УДК 521.1

М.Д. Минглибаев[1,2], Г.М. Маемерова[1], Ж.У. Иманова[1]

[1] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы;*
[2] *Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Алматы*
(E-mail: mayemerova@gmail.com)

Вековые возмущения в задаче трех тел с массами, изменяющимися неизотропно в различных темпах

В статье исследована задача трех тел с переменными массами, изменяющимися неизотропно в различных темпах в общем случае. Из-за неизотропного изменения масс появляются реактивные силы. Методами теории возмущения получены канонические уравнения вековых возмущений задачи трех тел с неизотропно изменяющимися массами в различных темпах. Законы изменения масс считаются произвольными. Найдены приближенно-аналитические решения уравнений вековых возмущений в аналогах второй системы элементов Пуанкаре по методу Пикара. На основе этих решений можно сделать анализ эволюции аналогов элементов орбиты. Полученные результаты можно использовать при анализе динамической эволюции тройных гравитирующих систем с неизотропно изменяющимися массами при наличии реактивных сил.

Ключевые слова: задача трех тел, переменные массы, вековые возмущения, аналоги второй системы элементов Пуанкаре, метод Пикара.

Введение

Общеизвестно, что реальные космические тела — нестационарные, так как со временем их массы, размеры, формы и структура распределения масс внутри тел изменяются. Эти процессы особенно интенсивно происходят в двойных и кратных системах [1–5]. В связи с этим исследуется задача трех тел с массами, изменяющимися неизотропно в различных темпах. Тела рассматриваются как сферические тела переменного радиуса со сферическим распределением масс (далее сферические тела).

Следует отметить, что в проблеме трех тел с переменными массами, изменяющимися неизотропно в различных темпах в общем случае, неизвестно ни одного интеграла. Поэтому рассматриваемая задача исследуется методами теории возмущения [5–8].

1 Задача трех тел с неизотропно изменяющимися массами в различных темпах

Рассмотрим систему трех взаимогравитирующих сферических небесных тел T_0, T_1 и T_2 с переменными массами

$$m_0 = m_0(t), \quad m_1 = m_1(t), \quad m_2 = m_2(t), \tag{1}$$

изменяющимися неизотропно в различных темпах (закон изменения масс произвольный) [5]:

$$\frac{\dot m_0}{m_0} \neq \frac{\dot m_1}{m_1}, \quad \frac{\dot m_0}{m_0} \neq \frac{\dot m_2}{m_2}, \quad \frac{\dot m_1}{m_1} \neq \frac{\dot m_2}{m_2}. \tag{2}$$

Исходя из уравнения Мещерского [9], запишем уравнения движения задачи трех тел с переменными массами при наличии реактивных сил в абсолютной системе координат:

$$m_j \ddot{\vec{R}}_j = grad_{\vec{R}_j} U + \dot m_j \vec{V}_j, \quad U = f\left(\frac{m_0 m_1}{R^*_{01}} + \frac{m_0 m_2}{R^*_{02}} + \frac{m_1 m_2}{R^*_{12}}\right),$$

где $\vec{u}_j$ — абсолютная скорость отделяющихся частиц;

$$\vec{V}_j = \vec{u}_j - \dot{\vec{R}}_j \neq 0, \quad \forall\, \vec{V}_j, \quad j = 0, 1, 2, \tag{3}$$

— относительная скорость отделяющихся частиц; $\vec{R}_j$ — радиус-вектор центра сферических тел; $\vec{R}^*_{ij}$ — расстояние между центрами сферических тел; f — гравитационная постоянная. Следуя Л.Г. Лукьянову [4], будем считать, что реактивные силы приложены к центру соответствующих сферических тел. Обычно в наблюдательной астрономии для конкретных небесных тел определяются законы изменения масс (1)–(2) и относительные скорости отделяющихся частиц (3). Поэтому будем считать, что величины (1), (3) известные.

2 Уравнения вековых возмущений двухпланетной задачи трех тел с неизотропно изменяющимися массами в различных темпах

Отметим, что уравнения движения в относительной системе координат, в координатах Якоби, в оскулирующих элементах апериодического движения по квазиконическому сечению, в аналогах элементов Якоби и Делоне приведены в работе [6].

