УДК 517.95

М.Т. Космакова, М.И. Рамазанов, А.С. Токешева, А.А. Хайркулова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: svetik_mir69@mail.ru)

О неединственности решения однородной краевой задачи для уравнения теплопроводности в угловой области

В статье рассмотрена однородная краевая задача для уравнения теплопроводности в вырождающейся угловой области. С помощью потенциалов простого слоя поставленная задача сведена к псевдовольтерровому интегральному уравнению второго рода. Полученное интегральное уравнение решается методом регуляризации. С этой целью выделена характеристическая часть интегрального уравнения. Обоснована неприменимость метода последовательных приближений для его решения. Доказана лемма о сведении полученного интегрального уравнения к уравнению с разностным ядром, и представлено его решение. Приведены оценка для резольвенты уравнения с разностным ядром и условия для ограниченности его решения. Явное представление решения уравнения с разностным ядром приводит первоначальное интегральное уравнение к уравнению Вольтерра второго рода со слабой особенностью, которое имеет единственное решение. Решение записано в операторной форме. Показано, что поставленная однородная краевая задача имеет ненулевое решение с точностью до постоянного множителя в классе существенно ограниченных функций с определенным весом. Определены классы единственности решения для поставленной краевой задачи.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение теплопроводности, интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода, характеристическое уравнение, метод регуляризации.

1 Постановка задачи

Рассматривается первая краевая задача теплопроводности в вырождающейся угловой области (области с подвижной границей)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;\ 0 < x < mt,\ t \in (0, T); \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0+} = 0;\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=mt} + k\tilde{u}(t) = 0, \tag{2}$$

где $\tilde{u}(t) = u(x,t)|_{x=mt} = u(mt, t)$, k и m заданы.

2 Сведение краевой задачи к интегральному уравнению

Решение уравнения теплопроводности может быть представлено в виде суммы тепловых потенциалов простого слоя [1]

$$u(x,t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau)d\tau + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-m\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \varphi(\tau)d\tau, \tag{3}$$

где функция (3) удовлетворяет уравнению (1) для любых $\nu(t), \varphi(t)$, для которых существуют интегралы в (3).

Для того, чтобы удовлетворить граничным условиям (2), найдем $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau)d\tau - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x-m\tau}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-m\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \varphi(\tau)d\tau, \tag{4}$$

тогда граничные условия примут вид [1]

$$-\nu(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{m\tau}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(m\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \varphi(\tau)d\tau = 0; \tag{5}$$

$$\varphi(t)-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{mt}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(mt)^2}{4a^2(t-\tau)}}\nu(\tau)d\tau-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{m}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{m^2(t-\tau)^2}{4a^2}}\varphi(\tau)d\tau=-k\tilde{u}(t). \tag{6}$$

Таким образом, если найдем функции $\nu(t)$, $\varphi(t)$ из системы (5)–(6), то, подставляя их в (3), получим решение задачи (1)–(2).

Из уравнения (5) имеем

$$\nu(t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{m\tau}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(m\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}}\varphi(\tau)d\tau. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), получим

$$\varphi(t)-\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^2}\int_0^t\frac{mt}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(mt)^2}{4a^2(t-\tau)}}\left\{\int_0^\tau\frac{m\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{3/2}}e^{-\frac{(m\tau_1)^2}{4a^2(\tau-\tau_1)}}\varphi(\tau_1)d\tau_1\right\}d\tau-$$

$$-K^{(1)}[\varphi]=-k\tilde{u}(t), \tag{8}$$

где

$$K^{(1)}[\varphi]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{m}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{m^2(t-\tau)^2}{4a^2}}\varphi(\tau)d\tau.$$

