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \varphi} \right\} = \frac{P_k}{2\pi} \left\{ \frac{1}{a} - \frac{r_0(r_0 - a \cos \varphi)}{a(r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos \varphi)} \right\} = \\ &= \frac{P_k}{2\pi} \cdot \frac{a - r_0 \cos \varphi}{r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (18)$$

Вычислим теперь, согласно (14),

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = - \frac{P_k}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=a} \ln \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi} = - \frac{P_k}{2\pi} \cdot \frac{a - r_0 \cos \varphi}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi} = - \frac{\partial u_0}{\partial r} \Big|_{r=a}. \quad (19)$$

Итак, доказано, что граничное условие задачи (14) выполняется, т.е. (17) является решением задачи (14) для круга.

4 Численный алгоритм прямой задачи и результаты расчетов

Численное исследование алгоритма решения прямой задачи будем проводить для случая одной звездной области непроводимости, контур  $C$  которой задан в полярных координатах  $r = r(\varphi)$ . В этом случае ядро интегрального уравнения (16) можно представить в виде

$$-K(M, M_0) - \frac{K(\varphi, \varphi_0)}{2 \cdot l(\varphi)} \text{ при } M = (r(\varphi), \varphi); M_0 = (r(\varphi_0), \varphi_0); \quad (20)$$

$$K(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{\rho^2(\varphi, \varphi_0)} ((r(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi_0) \cos \varphi_0) \cdot (r(\varphi) \cos \varphi) + r'(\varphi) \sin \varphi + (r(\varphi) \sin \varphi - r(\varphi_0) \sin \varphi_0) \cdot (r(\varphi) \sin \varphi - r'(\varphi) \cos \varphi)),$$

где

$$l(\varphi) = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}, \quad \rho^2(\varphi, \varphi_0) = r^2(\varphi) + r^2(\varphi_0) - 2r(\varphi)r(\varphi_0)\cos(\varphi - \varphi_0). \quad (21)$$

После несложных преобразований получим ядро интегрального уравнения

$$K(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{\rho^2(\varphi, \varphi_0)} \{r^2(\varphi) - r(\varphi_0)(r(\varphi) \cos(\varphi - \varphi_0) + r'(\varphi) \sin(\varphi - \varphi_0))\}. \quad (22)$$

Заметим, что ядро этого интегрального уравнения не имеет особенности при совпадении аргументов:  $K(\varphi, \varphi_0) \rightarrow \frac{r^2(\varphi) + 2r'(\varphi)r(\varphi) - r(\varphi)r'(\varphi)}{2l^2(\varphi)}$  при  $\varphi_0 \rightarrow \varphi$ . Правая часть интегрального уравнения (16) равна

$$f(M) = -\frac{f(\varphi)}{2l(\varphi)}.$$

Здесь  $M$  — точка с координатами  $(r(\varphi), \varphi)$ ,  $M_k$  — точка с координатами  $(R_k, \varphi_k)$ , где  $f(\varphi) = K(\varphi, \varphi_k)$  при  $r(\varphi_k) = R_k$  или

$$f(\varphi) = \frac{r^2(\varphi) - R_k(r(\varphi) \cos(\varphi - \varphi_k) + r'(\varphi) \sin(\varphi - \varphi_k))}{r^2(\varphi) + R_k^2 - 2R_k r(\varphi) \cos(\varphi - \varphi_k)}. \quad (23)$$

Учитывая, что  $dl_{M_0} = l(\varphi_0) d\varphi_0$ , можно записать интегральное уравнение (16) в виде

$$\pi\mu(\varphi) + \int_0^{2\pi} K(\varphi, \varphi_0) \mu(\varphi_0) \frac{l(\varphi_0)}{l(\varphi)} d\varphi_0 = -\frac{f(\varphi)}{l(\varphi)}. \quad (24)$$

Введя новую неизвестную функцию  $U(\varphi) = \mu(\varphi)l(\varphi)$ , получим следующее интегральное уравнение:

$$\pi U(\varphi) + \int_0^{2\pi} K(\varphi, \varphi_0) U(\varphi_0) d\varphi_0 = -f(\varphi). \quad (25)$$

