УДК 510.67

А.В.Зенков

Алтайский государственный аграрный университет, Барнаул, Россия
(E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com)

О многообразиях m-групп с тождеством $X_*^n = X^{-n}$

Напомним, что *m*-группа представляет собой пару (G), где G-группа и является убыванием двух автоморфизмов группы G. Данную *m*-группу можно рассматривать как алгебраическую систему сигнатуры, и это очевидно, что *m*-группы образуют разнообразие в этой подписи. Множеством *M* сортов всех *m*-групп является частично упорядоченным множеством по отношению к теоретико-множественным включениям. Кроме того, *M* является решеткой по отношению к естественно определяемым операциям пересечения и объединения разновидностей m-групп. Автором изучено многообразие, которое определяется тождеством $X_*^n = X^{-n}$.

Ключевые слова: *m*-группа, многообразие, решетка, антиизоморфизм решетки.

1.Введение

Исследование групп монотонных преобразований линейно упорядоченных множеств и связанных с ними упорядочений на группах имеет богатую историю. Значительный сдвиг в изучении таких групп произошел после работы M. Giraudet и F. Lucas [1], в которой установлена связь между полуупорядоченными группами и группами монотонных подстановок и связанными с ними решеточно упорядоченными группами. Предложенная концепция оказалась особенно продуктивной за счет расширения сигнатуры решеточно упорядоченных групп и введения новой универсальной алгебры — m-группы. Определение и основные свойства многообразий m-групп и их связь с теорией многообразий решеточно упорядоченных групп установлены M.Giraudet, J. Rachunek [2]. Большое количество вопросов возникло о строении и свойствах таких групп. Многие из них решены, но значительное число проблем, главным образом связанных с особенностями дополнительной операции m-группы, остаются открытыми.

Напомним основные понятия теории решеточно упорядоченных групп и групп монотонных подстановок. Решеточно упорядоченной группой (l-группой) называется алгебраическая система G сигнатуры $\ell = \left\langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, \right\rangle$, совмещающая в себе согласованные структуры группы и решетки, т.е. для любых $x,y,u,v \in G$ имеет место $u(x \wedge y)v = uxv \wedge uyv, u(x \vee y)v = uxv \vee uyv$.

Под m-группой будем понимать алгебраическую систему G сигнатуры $m = \left\langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, _* \right\rangle$, где $\langle G, \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge \rangle$ является решеточно упорядоченной группой (l-группой) и одноместная операция $_*$ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т.е. для любых $x,y \in G$ верны соотношения

$$(xy)_* = x_* y_*, \quad (x_*)_* = x, \quad (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, \quad (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*.$$

В дальнейшем m-группу G с фиксированным автоморфизмом $_*$ записываем как пару $(G, _*)$.

Класс M всех m-групп образует многообразие сигнатуры M Множество всех многообразий m-групп M является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения. Более того, M есть решетка относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий m-групп.

Пусть Ω – некоторое линейно упорядоченное множество. Через $\mathrm{Aut}(\Omega)$ и $\mathrm{Mon}(\Omega)$ обозначим группы (относительно суперпозиции) всех монотонно возрастающих и монотонных подстановок линейно упорядоченного множества Ω соответственно. Очевидно, что $\mathrm{Aut}(\Omega) \subseteq \mathrm{Mon}(\Omega)$. Пусть $a \in Mon(\Omega) \setminus Aut(\Omega)$ *и* $a^2 = e.$ Тогда будем называть *a реверсивным автоморфизмом 2-го порядка* Ω. Следуя [2], будем говорить, что m-группа $(G, _*)$ представима порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Ω, если $G \subseteq Aut(\Omega)$ и $g_* = aga$ для любого $g \in G$, где a – реверсивный автоморфизм 2-го порядка Ω. Этот факт записываем в виде (G, Ω, a).

