УДК 531.88

Т.Х.Макажанова, А.А.Муканов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: amlig2014@mail.ru)

О собственных множествах суперлинейных отображений

В статье получена теорема существования собственных множеств у суперлинейных точечно-множественных отображений, определенных на конусах упорядочного нормированного пространства. Достаточными условиями являются непрерывность отображения на множестве выпуклых слабых компактов конуса и ограниченность на следе единичного шара пространства.

Ключевые слова: суперлинейное отображение, выпуклый конус, двойственность Минковского.

Пусть X — вещественное нормированное пространство с нормой $\|\|$. Для $M \subset X$ будем использовать обозначения: $\int M$ — внутренность; $\overline{M}$ — замыкание множества M. Через X' обозначим сопряженное к X пространство линейных непрерывных функционалов с нормой $\|f\| = sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}$; единичный шар в X, $S = \{x \in X :\| x \|\leq 1\}$ — единичный шар в X; $S^* = \{f \in X' :\| f \|\leq 1\}$ — единичный шар в X'.

В пространствах X и X' топологию поточечной сходимости [1] назовем «слабой» и обозначим $\sigma(X, X')$ и $\sigma(X', X)$ соответственно.

Подмножество $K \subset X$ назовем выпуклым конусом, если выполнены условия

1) $x \in K, \alpha \geq 0 \Longrightarrow \alpha x \in K$;

2) $x, y \in K \Longrightarrow x + y \in K$.

Конус назовем телесным, если int $K \neq \emptyset$. Конус называется выступающим, если $K \cap (-K) = 0$.

Если $K - K = X$, то конус K называется воспроизводящим. Везде далее, если не оговорено противное, под конусами будем понимать выпуклые выступающие воспроизводящие телесные конусы. Пусть K — конус в X. Тогда для бинарного отношения $x \geq y \Longleftrightarrow x - y \in K$

1) $x \geq x, \forall x \in K$;

2) $x \geq y, y \geq x \Longrightarrow x = y$;

3) $x \geq y, y \geq z \Longrightarrow x \geq z$.

Тем самым в X мы ввели отношение порядка, согласованное с линейной структурой X, т.е. из $x \geq y$ следует $\alpha x \geq \alpha y, \forall \alpha \geq 0, x + z \geq y + z, \forall z \in X$.

С учетом этого назовем X упорядоченным нормированным пространством (УНП), конус K будет конусом положительных элементов: $K = \{x \in X : x \geq 0\}$.

Далее везде порядковая терминология заимствована из [2]. Точка $e \in X, e > 0$ называется единицей, если $\forall x \in X, \exists \alpha > 0 : -\alpha e \leq x \leq \alpha e$. Множество единиц конуса K совпадает с int. Если конус K замкнут, то УНП X будет архимедовым. Из архимедовости УНП X получаем, что для любой единицы e-функция $\| x \|_e = inf\{\alpha > 0 : -\alpha e \leq x \leq \alpha e\}, \forall x \in X$ будет нормой в X, называемой e-нормой. Для любой e-нормы $\exists C > 0 :\| x \|_e \leq C \| x \|, \forall x \in X$.

Конусом линейных положительных функционалов, сопряженным к конусу K, назовем множество $K^* = \{f \in X' : f(x) \geq 0, \forall x \in K\}$.

Пусть X — УНП, под ограниченными в X будем понимать подмножества, ограниченные в смысле нормы в X. При рассмотрении сублинейных функционалов, определенных на конусе K, терминология и результаты заимствованы из [3].

Конечный вещественный функционал p, заданный на конусе K в УНП X, называется сублинейным, если он

1) положительно однороден, т.е. $p(\alpha x) = \alpha p(x), \alpha \geq 0, x \in K$;

2) субаддитивен, т.е. $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2), \forall x_1, x_2 \in K$;

3) полунепрерывен снизу.

Множество сублинейных функционалов на K обозначим $P(K)$.

Отметим, что сублинейный функционал, заданный на всем X и ограниченный на единичном шаре S, будет непрерывен в нулевой точке, а значит и на всем X. Как следствие получаем, что достаточным условием непрерывности сублинейного функционала на K является его ограниченность на множестве $S \cap K$.

Будем говорить, что сублинейный функционал p на конусе K монотонен, если $p(x_1) \geq p(x_2)$ для $x_1 \geq x_2$. Множество сублинейных монотонных функционалов на К обозначим $P^m(K)$.

