

М.А. Султанов, М.Д. Кошанова, Б.Б. Устемирова

*Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан
(E-mail: murat.sultanov@ayu.edu.kz)*

О некорректности обратной задачи численного обращения одномерной свертки

В статье методом численного моделирования показана некорректность обратной задачи численного обращения одномерной свертки. Построена дискретная модель свертки. Проведены вычисления в случае отсутствия и наличия шума. Компьютерными вычислительными экспериментами показано, что пренебрежение ошибками, которые возникают при измерениях в практических случаях, может привести к неверным результатам. Авторами приведены численные примеры и один простой способ правильного численного восстановления свертки.

Ключевые слова: модель, свертка, некорректная и обратная задачи, реконструкция, погрешность, вычислительный эксперимент.

Введение

В настоящее время математическое моделирование и компьютерные технологии широко применяются в фильтрации зашумленных сигналов, обработке смазанных, дефокусированных изображений, в рентгеновской томографии для исследования внутреннего состояния неоднородных объектов через их визуализацию. Потребности сегодняшней практики порождают необходимость совершенствования методов и численных алгоритмов реконструкции задач, приводящих к повышению качества томографических изображений.

Трудности в решении таких задач заключаются главным образом в том, что задачи реконструкции являются некорректно поставленными обратными задачами, т.е. малым погрешностям в исходных данных могут соответствовать большие погрешности в реконструируемых функциях. Это проявляется в возникновении артефактов, ложных контуров в восстанавливаемых изображениях, которые подтверждаются в практическом решении этих задач [1–4].

Основной математической моделью задач восстановления сигналов и реконструкций изображений являются интегральные уравнения 1-го рода типа свертки [2, 4, 5]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(t - \tau) f(\tau) d\tau = g(t), \quad (1)$$

где $f(x)$ — искомый исходный неискаженный сигнал; $g(x)$ — искаженный регистрируемый сигнал; $H(x - \tau)$ — аппаратная функция (функция рассеяния точки — ФРТ).

Как известно, задача решения интегрального уравнения первого рода является некорректной, поэтому для его решения применяются методы теории некорректных и обратных задач [7]. Для решения интегральных уравнений (1) наиболее подходит метод регуляризации Тихонова. Поскольку для практической реализации интерес представляют численные методы, в настоящей работе мы уделяем им основное внимание. При численном решении обратной задачи методом регуляризации Тихонова обычно используются метод преобразования Фурье (ПФ) и метод квадратур, а также методы итераций, например, метод итерации Ландвебера, метод итеративной регуляризации Фридмана [5–7].

На качество восстанавливаемых томографических изображений влияют качество проекционных данных (погрешность, шум), по которым проводится реконструкция изображения, и алгоритм реконструкции, который должен быть устойчивым к погрешностям и шумам проекционных данных. Причиной этих погрешностей может быть неточная фильтрация проекционных данных из-за основного недостатка преобразования Фурье, базой которого являются гармонические функции и которое может давать значительные погрешности при скачкообразных измерительных данных с детекторов (так называемый эффект Гиббса в задачах восстановления изображений). Поэтому необходимо совершенствовать методы реконструкции.

В таких случаях возникает естественный вопрос: а что будет, если при моделировании пренебречь ошибками в начальных данных? Например, использование одной и той же расчетной сетки для моделирования данных и реконструкции иногда приводит, казалось бы, к хорошей реконструкции для данных без шума. Такая ситуация не является реалистичной, и восстановленные таким образом сигналы или изображения не соответствуют действительности, так как их невозможно соотнести с какой-либо реальной обратной задачей, поскольку шум присутствует в любой экспериментальной установке.

В настоящей работе мы на примере обращения одномерной свертки покажем с помощью численных экспериментов, что пренебрежение ошибками в измерениях данных приводит к неверным результатам.

1 Непрерывная модель для одномерной свертки

Математические модели многих некорректно поставленных обратных задач в общем виде можно записать в следующем виде:

$$f = Au + \varepsilon. \quad (2)$$

Здесь u — кусочно-непрерывная функция, определенная на подмножестве R^d ; $f \in R^k$ — числовой вектор, с помощью измерительных приборов; R^d — евклидово пространство размерности d ; A — дифференциальный или интегральный оператор; вектор $\varepsilon \in R^k$ означает ошибки измерений, которые всегда присутствуют в практических ситуациях. Для вектора ε во многих случаях справедливо неравенство $\|\varepsilon\| \leq \delta$, где δ — уровень погрешности.

