УДК 517.956

Н.Т.Орумбаева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: OrumbayevaN@mail.ru)

Об алгоритмах нахождения решения начально-краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных

В статье исследована полупериодическая краевая задача для системы гиперболических уравнений со смешанной производной. Предложен алгоритм нахождения приближенного решения данной задачи. Автором приведен пример, где реализован данный алгоритм.

Ключевые слова: гиперболические уравнения, разбиение, алгоритм, краевая задача.

На $\overline{\Omega} = [0, \omega] \times [0, T]$ рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega}; \tag{1}$$

$$u(0,t) = \psi(t), \quad t \in [0,T]; \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \quad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где $(n \times n)$ — матрица $A(x,t), C(x,t)$, n-вектор-функция $f(x,t)$ непрерывны на $\overline{\Omega}$, n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно-дифференцируема на $[0,T]$, удовлетворяет условиям $\psi(0) = \psi(T)$, $\|u(x,t)\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |u_i(x,t)|$.

Периодические краевые задачи для систем гиперболических уравнений различными методами были исследованы многими авторами. В [1] более общая нелокальная задача исследовалась методом введения функциональных параметров. Были установлены достаточные условия однозначной разрешимости и предложен алгоритм нахождения ее решения.

Во [2] квазилинейная периодическая краевая задача для систем гиперболических уравнений сводится к эквивалентной задаче, состоящей из семейства периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и функционального соотношения. При решении семейства периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений применяется метод параметризации [3]. Применение такого подхода позволило установить новые признаки однозначной разрешимости квазилинейной периодической краевой задачи и предложить конструктивный алгоритм нахождения ее приближенного решения. Преимуществом нового алгоритма от ранее предложенного является то, что нет необходимости нахождения решения задачи Коши на каждом его шаге.

В настоящей работе рассматривается полупериодическая краевая задача для системы линейных гиперболических уравнений. Для ее исследования интервал $[0, \omega]$ разбивается на K частей и в каждой области применяется метод параметризации. Предложенный метод нахождения приближенного решения полупериодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений иллюстрируется примером.

По шагу $m > 0, h > 0 : Km = \omega, Nh = T$ произведем разбиение

$$[0,\omega) = \bigcup_{i=1}^{K}[(i-1)m, im); \quad [0,T) = \bigcup_{j=1}^{N}[(j-1)h, jh); \quad K \geq 2; \quad N \geq 2.$$

При этом область Ω разбивается на $K\times N$ частей. Через $u_{ij}(x,t)$ обозначим сужение функции $u(x,t)$ на $\Omega_{ij}=[(i-1)m,im)\times[(j-1)h,jh);\quad i=\overline{1,K};\quad j=\overline{1,N}$. Тогда задача (1)–(3) будет эквивалентна задаче

$$\frac{\partial^2 u_{ij}(x,t)}{\partial x\partial t}=A(x,t)\frac{\partial u_{ij}(x,t)}{\partial x}+C(x,t)u_{ij}(x,t)+f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega_{ij}; \tag{4}$$

$$u_{1j}(0,t)=\psi(t),\quad t\in[(j-1)h,jh); \tag{5}$$

$$\lim_{x\to dm-0}u_{dj}(x,t)=u_{d+1,j}(dm,t),\quad j=\overline{1,N},\quad d=\overline{1,K-1}; \tag{6}$$

$$u_{i1}(x,0)=\lim_{t\to T-0}u_{iN}(x,t),\quad x\in[(i-1)m,im),\quad i=\overline{1,K}, \tag{7}$$

где соотношение (6)— условие склеивания функций $u(x,t)$ во внутренних линиях разбиения по x. Для нахождения решения задачи вводим новую неизвестную функцию

$$v_{ij}(x,t)=\frac{\partial u_{ij}(x,t)}{\partial x},\quad i=\overline{1,K},\quad j=\overline{1,N}$$

и задачу (4)-(7) запишем в виде

$$\frac{\partial v_{ij}}{\partial t}=A(x,t)v_{ij}+C(x,t)u_{ij}(x,t)+f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega_{ij}; \tag{8}$$

$$\lim_{x\to sh-0}u_{is}(x,t)=u_{i,s+1}(x,sh),\quad i=\overline{1,K},\quad s=\overline{1,N-1}; \tag{9}$$

$$v_{i1}(x,0)=\lim_{t\to T-0}u_{iN}(x,t),\quad x\in[(i-1)m,im),\quad i=\overline{1,K}; \tag{10}$$

$$u_{1j}(0,t)=\psi(t),\quad t\in[(j-1)h,jh); \tag{11}$$

$$u_{d+1,j}(x,t)=\lim_{x\to dm-0}u_{dj}(x,t)+\int\limits_{dm}^{x}v_{d+1,j}(\xi,t)d\xi,\quad j=\overline{1,N},\quad d=\overline{1,K-1}, \tag{12}$$

где соотношение (9)— условие склеивания функций $v(x,t)$ во внутренних линиях разбиения по t.