Меняя порядок интегрирования в равенстве (8), вычислим внутренний интеграл:

$$I_1(t,\tau)=\int_{\tau_1}^t\frac{t\tau_1}{[(t-\tau)(\tau-\tau_1)]^{3/2}}e^{-\frac{m^2t^2}{4a^2(t-\tau)}-\frac{m^2\tau_1^2}{4a^2(\tau-\tau_1)}}d\tau=\Big\|\sqrt{\frac{t-\tau}{\tau-\tau_1}}=z;\sqrt{t-\tau}=z\sqrt{\tau-\tau_1};$$

$$t-\tau=z^2(\tau-\tau_1);\tau=\frac{t+\tau_1z^2}{z^2+1};t-\tau=(t-\tau_1)\frac{z^2}{z^2+1};$$

$$\tau-\tau_1=(t-\tau_1)\frac{1}{z^2+1};d\tau=2(\tau_1-t)\frac{zdz}{(z^2+1)^2}\Big\|=$$

$$=\int_\infty^0\frac{t\tau_1(1+z^2)^{3/2}(1+z^2)^{3/2}}{z^3(t-\tau_1)^{3/2}(t-\tau_1)^{3/2}}e^{-\frac{m^2t^2(1+z^2)}{4a^2z^2(t-\tau_1)}-\frac{m^2\tau_1^2(1+z^2)}{4a^2(t-\tau_1)}}\frac{2z(\tau_1-t)}{(1+z^2)^2}dz=$$

$$=\int_0^\infty\frac{2t\tau_1(1+z^2)}{z^2(t-\tau_1)^2}e^{-\frac{m^2t^2}{4a^2(t-\tau_1)}\frac{1}{z^2}-\frac{m^2t^2}{4a^2(t-\tau_1)}-\frac{m^2\tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)}\frac{m^2\tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)}z^2}dz=$$

$$=e^{-\frac{m^2t^2+m^2\tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)}}\int_0^\infty\frac{2t\tau_1}{(t-\tau_1)^2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)e^{-\frac{m^2t^2}{4a^2(t-\tau_1)}\frac{1}{z^2}-\frac{m^2\tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)}z^2}=e^{-\frac{m^2t^2+m^2\tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)}}\times$$

$$\times\left[\int_0^\infty\frac{2t\tau_1}{(t-\tau_1)^2}e^{-\frac{m^2t^2}{4a^2(t-\tau_1)}\frac{1}{z^2}-\frac{m^2\tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)}z^2}dz+\int_0^\infty\frac{2t\tau_1}{(t-\tau_1)^2}\frac{1}{z^2}e^{-\frac{m^2t^2}{4a^2(t-\tau_1)}\frac{1}{z^2}-\frac{m^2\tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)}z^2}dz\right].$$

Используя формулы из [2; 321(3.325); 355(3.472(3))], получим

$$I_1(t,\tau)=\frac{m^2}{(2a\sqrt{\pi})^2}e^{-\frac{m^2t^2+m^2\tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)}}\left\{\frac{2t\tau_1}{(t-\tau_1)^2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{2a\sqrt{t-\tau_1}}{m\tau_1}+\frac{2t\tau_1}{(t-\tau_1)^2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{2a\sqrt{t-\tau_1}}{mt}\right\}e^{-\frac{m^2t\tau_1}{2a^2(t-\tau_1)}}=$$

$$=\frac{m^2}{(2a\sqrt{\pi})^2}e^{-\frac{m^2t^2+m^2\tau_1^2+2m^2t-tau_1}{4a^2(t-\tau_1)}}\left\{\frac{2at\sqrt{\pi}}{m(t-\tau_1)^{3/2}}+\frac{2at\tau_1\sqrt{\pi}}{m(t-\tau_1)^{3/2}}\right\}=$$

$$=\frac{m^2}{4a^2\pi}\frac{2a\sqrt{\pi}}{m(t-\tau_1)^{3/2}}(t+\tau_1)e^{-\frac{m^2(t+\tau_1)^2}{4a^2(t-\tau_1)}}=\frac{m(t+\tau_1)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau_1)^{3/2}}e^{-\frac{m^2(t+\tau_1)^2}{4a^2(t-\tau_1)}}.$$

Таким образом, уравнение (8) примет вид

$$\varphi(t)-\frac{m}{2a\sqrt{-\pi}}\int_0^t\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{m^2(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}}\varphi(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{m}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2(t-\tau)^2}{4a^2}}\varphi(\tau)d\tau + k\tilde{u}(t) = 0. \tag{9}$$

