УДК 517.925

А.А. Кульжумиева[1], Ж.А. Сартабанов[2]

[1]*Западно-Казахстанский государственный университет им. М. Утемисова, Уральск;*
[2]*Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова*
(E-mail: aiman-80@mail.ru)

О приводимости линейной D_e-системы с постоянными на диагонали коэффициентами к D_e-системе с жордановой матрицей в случае эквивалентности ее одному уравнению высшего порядка

В статье предложена методика приведения линейной системы с постоянными на диагонали коэффициентами к каноническому виду при некоторых условиях, налагаемых на собственные значения системы. Используя данную методику, можно исследовать структуры и (θ, ω, ω)-периодические решения линейных систем уравнений с оператором дифференцирования на главной диагонали.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, линейная система, приводимость, жорданова матрица.

В теории колебаний часто встречаются уравнения и системы уравнений с оператором дифференцирования по направлению главной диагонали $t = e\tau$ пространства временных переменных $(\tau, t) = (\tau, t_1, ..., t_m) \in R \times R \times ... \times R = R \times R^m$, $R = (-\infty, +\infty)$ вида

$$D_e = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t_j}, \tag{1}$$

который также называется оператором дифференцирования по Ли в силу системы

$$\frac{dt}{d\tau} = e, \tag{2}$$

где $e = (1, ..., 1)$ – m-вектор.

В частности, (θ, ω)-периодические по (τ, t) системы вида $D_e x = f(\tau, t, x)$ с дифференциальным оператором D_e тесно связаны с проблемами математической теории многочастотных колебаний [1], где $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$; $\theta = \omega_0, \omega_1, ..., \omega_m$ – положительные рационально несоизмеримые постоянные. В [2] предложен способ изучения задач (θ, ω)-периодических решений таких систем. Дальнейшее исследование этих проблем выдвинуло изучение систем [3], содержащих характеристику $\sigma = t - e\tau$ оператора D_e.

При исследовании колебательных решений линейных систем уравнений в частных производных первого порядка возникает необходимость приведения матриц с переменными элементами к удобному виду. В этой связи отметим результаты Y. Sibuya [4, 5] и комментарии к ним в монографиях В. Вазова [6], А.М. Самойленко [7] и И.А. Лаппо-Данилевского [8].

Поставим задачу об исследовании приводимости линейной системы с постоянными на диагонали коэффициентами вида

$$D_e x = A(\sigma) x, \tag{3}$$

где D_e – оператор вида (1) с характеристической системой (2), а $n \times n$ – матрица $A(\sigma)$, обладающая свойствами периодичности и гладкости

$$A(\sigma + k\omega) = A(\sigma) \in C_\sigma^{(1)}(R^m), \quad \forall k \in Z^m, \tag{4}$$

$k\omega = (k_1\omega_1, ..., k_m\omega_m)$ – кратный вектор-период, к системе с жордановой матрицей в случае эквивалентности ее одному D_e-уравнению высшего порядка вида

$$D_e^n u = c_1(\sigma) D_e^{n-1} u + c_2(\sigma) D_e^{n-2} u + ... + c_n(\sigma) u \tag{5}$$

с дифференцируемыми ω-периодическими коэффициентами. Здесь эквивалентность понимается в смысле перехода из решения $(x_1, ..., x_n)$ линейной системы (3) к вектор-функции $(u, D_e u, ..., D_e^{n-1} u)$, полученной из решения $u = u(\sigma, \tau)$ уравнения (5) на основе линейного неособенного преобразования.

Последовательно применяя оператор D_e к обеим частям уравнения (3), имеем

$$D_e x = A(\sigma)x; \tag{6_1}$$

$$D_e^2 x = A^2(\sigma)x; \tag{6_2}$$

....

$$D_e^{n-1} x = A^{n-1}(\sigma)x; \tag{6_{n-1}}$$

$$D_e^n x = A^n(\sigma)x. \tag{6_n}$$

Теперь из каждой системы (6_1), (6_2), ..., (6_n) выберем l-ое уравнение и составим систему

$$D_e x_l = \sum_{j=1}^{n} b_{1j}(\sigma)x_j; \tag{7_1}$$

$$D_e^2 x_l = \sum_{j=1}^{n} b_{2j}(\sigma)x_j; \tag{7_2}$$

....

$$D_e^{n-1} x_l = \sum_{j=1}^{n} b_{n-1j}(\sigma)x_j; \tag{7_{n-1}}$$

$$D_e^n x_l = \sum_{j=1}^{n} b_{nj}(\sigma)x_j, \tag{7_n}$$

где b_{ij} – коэффициенты при x_j l-ой строки произведения $A^i x$ — матрицы A^i и вектора x.