Через $\lambda_{ij}(x)$ обозначим значение функции $v_{ij}(x,t)$ при $t=(j-1)h$, т.е. $\lambda_{ij}(x)=v_{ij}(x,(j-1)h)$ и сделаем замену $\widetilde{v}_{ij}(x,t)=v_{ij}(x,t)-\lambda_{ij}(x),\quad i=\overline{1,K};\quad j=\overline{1,N}$. Получим эквивалентную краевую задачу с неизвестными функциями $\lambda_{ij}(x)$

$$\frac{\partial\widetilde{v}_{ij}}{\partial t}=A(x,t)\widetilde{v}_{ij}+A(x,t)\lambda_{ij}(x)+C(x,t)u_{ij}(x,t)+f(x,t);$$

$$\widetilde{v}_{ij}(x,(j-1)h)=0,\quad (x,t)\in\Omega_{ij},\quad i=\overline{1,K},\quad j=\overline{1,N}; \tag{13}$$

$$\lambda_{i1}(x)-\lambda_{iN}(x)-\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_{iN}(x,t)=0; \tag{14}$$

$$\lambda_{is}(x)+\lim_{t\to sh-0}\widetilde{v}_{is}(x,t)-\lambda_{i,s+1}(x)=0,\quad s=\overline{1,N-1}; \tag{15}$$

$$u_{1j}(0,t)=\psi(t),\quad t\in[(j-1)h,jh); \tag{16}$$

$$u_{d+1,j}(x,t)=\lim_{x\to dm-0}u_{dj}(x,t)+\int\limits_{dm}^{x}\widetilde{v}_{d+1,j}(\xi,t)d\xi+\int\limits_{dm}^{x}\lambda_{d+1,j}(\xi)d\xi,\quad j=\overline{1,N},\quad d=\overline{1,K-1}. \tag{17}$$

Последняя задача выгодно отличается тем, что здесь появились начальные условия, которые позволяют определить $\widetilde{v}_{ij}(x,t)$ из интегрального уравнения. Задача (11),(12) при фиксированных

$\lambda_r(x), u_r(x,t)$ является однопараметрическим семейством задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, где $x \in [0,\omega]$ и эквивалентна интегральному уравнению

$$\widetilde{v}_{ij}(x,t) = \int\limits_{(j-1)h}^{t} A(x,\tau)\widetilde{v}_{ij}(x,\tau)d\tau + \int\limits_{(j-1)h}^{t} A(x,\tau)d\tau \cdot \lambda_{ij}(x) +$$

$$+ \int\limits_{(j-1)h}^{t} \left(C(x,\tau)u_{ij}(x,\tau) + f(x,\tau)\right) d\tau \quad i = \overline{1,K}, \quad j = \overline{1,N}. \tag{18}$$

Переходя в правой части уравнения (18) к пределу при $t \to jh - 0$ и подставляя их в уравнения (14),(15), для неизвестных функций $\lambda_{ij}(x), \quad i = \overline{1,K}, \quad j = \overline{1,N}$ получим систему функциональных уравнений

$$\lambda_{i1}(x) - \lambda_{iN}(x) - \lambda_{iN}(x) \int\limits_{(N-1)h}^{T} A(x,\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{(N-1)h}^{T} A(x,\tau)\widetilde{v}_{iN}(x,\tau)d\tau + \int\limits_{(N-1)h}^{T} \left(C(x,\tau)u_{iN}(x,\tau) + f(x,\tau)\right) d\tau, \quad i = \overline{1,K}; \tag{19}$$

$$\lambda_{is}(x) + \lambda_{is}(x) \int\limits_{(s-1)h}^{sh} A(x,\tau)d\tau - \lambda_{i,s+1}(x) =$$

$$= - \int\limits_{(s-1)h}^{sh} A(x,\tau)\widetilde{v}_{is}(x,\tau)d\tau - \int\limits_{(s-1)h}^{sh} \left(C(x,\tau)u_{is}(x,\tau) + f(x,\tau)\right) d\tau, \quad i = \overline{1,K}, \quad s = \overline{1,N-1}. \tag{20}$$

Для нахождения системы из трех функций $\{\lambda_{ij}(x), \widetilde{v}_{ij}(x,t), u_{ij}(x,t)\}$, $i = \overline{1,K}$, $j = \overline{1,N}$, имеем замкнутую систему, состоящую из уравнений (17)–(20).

