ISSN 2518-7929

№ 4(88)/2017

МАТЕМАТИКА сериясы

Серия МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS Series

ҚАРАҒАНДЫ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

ВЕСТНИК КАРАГАНДИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF THE KARAGANDA UNIVERSITY

ISSN 2518-7929
Индексі 74618
Индекс 74618

ҚАРАҒАНДЫ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ **ХАБАРШЫСЫ**

ВЕСТНИК КАРАГАНДИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF THE KARAGANDA UNIVERSITY

МАТЕМАТИКА сериясы

Серия МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS Series

№ 4(88)/2017

Қазан–қараша–желтоқсан
29 желтоқсан 2017 ж.

Октябрь–ноябрь–декабрь
29 декабря 2017 г.

October–November–December
December, 29, 2017

1996 жылдан бастап шығады
Издается с 1996 года
Founded in 1996

Жылына 4 рет шығады
Выходит 4 раза в год
Published 4 times a year

Қарағанды, 2017
Караганда, 2017
Karaganda, 2017

Редакцияның мекенжайы: 100028, Қазақстан, Қарағанды қ., Университет к-сі, 28
Тел.: (7212) 77-03-69 (ішкі 1026); факс: (7212) 77-03-84.
E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Сайт: vestnik.ksu.kz

Редакторы
Ж.Т.Нурмуханова
Компьютерде беттеген
Г.Қ.Қалел

Қарағанды университетінің хабаршысы. «Математика» сериясы.
ISSN 2518-7929.

Меншік иесі: «Академик Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті» РММ.

Қазақстан Республикасының Мәдениет және ақпарат министрлігімен тіркелген. 23.10.2012 ж. № 13104–Ж тіркеу куәлігі.

Басуға 28.12.2017 ж. қол қойылды. Пiшiмi 60×84 1/8. Қағазы офсеттік. Көлемi 12,75 б.т. Таралымы 300 дана. Бағасы келiсiм бойынша. Тапсырыс № 142.

Е.А.Бөкетов атындағы ҚарМУ баспасының баспаханасында басылып шықты.
100012, Қазақстан, Қарағанды қ., Гоголь к-сі, 38. Тел. 51-38-20. E-mail: izd_kargu@mail.ru

Адрес редакции: 100028, Казахстан, г. Караганда, ул. Университетская, 28
Тел.: (7212) 77-03-69 (внутр. 1026); факс: (7212) 77-03-84.
E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Сайт: vestnik.ksu.kz

Редактор
Ж.Т.Нурмуханова
Компьютерная верстка
Г.К.Калел

Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика».
ISSN 2518-7929.

Собственник: РГП «Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова».

Зарегистрирован Министерством культуры и информации Республики Казахстан. Регистрационное свидетельство № 13104–Ж от 23.10.2012 г.

Подписано в печать 28.12.2017 г. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная. Объем 12,75 п.л. Тираж 300 экз. Цена договорная. Заказ № 142.

Отпечатано в типографии издательства КарГУ им. Е.А.Букетова.

100012, Казахстан, г. Караганда, ул. Гоголя, 38, тел.: (7212) 51-38-20. E-mail: izd_kargu@mail.ru

Postal address: 28, University Str., 100028, Kazakhstan, Karaganda
Tel.: (7212) 77-03-69 (add. 1026); fax: (7212) 77-03-84.
E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Web-site: vestnik.ksu.kz

Editor
Zh.T.Nurmukhanova
Computer layout
G.K.Kalel

Bulletin of the Karaganda University. «Mathematics» series.
ISSN 2518-7929.

Proprietary: RSE «Academician Ye.A.Buketov Karaganda State University».

Registered by the Ministry of Culture and Information of the Republic of Kazakhstan. Registration certificate No. 13104–Zh from 23.10.2012.

Signed in print 28.12.2017. Format 60×84 1/8. Offset paper. Volume 12,75 p.sh. Circulation 300 copies. Price upon request. Order № 142.