Отметим, что в силу того, что $K = \{x \in X : x \geq 0\}$, то $p(x) \geq 0, \forall p \in P^m(K), \forall x \in K$.

Предложение 1. Пусть $p \in P^m(K), e \in intK \Longrightarrow p(e) > 0, \forall p \neq 0$.

Доказательство. Так как $e \in intK$, т.е. E-единица, то $\forall x \in K, \exists \alpha > 0 : x \leq \alpha e$. В силу монотонности p имеем $0 \leq p(x) \leq \alpha p(e)$ и если $p(e) = 0$, то $p = 0$.

Используем из [3] необходимые сведения теории двойственности Минковского. Пусть P — сублинейный функционал на конусе $K; Hp = \{f \in X' : f(x) \leq p(x), \forall x \in K\}$ — множество опорных множеств функционала p.

Из теоремы Хермандера следует, что для любого сублинейного функционала $Hp \neq \emptyset$ и $p(x) = sup_{f \in Hp} f(x), \forall x \in K$.

Пусть $H(K)$ — совокупность опорных множеств к функционалам из $P(K)$. Вводя в $P(K)$ обычным образом операции сложения и умножения на неотрицательные числа, а в $H(K)$ — обычную операцию умножения на неотрицательные числа и операцию сложения $H_1 \bigoplus H_2 = \overline{H_1 + H_2}$ (замыкание берется в топологии $\sigma(X', X)$), мы превратим $P(K)$ и $H(K)$ в полулинейные пространства, а отображение $\varphi : P(X) \to H(K)$, где $\varphi(p) = Hp$, будет линейным изоморфизмом, называемым двойственностью Минковского.

Пусть теперь $P(X)$ — непрерывные сублинейные функционалы, определенные на X; $P^m(X)$ — монотонные сублинейные функционалы на X.

Предложение 2. Монотонные непрерывные сублинейные функционалы на X являются непрерывными.

Доказательство. Как отмечалось ранее, достаточно проверить ограниченность функционала $P \in P^m(X)$ на единичном шаре $S = \{x \in X :\| x \| \leq 1\}$. Возьмем единицу $e \in intK$, тогда $\exists C > 0 : \|x\|_e \leq C \| x \|, \forall x \in K$. По определению е-нормы для $\| x \| \leq C$ имеем $\| x \|_e \leq C$, откуда $-Ce \leq x \leq Ce$. Так как р-монотонен и положительно однороден, то $Cp(-e) \leq p(x) \leq Cp(e)$ или $| p(x) | \leq Cmax(p(e), | p(-e) |)$.

Далее, согласно [1], будем вводить в X топологии локально-выпуклого пространства. Нетрудно видеть, что любой функционал $p \in P^m(X)$ будет ограничен на выпуклых уравновешенных оболочках конечных множеств из X. Поэтому на этих оболочках будет ограничен и любой функционал $p = p_1 - p_2 \in [P^m(X) - P^m(X)]$, где $p_1, p_2 \in P^m(X)$.

Поэтому, если мы в векторном пространстве $[P^m(X) - P^m(X)]$ введем топологию равномерной сходимости на выпуклых уравновешенных оболочках конечных множеств из X, то получим локально-выпуклое пространство $[P^m(X) - P^m(X)]_\sigma$.

Индуцируя эту топологию в $P^m(X)$, получим пространство $[P^m(X)]_\sigma$.

Пусть теперь*cconv* X'— (*cconv* K^*) — совокупность выпуклых слабокомпактных подмножеств сопряженного пространства X' (конуса K^*).

Согласно [4], с помощью слабой топологии $\sigma(X', X)$ вводим экспоненциальную топологию в пространство $\overline{\prod}(X')$-слабозамкнутых подмножеств в X' и индуцируем полученную топологию в cconv K^*; полученное топологическое пространство обозначим через $(cconvK^*)_\sigma$.

[5, 6] показано, что $Hp = \{f \in K^* : f(x) \leq p(x), \forall x \in K\} \in cconvK^*, \forall p \in P^m(K)$, двойственность Минковского $\varphi : p \to Hp$ является гомоморфизмом $[P^m(K)]_\sigma$ и $(cconvK^*)_\sigma$ — сохраняющим линейные операции сложения и умножения на неотрицательные числа. Используем полученное в [6].