Уравнения (7_1), ..., (7_{n-1}) запишем в виде

$$\begin{cases} x_l = x_l; \\ D_e x_l = b_{1l}(\sigma)x_l + \sum\limits_{l \neq j=1}^{n} b_{1j}(\sigma)x_j; \\ D_e^2 x_l = b_{2l}(\sigma)x_l + \sum\limits_{l \neq j=1}^{n} b_{2j}(\sigma)x_j; \\ \text{...} \\ D_e^{n-1} x_l = b_{n-1l}(\sigma)x_l + \sum\limits_{l \neq j=1}^{n} b_{n-1j}(\sigma)x_j. \end{cases} \tag{8}$$

Составим матрицу $(n-1) \times (n-1)$-го порядка вида

$$B^*(\sigma) = \begin{pmatrix} b_{11}(\sigma) & ... & b_{1,l-1}(\sigma) & b_{1,l+1}(\sigma) & ... & b_{1n}(\sigma) \\ b_{21}(\sigma) & ... & b_{2,l-1}(\sigma) & b_{2,l+1}(\sigma) & ... & b_{2n}(\sigma) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{n-1,1}(\sigma) & ... & b_{n-1,l-1}(\sigma) & b_{n-1,l+1}(\sigma) & ... & b_{nn}(\sigma) \end{pmatrix} \tag{9}$$

и матрицу $B(\sigma)$ порядка $n \times n$ вида

$$B(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{1l}(\sigma) & \\ ... & B^*(\sigma) \\ b_{n-1,l}(\sigma) & \end{pmatrix} \tag{10}$$

системы уравнений (8).

Предположим, что
$$\det B^*(\sigma) \neq 0, \quad \sigma \in R^m. \tag{11}$$

Лемма. Если для системы (3), обладающей свойством (4), найдется номер $l : 1 \leq l \leq n$, такой, что выполнено условие (11), то D_e-система (3) эквивалентна линейному D_e-уравнению n-го порядка вида (5) относительно x_l.

Тогда из (10) в силу (11) имеем $\det B(\sigma) \neq 0$.

Далее из последних $n-1$ уравнений системы (8) определим вектор:
$$\widetilde{x} = (x_1, ..., x_{l-1}, x_{l+1}, ..., x_n)$$
и представим его через
$$(D_e x_l - b_{1,l}(\sigma)x_l, ..., D_e^{n-1}x_l - b_{n-1,l}(\sigma)x_l) = \Delta(x_l, D_e x_l, ..., D_e^{n-1}x_l)$$
в виде
$$\widetilde{x} = B^{*^{-1}}(\sigma) \cdot \Delta(x_l, D_e x_l, ..., D_e^{n-1}x_l). \tag{12}$$

Подставив полученное выражение (12) в уравнение (7_n), имеем линейное уравнение
$$D_e^n x_l = c_1(\sigma)D_e^{n-1}x_l + ... + c_n(\sigma)x_l. \tag{13}$$

Очевидно, что линейная связь между $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(x_l, D_e x_l, ..., D_e^{n-1}x_l)$ реализуется матрицей преобразования $B(\sigma)$, определенной соотношениями (9) и (10).

Лемма доказана.