Printed in the Ye.A.Buketov Karaganda State University Publishing house.
38, Gogol Str., 100012, Kazakhstan, Karaganda, Tel.: (7212) 51-38-20. E-mail: izd_kargu@mail.ru

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

CONTENTS

MATHEMATICS

UDC 004.051

L. Giorgadze[1], D. Alibiev[1], G.De Chirico[2], A.Sh. Kazhikenova[1]

[1] *Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan;*
[2] *Alpegagroup, Belgium*
(E-mail: silverluka@mail.ru)

Minimization of product defects by the means of implementing correct test pyramid in the software development process

Article attempts to present one of the solutions towards the problem of flawed and delayed product development. The history behind current most popular product development methodology (waterfall methodology) is traced, as well the problems that this methodology presents such as calendar risks or high employee turnover rate. The methodology that was created to solve those issues is gaining a lot of popularity now, because it offers much more agile way of delivering a software product by splitting the whole development process into manageable iterations. Customer can change the requirements and adapt the product to the market changes from iteration to iteration. However, this new methodology (agile methodology) presents some serious problems as well. This article concentrates tackles the main issue – insurance of the product quality with each iteration. The solution that is presented by the article revolves around creating and maintaining a correct test pyramid, with the specific description of all the layers of the pyramid. A small study was conducted on a sample project, where it was calculated, that test pyramid allowed to decrease the amount of defects by 25 %.

Keywords: software development, agile methodology, test pyramid, waterfall methodology, unit tests, integration tests, system tests, acceptance tests.

Every customer is interested in a development process that would require least investment. This interest has initially caused an emergence of the waterfall model [1], which sets a complete set of requirements and deadlines, in a span of several consecutive stages:

– Analysis and determination of the product requirements, which results in the creation of the product specification (also known as planning phase);
– Design of the product;
– Development of the product;
– Product testing;
– Fixing of defects that were found during the testing phase;
– Installation;
– Support.

Having dedicated phases yields manybenefits theoretically – every phase has specific time frame, therefore it should be easy to manage and calculate necessary resources. However, this methodology introduces quite a few risks [2]. It is generally agreed that there are five main risks:

Calendar risks, or planning mistakes

It is very hard to give precise time and resource estimations for the process of software development, because many factors have to be accounted for: time spent on learning the technology stack, sick leaves, staff turnover rate, the stability of all machines, etc. Besides this, sales managers can try to lure the customer by initially providing an overly optimistic time and resource estimations, or they could provide an erroneous estimations due to lack of knowledge in a specific field.

Changes in the product requirements after the planning phase

Often times, the customer changes his opinion on how the product should look like, which results in changes to the requirements. Usually, the bigger the product, the more changes will be done to the requirements after the planning phase was concluded. This leads to two options:

a) Include some time and resources for potential requirements changes in the initial estimations. However, how much time should be allocated for changes that are not known at the planning phase?

b) Prohibit making any changes to the requirements. However, what if the customer desperately needs some major modifications due to, for example, recent market changes? Inability to adapt to new needs would leave the customer dissatisfied.

Employee turnover

There is no guarantee that the initial team composition will persist throughout the whole development phase – leaves are unavoidable. Leaves of experienced employees, who are familiar with the goals, requirements, tasks, product architecture, technologies, who have established efficient communication chains with other team members, will severely affect the development process. Furthermore, such cases would make it necessary to spend time to find a suitable replacement and introduce that person the product. Figure 1 shows the economic effects of high employee turnover rate.

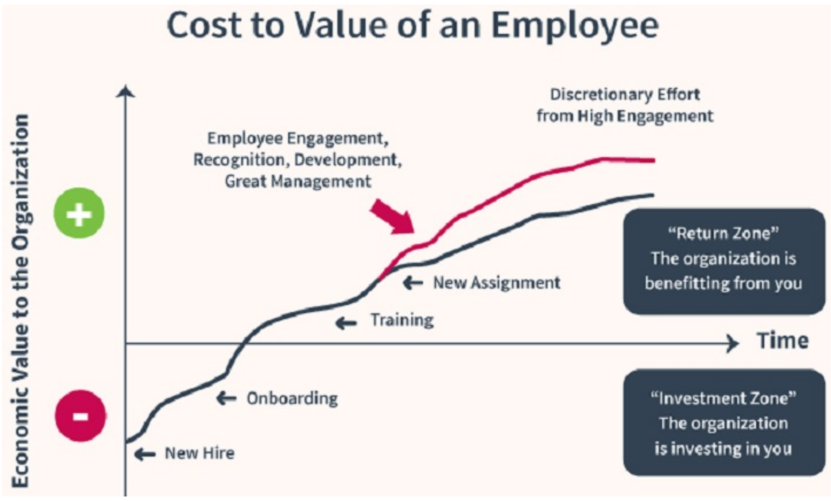

Figure 1. Representation of the economic effects of employee substitution

Mistakes/inconsistencies/flaws in the specification

The process of writing a specification is quite long and grueling; therefore, it is extremely difficult to avoid mistakes. Some flaws of the specification might be identified deep into the development phase, where it is quite costly to fix them.