Приведем постановки прямой и обратной задач относительно нашей математической модели (2).

Прямая задача: «Дано u , найти $f = Au$ ».

Обратная задача. «По данным измерения шума $f = Au + \varepsilon$ и $\|\varepsilon\| \leq \delta$, $\delta > 0$ необходимо извлечь информацию о u ».

Мы будем построить математическую модель одномерной свертки с периодическими краевыми условиями. Рассмотрим периодическую функцию $f : R \rightarrow R$, удовлетворяющий условию $f(x) = f(x + n)$, $n \in Z$, где R и Z — соответственно множество действительных и целых чисел.

Непрерывная модель измерений относится к 1-периодическому сигналу $f : R \rightarrow R$, который размывается 1-периодической функцией размытия точки. Другие названия функции размытия точки: *размытое ядро, импульсное эхо, ядро свертки*.

Сначала с помощью функции ψ_0 , которая определена на отрезке $[-a, a] \in R$ с некоторой константой $0 < a < 1/2$,

$$\psi_0(x) = C_a(x+a)^2(x-a)^2c, \quad -a \leq x \leq a, \quad (3)$$

построим функцию размытия точки ψ , где постоянная $C_a := \left(\int_{-a}^a (x+a)^2(x-a)^2 dx \right)^{-1}$ определяется из следующего условия нормировки:

$$\int_{-a}^a \psi_0(x) dx = 1. \quad (4)$$

Функция размытия точки ψ определяется копированием функции ψ_0 на каждый отрезок $[n - a, n + a]$, $n \in Z$, и она равна нулю вне этих отрезков. Построенная таким образом функция ψ будет неотрицательной и четной:

$$\psi(x) \geq 0 \text{ и } \psi(x) = \psi(-x), \quad \forall x \in R. \quad (5)$$

На рисунке 1 приведен график функции ψ_0 и функции размытия точки ψ при $a = 0,04$.

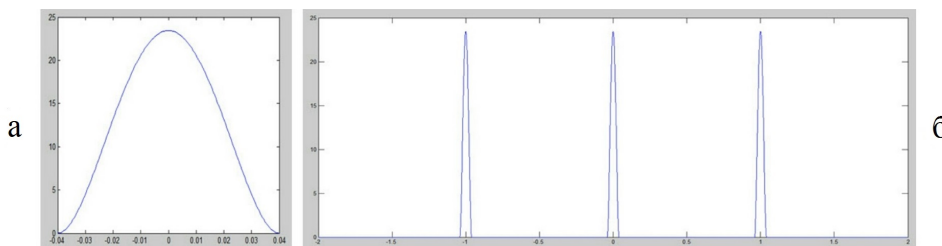


Рисунок 1. Функция ψ_0 (а) и функция размытия точки ψ (б)

Определение. Непрерывная модель свертки задается следующим интегралом:

$$(\psi * u)(x) = \int_{-a}^a \psi(\tau) u(x - \tau) d\tau. \quad (6)$$

Ниже на рисунке 2 показана эффективность свертки с кусочно-непрерывной функцией.

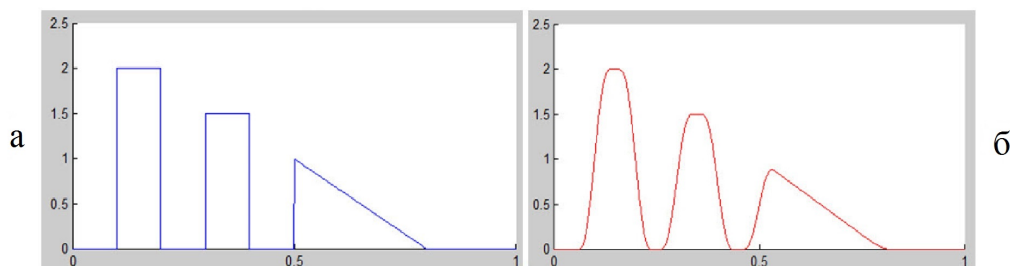


Рисунок 2. а — Сигнальная функция $u(x)$; б — функция $(\psi * u)(x)$

Из рисунка видно, что это сглаживающее свойство свертки, и оно соответствует названию размытое ядро функции размытия точки.

