УДК 517.928.1

А. Ескермесулы

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана
(E-mail: aleke1410@gmail.com)

Исследование индексов дефекта двучленного минимального дифференциального оператора четвертого порядка с нерегулярными коэффициентами

В статье исследованы индексы дефекта минимального полуограниченного сингулярного симметрического двучленного дифференциального оператора L_0, порожденного в $L_2[x_0,\infty)$, $x_0>0$, дифференциальным выражением $ly=-y^{(4)}+(q(x)+h(x))y, \quad x\in[x_0;\infty)$, где $q(x)$ удовлетворяет следующим условиям: функция $q(x)$ является дважды непрерывно-дифференцируемой, функции $q'(x)$ и $q''(x)$ не меняют знак при достаточно большом $R>0$ для $x>R$, а также выполняется $|q(x)|\to+\infty, \quad x\to+\infty$, $|q'(x)|=o(|q^{\zeta}(x)|)$ при $x\in[x_0,\infty$, где $0<\zeta<\frac{5}{4}$. В совокупности такие условия принято называть условиями Титчмарша-Левитана, а $h(x)$ – быстро осциллирующее возмущение. Хорошо известно, что если коэффициенты $q(x)$ и $h(x)$ имеют регулярное поведение при $x\to+\infty$, то уравнение $ly=\lambda y$ удается сводить к системе линейных дифференциальных уравнений с почти диагональной матрицей, а затем с помощью известной теоремы Левинсона строить асимптотику решений. В свою очередь, асимптотические формулы для фундаментальной системы решений уравнения $ly=\lambda y$ содержат важную информацию об индексах дефекта оператора L_0, о качественных спектральных свойствах самосопряженных расширений оператора L_0. В работе [1] были получены асимптотические формулы для фундаментальной системы решений уравнения $ly=\lambda y$ с коэффициентами, отличными от регулярных. В этой работе для исследования индексов дефекта оператора L_0 используются полученные в работе [1] асимптотические формулы.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, индексы дефекта, фундаментальная система решений.

Рассмотрим двучленный минимальный дифференциальный оператор L_0, порожденный в $L_2[x_0,\infty)$ дифференциальным выражением

$$ly=-y^{(4)}+(q(x)+h(x))y, \quad x\in[x_0;\infty), \quad x_0>0, \tag{1}$$

где $q(x)\in C^{(2)}[x_0;+\infty)$ – функция, удовлетворяющая условиям Титчмарша-Левитана:

a) $|q(x)|\to+\infty$ при $x\to+\infty$;

b) $q'(x)$, $q''(x)$ не меняют знак при достаточно большом $R>0$ для $|x|\geq R$;

c) $|q'(x)|=o\left(|q^{\zeta}(x)|\right)$ при $x\in[x_0;\infty)$, где $0<\zeta<\frac{5}{4}$.

$h(x)$ — быстро осциллирующая вещественная функция.

В [1] были получены асимптотические формулы для фундаментальной системы решения уравнения $ly=\lambda y$, где $\lambda\in\mathbb{C}$ и $Im\,\lambda\neq0$, при $x\to\infty$

$$y_j=\frac{1}{(q(x)-\lambda)^{\frac{3}{8}}}e^{\varepsilon_j\eta}(1+o(1)), \tag{2}$$

где

$$\eta=\int\limits_{x_0}^{x}\mu(t,\lambda)dt, \tag{3}$$

$\mu(x,\lambda)=\sqrt[4]{q(x)-\lambda}$, $j=1,\,2,\,3,\,4$, а ε_j — корни четвертой степени из единицы.

При этом $\arg\mu$ выбирается так, чтобы он был непрерывной функцией от x и

$$\lim_{x\to+\infty}\arg\mu=\begin{cases}0, & \text{если } q(x)>0;\\ \frac{\pi}{4}, & \text{если } q(x)<0.\end{cases}$$

В свою очередь, эти асимптотические формулы позволяют получить важные сведения об индексах дефекта минимального дифференциального оператора L_0, порожденного дифференциальным выражением (1). Для исследования индексов дефекта минимального дифференциального оператора L_0 мы поступим так же, как и в [2; 336].

Далее будем считать выполненным условие

$$|q(x)| \geq cx^{\frac{4}{3}+\delta}, \quad c>0, \quad \delta>0, \quad x\in[x_0,\infty), \quad x_0>0. \tag{4}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $q(x)=|q(x)|>0$ при достаточно большом x_0. Положим $\lambda=i\tau$, где τ — вещественное число. Тогда при $x\to+\infty$

$$\mu(x,\lambda)=\sqrt[4]{|q(x)|}\left(1-\frac{i\tau}{4|q(x)|}+O\left(\frac{1}{q^2(x)}\right)\right)(1+o_1(1)), \tag{5}$$

где $o_1(1)$ — вещественно.