Fluctuating productivity

Team productivity and productivity of each individual team member is not a linear, but rather a dynamic value as it is affected by many factors. These factors could be work related (team atmosphere, relationship between the customer and the development team), or personal (some special circumstances in the lives of the team members, their motivation, etc). According to Parkinson law, the development team reaches its top velocity towards the end of the development phase, while working at about half of its potential during the majority of the development phase [3]. Therefore, if the estimations were done with the regards to the top velocity of the team, they will be erroneous. Tom DeMarco and Timothy Lister in 'Waltzing with Bears: Managing Risk on Software Projects' provide peculiar statistics: if the initial estimation for a product was 26 months, probability of meeting that estimation is 4 %. With 75 % probability work will be done in 38 months, and in 15 % of cases the work will not be completed whatsoever [4].

In order to avoid these risks many projects have started to use the agile methodology, with which the development process consists out of manifold short cycles that are called iterations. Each iteration is two to four weeks long and is a miniature full development process, consisting of all phases, described in the beginning of the article. Using such an approach provides the following benefits:

1. More precise estimation of the development cost due to planning requirements only for the next iteration, not for the whole product.

Agile methodology aims to eliminate the cumbersome and archaic product specifications. Instead, the customer provides a general idea for the desired product and a special human resource is allocated – the product owner. Product owner is responsible for providing specific requirements for each iteration. Product owner is a part of the development; he acts as a medium between the customer and the developers. As a result, the development cycle of an iteration looks the following way:

a) Phase 1 – requirements analysis. During this phase, the needs of the product are analyzed and requirements are formed. Requirements are stored in a form of an issue in special issue tracking systems, where they are available to every interested person. Each issue should have an informative description (mini specification) as well as acceptance criteria – criteria that will allow to unambiguously discern whether or not the issue was implemented in the project. These issues should be prepared ahead of the iteration by the product owner;

b) Phase 2 – iteration scope estimation. The iteration is kicked off with a meeting, during which the created issues are estimated. The whole development team participates in this meeting, and everybody can make suggestions and ask questions to clarify the requirements. There different ways to estimate the issues, with man-hour and story point estimations being the most popular ones. After all issues have been estimated, product owner chooses the scope for the iteration based on the priorities and the estimations. The fact that the whole team participates in this meeting provides for a more accurate and efficient estimation as different members of the development team (developers and QA specialists) are able to voice all types of concerns and risks for all issues;

c) Phase 3 – development and testing. During the iteration, development and testing of the issues are done concurrently. Test scenarios are being written and agreed upon with the product owner during the development of the issue, and when the issue is completed, these scenarios are used by QA specialists to verify that the issue complies with the acceptance criteria;

d) Phase 4 – demonstration session. The iteration is closed with a meeting, during which the completed issues are demonstrated to the product owner. Product owner can point out things that were missed or suggest improvements immediately. This immediate feedback provides for a product that fully meet the customer needs [5].

2. Keeping the product up to date with the customer needs due to frequent planning phases.

As a result of introducing a product owner role, the customer has its own representative in the development team at all times. This allows better controlling the resources at work and even changing the requirements during the development phase, when the cost is the lowest. Furthermore, product owner has the complete picture of the whole development process, the issues that the development team has, various blockers, etc.

3. Agile methodology does not necessarily solve the problem with employee turnover, but it does present some engineering practices that help reduce the negative affects if such cases do take place.

4. Having the specification/requirements for the product in an issue tracking system.

Giving the development team free access to the whole storage of the existing issues, helps identify issues /inconsistencies/flaws in the specification much earlier. Having the specification split into smaller pieces (issues), provides for an easier way to get familiar with the required part of the product, instead of having to go through the whole specification.

5. Immediate feedback and frequent results.

Having the development process split into many small iterations allows the customer to have a working version of the product at the end of each iteration with the features that were developed during that iterations. Customer can use this product, analyze how it fits, possibly provide changes to better suit his needs, etc, but he does not have to wait for a long period of time to see the result of the work.