Отметим, что формула (6) не соответствует модели (2), так как в левой части этой формулы не находится вектор размерности k . Однако будем считать, что функция u определена на отрезке $[b, b + 1]$ и можно измерить значения свертки $(\psi * u)(x)$ в k -точках $\tilde{x}_1 = b, \tilde{x}_2 = b + \frac{1}{k}, \tilde{x}_3 = b + \frac{2}{k}, \dots, \tilde{x}_k = b + \frac{k-1}{k}$. Положим

$$u := [(\psi * u)(\tilde{x}_1), (\psi * u)(\tilde{x}_2), \dots, (\psi * u)(\tilde{x}_k)] \in R^k, \quad (7)$$

тогда (6) можно записать в виде $f = Au + \varepsilon$, и она примет вид (2).

2 Дискретная модель свертки

Для численного решения мы должны перейти от непрерывной модели (2) к дискретной

$$f = Au + \varepsilon, \quad (8)$$

где $f \in R^k, u \in R^n, A$ — матрица размера $k \times n$. Строго говоря, f в (2) и (8) разные — в непрерывном случае и в дискретном соответственно.

Чтобы перейти к дискретной модели (8), необходима дискретизация непрерывной модели (2). Для этого определим сетку следующим образом:

$$x_j = b + \frac{j-1}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Тогда периодическую функцию $u(x)$ с действительными значениями можно записать в виде вектор функции u

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T = [u_1(x_1), u_2(x_2), \dots, u_n(x_n)]^T. \quad (10)$$

Заметим, что $\Delta x = x_2 - x_1 = 1/n$.

Далее можем аппроксимировать интеграл в (6) с помощью квадратурных формул численного интегрирования. Для любой непрерывной функции $g : [b, b + 1] \rightarrow R$ можно записать следующее приближенное равенство:

$$\int_b^{b+1} g(x) dx \approx \Delta x \sum_{j=1}^n g(x_j), \quad (11)$$

и с увеличением n приближение становится точнее.

Для удобства возьмем $k = n$ и измерим свертку на той же совокупности точек (9), на которых дискретизируется неизвестная функция $u(x)$. В общем случае в этом нет необходимости, однако в этом случае A будет квадратной матрицей и во многом упрощается задача численного обращения свертки.

Построим матрицу A размерности $n \times n$ такой, чтобы $Au \in R^k$ аппроксимировал $\mathcal{A}u$, определяемый (6). Определим дискретную функцию размытия точки:

$$p = [p_{-v}, p_{-v+1}, \dots, p_{-1}, p_0, p_1, \dots, p_{v-1}, p_v]^T.$$

Вспомним, что для всех $|x| > a > 0$, $\psi_0(x) \equiv 0$. Возьмем $v > 0$ как наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $(v + 1) \times \Delta x > a$, и пусть $\tilde{p}_j = \psi_0(j\Delta x)$, $\forall j = -v, \dots, v$. К примеру, если $a = 0,04$ и $n = 64$, как на рисунке 1, то $v = 2$. В силу условия нормировки (6) будет выполнено следующее приближенное равенство: $\Delta x \sum_{j=-v}^v \tilde{p}_j \approx 1$. В практике при нормировке дискретной функции размытия точки берется следующее соотношение:

$$p = \left(\Delta x \sum_{j=-v}^v \tilde{p}_j \right)^{-1} \tilde{p}, \tag{12}$$

тогда

$$\Delta x \sum_{j=-v}^v p_j = 1. \tag{13}$$

Поэтому

$$\int_{-a}^a \psi(x') u(x_j - x') dx' \approx \Delta x \sum_{l=-v}^v \psi(x_l) u(x_j - x_l) \approx \Delta x \sum_{l=-v}^v p_l u_{j-l},$$

т.е. дискретная свертка находится следующей формулой:

$$(p * u)_j = \sum_{l=-v}^v p_l u_{j-l}, \tag{14}$$

где u_{j-l} для случаев $j - l < 1$ и $j - l > n$ определяется периодическими граничными условиями. Тогда

$$\Delta x (p * u) \approx \mathcal{A}u, \tag{15}$$

и мы найдем вектор измерений $f = [f_1, \dots, f_k]^T$ следующей формулой:

$$f_j = \Delta x (p * u)_j + \varepsilon_j. \tag{16}$$

Записывая (14) с помощью матрицы A , получаем модель (3):