Далее исследование уравнений вековых возмущений сводится к решению следующей системы неавтономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \frac{\partial R^*_{i\text{век}}}{\partial \eta_i}; \qquad & \dot{p}_i &= \frac{\partial R^*_{i\text{век}}}{\partial q_i}; \\ \dot{\eta}_i &= -\frac{\partial R^*_{i\text{век}}}{\partial \xi_i}; \qquad & \dot{q}_i &= -\frac{\partial R^*_{i\text{век}}}{\partial p_i}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $R^*_{i\text{век}}$ – возмущающие функции [6–8]; ξ_i, η_i, p_i, q_i — аналоги второй системы элементов Пуанкаре [5]. В настоящей работе в разложении в ряд возмущающей функции сохранены слагаемые с точностью до второй степени включительно малых величин m_1, m_2, e_1, e_2, i_1, i_2 [6–8]. Таким образом, в аналогах второй системы элементов Пуанкаре вековые выражения для $R^*_{1\text{век}}$, $R^*_{2\text{век}}$ имеют вид [7, 8]

$$\begin{aligned} R^*_{1\text{век}} &= \frac{1}{\gamma_1^2}\cdot\frac{\tilde{\beta}_1^4}{2\mu_{10}\Lambda_1^2} + F_{01} + F_{12\text{век}1} + F_{\rho 1\text{век}} + \Phi_{1\text{век}}; \\ R^*_{2\text{век}} &= \frac{1}{\gamma_2^2}\cdot\frac{\tilde{\beta}_2^4}{2\mu_{20}\Lambda_2^2} + F_{02} + F_{12\text{век}2} + F_{\rho 2\text{век}} + V_{\text{век}} + \Phi_{2\text{век}}; \end{aligned} \tag{5}$$

$$F_{01} = -\frac{b_1\gamma_1^2 a_1^2}{2\psi_1} - f\frac{m_1 m_2}{\gamma_2\psi_1 a_2}, \quad F_{12\text{век}1} = \frac{f}{\psi_1}\left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}}\right]_{\text{век}}, \quad F_{\rho 1\text{век}} = -\frac{3b_1\gamma_1^2 a_1^2}{4\Lambda_1\psi_1}(\xi_1^2+\eta_1^2);$$

$$F_{02} = -\frac{b_2\gamma_2^2 a_2^2}{2\psi_2} - f\frac{m_1 m_2}{\gamma_2\psi_2 a_2}, \quad F_{12\text{век}2} = \frac{f}{\psi_2}\left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}}\right]_{\text{век}}, \quad F_{\rho 2\text{век}} = -\frac{3b_2\gamma_2^2 a_2^2}{4\Lambda_2\psi_2}(\xi_2^2+\eta_2^2);$$

$$V_{\text{век}} = -\frac{9a_1 a_2 \mu_2 \gamma_2 (2\dot{\gamma}_1\dot{\nu}_1 + \gamma_1\ddot{\nu}_1)}{14\sqrt{\Lambda_1}\sqrt{\Lambda_2}\psi_2}(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2);$$

$$\Phi_{1\text{век}} = \frac{3a_1\gamma_1(t)}{2\psi_1\sqrt{\Lambda_1}}\left\{-F_{1x}(t)\xi_1 + F_{1y}(t)\eta_1 + \frac{F_{1z}(t)}{\sqrt{\Lambda_1}}\left[(-\xi_1 q_1 + \eta_1 p_1)\right]\right\};$$

$$\Phi_{2\text{век}} = \frac{3a_2\gamma_2(t)}{2\psi_2\sqrt{\Lambda_2}}\left\{-F_{2x}(t)\xi_2 + F_{2y}(t)\eta_2 + \frac{F_{2z}(t)}{\sqrt{\Lambda_2}}\left[(-\xi_2 q_2 + \eta_2 p_2)\right]\right\};$$

$$\vec{F}_1 = \frac{\dot{m}_1}{m_1}\vec{V}_1 - \frac{\dot{m}_0}{m_0}\vec{V}_0 \neq 0, \quad \vec{F}_2 = \left(\frac{\dot{m}_2}{m_2}\vec{V}_2 - \frac{\dot{m}_0}{m_0}\vec{V}_0\right) - \nu_1\left(\frac{\dot{m}_1}{m_1}\vec{V}_1 - \frac{\dot{m}_0}{m_0}\vec{V}_0\right) \neq 0.$$

Анализ формул (4)–(5) показывает, что уравнения вековых возмущений при наличии реактивных сил в случае неизотропного изменения масс не расщепляются на две системы относительно элементов ξ_i, η_i и p_i, q_i.