Отметим, что множество Ω представимо в виде $\Omega = L\overleftarrow{U}\{0\}^{\varepsilon}\overleftarrow{U}R$, где $L = \{\omega \in \Omega : (\omega)a > \omega\}, R = \{\omega \in \Omega : (\omega)a < \omega\}$, o — точка Ω, неподвижная относительно действия автоморфизма *a*. Множество Ω может не содержать неподвижной точки и тогда $\varepsilon = 0$, если же такая точка есть, то $\varepsilon = 1$. Приведем некоторые примеры представлений.

Пример (с неподвижной точкой). Пусть $\Omega = R$ – естественно линейно упорядоченное множество действительных чисел. Определим $(x)a = -x + 2 \ \forall x \in R$. Тогда правое регулярное представление $(Aut(R), R, a)$ есть пример представления с неподвижной точкой (o=1).

Пример (без неподвижной точки). Пусть $\Omega = R$ – естественно линейно упорядоченное множество действительных чисел. Определим $(x)a = -x + 1 \ \forall x \in R$. Тогда правое регулярное представление $(Aut(R), R, a)$ есть пример представления без неподвижной точки.

Пример (собственного представления с неподвижной точкой). Группа (относительно суперпозиции) всех непрерывных монотонно возрастающих функций действительной прямой, проходящих через начало координат — точку O, представляет такой пример, если реверсивный автоморфизм *a* определен правилом $(x)a = -x$.

Рассмотренные выше примеры есть примеры m-транзитивных представлений, т.е. для любых $\alpha, \beta \in \Omega$ найдется $x \in G_*$, что $(\alpha)x = \beta$, где $G_* = gr(G, a) \subseteq Mon(\Omega)$. Эти представления, как и в случае l - групп, играют особую роль при изучении многообразий m -групп. Из общей теории алгебраических систем известно, что всякое многообразие определяется своими подпрямо неразложимыми группами, которые, в свою очередь, допускают такие представления.

Для m-групп имеет место теорема, доказанная M.Giraudet и F.Lucas [1].

Теорема 1.1. Всякая m -группа $(G, _*)$ имеет точное представление порядковыми подстановками некоторого линейно упорядоченного множества Ω.

2. Основной результат

Через I обозначим многообразие m-групп, определяемое тождеством $x_* = x^{-1}$, которое является наименьшим нетривиальным элементом M. Для каждого натурального n определим многообразие m-групп $I^n = I \cdot ... \cdot I$. M.Giraudet и J.Rachunek [2], в частности, показали, что I^n определяется тождеством $x_*^{-2^{n-1}} = x^{-2^{n-1}}$. Мы показываем, что других многообразий, определяемых подобными тождествами, нет. Более точно, если $n = 2^m(2s+1), m \geq 0, s > 0$, то тождество $x_*^n = x^{-n}$ влечет $x_*^n = x^{-1}$.

Рассмотрим группу $S_2 = \langle a_0, a_1, b \mid [a_0, a_1] = e, a_0^{\ b} = a_1, a_1^{\ b} = a_0 \rangle$. Если $g \in S_2$, то g представим, причем единственным способом, в виде $g = b^k a_0^{\ m} a_1^{\ n}$, $k, m, n \in Z$. Относительно лексикографического порядка, т.е. $g \geq e \Leftrightarrow k > 0$ или $k = 0, m \geq 0, n \geq 0$, группа S_2 будет решеточно упорядоченной. Определим отображение $\phi : S_2 \to S_2$ по правилу: $(g)\varphi = b^{-k} a_0^{\ -m} a_1^{\ -n}$. Тогда (S_2, φ) будет m-группой. Через S обозначим многообразие m-групп, порожденное (S_2, φ). Авторами [3, 4] показано, что многообразие S является единственным неабелевым накрытием многообразия m-групп **I**.

Несложно заметить, что M $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{I}^2 S \subseteq I^2$. В данной работе показано, что эти многообразия различны. При доказательстве этого результата использована техника подстановочного сплетения представлений m-групп, развитая автором [5]. Отметим, что для сплетений m-групп имеет место аналог теоремы Калужнина-Краснера, что позволяет активно использовать сплетения при изучении многообразий m-групп.