При $\varepsilon_1=1$ из (3) следует, что $\varepsilon_1\mu(x,\lambda)=\sqrt[4]{|q(x)|}(1+o(1))$ при $x\to+\infty$. Выберем x_0 в (3) настолько большим, чтобы при $x>x_0$ было $|o(1)|<\varepsilon$, где $0<\varepsilon<1$. Тогда

$$\varepsilon_1\mu(x,\lambda)>\sqrt[4]{|q(x)|}(1-\varepsilon),$$

и потому

$$Re\,(\varepsilon_1\eta)=Re\left(\int\limits_{x_0}^{x}\mu(t,\lambda)dt\right)>(1-\varepsilon)\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt[4]{|q(t)|}dt.$$

Отсюда при $x>x_0$

$$|y_1|>|q(x)|^{-\frac{3}{8}}\exp\left\{(1-\varepsilon)\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt[4]{|q(t)|}dt\right\}(1-\varepsilon). \tag{6}$$

В силу условия c) Титчмарша-Левитана

$$\int\limits_{x_0}^{x}|q(t)|^{\frac{1}{4}}dt>c\int\limits_{x_0}^{x}|q(t)|^{\frac{1}{4}-\gamma}q'(t)dt=c\frac{|q(t)|^{\frac{5}{4}-\gamma}}{\frac{5}{4}-\gamma}\Bigg|_{x_0}^{x}=c_1|q(x)|^{\frac{5}{4}-\gamma}+c_2,$$

где c, c_1, c_2 — некоторые постоянные и c, $c_1>0$. Поэтому из (6) заключаем, что

$$|y_1|>(1-\varepsilon)|q(x)|^{-\frac{3}{8}}\exp\left\{(1-\varepsilon)\left[c_1|q(x)|^{\frac{5}{4}-\gamma}+c_2\right]\right\}\to+\infty$$

при $x\to+\infty$. Следовательно, функция y_1 не будет с интегрируемым квадратом в интервале $[x_0,+\infty)$.

Теперь рассмотрим случай при $\varepsilon_2=i$. Применяя снова формулу (5), находим

$$Re(\varepsilon_2\mu)=Re(i\mu)=\sqrt[4]{|q(x)|}\frac{\tau}{4|q(x)|}(1+o(1))=c|q(x)|^{-\frac{3}{4}}(1+o(1)),$$

где $c=\frac{\tau}{4}$.

Пусть $\tau>0$, следовательно, $c>0$. Выберем x_0 в (3) настолько большим, чтобы при $x>x_0$ было $|o(1)|<\varepsilon$, где $0<\varepsilon<1$. Тогда из (2), (5) и из условия (4) получаем

$$|y_2|^2<|q(x)|^{-\frac{3}{4}}\exp\left\{2\int\limits_{x_0}^{x}Re(\varepsilon_2\mu(t,\lambda))dt\right\}(1+\varepsilon)<$$

$$<|q(x)|^{-\frac{3}{4}}\exp\left\{2c(1+\varepsilon)\int\limits_{x_0}^{x}|q(t)|^{-\frac{3}{4}}dt\right\}(1+\varepsilon)<$$

$$< cx^{-1-\frac{3\delta}{4}} \exp\left\{2c(1+\varepsilon)\int\limits_{x_0}^{x} t^{-1-\frac{3\delta}{4}} dt\right\}(1+\varepsilon) =$$

$$= cx^{-1-\frac{3\delta}{4}} \exp\left\{2c(1+\varepsilon)t^{-\frac{3\delta}{4}}\Big|_{x_0}^{x}\right\}(1+\varepsilon) \le c_1 x^{-1-\frac{3\delta}{4}}, \quad x\to+\infty,$$

где $c>0$, $c_1>0$ – некоторые постоянные. Поэтому интеграл

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} |y_2|^2 dx$$

сходится. При $\varepsilon_4 = -i$

$$|y_4|^2 < |q(x)|^{-\frac{3}{4}} e^{-2c(1-\varepsilon)\int\limits_{x_0}^{x}|q(t)|^{-\frac{3}{4}}dt} \le cx^{-1-\frac{3\delta}{4}},$$

так что и в этом случае $y_4 \in L_2[x_0,\infty)$. Итак, при $Re(\varepsilon_2) = Re(\varepsilon_4) = 0$ обе функции y_2, y_4 будут с суммируемыми квадратами согласно условию (4).