Необходимые для обратной задачи данные, согласно (15), вычисляются по формуле

$$P^k(M) - u_0(M) = u^{(k)} = P_0 + \frac{P_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\varphi) \ln \frac{R_{m-1}^2 + r^2(\varphi) - 2R_{m-1}r(\varphi) \cos(\varphi - \varphi_{m-1})}{R_m^2 + r^2(\varphi) - 2R_m r(\varphi) \cos(\varphi - \varphi_m)} d\varphi. \quad (26)$$

Вычислительные эксперименты проводились для случая, когда контуром  $C$  является эллипс

$$r(\varphi) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{a\varepsilon}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (27)$$

где  $a, b$  — полуоси эллипса;  $\varepsilon = b/a$  — эксцентриситет эллипса. При этом считалось, что точки измерения и возбуждения находятся на окружности радиуса  $R_u$ , т.е.  $R_m = R_u$  для любого  $m$ . Поэтому результаты расчета  $u^{(k)}$  зависят от безразмерного параметра  $\varepsilon = b/a$ , места расположения источника  $\varphi_k$  и измерения  $\varphi_m$ .

На рисунке 2 приведены значения давления  $u^{(k)}$  в зависимости от  $\varphi_m$  при различных значениях  $\varphi_k$ , при  $\varepsilon = 0,5$ ,  $R_u = 3$ .

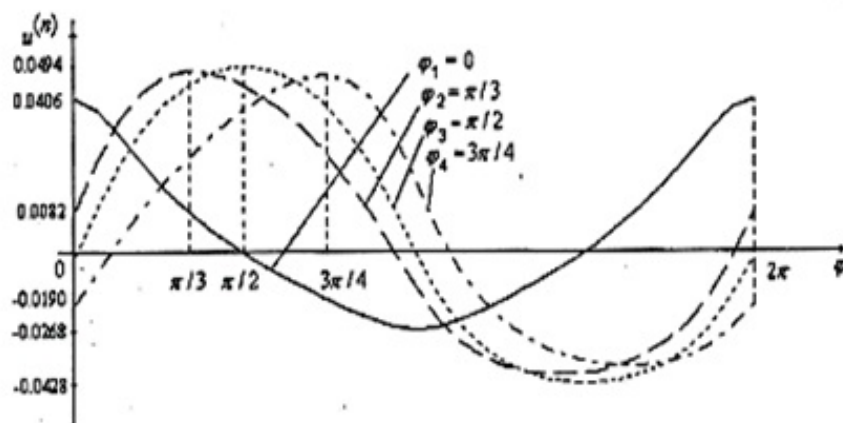


Рисунок 2. Значения давления в зависимости от расположения источника и измерения

Для исследования чувствительности измеряемых величин к положению и размерам области непроницаемости проводились расчеты значений  $u^{(k)}$  в  $m$  точках окружности радиуса  $R_u = 3$ . При различных формах эллипса (меняется эксцентриситет эллипса  $\varepsilon$ ) вычислялась величина  $q(\varepsilon) = u_{\min}^{(k)} / u_{\max}^{(k)}$ , где  $u_{\min}^{(k)}$  и  $u_{\max}^{(k)}$  — минимальное и максимальное значения  $u^{(k)}$  в точках измерения.

Для проверки точности решения прямой задачи проводилось сравнение численных расчетов для области непроницаемости, имеющей форму круга по формуле (17), и решения, полученного с использованием интегрального уравнения (16) и формулы (15). Проведенное исследование показало, что давление, вычисленное с использованием аналитического решения задачи и полученное с помощью интегрального уравнения, совпадает с достаточно большой точностью (погрешность вычислений составляет менее 0,001 %).

На рисунке 3 приведены результаты решения модельной обратной задачи. Здесь сплошной линией показано точное расположение эллиптической неоднородности, пунктирной линией — восстановленное расположение неоднородности для давления с внесенной погрешностью 2,5 %.