3. О строении решетки M

Тривиальное многообразие m -групп E является наименьшим элементом M. Будем говорить, что многообразие m - групп **X** является *накрытием* многообразия m-групп **Y** (**X** накрывает **Y**), если и для любого многообразия m-групп **Z** такого, что $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}$, выполнено **Z** = **Y**, либо **Z** = **X**.

Теорема 3.1 [2].

1) Многообразие m-групп *I* является накрытием *E*;

2) многообразие всех абелевых m-групп *A* накрывает *I*.

Пусть *p* — произвольное простое число. Рассмотрим группу

$$S_p = \langle a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, b \mid [a_i, a_j] = e, a_i^b = a_{i+1}, a_{p-1}^b = a_0 \rangle.$$

Относительно лексикографического порядка группа S_p является решеточно упорядоченной. На порождающих элементах определим отображение $\varphi_p: (a_i)\,\phi_p = a_k^{-1}$, $k \equiv p-(i+1) \bmod(p)$, $(b)\varphi_p = b^{-1}$. Прямая проверка показывает, что φ_p есть автоморфизм второго порядка группы S_p и антиизоморфизм решетки S_p, т. е. для каждого *p* пара (S_p, φ_p) будет m-группой.

Теорема 3.2 [6].

Пусть $\mathbf{S}_p$ — многообразие m-групп, порожденное (S_p, φ_p). Тогда:

1) $\mathbf{S}_p$ – накрытие многообразия всех абелевых m-групп **A** для каждого p;

2) $\mathbf{S}_p \neq \mathbf{S}_q$ при $p \neq q$.

M.E.Huss, N.R.Reily [7] на решетке многообразий l-групп L определили автоморфизм второго порядка φ. Напомним определение этого автоморфизма. Рассмотрим произвольную l-группу $(G, \leq)$. Через G^* обозначим l-группу, полученную из исходной группы путем обращения порядка. Далее, если $\mathbf{V} = \{G_i \mid i \in I\}$ — некоторое многообразие l- групп, то тогда $\varphi(\mathbf{V}) = \{G_i^* \mid i \in I\}$. Если верно равенство $\varphi(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$, то тогда многообразие V называется *реверсивным*. Несложно показать, что система тождеств (сигнатуры l), определяющая реверсивное многообразие, задает некоторое многообразие m-групп.

В теории многообразий l-групп важную роль играет многообразие l-групп *N* с субнормальными скачками. Как показал W.Ch.Holland [8], это многообразие замечательно тем, что оно является наибольшим нетривиальным элементом решетки многообразий l-групп L. Известно [6], что многообразие N реверсивно. Таким образом, тождество

$$(x \vee e)^{-1}(y \vee e)^{-1}(x \vee e)^2(y \vee e)^2 \wedge e = e$$

определяет многообразие m-групп N_m с субнормальными скачками. Верна следующая

Теорема 3.3 [9]. *М*ногообразие m-групп $\mathbf{N_m}$ с субнормальными скачками является наибольшим нетривиальным элементом решетки мноогообразий m-групп M.

Известно (см., например, [6]), что многообразие всех *o*-аппроксимируемых l-групп R реверсивно. Следовательно, тождество $(y^{-1} \cdot x^{-1} \cdot y \wedge x) \vee e = e$, определяющее R, задает и многообразие R_m всех о-аппроксимируемых m-групп. Через $M_{\mathbf{R}m}$ обозначим решетку *o*-аппроксимируемых многообразий m-групп.

Теорема 3.4 [3].

1) В решетке $M_{\mathbf{R}m}$ имеется континуум многообразий, каждое из которых в ней имеет континуум накрытий;

2) существует *o*-аппроксимируемое многообразие m-групп, которое не имеет накрытий в решетке $M_{\mathbf{R}m}$;

3) существует *o*-аппроксимируемое многообразие m–групп без независимого базиса тождеств.

Список литературы

1 *Giraudet M., Rachunek J.* Varieties of half lattice — ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech.Math. Journal 1999. — Vol. 49, No. 124. — P.743–766.