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{bmatrix}.$$

Покажем для $n = 64$, какой будет структура матрицы A свертки. Как мы отметили выше, если $a = 0,04$, то $v = 2$ и функция размытия точки принимает вид $p = [p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1, p_2]$. Тогда согласно (14) имеем

$$\begin{aligned} (p * u)_1 &= pu_1 + p_{-1}u_2 + p_{-2}u_3 + p_2u_{n-1} + p_1u_n; \\ (p * u)_2 &= pu_1 + p_0u_2 + p_{-1}u_3 + p_{-2}u_4 + p_2u_n; \\ (p * u)_3 &= p_2u_1 + p_1u_2 + p_0u_3 + p_{-1}u_4 + p_{-2}u_5; \\ &\vdots \\ (p * u)_n &= p_{-1}u_1 + p_{-2}u_2 + p_2u_{n-2} + p_1u_{n-1} + p_0u_n. \end{aligned}$$

Поэтому матрица A будет имеет вид

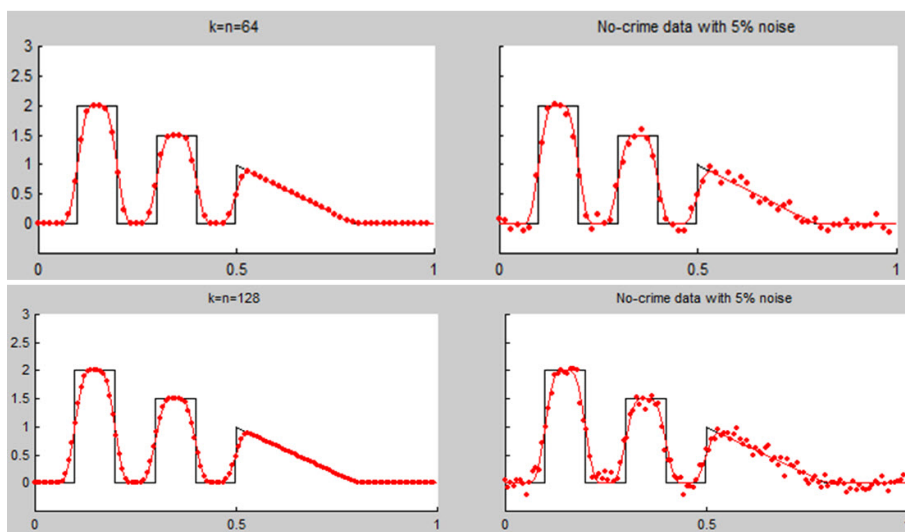
$$A = \Delta x \begin{bmatrix} p_0 & p_{-1} & p_{-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_{-1} & p_{-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} & p_{-2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} & p_{-2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & & p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} & p_{-2} \\ p_{-2} & 0 & \dots & & 0 & p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} \\ p_{-1} & p_{-2} & \dots & & 0 & 0 & p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Как видим, A — циркулянтная матрица, а системы линейных уравнений с такой матрицей коэффициентов можно решить с помощью быстрого преобразования Фурье, а также другими итерационными методами.

Возвращаясь к общему случаю определения p по формуле (12), формулу приближения (15) можно записать в виде

$$Au \approx Au. \tag{18}$$

Ниже на рисунке 3 приведены результаты вычислений дискретной модели и результаты сопоставлений их с $(\psi * u)(x)$ непрерывными данными свертки, определяемой формулой (6). Также на рисунке (в правой части) показаны результаты вычислений при добавлении шума в исходные данные $u(x)$. Мы смоделировали случайный вектор для случая $k=64, 128$, взяв вектор с независимыми элементами с гауссовским распределением, имеющим стандартное отклонение $\sigma = 0,05 \cdot \max |u(x)|$. Это соответствует относительному уровню шума 5%.



Свертка $(\psi * u)(x)$, определяемая формулой (6), обозначена сплошной линией, а результаты приближения — точками

Рисунок 3. Результаты приближения по формуле $Au \approx Au$ для различных значений $k = n$

На рисунке 4 приведены элементы матрицы A свертки, неравные нулю при $k = n = 32, k = n = 64$.