За начальное приближение задачи (13)-(17) возьмем $\widetilde{v}_{1j}^{(0)}(x,t) = 0,\ u_{1j}^{(0)}(x,t) = \psi(t),\ j = \overline{1,N},$ и последующие решения найдем по следующему алгоритму.

Шаг 1. При $\widetilde{v}_{1j}^{(0)}(x,t) = 0,\ u_{1j}^{(0)}(x,t) = \psi(t)$ из уравнений (19) и (20) находим $\lambda_{1j}^*(x),\ j = \overline{1,N}$. Используя (18) и найденные $\lambda_{1j}^*(x)$, определим $\widetilde{v}_{1j}^*(x,t)$. Далее из уравнения (16), (17) получим

$$u_{1j}^*(x,t), j = \overline{1,N}.$$

Шаг 2. При $\widetilde{v}_{2j}^{(0)}(x,t) = 0$, $u_{2j}^{(0)}(x,t) = \lim\limits_{x \to m-0} u_{1j}^*(x,t)$ из уравнений (19) и (20) находим $\lambda_{2j}^*(x)$, $j = \overline{1,N}$. Используя (18) и найденные $\lambda_{2j}^*(x)$, определим $\widetilde{v}_{2j}^*(x,t)$. Из уравнения (17) получим

$$u_{2j}^*(x,t),\ j = \overline{1,N}.$$

Шаг K. При $\widetilde{v}_{Kj}^{(0)}(x,t) = 0,\ u_{Kj}^{(0)}(x,t) = \lim\limits_{x \to (K-1)m-0} u_{K-1,j}^*(x,t)$ из уравнений (19) и (20) находим $\lambda_{Kj}^*(x),\ j = \overline{1,N}$. Используя (18) и $\lambda_{Kj}^*(x)$, определим $\widetilde{v}_{Kj}^*(x,t)$. Далее из уравнения (17) получим

$$u_{Kj}^*(x,t), j = \overline{1,N}.$$

Пример. На $\overline{\Omega} = [0,1] \times [0,1]$ рассмотрим линейную полупериодическую краевую задачу для гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = (x+t)\frac{\partial u}{\partial x} + u(x,t) - 2x - t^2; \tag{21}$$

$$u(0,t) = t(t-1), \quad u(x,0) = u(x,1), \quad x \in [0,1], \quad t \in [0,1], \tag{22}$$

где $u(x,t)$ — двумерная вектор-функция. Пусть $m = \dfrac{1}{2}, h = \dfrac{1}{2}, N = 2$. Для нахождения решения задачи введем новую неизвестную функцию $v_{ij}(x,t) = \dfrac{\partial u_{ij}(x,t)}{\partial x}, \quad i,j = 1,2$. Обозначим значение функций $\lambda_{ij}(x) = v_{ij}(x,(j-1)h), \quad \Omega_{ij} = \left[\dfrac{i-1}{2}, \dfrac{i}{2}\right) \times \left[\dfrac{j-1}{2}, \dfrac{j}{2}\right)$ и в каждой области произведем замену $\widetilde{v}_{ij}(x,t) = v_{ij}(x,t) - \lambda_{ij}(x), i,j = 1,2$. Тогда получим краевую задачу с параметром

$$\frac{\partial \widetilde{v}_{ij}}{\partial t} = (x+t)\widetilde{v}_{ij} + t\lambda_{ij}(x) + u_{ij}(x,t) - 2x - t^2, \quad \widetilde{v}_{ij}(x,0) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_{ij}, \quad i,j = 1,2; \tag{23}$$

$$\lambda_{i1}(x) - \lambda_{i2}(x) - \lim_{t \to 1-0} \widetilde{v}_{i2}(x,t) = 0, \quad i = 1,2; \tag{24}$$

$$\lambda_{i1}(x) + \lim_{t \to \frac{1}{2}-0} \widetilde{v}_{i1}(x,t) - \lambda_{i,2}(x) = 0, \quad i = 1,2; \tag{25}$$

$$u_{1j}(x,t) = t(t-1) + \int_0^x (\widetilde{v}_{1j}(\xi,t) + \lambda_{1j}(\xi))d\xi, \quad j = 1,2; \tag{26}$$

$$u_{2j}(x,t) = \lim_{x \to \frac{1}{2}-0} u_{1j}(x,t) + \int_{\frac{1}{2}}^x (\widetilde{v}_{2j}(\xi,t) + \lambda_{2j}(\xi))d\xi, \quad j = 1,2. \tag{27}$$