Even though the agile methodology solves many problems presented by the waterfall approach, it has its own risks [6]. The main risk of the agile methodology is assuring the quality of the product – the more functionality is added with each iteration, the bigger the product gets, the harder it gets to not break existing features while developing new ones. The process of defects creation in already existing functionality is called regression. Regression forces the quality assurance team to execute regression testing during each iteration, which means that they have to make sure that all key existing features were not affected by the features added during the iteration. Considering the fact that the amount of features grows with each iteration, the amount of regression testing required grows progressively and becomes quite an issue for the quality assurance team. To fit both new feature testing and regression testing into one iteration, the QA team has to descope some issues, or reduce the intensity of testing.

Fortunately, there are various ways to reduce the amount of manual regression testing done in each iteration and in turn reduce the amount of resources required to be allocated for regression. There are practices for both the development and the quality assurance teams. One of the most revered practice is writing and support of tests by the software development team [7].

Each product flaw or defect is a result of a flaw in the product code (unexpected situation or a regular mistake by the developer). Code defects are an avoidable part of the development – it is impossible to fully eliminate them. However, it is possible to minimize such defects and therefore reduce the amount of bugs. To ensure that the code does not contain mistakes, there is a practice of writing test code that tests the code of the product. Test code imitates certain scenarios and checks the behavior of the product code in these scenarios. Each test has the following steps:

– Test data preparation – specific data for the tested scenario is prepared;
– The tested code is executed;
– Results of the code execution are verified;
– Prepared scenario data is deleted.

There are various types of the code tests. Figure 2 depicts the test pyramid [8] which identifies four levels of code testing and puts them into a structured hierarchy. Each level has a corresponding type of tests that are targeted at different aspects of the code development process.

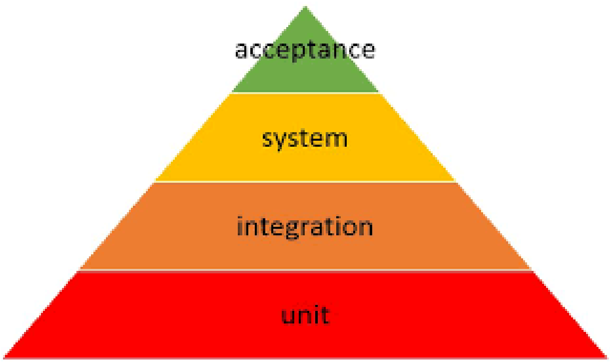

Figure 2. Test pyramide

1) Unit level and unit tests. Product code is atomized to single independent and isolated units. Units tests focus these units separately, testing their behavior in solitude. All interactions between units are mocked – simulated with the desired result for each particular interaction. This secures the fact, that all units' logic is not affected by the outside units. These tests are lightweight because they test only small pieces of the application, easy to write and support as they are limited to testing only small parts of logic. Due to these factors, it is possible to cover the majority of the product's code base with such tests, and run these tests during each build [9].

2) Integration level and integration tests. While unit tests guarantee that units work in isolation, integration tests verify how these units interact between one another or with some outside components. For example, an integration test could verify how data is read and written to a database – in this particular case we test that product code, responsible for connection and communication with the database performs its functions well. We cannot conclude whether or not the code works without testing it with a real database component. Obviously, interaction with an outside database component is quite resource-intensive compared to the unit tests, therefore the number of these tests is considerably lower than that of the unit tests.

3) System level and system tests. This level is responsible for testing how all the components work together in an environment similar to a production environment (without any isolation or simulation of outside components). Systems tests verify that all the units and outside components work well together validate the database state during the logic execution, check the correctness of the interactions between the components. Such tests are quite resource-intensive and take longer amount of time to fully

run. Similarly, the amount of such tests is lower than that of integration or unit tests, because those tests cover considerable amount of logic, while system tests make sure that the product works well as a whole mechanism.

4) Acceptance level and ui tests. While previous three levels focus on how the code of the application corresponds to the requirements, acceptance level is responsible for verifying the interaction between the functionality core of the application and the user interface. UI tests imitate user actions using the scenarios that reflect what regular users are most likely to do in the application. These tests are the most resource-intensive tests as they use the production environment (or an environment that replicates production environment). The amount of these tests depends on how many most used user-cases there, but usually, there are not too many of such tests. Such tests are not usually run with each build [10].

Besides providing a safety net against regression issues, unit tests help reduce the cost of identifying and fixing bugs. Figure 3 illustrates the cost to bug identification time ratio – it can be seen that correcting issues that are caught by unit tests is much cheaper, then correcting them after QA feedback.