Проверим случай при $\varepsilon_3 = -1$, т.е. $Re(\varepsilon_3) < 0$. Повторяя те же рассуждения, что и при выводе неравенства (6), найдем, что в этом случае

$$|y_3|^2 < (1+\varepsilon)|q(x)|^{-\frac{3}{4}} \exp\left\{-2(1-\varepsilon)\int\limits_{x_0}^{x}|q(t)|^{\frac{1}{4}}dt\right\} <$$

$$< (1+\varepsilon)|q(t)|^{-\frac{3}{4}} \exp\left\{-2(1-\varepsilon)\int\limits_{x_0}^{x}|q(t)|^{-\frac{3}{4}}dt\right\}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{x_0}^{x}|y_3|^2dt < \frac{1+\varepsilon}{-2(1-\varepsilon)} \exp\left\{-2(1-\varepsilon)\int\limits_{x_0}^{x}|q(t)|^{-\frac{3}{4}}dt\right\}\Bigg|_{x_0}^{x}.$$

Это выражение в любом случае имеет конечный предел при $x\to+\infty$. Таким образом, при $Re(\varepsilon_3) < 0$ функция y_3 принадлежит $L_2[x_0,\infty)$.

Таким образом, мы получили три линейно независимых решения уравнения $ly = \lambda y$, принадлежащие $L_2[x_0,\infty)$. Отсюда делаем вывод, что индексы дефекта оператора L_0 есть $(3,3)$ в случае, когда $q(x) = |q(x)| > 0$ при достаточно большом x_0.

Теперь рассмотрим случай, когда $q(x) = -|q(x)| < 0$ при достаточно большом x. Тогда, полагая, что

$$\lambda = -i\tau, \quad \nu = e^{i\frac{\pi}{4}},$$

найдем

$$\mu(x,\lambda) = \sqrt[4]{|q(x)|}\cdot\nu\left[1+\frac{i\tau}{8|q(x)|}+O\left(\frac{1}{q^2(x)}\right)\right](1+o_1(1)).$$

Положим $\varepsilon_j' = \nu\varepsilon_j, \quad j=1,2,3,4$, и обозначим числа ε_j', $j=\overline{1,4}$, таким образом, что

$$Re\,(\varepsilon_1') = Re\,(\varepsilon_2') > Re\,(\varepsilon_3') = Re\,(\varepsilon_4'),$$

тогда получим

$$\varepsilon_1' = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varepsilon_2' = \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varepsilon_3' = -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varepsilon_4' = -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Рассмотрим случай, когда $Re\,\varepsilon_1' = Re\,\varepsilon_2' = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$. При $j=1,2$

$$Re(\varepsilon_j'\mu(x,\lambda)) = Re\left(\varepsilon_j'\sqrt[4]{|q(x)|}\cdot\nu\left[1+\frac{i\tau}{8|q(x)|}+O\left(\frac{1}{q^2(x)}\right)\right](1+o_1(1))\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{|q(x)|} \pm \frac{\tau\sqrt{2}}{2}|q(x)|^{-\frac{3}{4}}\right)(1+o(1)) =$$

$$= \left(c_1\sqrt[4]{|q(x)|} + c_2|q(x)|^{-\frac{3}{4}}\right)(1+o(1)),$$

где $c_1 > 0$, c_2 — постоянные.

Выберем x_0 в (3) настолько большим, чтобы при $x > x_0$ было $|o(1)| < \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда из (2), (5) и из условия (4) получаем

$$|y_j|^2 > |q(x)|^{-\frac{3}{4}} \exp\left\{2\int\limits_{x_0}^{x} Re(\varepsilon'_j\mu(t,\lambda))dt\right\}(1-\varepsilon) >$$

$$> |q(x)|^{-\frac{3}{4}} \exp\left\{2(1-\varepsilon)\int\limits_{x_0}^{x}\left(c_1\sqrt[4]{|q(x)|} + c_2|q(t)|^{-\frac{3}{4}}\right)dt\right\}(1-\varepsilon) >$$

$$> cx^{-1-\frac{3\delta}{4}} \exp\left\{2(1-\varepsilon)\int\limits_{x_0}^{x}\left(c_1t^{\frac{1}{3}+\frac{\delta}{4}} + c_2t^{-1-\frac{3\delta}{4}}\right)dt\right\}(1-\varepsilon) =$$

$$= cx^{-1-\frac{3\delta}{4}} \exp\left\{2(1-\varepsilon)\left(c_1t^{\frac{4}{3}+\frac{\varepsilon}{4}}\Big|_{x_0}^{x} + c_2t^{-\frac{3\delta}{4}}\Big|_{x_0}^{x}\right)\right\}(1-\varepsilon), \quad x \to +\infty,$$