Последняя задача выгодно отличается тем, что здесь появились начальные условия, которые позволяют определить $\widetilde{v}_{ij}(x,t)$ из интегрального уравнения

$$\widetilde{v}_{ij}(x,t) = \int_{\frac{j-1}{2}}^t (x+\eta)\widetilde{v}_{ij}(x,\eta)d\eta + \lambda_{ij}(x)\int_{\frac{j-1}{2}}^t (x+\eta)d\eta + \int_{\frac{j-1}{2}}^t (u_{ij}(x,\eta) - 2x - \eta^2)d\eta, \quad i,j = 1,2. \tag{28}$$

Переходя к пределу $\lim\limits_{t \to 1-0} \widetilde{v}_{i2}(x,t), \lim\limits_{t \to \frac{1}{2}-0} \widetilde{v}_{i1}(x,t), i = 1,2$, и подставляя эти пределы в уравнения (24), (25), получаем систему уравнений относительно функциональных параметров $\lambda_{11}(x)$, $\lambda_{12}(x)$, $\lambda_{21}(x)$, $\lambda_{22}(x)$

$$\lambda_{11}(x) - \lambda_{12}(x) - \lambda_{12}(x)\int_{1/2}^1 (x+\tau)d\tau = \int_{1/2}^1 (x+\tau)\widetilde{v}_{12}(x,\tau)d\tau + \int_{1/2}^1 \left(u_{12}(x,\tau) - 2x - \tau^2\right)d\tau; \tag{29}$$

$$\lambda_{21}(x) - \lambda_{22}(x) - \lambda_{22}(x)\int_{1/2}^1 (x+\tau)d\tau = \int_{1/2}^1 (x+\tau)\widetilde{v}_{22}(x,\tau)d\tau + \int_{1/2}^1 \left(u_{22}(x,\tau) - 2x - \tau^2\right)d\tau; \tag{30}$$

$$\lambda_{11}(x) + \lambda_{11}(x)\int_0^{1/2} (x+\tau)d\tau - \lambda_{12}(x) = -\int_0^{1/2} (x+\tau)\widetilde{v}_{11}(x,\tau)d\tau - \int_0^{1/2} \left(u_{11}(x,\tau) - 2x - \tau^2\right)d\tau; \tag{31}$$

$$\lambda_{21}(x)+\lambda_{21}(x)\int\limits_0^{1/2}(x+\tau)d\tau-\lambda_{22}(x)=-\int\limits_0^{1/2}(x+\tau)\widetilde{v}_{21}(x,\tau)d\tau-\int\limits_0^{1/2}\left(u_{21}(x,\tau)-2x-\tau^2\right)d\tau. \quad (32)$$

За начальное приближение задачи (23)-(27) возьмем $\widetilde{v}_{11}^{(0)}(x,t)$, $\widetilde{v}_{21}^{(0)}(x,t)$, $u_{11}^{(0)}(x,t)$, $u_{12}^{(0)}(x,t)$ и последующие решения найдем по следующему алгоритму:

Шаг 1. При $\widetilde{v}_{11}^{(0)}(x,t)=0$, $\widetilde{v}_{21}^{(0)}(x,t)=0$, $u_{11}^{(0)}(x,t)=t(t-1)$, $u_{12}^{(0)}(x,t)=t(t-1)$ из уравнений (29) и (31) находим $\lambda_{11}^*(x)$, $\lambda_{12}^*(x)$. Тогда

$$\lambda_{11}^*(x)=\frac{4x+1}{8}\cdot\frac{32x^2+148x+35}{16x^2+80x+35}-x-\frac{9}{24},\quad \lambda_{12}^*(x)=\frac{32x^2+148x+35}{16x^2+80x+35};$$

$$\max_{x\in[0,1/2)}\|\lambda_{11}^*(x)\|=\frac{121}{79},\quad \max_{x\in[0,1/2)}\|\lambda_{12}^*(x)\|=\frac{117}{79}.$$

Используя (29) и найденные $\lambda_{11}^*(x)$, $\lambda_{12}^*(x)$, определим $\widetilde{v}_{11}^*(x,t),\widetilde{v}_{12}^*(x,t)$

$$\widetilde{v}_{11}^*(x,t)=\frac{121}{79}\left(xt-\frac{t^2}{2}\right)-\frac{t^2}{2}-2xt;\quad \widetilde{v}_{12}^*(x,t)=\frac{117}{79}\left(xt-\frac{t^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\right)-\frac{t^2}{2}-2xt+\frac{1}{8}+x.$$