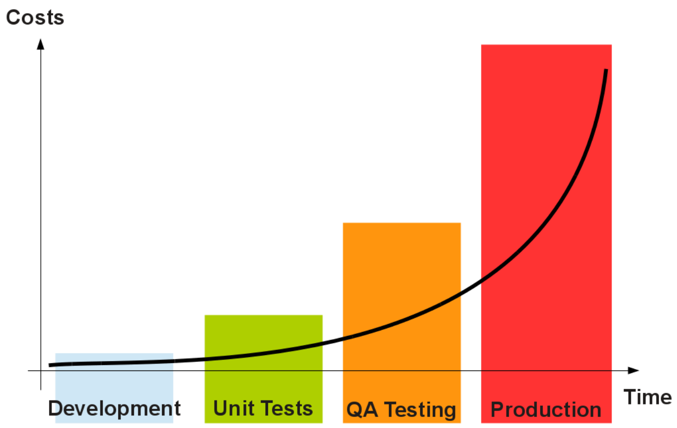

Figure 3. Relation of time to defect fix cost

Addition and maintenance of tests to the software development process allows to significantly reduce the amount of defects in the product, which provides for improvement of the user experience and therefore maximizing the profit of the application. A sample moderately small project was monitored over a period of 6 months before unit tests were added to the development flow, and after. Figure 4 displays the amount of defects per month before the test pyramid was introduced and implemented on the project.

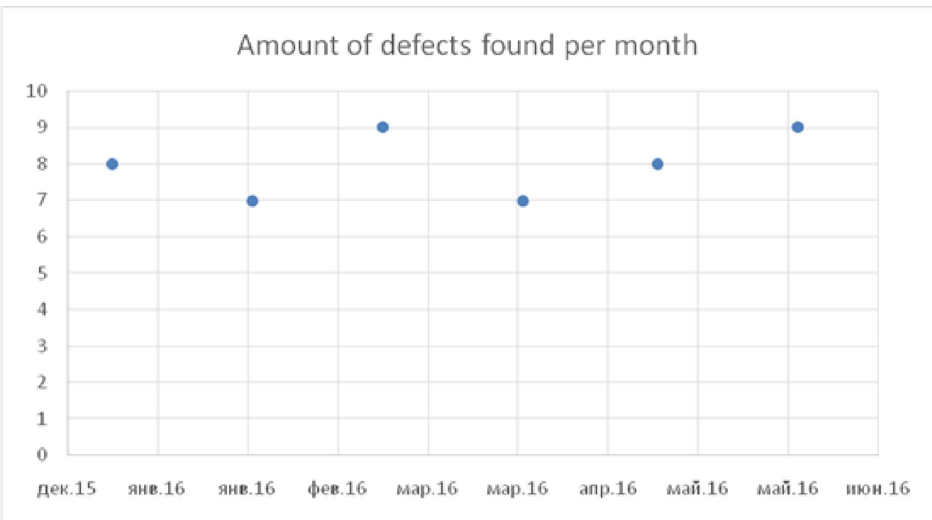

Figure 4. Amount of defects per month before test pyramid was introduced

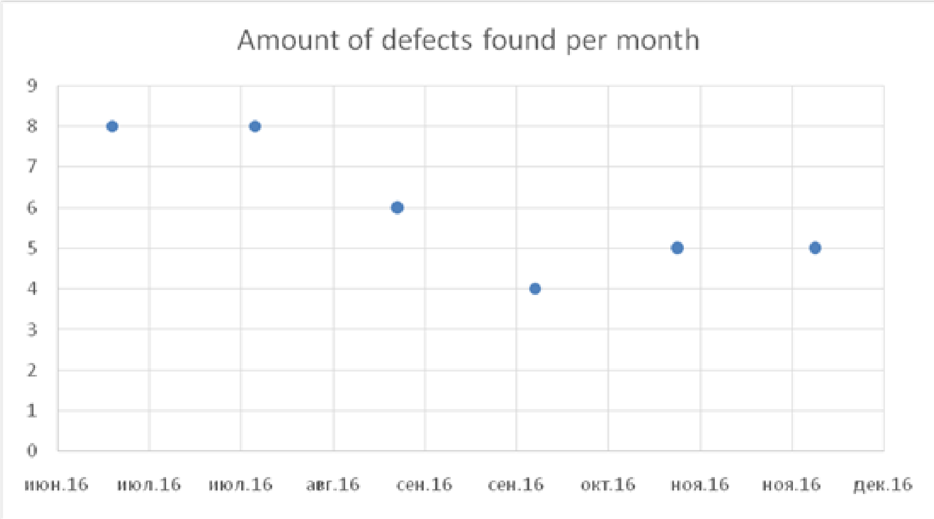

Figure 5. Amount of defects per month after test pyramid was introduced

As we can see from Figure 5, the average amount of defects found per month gradually decreased from 8 to 6, which is a 25 % decrease.