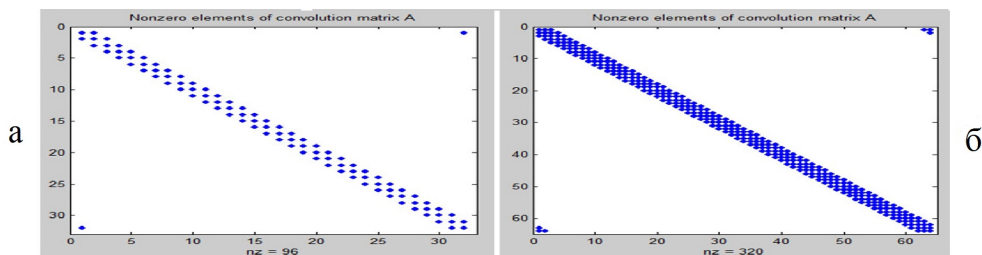


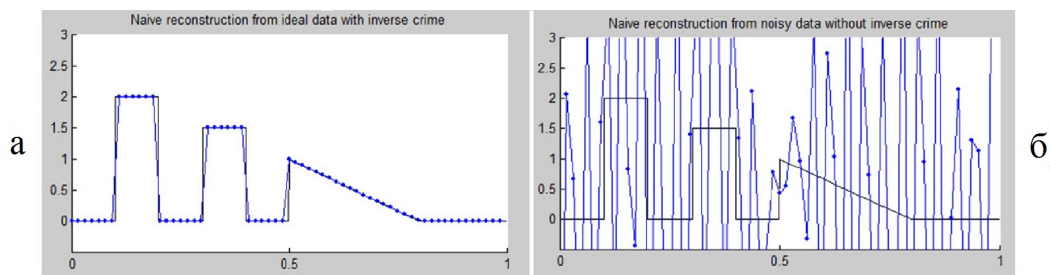
Рисунок 4. Элементы матрицы A свертки, неравные нулю при $k = n = 32$ (а); $k = n = 64$ (б)

Как видно из рисунка 4, количество элементов матрицы A , неравных нулю, не превышает 10% от их общего числа. Это свидетельствует о том, что матрица A является разреженной.

3 Простое обращение свертки

В этом разделе приведены результаты обращения свертки в отсутствие ($\varepsilon = 0$) и при наличии шума с помощью следующей формулы:

$$u \approx A^{-1}f \approx A^{-1}(Au + \varepsilon) = f + A^{-1}(\varepsilon). \quad (19)$$



а) В отсутствие шума; б) при наличии шума

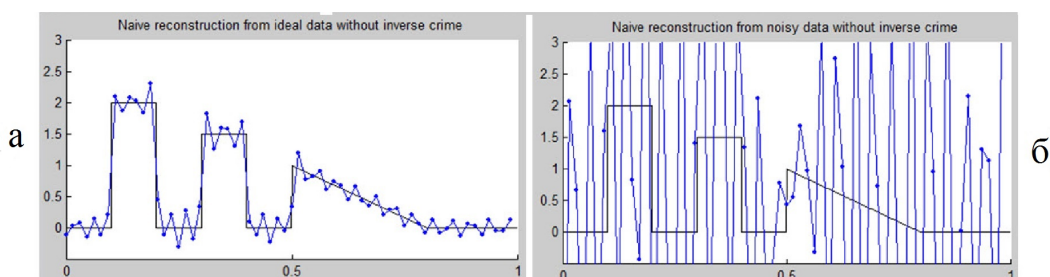
Рисунок 5. Результаты численного обращения свертки

Казалось бы, простое обращение свертки с помощью формулы (19) дает вполне приемлемые результаты (рис. 5 а). Но это неверно, так как в начальных данных содержатся ошибки измерений. Как отмечено во введении, восстановленные таким путем данные невозможно соотнести с какой-либо реальной обратной задачей. При наличии шума уже проявляется некорректность задачи обращения свертки (рис. 5 б).

Поэтому необходимо применять методы регуляризации решения некорректных задач [1, 7], чтобы уменьшить чувствительность решения к ошибкам измерений.