Теперь найдем $\tilde{u}(t)$ из представления (3):

$$\tilde{u}(t) = u(mt,t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(mt)^2}{4a^2(t-\tau)}}\nu(\tau)d\tau + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2(t-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}}\varphi(\tau)d\tau\right\}. \tag{10}$$

Подставим вместо $\nu(t)$ его значение (7) и найдем первое слагаемое, которое обозначим временно через $\tilde{u_1}(t)$:

$$\tilde{u_1}(t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(mt)^2}{4a^2(t-\tau)}}\left[\int_0^\tau \frac{m\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{3/2}} e^{-\frac{(m\tau_1)^2}{4a^2(\tau-\tau_1)}}\varphi(\tau_1)d\tau_1\right]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^t \varphi(\tau_1)d\tau_1\int_{\tau_1}^t \frac{m\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{3/2}\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2t^2}{4a^2(t-\tau)}-\frac{m^2\tau_1^2}{4a^2(\tau-\tau_1)}}d\tau = \|\text{те же замены(*)}\| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^t \varphi(\tau_1)d\tau_1\int_\infty^0 \frac{m\tau_1(1+z^2)^{3/2}\sqrt{1+z^2}}{(t-\tau_1)^{3/2}z\sqrt{t-\tau_1}} e^{-\frac{m^2t^2(1+z^2)}{4a^2z^2(t-\tau_1)}-\frac{m^2\tau_1^2(1+z^2)}{4a^2(t-\tau_1)}}\frac{2z(\tau_1-t)}{(1+z^2)^2}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^t \varphi(\tau_1)e^{-\frac{m^2t^2}{4a^2(t-\tau_1)}-\frac{m^2\tau_1^2}{4a^2(\tau-\tau_1)}}d\tau_1\int_0^\infty \frac{2m\tau_1}{t-\tau_1}e^{-\frac{m^2t^2}{4a^2(t-\tau_1)}z^2-\frac{m^2\tau_1^2z^2}{4a^2(t-\tau_1)}}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^t \varphi(\tau)e^{-\frac{m^2t^2}{4a^2(t-\tau)}-\frac{m^2\tau^2}{4a^2(t-\tau)}}\frac{2m\tau}{t-\tau}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}2a\sqrt{t-\tau}}{m\tau}e^{-2\frac{mt}{2a\sqrt{t-\tau}}\frac{m\tau}{2a\sqrt{t-\tau}}}d\tau =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \varphi(\tau)\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{m^2(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}}.$$

Окончательно имеем

$$\tilde{u}(t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{m^2(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{m^2(t-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\varphi(\tau)d\tau. \tag{11}$$

Преобразуем равенство (11), используя соотношение

$$\frac{m^2(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} = \frac{m^2(t-\tau)^2+4m^2t\tau}{4a^2(t-\tau)} = \frac{m^2(t-\tau)}{4a^2} + \frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)};$$

$$\tilde{u}(t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{m^2(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{m^2(t-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\varphi(\tau)d\tau = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{m^2(t-\tau)}{4a^2}-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}}+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{m^2(t-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\varphi(\tau)d\tau = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{m^2(t-\tau)}{4a^2}}\left[e^{-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}}+1\right]\varphi(\tau)d\tau.$$

Таким образом, уравнение (8) запишется в виде

$$\varphi(t) - \frac{m}{2a\sqrt{-\pi}}\int_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}-\frac{m^2(t-\tau)}{4a^2}}\varphi(\tau)d\tau - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{m}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{m^2(t-\tau)}{4a^2}}\varphi(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{ka}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{m^2(t-\tau)}{4a^2}}\left[e^{-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}}+1\right]\varphi(\tau)d\tau = 0. \tag{12}$$

Умножая обе части уравнения (12) на $e^{\frac{m^2t}{4a^2}}$ и вводя новую функцию

$$e^{\frac{m^2t}{4a^2}}\varphi(t) = \varphi_1(t), \tag{13}$$

получим

$$\varphi_1(t) - \frac{m}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}}\varphi_1(\tau)d\tau - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{m}{\sqrt{t-\tau}}\varphi_1(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{ka}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}}+1\right]\varphi_1(\tau)d\tau = 0.$$