Предложение 3. Если G — компактное в $\sigma(X', X)$ подмножество в X', то *cconv* G будет компактно в $(cconvX')_\sigma$.

Замечание. Отметим, что, рассматривая в качестве основного пространства нормированное пространство X', можно все введенные определения и результаты рассмотреть для элементов X'и сопряженного к нему пространства X''непрерывных на X' линейных функционалов. Далее везде мы рассматриваем рефлексивное нормированные пространства, для которых $X'' = X'$.

Рефлексивными являются, в частности, все конечномерные евклидовы пространства. Из [1] следует, что для рефлексивных пространств $K^{**} = K, S^{**} = S$, конусы K и K^* обладают идентичными свойствами, вследствие чего в приведенных выше результатах можно менять X на X', K на K^* и наоборот.

Согласно [5] введем суперлинейные отображения. Пусть X — топологическое векторное пространство; K — выпуклый конус в X; $\prod(K)$ – совокупность непустых подмножеств K.

Отображение $a : K \to \prod(K)$ будет суперлинейным, если

1) a положительно однородно, т.е. $a(\alpha x) = \alpha a(x), \forall \alpha \geq 0, \forall x \in K$;

2) супераддитивно, т.е $\alpha(x_1 + x_2) \supset \alpha(x_1) + \alpha(x_2), \forall x_1, x_2 \in K$;

3) a полунепрерывно сверху на K, т.е. если сеть $x_\alpha \to x, y_\alpha \in a(x_\alpha), y_\alpha \to y \Rightarrow y \in a(x)$;

4) $a(0) = 0$.

По определению полагаем, что $a(\xi) = \bigcup_{x \in \xi} a(x)$, $\forall \xi \in \prod(K)$. Пусть X — рефлексивное УНП; $\prod_0(X) \subset \prod(X)$, отображение $a : X \to \prod(X)$. Будем называть a ограниченным на $\prod_0(X)$, если $a(\xi)$ ограничено $\forall \xi \in \prod_0(X)$.

Предложение 4. Пусть a — суперлинейное отображение: $K \to \prod(K)$, ограниченное на $cconvK \Rightarrow a(\xi) \in cconvK, \forall \xi \in cconvK$.

Доказательство. Выпуклость множества $a(\xi)$ — следствие положительной однородности и суперраддитивности отображения a, ограниченность $a(\xi)$ следует из ограниченности на $cconvK$ отображения a.

Для доказательства компактности множества $a(\xi)$ в топологии $\sigma(X, X')$ осталось проверить его замкнутость в этой топологии.

Пусть сеть $\{y_\alpha\} \subset a(\xi)$, т.е. $\exists$ сеть $\{x_\alpha\} \subset \xi : y_\alpha \in a(x_\alpha)$. Так как ξ-компактно, то можно считать, что $x_\alpha \to x \in \xi$. Если $y_\alpha \to y$, то в силу полунепрерывности сверху отображения a, получаем, что $y \in a(x) \subset a(\xi)$ и т.д.

Замечание 1. Покажем, что условием, обеспечивающим ограниченность отображения a на $cconvK$, является ограниченность его на множестве $S_\kappa = S \cap K$, где S — единичный шар в X, т.е. S_κ — след единичного шара на конусе K.

Действительно, пусть $a(S_\kappa)$ ограничено (по норме в X), т.е. $\exists \alpha > 0 : a(S_\kappa) \subset \alpha S_\kappa$. Если $\xi \in cconvK$, то ξ ограничено, т.е. $\exists \alpha' > 0 : \xi \subset \alpha' S_\kappa$, но тогда $a(\xi) \subset \alpha' a(S_\kappa)$ (учитываем положительную однородность a), $a(S_\kappa) \subset \alpha S_\kappa$, откуда $a(\xi) \subset (\alpha' \cdot \alpha) S_\kappa$.

Замечание 2. Из результата предложения следует, что a можно рассматривать как однозначное отображение: $cconvK \to cconvK$.

Пусть a — суперлинейное отображение: $K \to \prod(K)$; ξ — подмножество К. Будем называть ξ собственным подмножеством отображения a, если $\exists \alpha > 0 : a(\xi) = \alpha \xi$.