Основной целью настоящей работы является выявить явный вид уравнений (4) и методом Пикара найти их приближенные аналитические решения. На основе этих решений получить явный вид уравнений аналогов элементов орбиты.

3 Каноническая система уравнений вековых возмущений в аналогах второй системы элементов Пуанкаре

Уравнения вековых возмущений для эксцентрических элементов ξ_i, η_i имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{\partial F^*_{1\textit{век}}}{\partial \eta_1}; & \dot{\eta}_1 &= -\frac{\partial F^*_{1\textit{век}}}{\partial \xi_1}; \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{\partial F^*_{2\textit{век}}}{\partial \eta_2}; & \dot{\eta}_2 &= -\frac{\partial F^*_{2\textit{век}}}{\partial \xi_2}, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$F^*_{1\textit{век}}(\xi_i,\eta_i,p_i,q_i,t) = F(\xi_i,\eta_i) + K_6(\eta_1 p_1 - \xi_1 q_1);$$
$$F^*_{2\textit{век}}(\xi_i,\eta_i,p_i,q_i,t) = F'(\xi_i,\eta_i) + K'_6(\eta_2 p_2 - \xi_2 q_2);$$
$$F(\xi_i,\eta_i) = K_0 + K_1(\xi_1^2+\eta_1^2) + K_2(\xi_2^2+\eta_2^2) + K_3(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2) + K_4\xi_1 + K_5\eta_1;$$
$$F'(\xi_i,\eta_i) = K'_0 + K'_1(\xi_1^2+\eta_1^2) + K'_2(\xi_2^2+\eta_2^2) + K'_3(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2) + K'_4\xi_2 + K'_5\eta_2.$$

Следует отметить, что задача становится еще сложнее из-за изменения масс неизотропно и, соответственно, добавления реактивной силы. В связи с этим в данной подстановке появляются новые величины, которые имеют вид

$$K_4 = -\frac{3a_1F_{1x}(t)\gamma_1(t)}{2\psi_1\sqrt{\Lambda_1}}; \quad K_5 = \frac{3a_1F_{1y}(t)\gamma_1(t)}{2\psi_1\sqrt{\Lambda_1}}; \quad K_6 = \frac{3a_1F_{1z}(t)\gamma_1(t)}{2\psi_1\Lambda_1};$$
$$K'_4 = -\frac{3a_2F_{2x}(t)\gamma_2(t)}{2\psi_2\sqrt{\Lambda_2}}; \quad K'_5 = \frac{3a_2F_{2y}(t)\gamma_2(t)}{2\psi_2\sqrt{\Lambda_2}}; \quad K'_6 = \frac{3a_2F_{2z}(t)\gamma_2(t)}{2\psi_2\Lambda_2},$$

а величины K_0, K_1, K_2, K_3, K'_0, K'_1, K'_2, K'_3 получены в работе [8]:

Уравнения вековых возмущений для облических элементов p_i, q_i определяются следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \frac{\partial \tilde{F}^*_{1\textit{век}}}{\partial q_1}; & \dot{q}_1 &= -\frac{\partial \tilde{F}^*_{1\textit{век}}}{\partial p_1}; \\ \dot{p}_2 &= \frac{\partial \tilde{F}^*_{2\textit{век}}}{\partial q_2}; & \dot{q}_2 &= -\frac{\partial \tilde{F}^*_{2\textit{век}}}{\partial p_2}, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\tilde{F}^*_{1\textit{век}}(\xi_i,\eta_i,p_i,q_i,t) = \psi_1^* F(p_1,q_1) + K_6(\eta_1 p_1 - \xi_1 q_1);$$
$$\tilde{F}^*_{2\textit{век}}(\xi_i,\eta_i,p_i,q_i,t) = \psi_2^* F(p_1,q_1) + K'_6(\eta_2 p_2 - \xi_2 q_2);$$
$$F(p_i,q_i) = K_1^*(p_1^2+q_1^2) + K_2^*(p_2^2+q_2^2) + K_3^*(p_1p_2+q_1q_2);$$
$$\psi_1^* = -\frac{fm_1m_2\nu_0B_1}{8\psi_1}; \quad \psi_2^* = -\frac{fm_1m_2\nu_0B_1}{8\psi_2}; \quad K_1^* = \frac{1}{\Lambda_1}; \quad K_2^* = \frac{1}{\Lambda_2}; \quad K_3^* = -\frac{2}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}.$$