Используя соотношение
$$\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}=\frac{2t-t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}=\frac{2t}{(t-\tau)^{3/2}}-\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}},$$
будем иметь
$$\varphi_1(t)-\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{2t}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}}\varphi_1(\tau)d\tau+\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}e^{-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}}\varphi_1(\tau)d\tau-$$
$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{m}{\sqrt{t-\tau}}\varphi_1(\tau)d\tau+\frac{ka}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}}+1\right]\varphi_1(\tau)d\tau=0,$$
или же после упрощения получим
$$\varphi_1(t)-\mathbb{K}\varphi_1(t)=0, \tag{14}$$
где
$$\mathbb{K}\varphi_1\equiv\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{2t}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}}\varphi_1(\tau)d\tau-\left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}+\frac{ka}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}}\varphi_1(\tau)d\tau-$$
$$-\left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}}-\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}\right)\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\varphi_1(\tau)d\tau.$$
Для исследования уравнения (14) выделим его характеристическую часть:
$$\varphi_1(t)-\mathbb{K}_h\varphi_1(t)=\mathbb{K}_0\varphi_1(t), \tag{15}$$
где
$$\mathbb{K}_h\varphi(t)=\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{2t}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}}\varphi_1(\tau)d\tau;$$
$$\mathbb{K}_0\varphi_1(t)=f_1(t)=-\left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}+\frac{ka}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}}\varphi_1(\tau)d\tau-$$
$$-\left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}}-\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}\right)\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\varphi_1(\tau)d\tau. \tag{16}$$
Умножим обе части этого уравнения на $\sqrt{t}$ и введем новую функцию
$$\sqrt{t}\varphi_1(t)=\varphi_2(t), \tag{17}$$
тогда получим
$$\varphi_2(t)-\int_0^t\mathcal{K}(t,\tau)\varphi_2(\tau)d\tau=f_2(t), \tag{18}$$
где
$$\mathcal{K}(t,\tau)=\frac{m}{a\sqrt{\pi}}\frac{t^{3/2}}{\sqrt{\tau}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}},\quad f_2(t)=\sqrt{t}f_1(t). \tag{19}$$
Отметим следующее свойство ядра $\mathcal{K}(t,\tau)$ характеристического уравнения:
$$\int_0^t\mathcal{K}(t,\tau)d\tau=1,$$
действительно,
$$\int_0^t\mathcal{K}(t,\tau)d\tau=\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{t^{3/2}}{\sqrt{\tau}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}}d\tau=\Big\|\eta=\frac{mt}{a\sqrt{t-\tau}},\quad \eta=\frac{mtd\tau}{2a(t-\tau)^{3/2}};$$
$$\tau=t-\frac{m^2t^2}{a^2\eta^2}=t\left[1-\frac{m^2t}{a^2\eta^2}\right]\Big\|=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{m\sqrt{t}/a}^{\infty}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-\frac{m^2t}{a^2}}}e^{-\eta^2}e^{\frac{m^2t}{a^2}}d\eta=\Big\|\theta^2=\eta^2-\frac{m^2t}{a^2};$$
$$2\theta d\theta=2\eta d\eta\Big\|=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\theta^2}d\theta=1.$$
Это, кстати, означает, что к уравнению (18) неприменим метод последовательных приближений.

3 Решение интегрального уравнения

Считая временно правую часть уравнения (15) известной, найдем его решение, т.е. решение характеристического уравнения. Аналогично [3; 174] интегральное уравнение (17) сведем к уравнению с разностным ядром. Для этого произведем в нем замены:

$$t = \left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{t_1}, \tau = \left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{\tau_1}, d\tau = -\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{d\tau_1}{\tau_1^2} \tag{20}$$

и введем новую функцию

$$\varphi_3(t_1) = \varphi_2\left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{t_1}\right], \tag{21}$$