Далее из уравнения (26) получим $u_{11}^*(x,t),u_{12}^*(x,t)$

$$u_{11}^*(x,t)=t(t-1)+\frac{121x}{79}-\frac{xt(200t+37x)}{158};\quad u_{12}^*(x,t)=t(t-1)+\frac{117x}{79}-\frac{98t^2x}{79}-\frac{41tx^2}{158}+\frac{41x^2}{316}+\frac{49x}{158}.$$

Шаг 2. При $\widetilde{v}_{21}^{(0)}(x,t)=0$, $\widetilde{v}_{22}^{(0)}(x,t)=0$;

$$u_{21}^{(0)}(x,t)=\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}u_{11}^*(x,t)=\frac{484-669t+232t^2}{632},\quad u_{22}^{(0)}(x,t)=\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}u_{12}^*(x,t)=\frac{1173-1346t+480t^2}{1264}$$

из уравнений (30) и (32) находим $\lambda_{21}^*(x)$, $\lambda_{22}^*(x)$. Тогда

$$\lambda_{21}^*(x)=\frac{60672x^2+274588x-23307}{1896(16x^2+80x+35)};\quad \lambda_{22}^*(x)=\frac{60672x^2+264908x-11341}{1896(16x^2+80x+35)};$$

$$\max_{x\in[0,1/2)}\|\lambda_{11}^*(x)\|=\frac{311958}{248376},\quad \max_{x\in[0,1/2)}\|\lambda_{12}^*(x)\|=\frac{314239}{248376}.$$

Используя (28) и найденные $\lambda_{21}^*(x)$, $\lambda_{22}^*(x)$, определим $\widetilde{v}_{21}^*(x,t),\widetilde{v}_{22}^*(x,t)$

$$\widetilde{v}_{21}^*(x,t)=\frac{t(-52400t^2+24518t-184799x+190212)}{248367};$$

$$\widetilde{v}_{22}^*(x,t)=\frac{(2t-1)(51352t^2+801t+182513x+230094)}{496752}.$$

Далее из уравнения (27) получим $u_{21}^*(x,t),u_{22}^*(x,t)$. Таким образом, решения данной задачи

$$u_{11}^*(x,t)=t(t-1)+\frac{121x}{79}-\frac{xt(200t+37x)}{158},\quad x\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\quad t\in\left[0,\frac{1}{2}\right);$$

$$u_{12}^*(x,t)=t(t-1)+\frac{117x}{79}-\frac{98t^2x}{79}-\frac{41tx^2}{158}+\frac{41x^2}{316}+\frac{49x}{158},\quad x\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\quad t\in\left[\frac{1}{2},1\right);$$

$$u_{21}^*(x,t)=\frac{1}{1987008}[-209600t^3(2x-1)+8t^2(24518x+78917)+$$

$$+t(-739196x^2+1521696x-2679385)+4(623906x+68471)], \quad x\in\left[\frac{1}{2},1\right), \quad t\in\left[\frac{1}{2},0\right);$$

$$u_{22}^{*}(x,t)=\frac{1}{3974016}[2276889+3187072x-730052x^2+410816t^3(2x-1)-$$

$$-40t^2(-42703+9950x)+2t(-3217199+1837548x+730052x^2)], \quad x\in\left[0,\frac{1}{2}\right), \quad t\in\left[\frac{1}{2},1\right).$$

Список литературы

1 *Асанова А.Т., Джумабаев Д.С.* Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41. — № 3. — С.337–346.

2 *Орумбаева Н.Т.* Об одном алгоритме нахождения решения периодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений // Сибирские электронные математические известия. — 2013. — Т. 10. — [ЭР]. Режим доступа: http://semr.math.nsc.ru/conru.html.

3 *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычислительной мат. и мат. физики. — 1989. — Т. 29. — № 1. — С. 50–66.

Н.Т. Орынбаева

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептің шешімін табу алгоритмдері туралы

Мақалада аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін жартылай периодты шеттік есеп зерттелген. Берілген есептің жуық шешімін табу алгоритмі ұсынылған және бұл алгоритмді іске асыратын мысал келтірілген.

N.T.Orumbayeva

Algorithms for finding a solution to the initial boundary value problems for differential equations in partial derivatives

In this paper we investigate the floor periodic boundary value problem for a system of hyperbolic equations with mixed derivative. An algorithm for finding an approximate solution of this problem. The article is an example, where the algorithm is implemented.

References

1 Assanova A.T., Dzhumabaev D.S. *Differential equations*, 2005, 41, 3, p. 337–346.

2 Orumbayeva N.T. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2013, 10, [ER]. Access mode: semr.math.nsc.ru/conru.html

3 Dzhumabaev D.S. *Journal Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1989, 29, 1, p. 50–66.