Допустим, что характеристическое уравнение
$$\lambda^n - c_1(\sigma)\lambda^{n-1} - c_2(\sigma)\lambda^{n-2} - ... - c_n(\sigma) = 0 \tag{14}$$
имеет корни $\lambda_1(\sigma)$, ..., $\lambda_s(\sigma)$ кратностей k_1, ..., k_s, обладающие свойствами:

1^0) непрерывной дифференцируемости: $\lambda_j(\sigma) \in C_\sigma^{(1)}(R^m)$, $j = \overline{1,n}$;

2^0) периодичности с периодом $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$: $\lambda_j(\sigma + k\omega) = \lambda_j(\sigma)$, $j = \overline{1,n}$, $\sigma \in R^m$, $k \in Z^m$;

3^0) знакоопределенности $\lambda_j(\sigma)$ для каждого $j = \overline{1,n}$:

а) либо $\lambda_j(\sigma) < 0$, $\forall \sigma \in R^m$;
б) либо $\lambda_j(\sigma) = 0$, $\forall \sigma \in R^m$;
в) либо $\lambda_j(\sigma) > 0$, $\forall \sigma \in R^m$.

4^0) разделенности:

а) либо $\lambda_j(\sigma) \neq \lambda_l(\sigma)$, $\forall \sigma \in R^m$ для $j \neq l$;
б) либо $\lambda_j(\sigma) = \lambda_l(\sigma)$, $\forall \sigma \in R^m$ для $j \neq l$;

т.е. собственные значения имеют постоянную кратность для всех $\sigma \in R^m$.

При выполнении условий $1^0) - 4^0)$ для собственных значений $\lambda_j(\sigma)$, определенных из уравнения (14), уравнение (13) эквивалентно линейной системе
$$D_e z = C(\sigma)z, \tag{15}$$
где $z = (z_1, ..., z_n)$ – вектор-функция с координатами
$$z_1 = x_l, \quad z_2 = D_e x_l, \quad ..., \quad z_n = D_e^{n-1}x_l; \tag{16}$$
$C(\sigma)$ – сопровождающая матрица характеристического уравнения (14) вида
$$C(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ c_n(\sigma) & c_{n-1}(\sigma) & c_{n-2}(\sigma) & ... & c_1(\sigma) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Таким образом, в конечном счете линейная система (3) свелась к линейной системе (15).

При условиях $1^0) - 4^0)$ известно из [9], что система (15) с матрицей (17) приводится к жордановой форме

$$D_e y = J(\sigma)y \tag{18}$$

при помощи неособого линейного преобразования:

$$y = P(\sigma)z, \quad \det P(\sigma) \neq 0. \tag{19}$$

Переставив l-ое уравнение системы (3) на первое место, его можно записать в виде

$$D_e \widetilde{x} = \widetilde{A}(\sigma)\widetilde{x}, \tag{20}$$

где $\widetilde{x} = (x_l, x_1, ..., x_{l-1}, x_{l+1}, ..., x_n)$, $\widetilde{A}(\sigma)$ – матрица, полученная из матрицы $A(\sigma)$ путем переноса l-ой строки на 1-ую строку

$$\widetilde{A}(\sigma) = \begin{pmatrix} a_{l1}(\sigma) & ... & a_{ln}(\sigma) \\ a_{11}(\sigma) & ... & a_{1n}(\sigma) \\ ... & ... & ... \\ a_{l-1,1}(\sigma) & ... & a_{l-1,n}(\sigma) \\ a_{l+1,1}(\sigma) & ... & a_{l+1,n}(\sigma) \\ a_{n1}(\sigma) & ... & a_{nn}(\sigma) \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Ясно, что матрица (21) может быть представлена в виде

$$\widetilde{A}(\sigma) = LA(\sigma)L^{-1},$$

где L – неособенная постоянная матрица преобразования.

Из (20) имеем $\widetilde{x} = Lx$. В силу соотношений (8), (10), (16) получим $z = B(\sigma)\widetilde{x}$ и на основе (19) определим $y = P(\sigma)z$, тогда связь между x и y устанавливается соотношением

$$x = L^{-1}\widetilde{x} = L^{-1}B^{-1}z = L^{-1}B^{-1}P^{-1}y = (PBL)^{-1}y. \tag{22}$$

Следовательно, подстановкой (22) систему (3) приводим к системе (18), причем

$$J(\sigma) = (PB)LA(\sigma)(PBL)^{-1}; \tag{23}$$

$$C(\sigma) = BLA(\sigma)(BL)^{-1}. \tag{24}$$

Из соотношений (23) и (24) получим

$$\det[A(\sigma) - \lambda E] = \det[C(\sigma) - \lambda E] = \det[J(\sigma) - \lambda E]. \tag{25}$$