где $c > 0$, $c_1 > 0$, c_2 — некоторые постоянные. В последнем выражении показатель экспоненты стремится к плюс бесконечности при $x \to \infty$. Поэтому интеграл

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} |y_j|^2 dx$$

расходится. Следовательно, при $Re\,\varepsilon'_1 = Re\,\varepsilon'_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ функция y_j $(j = 1, 2)$ не принадлежит $L_2[x_0, \infty)$.

Проверим случай, когда $Re\,\varepsilon'_3 = Re\,\varepsilon'_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$. При $j = 3, 4$

$$Re(\varepsilon'_j\mu(x,\lambda)) = Re\left(\varepsilon'_j\sqrt[4]{|q(x)|}\cdot\nu\left[1 + \frac{i\tau}{8|q(x)|} + O\left(\frac{1}{q^2(x)}\right)\right](1+o_1(1))\right) =$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{|q(x)|} \pm \frac{\tau\sqrt{2}}{2}|q(x)|^{-\frac{3}{4}}\right)(1+o(1)) =$$

$$= \left(-c_1\sqrt[4]{|q(x)|} + c_2|q(x)|^{-\frac{3}{4}}\right)(1+o(1)),$$

где $c_1 > 0$, c_2 — постоянные.

Выберем x_0 в (3) настолько большим, чтобы при $x > x_0$ было $|o(1)| < \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда из (2), (5) и из условия (4) получаем

$$|y_j|^2 < |q(x)|^{-\frac{3}{4}} \exp\left\{2\int\limits_{x_0}^{x} Re(\varepsilon'_j\mu(t,\lambda))dt\right\}(1+\varepsilon) <$$

$$< |q(x)|^{-\frac{3}{4}} \exp\left\{2(1+\varepsilon)\int\limits_{x_0}^{x}\left(-c_1\sqrt[4]{|q(x)|} + c_2|q(t)|^{-\frac{3}{4}}\right)dt\right\}(1+\varepsilon) >$$

$$> cx^{-1-\frac{3\delta}{4}} \exp\left\{2(1+\varepsilon)\int\limits_{x_0}^{x}\left(-c_1t^{\frac{1}{3}+\frac{\delta}{4}} + c_2t^{-1-\frac{3\delta}{4}}\right)dt\right\}(1+\varepsilon) =$$

$$= cx^{-1-\frac{3\delta}{4}} \exp\left\{2(1+\varepsilon)\left(-c_1 t^{\frac{4}{3}+\frac{\varepsilon}{4}}\Big|_{x_0}^{x} + c_2 t^{-\frac{3\delta}{4}}\Big|_{x_0}^{x}\right)\right\}(1+\varepsilon), \quad x \to +\infty,$$

где $c > 0$, $c_1 > 0$, c_2 — некоторые постоянные. В последнем выражении первое слагаемое степени экспоненты стремится к минус бесконечности, а второе слагаемое — к нулю при $x \to \infty$. Поэтому интеграл

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} |y_j|^2 dx$$

сходится. Следовательно, при $Re\,\varepsilon_3' = Re\,\varepsilon_4' = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ функция $y_j (j = 3, 4)$ принадлежит $L_2[x_0, \infty)$.

Таким образом, мы получили следующий результат: индексы дефекта оператора L_0, порожденного дифференциальным выражением (1), есть:

a) (3,3), если $q(x) > 0$ при $x \to +\infty$;

b) (2,2), если $q(x) < 0$ при $x \to +\infty$.

Автор выражает признательность профессору Я.Т. Султанаеву за ценные замечания при обсуждении работы, учет которых способствовал улучшению данной статьи.

Список литературы

1 *Валеев Н.Ф., Ескермесулы А., Назирова Э.А.* Об асимптотике решений сингулярных дифференциальных уравнений четвертого порядка с нерегулярными коэффициентами // Мат. журн. ИМММ КН МОН РК. — 2016. — Т. 16. — № 1. — С. 58–76.

2 *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — С. 526.