получим

$$\varphi_2\left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{t_1}\right] - \frac{m}{a\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{\infty} \frac{a^3 2m\sqrt{\tau_1}}{2m^3 t_1^{3/2} a} \frac{2^3 m^3}{a^3} \frac{\tau_1^{3/2} t_1^{3/2}}{(\tau_1 - t_1)^{3/2}} \exp\left\{-m^2 \frac{m^4}{2^4 m^4} \frac{1}{t_1 \tau_1} \frac{1}{a^2} \frac{2^2 m^2}{a^2} \frac{\tau_1 t_1}{\tau_1 - t_1}\right\} \times$$

$$\times \varphi_2\left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{\tau_1}\right] \left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{d\tau_1}{\tau_1^2} = f_2\left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{t_1}\right].$$

Упрощая, получим

$$\varphi_3(t_1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{(\tau_1 - t_1)^{3/2}} e^{-\frac{1}{4(\tau_1 - t_1)}} \varphi_3(\tau_1) d\tau_1 = f_3(t_1), \tag{22}$$

где

$$f_3(t_1) = f_2\left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{t_1}\right]. \tag{23}$$

Таким образом, доказана

Лемма. Интегральное уравнение (15) эквивалентно сводится к уравнению (22) с разностным ядром.

Общее решение интегрального уравнения (22):

$$\varphi_3(t_1) = f_3(t_1) + \int_{t_1}^{\infty} r(t_1 - \tau_1) f_3(\tau_1) d\tau_1 + C, \tag{24}$$

где $r(\theta)$ определяется по формуле

$$r(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\theta)^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{\frac{n^2}{4\theta}},\ \theta \in R_-.$$

Для того, чтобы решение $\varphi_3(t_1)$, определяемое формулой (24), было достаточно ограниченным, чтобы интеграл $\int_{t_1}^{\infty} r(t_1 - \tau_1) d\tau_1$ был бы ограничен для любых $t_1 \in R_+$, так как функция $f_3(t_1) + C$ является ограниченной функцией переменной t_1 для любых конечных k. Интеграл $\int_{t_1}^{\infty} r(t_1 - \tau_1) d\tau_1$ будет ограниченным, так как $r(\theta)$ удовлетворяет оценке

$$|r(\theta)| \le \frac{C}{|\theta|^{3/2}} e^{-\frac{1}{4}|\theta|^{-1}},\ \forall \theta \in R_-,$$

где $C = const$. Нужно отметить [1], что резольвента $r(-t)$ интегрального уравнения (18) удовлетворяет интегральному уравнению

$$r(-t) = \frac{2}{\pi t^{3/2}} e^{-\frac{4}{t}} + \int_0^t \frac{2}{\sqrt{\pi}\tau^{3/2}} e^{-\frac{4}{\tau}} r(\tau - t) d\tau.$$

Подставив (21), (23) в (24), получим

$$\varphi_2\left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{t_1}\right] = f_2\left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{t_1}\right] + \int_{t_1}^{\infty} r(t_1 - \tau_1) f_2\left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{\tau_1}\right] d\tau_1 + C,$$

или

$$\varphi_2(t) = f_2(t) + \int_0^t r\left[\left(\frac{a}{2m^2}\right)^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\tau}\right)\right] f_2(\tau)\left(\frac{a}{2m}\right)^2\frac{d\tau}{\tau^2} + C.$$

Применяя обратные замены к (17) и (19), получим

$$\sqrt{t}\varphi_1(t) = \sqrt{t}f_1(t) + \int_0^t r\left[\left(\frac{a}{2m^2}\right)^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\tau}\right)\right]\sqrt{\tau}f_1(\tau)\left(\frac{a}{2m}\right)^2\frac{d\tau}{\tau^2} + C;$$

$$\varphi_1(t) = f_1(t) + \int_0^t r\left[\left(\frac{a}{2m^2}\right)^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\tau}\right)\right]\sqrt{\frac{\tau}{t}}f_1(\tau)\left(\frac{a}{2m}\right)^2\frac{d\tau}{\tau^2} + \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