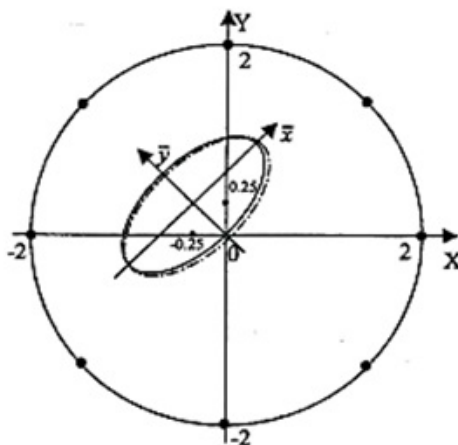


Рисунок 3. Результаты восстановления эллиптической неоднородности

При решении модельной задачи источник находился в восьми скважинах с координатами  $(0,0, 2,0)$ , расположенных на окружности с радиусом 2 и шагом  $\pi/4$ . Кроме того, проводилось измерение давления, эллиптическая неоднородность имела параметры  $a = 1,5$ ,  $d = 0,8$ ,  $\theta = \pi/4$  — угол поворота эллипса, с центром  $(-0,25, 0,25)$ .

Работа осуществлена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект 0115РК00681).

#### Список литературы

- 1 Горюнов А.А., Сосковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — С. 152.
- 2 Самохин А.В. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. — М.: Радио и связь, 1998. — С. 160.
- 3 Ильинский А.С., Сवेशников А.Г. Прямые и обратные задачи электродинамики // Вестн. Москов. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. — 1978. — № 4. — С. 3–11.
- 4 Kress R. Linear integral equations // App. Math. Sci. — Vol. 82. — New-York: Springer, 1989.
- 5 Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г. Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм для решения задач дифракции электромагнитных волн на плоских экранах // Радиотехника и электроника. — 2008. — Т. 53. — № 4. — С. 441–446.
- 6 Медведик М.Ю. Применение субиерархического метода в задачах электродинамики // Вычисл. методы и программирование. — 2012. — Т.13. — С. 87–97.

М.А.Султанов, Г.Б.Баканов, И.Е.Светов, Б.Б.Устемирова

### Кішіөткізгіштік аймағын анықтау кері есебін шешудің сандық алгоритмі

Мақалада ұңғымадағы қысымның өлшеулері бойынша пластағы кішіөткізгіштік аймағын тіктеу кері есебі қарастырылған. Қысым қабат бойлап өзгермейтін жағдайда есептің қойылымы мен қабат ішіндегі қысымның үлестірілімі зерттелген, эллиптикалық тендеулер үшін шеттік есептерді шешу әдістерінің теориясы көмегімен есеп интегралдық тендеуге келтірілген. Есепті шешудің итерациялық алгоритмі ұсынылған, үлгілік есептер үшін есептеулер жүргізілген.

M.A.Sultanov, G.B.Bakanov, I.E.Svetov, B.B.Ustemirova

### A numerical algorithm for solving the inverse problem of determining the low permeability zone

The inverse problem of reconstructing the boundaries of low permeability zones of the reservoir for pressure measurements in wells. Formulation of the problem is investigated and the pressure distribution within the layer when the pressure does not change across the layer, using the theory of solving boundary value problems for elliptic equations, the problem is reduced to the integral equation. An iterative algorithm for solving the problem, computational calculations performed for model problems.

#### References

- 1 Goryunov A.A., Soskovets A.V. *Inverse scattering problems in acoustics*, Moscow: MSU Publ., 1989, p. 152.
- 2 Samokhin A.V. *Integral equation and iterative methods in the electromagnetic scattering*, Moscow: Radio and svyaz, 1998, p. 160.
- 3 Ilyinsky A.S., Sveshnikov A.G. *Bull. Moscow. University, Ser. 15. Calculated Mathematics and cybernetics*, 1978, 4, p. 3–11.
- 4 Kress R. *App. Math. Sci.*, 82, New-York: Springer, 1989.
- 5 Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G. *Technology and Electronics.*, 2008, 53, 4, p. 441–446.
- 6 Medvedik M.Yu. *Numerical Methods and Programming*, 2012, 13, p. 87–97.