Ә. Ескермесұлы

Регулярлық емес коэффициенттері бар төртінші ретті екі мүшелі минималды дифференциалдық оператордың ақау индексін зерттеу

Мақалада $L_2[x_0, \infty)$-де, $x_0 > 0$ $ly = -y^{(4)} + (q(x) + h(x))y$, $x \in [x_0; \infty)$, дифференциалдық өрнегімен туындаған минималды жартылай шенелмеген сингулярлық симметриялық екімүшелі L_0 дифференциалдық операторының ақау индекстері зерттелді, мұндағы — $q(x)$ келесі шарттарды қанағаттандырады: $q(x)$ екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функция; $q'(x)$ және $q''(x)$ функциялары мейлінше үлкен $R > 0$ үшін $x > R$ болғанда таңбаларын өзгертпейді, сонымен қатар $|q(x)| \to +\infty, \quad x \to +\infty$, $|q'(x)| = o(|q^{\zeta}(x)|)$, $x \in [x_0, \infty$, мұндағы $0 < \zeta < \frac{5}{4}$. шарттары орындалады. Бұл шарттарды біртұтас күйінде Титчмарш-Левитан шарттары деп атау қабылданған, ал $h(x)$ — жылдам тербелетін қоздырғыш. Егер $x \to +\infty$ болғанда $q(x)$ және $h(x)$ функциялары қалыпты өзгерісте болса, онда $ly = \lambda y$ теңдеуін дерлік диагональді матрицалы дифференциалдық теңдеулер жүйесіне келтіріп, сонан соң белгілі Левинсон теоремасының көмегімен шешімдерінің асимптотикасын құруға болатыны бұрыннан жақсы таныс. Өз кезегінде, $ly = \lambda y$ теңдеуінің фундаменталдық шешімдер жүйесі үшін құрылған асимптотикалық формулалар операторының ақау индекстері туралы, L_0 операторының өзіне түйіндес кеңейтулерінің сапалы спектралдық қасиеттері туралы маңызды ақпарат жинайды. Дегенмен осы уақытқа дейін регулярлықтан өзгеше коэффициенттері бар, асимптотикалық формулалары алынған дифференциалдық операторлардың кең тараған кластары анықталмаған еді. [1] жұмысында регулярлықтан өзгеше коэффициенттері бар $ly = \lambda y$ теңдеуінің фундаменталдық шешімдер жүйесі үшін асимптотикалық формулалар алынды. Біздің бұл жұмысымызда ақау индекстерін зерттеу үшін [1] жұмыста алынған асимптотикалық формулалар қолданылады.

A.Yeskermessuly

Investigation of the deficiency indices of the minimum two-term fourth-order differential operator with irregular coefficients

This paper investigates the deficiency indices of symmetric singular Nonsemibounded minimum two-term differential operator L_0 generated in $L_2[x_0,\infty), x_0>0,$ differential expression $ly=-y^{(4)}+(q(x)+h(x))y$, $x\in[x_0;\infty)$, which $q(x)$ is satisfies the following conditions: the function $q(x)$ is twice continuously differentiable function; $q'(x)$ and $q''(x)$ do not change the sign for $R>0$ a sufficiently large $x>R$, as well as performed $|q(x)|\to+\infty, \quad x\to+\infty$, $|q'(x)|=o(|q^{\zeta}(x)|)$ for $x\in[x_0,\infty$, where $0<\zeta<\frac{5}{4}$. Taken together, these conditions are called the terms of the Titchmarsh-Levitan and $h(x)$ is a fast oscillatory perturbation. It is well known that if the coefficients $q(x)$ and $h(x)$ have a regular behavior when $x\to+\infty$ then the equation $ly=\lambda y$ can be reduced to a system of linear differential equations with almost a diagonal matrix, and then by using the well known Levinson theorem to construct the asymptotic behavior of solutions. In turn, the asymptotic formulas for the fundamental system of solutions of the equation $ly=\lambda y$ contain important information about the defect indices of the operator L_0 and on the quality of the spectral properties of self-adjoint extensions of the operator L_0. In [1] we obtained the asymptotic formulas for fundamental system of solutions of equations $ly=\lambda y$ with coefficients different from regular ones. In this work we used the asymptotic formulas obtained in [1] for investigating defect indices of the operator L_0.

References

1 Valeev N.F., Yeskermessuly A., Nazirova E.A. *Mathematical Journal* IMMM SC MES RK, 2016, 16, 1, p. 58–76.

2 Naymark M.A. *Linear differential operators,* Moscow: Nauka, 1969, p. 526.