4 Приближенно-аналитическое решение уравнений вековых возмущений в аналогах второй системы элементов Пуанкаре по методу Пикара

Запишем в явном виде систему уравнений (6)–(7):

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= K_5 + K_6p_1 + 2K_1\eta_1 + K_3\eta_2; & \dot{\eta}_1 &= K_4 - K_6q_1 + 2K_1\xi_1 + K_3\xi_2; \\ \dot{\xi}_2 &= K'_5 + K'_6p_2 + 2K'_2\eta_2 + K'_3\eta_1; & \dot{\eta}_2 &= K'_4 - K'_6q_2 + 2K'_2\xi_2 + K'_3\xi_1; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -K_6\xi_1 + 2\psi_1^*(t)\left(\frac{q_1}{\Lambda_1} - \frac{q_2}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}\right); & \dot{q}_1 &= K_6\eta_1 + 2\psi_1^*(t)\left(\frac{p_1}{\Lambda_1} - \frac{p_2}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}\right); \\ \dot{p}_2 &= -K'_6\xi_2 + 2\psi_2^*(t)\left(\frac{q_2}{\Lambda_2} - \frac{q_1}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}\right); & \dot{q}_2 &= K'_6\eta_2 + 2\psi_2^*(t)\left(\frac{p_2}{\Lambda_2} - \frac{p_1}{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Используя метод Пикара, напишем решения уравнений (8), (9) в следующем виде:

$$\ni_k(t) = \ni_k(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Pi_i^{**}(t, \ni_k(t_0))dt, \tag{10}$$

где $\Pi_i^{**}(t, \ni_k)$ — правые части уравнений (8), (9); $\ni_k$ — элементы ξ_i, η_i, p_i, q_i; $\ni_{k0}{=}\ni_k(t_0)$ — их значения в начальный момент времени.

Решения уравнений (10) позволяют анализировать эволюцию аналогов эксцентриситетов e_i, наклонений i_i, аргумента перицентров ω_i и движения долготы восходящих узлов Ω_i, долготы перицентров π_i:

$$e_i^2 = \frac{\ni_{\xi_i}^2 + \ni_{\eta_i}^2}{\Lambda_i}; \quad \sin^2 i_i = \frac{\ni_{p_i}^2 + \ni_{q_i}^2}{\Lambda_i};$$

$$\Omega_i = -arctg\frac{\ni_{q_i}}{\ni_{p_i}}; \quad \pi_i = -arctg\frac{\ni_{\eta_i}}{\ni_{\xi_i}}; \quad \omega_i = \pi_i - \Omega_i; \quad i = 1, 2.$$

Следует отметить, что все вычисления были проделаны с применением системы аналитических вычислений Mathematica [9].

Заключение

В работе рассмотрена задача трех взаимогравитирующих сферических небесных тел с переменными массами, изменяющимися неизотропно в различных темпах в общем случае. Впервые получена система из восьми уравнений вековых возмущений первого порядка в аналогах второй системы элементов Пуанкаре при наличии реактивных сил. Найдены приближенно-аналитические решения уравнений вековых возмущений в аналогах второй системы элементов Пуанкаре по методу Пикара. На основе этих решений можно провести анализ эволюции аналогов элементов орбиты.

Результаты настоящей работы можно использовать при анализе динамической эволюции тройных гравитирующих систем с неизотропно изменяющимися массами при наличии реактивных сил.

Список литературы

1 *Omarov T.B. (Editor)* Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. — New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002. — P. 260.

2 *Bekov A.A., Omarov T.B.* The Theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems // Astron. and Astrophys. Transactions. — 2003. — Vol. 22. — No. 2. — P. 145–153.

3 *Eggleton P.* Evolutionary processes in binary and multiple stars. — UK: Cambridge University Press, 2006. — P. 332.

4 *Лукьянов Л.Г.* Динамическая эволюция орбит звезд в тесных двойных системах с консервативным обменом масс // Астрон. журн. — 2008. — Т. 85. — № 8. — С. 755–768.