Подставим (16) в последнее равенство:

$$\varphi_1(t) = -\left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}+\frac{ka}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{m^2 t\tau}{a^2(t-\tau)}}\varphi_1(\tau)d\tau - \left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}}-\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}\right)\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\varphi_1(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t r\left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\tau}\right)\right]\left(\frac{a}{2m}\right)^2\frac{1}{\sqrt{t}\tau^{3/2}}\left\{-\left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}+\frac{ka}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau-\xi}}e^{-\frac{m^2\tau\xi}{a^2(\tau-\xi)}}\varphi_1(\xi)d\xi -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}}-\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}\right)\int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau-\xi}}\varphi_1(\xi)d\xi\right\}d\tau + \frac{C}{\sqrt{t}}. \qquad (25)$$

В (25) в третьем слагаемом поменяем порядок интегрирования:

$$\int_0^t r\left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\tau}\right)\right]\left(\frac{a}{2m}\right)^2\frac{1}{\sqrt{t}\tau^{3/2}}\left\{-\left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}+\frac{ka}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau-\xi}}e^{-\frac{m^2\tau\xi}{a^2(\tau-\xi)}}\varphi_1(\xi)d\xi -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}}-\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}\right)\int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau-\xi}}\varphi_1(\xi)d\xi\right\}d\tau = -\left(\frac{a}{2m}\right)^2\left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}+\frac{ka}{\sqrt{\pi}}\right)\times$$

$$\times\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{\tau-\xi}}e^{-\frac{m^2\tau\xi}{a^2(\tau-\xi)}}\varphi_1(\xi)d\xi\int_\xi^t r\left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\tau}\right)\right]\frac{d\tau}{\tau^{3/2}} -$$

$$-\left(\frac{a}{2m}\right)^2\left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}}-\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}\right)\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{\tau-\xi}}\varphi_1(\xi)d\xi\int_\xi^t r\left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\tau}\right)\right]\frac{d\tau}{\tau^{3/2}} =$$

$$= -\left(\frac{a}{2m}\right)^2\left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}+\frac{ka}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^t\left\{\int_\xi^t \frac{1}{\tau^{3/2}\sqrt{t}\sqrt{\tau-\xi}}r\left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\tau}\right)\right]e^{-\frac{m^2\tau\xi}{a^2(\tau-\xi)}}d\tau\right\}\varphi_1(\xi)d\xi -$$

$$-\left(\frac{a}{2m}\right)^2\left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}}-\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}\right)\int_0^t\left\{\int_\xi^t \frac{1}{\tau^{3/2}\sqrt{t}\sqrt{\tau-\xi}}r\left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\tau}\right)\right]d\tau\right\}\varphi_1(\xi)d\xi$$

Таким образом, мы можем переписать (25) в виде

$$\mathbb{L}\varphi_1 \equiv \varphi_1(t) - \mathbb{M}\varphi_1 = \frac{C}{\sqrt{t}}, \qquad (26)$$

где

$$\mathbb{M}\varphi_1 = \left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}+\frac{ka}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{m^2 t\tau}{a^2(t-\tau)}}\varphi_1(\tau)d\tau + \left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}}-\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}\right)\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\varphi_1(\tau)d\tau +$$

$$+\left(\frac{a}{2m}\right)^2\left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}+\frac{ka}{\sqrt{\pi}}\right)\int_0^t\left\{\int_\xi^t \frac{1}{\tau^{3/2}\sqrt{t}\sqrt{\tau-\xi}}r\left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\tau}\right)\right]e^{-\frac{m^2\tau\xi}{a^2(\tau-\xi)}}d\tau\right\}\varphi_1(\xi)d\xi +$$

$$+\left(\frac{a}{2m}\right)^2\left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}}-\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}\right)\int_0^t\left\{\int_\xi^t \frac{1}{\tau^{3/2}\sqrt{t}\sqrt{\tau-\xi}}r\left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\tau}\right)\right]d\tau\right\}\varphi_1(\xi)d\xi.$$