4 Правильное обращение свертки

Покажем здесь один простой способ правильного численного обращения свертки (рис. 6). Мы будем использовать модифицированную функцию размытия точки при моделировании данных, взяв $a = 0,041$. Определяемую формулой (6) функцию $(\psi * u)(x)$ вычислим приближенно в 1000 равномерно расположенных точках интервала $[0, 1]$, используя формулу трапеции с 400 квадратурными точками для оценки интеграла. Далее, используя сплайны, интерполируем значения $(\psi * u)(x)$ на 64 точки сетки.



а) В отсутствие шума; б) при наличии шума

Рисунок 6. Результаты правильного численного обращения свертки

Заключение

В данной работе рассмотрена задача численного обращения одномерной свертки, с помощью численных экспериментов показана некорректность этой задачи. Построен дискретный вариант свертки. Показано, что простое обращение свертки без учета ошибок измерений приводит к неверным результатам. Приведен один простой способ правильного обращения свертки. Проведённое моделирование показывает необходимость и важность применения методов регуляризации при решении некорректных обратных задач.

Список литературы

- 1 Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — С. 199.
- 2 Бейтс Р., Мак-Доннелл М. Восстановление и реконструкция изображений. — М.: Мир, 1989. — С. 336.
- 3 Василенко Г.И., Тараторин А.М. Восстановление изображений. — М.: Радио и связь, 1986. — С. 335.
- 4 Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. — М.: Техносфера, 2006. — С. 1072.
- 5 Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода типа свертки // Некоторые вопросы автоматизированной обработки и интерпретации физических экспериментов. — Вып. 1. — М.: Изд-во МГУ, 1973. — С. 170–191.
- 6 Медофф Б.П. Реконструкция изображений по ограниченным данным: Теория и применение в компьютерной томографии // Реконструкция изображений / Под ред. Г.Старка. — М.: Мир, 1992. — С. 384–436.
- 7 Тихонов А.Н., Гончарский А.В. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. — М.: Наука, 1983. — С. 200.

М.А. Сұлтанов, М.Д. Қошанова, Б.Б. Устемирова

Бірөлшемді үйірткіні терістеу кері есебінің қисынсыздығы жайлы

Мақалада сандық модельдеу әдісімен бірөлшемді үйірткіні терістеу кері есебінің қисынсыз есеп болатындығы көрсетілген. Үйірткінің дискрет моделі құрылған. Шу болған және болмаған жағдайларға есептеулер жүргізілген. Практикалық жағдайларда өлшеулерде пайда болатын қателіктерді есепке алмау қате нәтижелерге алып келу мүмкіндігі компьютерлік есептеу тәжірибелері арқылы зерттелген. Сондай-ақ авторлар үйірткіні сандық тіктеудің бір қарапайым тәсілі және сандық мысалдар келтірген.

M.A. Sultanov, M.D. Koshanova, B.B. Ustemirova

On ill-posedness of the numerical inversion inverse problem of one-dimensional convolution

In the article the method of numerical simulation shows the ill-posedness of the inverse problem of the numerical treatment of one-dimensional convolution. Built discrete convolution model. Calculation performed in the absence and presence of noise. Computer computing experiments have shown that the neglect of an error that occurs when measuring in practical cases, can lead to incorrect results. One easy way to restore the correct numerical convolution, Numerical examples are also given.

References

- 1 Bakushinskii A.B., Goncharsky A.V. *Ill-posed problems. Numerical Methods and Applications*, Moscow: Publ. MSU, 1989, p. 199.
- 2 Bates R., Mac-Donnell M. *Rehabilitation and reconstruction of images*, Moscow: Mir, 1989, p. 336.
- 3 Vasilenko G.I., Taratorin A.M. *Image restoration*, Moscow: Radio and Svyaz, 1986, p. 335.
- 4 Gonzalez R., Woods R. *Digital Image Processing*, Moscow: Technosphere, 2006, p. 1072.
- 5 Goncharsky A.V., Leonov A.S., Yagola A.G. *Some questions automated processing and interpretation of physics experiments*, 1973, 1, p. 170–191.
- 6 Medoff B.P. *Image Reconstruction*, Moscow: Mir, 1992, p. 384–436.
- 7 Tikhonov A.N., Goncharsky A.V. and others. *The regularizing algorithms and apriori information*, Moscow: Nauka, 1983, p. 200.