5 *Минглибаев М.Д.* Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. Поступательное и поступательно-вращательное движение. — Германия: LAP LAMBERT Academic Publ., 2012. — С. 229.

6 *Минглибаев М.Д., Маемерова Г.М., Иманова Ж.У.* Уравнения движения задачи трех тел с переменными массами при наличии реактивных сил // Вестн. ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. — 2016. — Т. 111. — № 2. — С. 19–25.

7 *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Д., Маемерова Г.М.* Символьные вычисления в исследованиях проблемы трех тел с переменными массами // Программирование. — 2014. — Т. 40. — № 2. — С. 51–59.

8 *Минглибаев М.Д., Маемерова Г.М.* Эволюция ориентации орбитальных плоскостей двухпротопланетной задачи трех тел с переменными массами // Астрон. журн. — 2014. — Т. 91. — № 9. — С. 762–772.

9 *Прокопеня А.Н.* Решение физических задач с использованием системы Mathematica. — Брест: Изд-во БГТУ, 2005. — С. 260.

М.Д. Минглибаев, Г.М. Маемерова, Ж.Ү. Иманова

Массалары әр түрлі қарқында изотропсыз өзгеретін үш дене есебіндегі ғасырлық ұйытқулар

Мақалада массалары әр түрлі қарқында изотропсыз өзгеретін үш дене мәселесі жалпы жағдайда қарастырылған. Массаның изотропсыз өзгеруінен реактивті күштер пайда болады. Ғасырлық ұйытқу теориясының әдістерімен массалары әр түрлі қарқында изотропсыз өзгеретін үш дене мәселесінің канондық ғасырлық ұйытқу теңдеулері алынды. Денелердің массалары кез келген заңдылықпен өзгереді. Пикар әдісінің көмегімен Пуанкаре элементтері аналогтарының екінші жүйесінде ғасырлық ұйытқу теңдеулерінің жуық аналитикалық шешімдері табылды. Бұл шешімдердің негізінде орбита элементтері аналогтарының эволюциясы сипатталды. Алынған нәтижелерді реактивті күштер аясында изотропты емес массалары бар динамикалық үш гравитациялық жүйелерін талдауда қолдануға болады.

M.D. Minglibayev, G.M. Mayemerova, Zh.U. Imanova

Secular perturbations in the three-body problem with masses changing anisotropically at the different rates

In this article we investigate the three-body problem with variable masses changing non-isotropically at the different rates in the general case. In this case due to non-isotropically mass changes appear reactive forces. Using the methods of the perturbation theory are obtained the canonical equations of secular perturbations of the three-body problem with masses changing non-isotropically at the different rates. The mass change laws are considered arbitrary. Using Picard's method in the analogues of the second system of the Poincare elements are found approximate analytical solutions of the equations of secular perturbations. On basis of these solutions is possible to do the analysis of the evolution of the analogues elements of the orbit. It can be used in the analysis of the dynamical evolution of triple gravitating systems with varying anisotropic reactive in the presence of the masses forces.

References

1 Omarov T.B. *Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy,* New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002, p. 260.

2 Bekov A.A., Omarov T.B. *Astron. and Astrophys. Transactions,* 2003, 22, 2, p. 145–153.

3 Eggleton P. *Evolutionary processes in binary and multiple stars.* UK: Cambridge University Press, 2006, p. 332.

4 Luk' yanov L.G., *Astrophysical Journal,* 2008, 85, 8, p. 755–768.

5 Minglibayev M.D. *The dynamics of gravitating bodies with variable masses and dimensions. Progressive and progressive-rotational movement,* Germany: LAP LAMBERT Academic Publ., 2012, p. 229.

6 Minglibayev M.D., Mayemerova G.M., Imanova Zh.U. *Bull. L.N. Gumilyov ENU,* 2016, 111, 2, p. 19–25.

7 Prokopenya A.N., Minglibayev M.D., Mayemerova G.M. *Programming,* 2014, 40, 2, p. 51–59.

8 Minglibayev M.D., Mayemerova G.M. *Astron. Journal,* 2014, 91, 9, p. 762–772.

9 Prokopenya A.N *The solution of physical problems using mathematics system,* Brest: BSTU Publ., 2005, p. 260.