Так как в силу соотношения (25) характеристическое уравнение $\det[C(\sigma) - \lambda E] = 0$ совпадает с уравнением (14), то собственные значения $\lambda_j(\sigma)$ кратности n_j являются собственными значениями и матрицы $A(\sigma)$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. При выполнении условий леммы, (4), (11) и $1^0) - 4^0)$ для матрицы $A(\sigma)$ система (3) неособенным линейным ω-периодическим и непрерывно дифференцируемым преобразованием (22) приводится к системе (18) с жордановой матрицей $J(\sigma)$.

Например, рассмотрим систему двух уравнений

$$\begin{cases} D_e x_1 = a_{11}(\sigma)x_1 + a_{12}(\sigma)x_2; \\ D_e x_2 = a_{21}(\sigma)x_1 + a_{22}(\sigma)x_2. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем

$$x_2 = \frac{1}{a_{12}(\sigma)}[D_e x_1 - a_{11}(\sigma)x_1].$$

Отсюда получим

$$D_e x_2 = \frac{1}{a_{12}(\sigma)}[D_e^2 x_1 - a_{11}(\sigma)D_e x_1].$$

Подставив полученные выражения во второе уравнение системы, убеждаемся, что она при условии $a_{12} \neq 0$ приводится к линейному уравнению

$$D_e^2 x_1 - [a_{11}(\sigma) + a_{22}(\sigma)] D_e x_2 + [a_{11}(\sigma) a_{22}(\sigma) - a_{12}(\sigma) a_{21}(\sigma)] x_2 = 0,$$

причем характеристические уравнения заданной системы и полученные уравнения совпадают. Действительно,

$$\det[A(\sigma) - \lambda E] = \det \begin{vmatrix} a_{11}(\sigma) - \lambda & a_{12}(\sigma) \\ a_{21}(\sigma) & a_{22}(\sigma) - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - [a_{11}(\sigma) + a_{22}(\sigma)]\lambda + [a_{11}(\sigma) a_{22}(\sigma) - a_{12}(\sigma) a_{21}(\sigma)] = 0.$$

Если

$$a_{11}(\sigma) + a_{22}(\sigma) = \lambda_1(\sigma) + \lambda_2(\sigma);$$

$$\det A(\sigma) = \lambda_1(\sigma)\lambda_2(\sigma)$$

и собственные значения $\lambda_1(\sigma)$, $\lambda_2(\sigma)$ удовлетворяют условиям периодичности, дифференцируемости, разделенности и знакоопределенности, то согласно доказанной теореме периодическим и непрерывно дифференцируемым преобразованием $P(\sigma)$ заданная система приводится к линейной системе с матрицей $J(\sigma)$ жордановой формы.

Если $\lambda_1(\sigma) \neq \lambda_2(\sigma)$, то $J(\sigma) = diag\,[\lambda_1(\sigma), \lambda_2(\sigma)]$, а если $\lambda_0(\sigma) = \lambda_1(\sigma) = \lambda_2(\sigma)$, то

$$J(\sigma) = \begin{pmatrix} \lambda_0(\sigma) & 1 \\ 0 & \lambda_0(\sigma) \end{pmatrix}.$$

В заключение отметим, что исследование подобной задачи можно найти в [9–12].

Список литературы

1 *Харасахал В.Х.* Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. — Алма-Ата: Наука, 1970. — С. 200.

2 *Сартабанов Ж.А.* Об одном способе изучения периодических решений уравнений в частных производных специального вида // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. — 1989. — № 1. — С. 42–48.

3 *Сартабанов Ж.А.* Условия периодичности решений дифференциальных систем с многомерным временем // Изв. НАН МОН РК. Сер. физ.-мат. — 2004. — № 5. — С.44–48.

4 *Sibuya Y.* Some Global Properties of Matrices of Functions of One Variable // Math. Annal. — 1965. — No. 161. — P. 67–77.