Теорема. Пусть a — суперлинейное отображение: $K \to \prod(K)$, ограниченное на множестве $S_\kappa = S \cap K$ и непрерывное как отображение $(cconvK)_\sigma \to (cconvK)_\sigma$, тогда a имеет собственное множество.

Доказательство. Пусть K — конус в X, $K^* = \{f \in X' : f(x) \geq 0, \forall x \in K\}$ — сопряженный ему конус в X'.

Двойственность Минковского $\varphi : P^m(K^*) \to cconvK$, т.е. $\varphi(p) = Hp = \{x \in K : f(x) \leq \leq p(f) \forall f \in K^*\}$.

Пусть e — единица в K^*, $\Omega = \{p \in P^m(K^*) : p(e) \leq 1\}$. Очевидно, что множество Ω выпукло. Обозначим $G = \{x \in K : e(x) \leq 1\}$.

Если $p \in \Omega$, то $p(e) = sup_{x \in Hp} e(x) \leq 1$, откуда $\varphi(p) = Hp \subset G$. При этом $\varphi(p) \in cconvK$, следовательно, $\varphi(p) \in cconvG$ и $\bigcup_{p \in \Omega} \varphi(p) = \varphi(\Omega) \subset cconvG$.

Нетрудно видеть, что G замкнуто в $\sigma(X, X')$. Покажем ограниченность G по норме, а значит и в топологии $\sigma(X, X')$ [4]. Пусть $x \in G$, т.е. $e(x) \leq 1$. По определению $\| x \| = sup_{f \neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\|f\|}$.

Из определения единицы e для $\forall f \in X \exists \alpha > 0 : -\alpha e \leq f \leq \alpha e$ и, кроме того, $\exists C > 0 : \| f \|_e \leq 0$, где $\| f \|_e = inf\{\alpha > 0 : -\alpha e \leq f \leq \alpha e\}$. Поскольку $x \in K = K^{**}$, а $\alpha e - f \geq 0$ и $f + \alpha e \geq 0$, то $\alpha e(x) - f(x) \geq 0, f(x) + \alpha e(x) \geq 0$. С учетом того, что $e(x) \leq 1$, имеем $\alpha - f(x) \geq 0$ и $f(x) + \alpha \geq 0$, т.е. $-\alpha \leq f(x) \leq \alpha$ или эквивалентно $| \; f(x) \; | \leq \alpha$. Но тогда $|f(x)| \leq inf\{\alpha > 0 : -\alpha e \leq f \leq \leq \alpha e\} = \| f \|_e$, а так как $\| f \|_e \leq C \| f \|$, то $| \; f(x) \; | \leq C \| f \|$ или $\dfrac{| \; f(x) \; |}{\| f \|} \leq C$, но тогда $\| x \| = sup_{f \neq 0} \dfrac{| \; f(x) \; |}{\| f \|} \leq C$.

Мы показали, что G — замкнутое в $\sigma(X, X')$, ограниченное в топологии $\sigma(X, X')$ подмножество в X, что и дает его слабую компактность.

Нетрудно видеть, что G — выпуклое множество, из предложения 3 имеем, что $cconvG$ будет компактно в $(cconvX)_\sigma$.

Если $F \in cconvG$, то, в силу выпуклости и компактности G, множество $F \subset G$, т.е. $x(e) \leq 1$, $\forall x \in F$. По определению двойственности Минковского $F = Hp = \varphi(p)$, где $p(e) = sup_{x \in F} e(x) \leq 1$, т.е. $p \in \Omega$. Таким образом, $F \subset \varphi(\Omega)$. Ранее мы показали, что $\varphi(\Omega) = \bigcup_{p \in \Omega} \subset G$, тем самым имеем равенство $\varphi(\Omega) = cconvG$.

Двойственность Минковского φ является гомеоморфизмом, поэтому $\Omega = \varphi^{-1}(cconvG)$ будет компактным множеством в $[P^m(K^*)]_\sigma$.

Пусть $\Omega' = \{p \in P^m(K^*) : p(e) = 1\} \subset \Omega$. Очевидно, что Ω' — выпуклое множество. Кроме того, так как сходимость в $[P^m(K^*)]_\sigma$ дает поточечную сходимость, то Ω' — замкнутое подмножество в Ω, т.е. Ω' является компактным множеством в $[P^m(K^*)]_\sigma$.