2 *Giraudet M., Lucas F.* Groupes a' motie' ordonne's // Fundam. Math. — 139. — 1991. — No. 2. — P.75–89.

3 *Zenkov A.V.* Covers in the lattice of varieties of m- groups // Siberian Mathematical Journal. — 2006. — Vol. 47. — No. 1. — P. 58–63.

4 *Zenkov A.V.* The minimal varieties of m-groups // Siberian Mathematical Journal. — 2009. — Vol. 50. — No. 6. — P. 1035–1038.

5 *Zenkov A.V.* Wreath product of the groups of monotone permutations // Siberian Mathematical Journal. — 2011. — Vol. 52. — No. 1. — P. 58–63.

6 *Isaeva O.V.* Covers in the lattice of varieties of m-groups // Algebra and Model theory. — 2003. — 4. — P.35–43.

7 *Huss M.E., Reily N.R.* On reversing the order of lattice-ordered group // Journal Algebra. — 1984. — Vol. 91. — P. 176–191.

8 *Holland W.Ch.* The largest proper variety of lattice-ordered groups // Proc.Am.Math.Soc. — 1976. — Vol. 57. — No. 1. — P. 25–28.

9 *Kopytov V.M., Rachunek J.* The largest proper variety of m-groups // Algebra and logic. — 2003. — Vol. 42. — No. 5. — P. 624–635.

А.В.Зенков

$X_*^n = X^{-n}$ теңбе-теңдікті m-группалы көпбейнеліктер жайында

Мақалада m-группа өзімен (G) жұбын қарастыратынын еске түсірейік, мұндағы G-группа және G группасындағы екі автоморфизмді азайту болып табылады. Бұл *m*-группасын алгебралық жүйенің сигнатурасы ретінде қарастыруға болады және *m*-группасы осы жазуда әр түрлілік құрайды. Барлық m-группалар сортының *M* жиыны теориялық жиындыққа қатысты жартылай реттелген жиын болады. Сонымен қатар *M* *m*-группалар әр түрлілігінің анықталған амалдар бойынша, яғни бірігу және қиылысуға қатысты, тор болады. Автор әр түрлілікті қарастырып, мұндағы $X_*^n = X^{-n}$, М құрылымы туралы кейбір нәтижелер шығарады.

A.V.Zenkov

On varieties of m–groups with identety $X_*^n = X^{-n}$

Recall that an *m*–group is a pair (G, $_*$), where G is an l–group and $_*$ is a decreasing order two automorphism of G.An *m*–group can be regarded as an algebraic system of signature $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, _* \rangle$ and it is obvious that the *m*–groups form a variety in this signature. The set *M* of varieties of all m–groups is a partially ordered set with respect to the set-theoretic inclusion. Moreover, *M* is a lattice with respect to the naturally defined operations of intersection and union of varieties of *m*–groups. We study the varieties which is defined by the identity $X_*^n = X^{-n}$. We deduce some results on the structure of *M*.

References

1 Giraudet M., Rachunek J. *Czech. Math. Journal,* 1999, 49, 124, p.743–766.
2 Giraudet M., Lucas F. *Fundam. Math. Journal*, 1991, 139, 2, p.75–89.
3 Zenkov A.V. *Siberian Mathematical Journal*, 2006, 47, 1, p. 58–63.
4 Zenkov A.V. *Siberian Mathematical Journal*, 2009, 50, 6, p. 1035–1038.
5 Zenkov A.V. *Siberian Mathematical Journal*, 2011, 52, 1, p. 58–63.
6 Isaeva O.V. *Algebra and Model theory,* 2003, 4, p. 35–43.
7 Huss M.E., Reily N.R. *Journal Algebra,* 1984, 91, p. 176–191.
8 Holland W.Ch. *Proc.Am.Math.Soc*, 1976, 57, 1, p. 25–28.
9 Kopytov V.M., Rachunek J. *Algebra and logic,* 2003, 42, 5, p. 624–635.