5 *Sibuya Y.* Formal Solutions of a Linear Ordinary Differential Equation of the n-th Order at a Turning Point // Funkc. Ekvas. — 1962. — No. 4. — P.115–139.

6 *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.

7 *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

8 *Лаппо-Данилевский И.А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1957. — 456 с.

9 *Кульжумиева А.А.* Периодические решения систем дифференциальных уравнений с многомерным временем: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Алматы, 2009. — С. 20.

10 *Кульжумиева А.А.* Исследование периодических решений, приводимых к каноническому виду систем, с линейным дифференциальным оператором по многомерному времени // Евразийский математический журн. — 2008. — № 2. — С. 69–73.

11 *Kulzhumiyeva A., Sartabanov Zh.* Reduciability of linear D_e-system with constant on diagonal coefficients to D_e-system with Jordanian matrix // International conference on differential equations and dynamical systems. July, 2-7, 2010, Suzdal. — P. 220–221.

12 *Мухамбетова Б.Ж., Сартабанов Ж.А., Кульжумиева А.А.* Многопериодические решения систем уравнений с одним квазилинейным дифференциальным оператором в частных производных первого порядка // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2015. — № 2(78). — С. 112–117.

А.А. Кульжумиева, Ж.А. Сартабанов

Жоғарғы ретті бір теңдеуге эквиваленттілігі жағдайында жордан матрицалы D_e-жүйесіне диагоналда тұрақты коэффициенттер мен сызықты D_e-жүйені келтіру туралы

Мақалада жүйенің меншікті мәніне жатқызылатын кейбір шарттар кезінде диагоналында тұрақты коэффициенттермен берілген сызықты жүйені канондық түрге келтіру әдістемесі қарастырылған. Берілген әдістемені қолдана отырып, негізгі диагоналдағы дифференциалдау операторымен сызықты теңдеулер жүйесінің (θ, ω, ω)-периодты шешімдері мен құрылымдарын зерттеуге болады.

A.A. Kulzhumiyeva, Zh.A. Sartabanov

On reducibility of linear D_e-system with constant coefficients on the diagonal to D_e-system with Jordan matrix in the case of equivalence of its higher order one equation

In article proposed the method of bringing a linear system with constant coefficients on the diagonal to canonical form under some conditions on the own values of the system. Using this method, you can examine the structure and (θ, ω, ω)-periodic solutions of linear systems of equations with differential operator on the main diagonal.

References

1 Harasahal V.Kh. *Almost periodic solutions of ordinary differential equations*, Alma-Ata: Gylym, 1970, 200 p.

2 Sartabanov Zh.A. *Izvestiya AN KazSSR. Ser. phyz.-math.*, 1989, 1, p. 42–48.

3 Sartabanov Zh.A. *Izvestiya NAN MON RK. Ser. phyz.-math.*, 2004, 5, p. 44–48.

4 Sibuya Y. *Math. Annal.*, 1965, 161, p. 67–77.

5 Sibuya Y. *Funkc. Ekvas.*, 1962, 4, p. 115–139.

6 Vazov V. *Asymptotic expansions of ordinary differential equations*, Moscow: Mir, 1968, 464 p.

7 Samoilenko A.M. *Elements of the mathematical theory of multifrequency oscillations. Invariant tori*, Moscow: Nauka, 1987, 304 p.

8 Lappo-Danilevskyi I.A. *The use functions of matrix to the theory of linear systems of ordinary differential equations*, Moscow: GITTL, 1957, 456 p.

9 Kulzhumiyeva A.A.*Periodic solutions of systems of differential equations with multidimensional time*: abstract. dis. ... phis.-math. cand. sci., Almaty, 2009, p. 20.

10 Kulzhumiyeva A.A. *Eurasian Mathematical Journal*, 2008, 2, p. 69–73.

11 Kulzhumiyeva A.A, Sartabanov Zh. *International conference on differential equations and dynamical systems*, July, 2-7, 2010, Suzdal, p. 220–221.

12 Mukhambetova B.Zh., Sartabanov Zh.A., Kulzhumiyeva A.A. *Bull. of the Karaganda University. Mathematics ser.* 2015, 2(78), p. 112–117.