Рассмотрим отображение $a_0 = \varphi^{-1} \circ a \circ \varphi$. С учетом предложения 4 (замечание 1) имеем, что $a_0 : P^m(K^*) \to P^m(K^*)$. Отображение a_0 является непрерывным отображением $[P^m(K^*)]_\sigma \to \to [P^m(K^*)]_\sigma$ как суперпозиция непрерывных отображений.

Так как $a_0(p) \in P^m(K^*)$, то $a_0(p)(e) > 0$. Введем отображение ψ на множестве $\Omega' : \psi(p) = = \dfrac{p + a_0(p)}{1 + a_0(p)(e)}$, очевидно, что ψ непрерывно и $\psi(p)(e) = \dfrac{p(e) + a_0(p)(e)}{1 + a_0(p)(e)} = \dfrac{1 + a_0(p)(e)}{1 + a_0(p)(e)} = 1$, т.е. $\psi(p) \in \Omega'$. Таким образом, непрерывное отображение ψ переводит выпуклый компакт Ω' в себя, поэтому имеет по теореме Шаудера-Тихонова неподвижную точку $p_0 : \psi(p_0) = p_0 = \dfrac{p_0 + a_0(p_0)}{1 + a_0(p_0)(e)}$.

Из последнего равенства получаем, что $(\varphi^{-1} \circ a \circ \varphi)(p_0) = a_0(p_0)(e) p_0$. С учетом положительной однородности φ имеем $\varphi((\varphi^{-1} \circ a \circ \varphi)(p_0)) = a_0(p_0)(e)\varphi(p_0)$ или $a(\varphi(p_0)) = a_0(p_0)(e)\varphi(p_0)$, т.е. множество $\varphi(p_0) \in cconvK$ и является собственным множеством, а $a_0(p_0)(e) > 0$ — собственным числом отображения а.

Замечание. Мы показали, что отображение a имеет выпуклое слабокомпактное собственное множество.

Список литературы

1 *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967. — С. 69-73, 102–110.

2 *Вулих Б.З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. — М.: Физматгиз, 1961. — С. 12–24.

3 *Рубинов А.М.* Суперлинейные функционалы, определенные на конусе // Сибирский матем. журн. — 1970. — Т. 11. — № 2. — С. 429–441.

4 *Куратовский К.* Топология. — Т. 1. —М.: Мир, 1966. — С. 168.

5 *Макаров В.Л., Рубинов А.М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. — М.: Наука, 1973. — С. 34–44, 71, 72.

6 *Толстоногов А.А.* О некоторых свойствах пространств сублинейных функционалов // Сибирский матем. журн. — 1977. — Т. 18. — № 2. — С. 429–443.

Т.Х.Макажанова, А.А.Муканов

Суперсызықты бейнеленген меншікті жиындар жайлы

Мақалада реттелген нормаланған кеңістіктерде анықталған конустарды нүктелі-жиындық бейнелеулерінің суперсызықтық меншікті жиындарының бар болу теоремасы алынды. Жеткілікті шарттарға дөңес осал компакті конустың жиындарының ішінде бейнелеудің үзіліссіздігі және кеңістіктегі бірлікті шардың ізіндегі шенелгендігі жатады.

T.Kh.Makazhanova, A.A.Mukanov

About their own sets of superlinear mappings

In this paper we obtain a theorem of existence of its own sets the superlinear point-to-set mappings defined on cones orderly normed spaces. Sufficient conditionsare the continuity of the mapping on the set of convex weak compacta of the cone and the limitations on the track unit ball of the space.

References

1 Robertson A., Robertson W. *Topological vector spaces*, Moscow: Mir, 1967, p. 69-73, 102-110.

2 Vulih B.Z. *Introduction to the theorye of semi-ordered spaces*, Moscow: Fizmathgiz, 1961, p. 12–24.

3 Rubinov A.M. *Siberian Mathematical Journal*, 1970, 11, 2, p. 429–441.

4 Kuratowski K. *Topology*, Moscow: Mir, 1966, p. 168.

5 Makarov V.L., Rubinov A.M. *Mathematical theory of economic dynamics and equilibrium*, Moscow: Nauka, 1973, p. 34–44, 71, 72.

6 Tolstonogov A.A. *Siberian Mathematical Journal*, 1977, 18, 2, p. 429–443.