Интегральное уравнение (26) является уравнением Вольтерра со слабой особенностью, поэтому имеет единственное решение

$$\varphi_1(t) = \mathbb{L}^{-1}\left[\frac{C}{\sqrt{t}}\right].$$

4 Классы единственности решения однородной краевой задачи

Используя соотношения (7) и (3), заключаем, что однородная задача (1)–(2) имеет наряду с тривиальным решением и нетривиальное решение с точностью до постоянного множителя в классе существенно ограниченных функций с весом, который определяется следующим образом:

$$(x+t^{1/2})^{-1}\,u(x,t)\in L_\infty(G),\ \text{т.е. } u(x,t)\in L_\infty(G;\,(x+t^{1/2})^{-1}).$$

Из изложенного выше следует, что *классы единственности* для граничной задачи (1)–(2) определяются следующим утверждением.

Теорема. Классами единственности решения для граничной задачи (1)–(2) являются

$$L_\infty\left(G;\,[x^{1+\alpha}+t^{(1+\alpha)/2}]^{-1}\right).$$

Список литературы

1 *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — С. 734.

2 *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — С. 1100.

3 *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. — Алматы: Ғылым, 2010. — С. 334.

М.Т. Космакова, М.И. Рамазанов, А.С. Токешева, А.А. Хайркулова

Бұрыштық облыстағы жылуөткізгіштік теңдеу үшін біртекті шеттік есептің жалғыз емес шешімі туралы

Мақалада туындалған бұрышты облыста жылуөткізгіштік теңдеуі үшін біртекті шекаралық есеп қарастырылды. Қойылған есеп жай қабатты потенциалдар көмегімен екінші текті псевдо-вольтерр интегралдық теңдеуіне келтірілді. Алынған интегралдық теңдеу реттеу әдісімен шешілді. Осы мақсатта интегралдық теңдеудің сипаттамалық бөлігі айқындалды. Алынған интегралдық теңдеудің өзегі айырымдық теңдеуге келтіру туралы лемма дәлелденіп, оның шешімі жазылды. Өзегі айырымдық болатын теңдеудің резольвентасы үшін бағалауы және оның шешімнің шенелгендік шарты келтірілді. Айырымдық өзекті теңдеу шешімнің айқын түрлендіруі алғашқы интегралдық теңдеуді, жалғыз шешімі болатын әлсіз ерекшелігі бар екінші текті Вольтерр теңдеуіне келтірді. Шешімі операторлық түрде жазылды. Қойылған біртекті шеттік есеп анықталды, салмақты шеілген функциялар класының тұрақты көбейткішіне дейінгі дәлелдікпен нөлдік емес шешімге ие болатыны көрсетілді. Қойылған шеттік есеп үшін шешімдердің жалғыздық класы анықталды.

M.T. Kosmakova, M.I. Ramazanov, A.S. Tokesheva, A.A. Khairkulova

On the non-uniqueness of solution to the homogeneous boundary value problem for the heat conduction equation in an angular domain

The article deals with the homogeneous boundary value problem for the heat equation in a degenerating angular domain. Using a simple layer potentials the posed problem is reduced to pseudo-Volterra integral equation of the second kind. The obtained integral equation is solved by the method of regularization. For this purpose the characteristic part of the integral equation is allocated. Non-applicability of the method of successive approximations is substantiated for its solving. We have proven the lemma on reducing the obtained integral equation to an equation with a difference kernel and have written its solution. We give an estimate for the resolvent of the equation with a difference kernel, and the conditions for boundedness of its solutions. The explicit representation of the solution to the equation with a difference kernel leads the initial integral equation to a Volterra equation of the second kind with a weak singularity, which has a unique solution. The solution is written in the operator form. It is shown that the posed homogeneous boundary value problem has a nontrivial solution up to a constant factor in the class of essentially bounded functions with defined weight. Classes of uniqueness for solution to the posed boundary value problem are defined.

References

1 Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Equations of mathematical physics*, Moscow: Nauka, 1972, p. 734.

2 Gradshtane I.S., Ryzhik I.M. *Tables of integrals, sums, rows and produscts*, Moscow: Fizmatgiz, 1963, p. 1100.

3 Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. *Loaded equations like differential equations disturbances*, Almaty: Gylym, 2010, p. 334.