References

1 Petersen, K., Wohlin, C. & Baca, D. (2009). The Waterfall Model in Large-Scale Development. Product-Focused Software Process Improvement. PROFES 2009. Lecture Notes in Business Information Processing, Vol. 32, 386–400. Springer: Berlin, Heidelberg.

2 *atlaz.io.* Retrieved from https://atlaz.io/blog/the-risks-of-waterfall-methodology/.

3 *projectmanagementlearning.com.* Retrieved from http://www.projectmanagementlearning.com/what-is-parkinsons-law-in-project-management.html.

4 DeMarco, T. & Lister, T. (2003). Waltzing With Bears: Managing Risk on Software Projects. USA: Dorset House.

5 Larman, C. (2003). Agile and Iterative Development: A Manager's Guide. USA: Addison-Wesley Professional.

6 *scrumalliance.org.* Retrieved from https://www.scrumalliance.org/community/articles/2014/july/risks-in-agile-projects

7 *martinfowler.com.* Retrieved from https://martinfowler.com/bliki/TestPyramid.html

8 Cohn, M. (2009). Succeeding with Agile: Software Development Using Scrum. USA: Addison-Wesley Professional.

9 Koskela, L. (2013). Effective Unit Testing: A Guide for Java Developers. USA: Manning Publications.

10 Cimperman, R. (2006). UAT Defined: A Guide to Practical User Acceptance Testing. USA: Addison-Wesley Professional.

Л.Гиоргадзе, Д.Алибиев, Дж.Де Кирико, А.Ш. Кажикенова

Бағдарламалық қамтаманы құру барысында нақты тестілік жүйені қолдау жолымен өнімдік ақауларды болдырмау

Мақалада жасалған бағдарламалардың жетіспейтін жерлерін және уақытша тоқтап қалу мәселелерін шешу жолдары қарастырылған. Осы айтылған мәселелерді шешудің бағдарламалық қамтаманы құрудың көрнекі әдістемесінің, яғни сарқырамалы әдістің, пайда болу тарихы мен жолдары көрсетілген. Сарқырамалы модельді мәселені шешу үшін құрылған әдістеме, бағдарламалық қамтаманы құру процесін басқаратын бірнеше итерацияға бөлу арқылы бағдарламалық қамтаманы құрудағы икемді тәсіл болып табылатындықтан, қарқынды дамуда. Тапсырыс беруші нарықтағы талаптарға сәйкес ақырғы өнімді әрбір итерация барысында өзгертуге және бейімдеуге мүмкіндік алады. Алайда бұл жаңа бағдарлама құрудағы икемді әдістеме бірқатар мәселелерді шешуді талап етеді. Бұл мақалада осы мәселелердің ішіндегі ең негізгісі болып табылатын, бағдарлама құру кезіндегі әрбір итерациядағы өнімнің сапасын қамтамасыз ету мәселесін қарастырамыз. Авторлар ұсынған мәселені шешу жолы осы жүйенің әрбір қабаттарын көрсету және сипаттау арқылы дұрыс құрылған тестілік жүйенің (пирамиданы) құру және оны қолдауға негізделген. Жоба мысалында жүргізілген зерттеу нәтижесінде тестілік пирамида ақауларды 25 %-ға азайтуға болатынын көрсетті.

Кілт сөздер: бағдарламалық жасақтаманы әзірлеу, икемді әдіснама, тестілеу пирамидасы, сарқырамалы әдістеме, юнит тестілері, интеграциялық тестілер, жүйелік тестілер, қабылдау тестілері.

Л.Гиоргадзе, Д.Алибиев, Дж.Де Кирико, А.Ш. Кажикенова

Минимизация дефектов программных продуктов путем поддержания корректной тестовой пирамиды в ходе разработки программного обеспечения

В статье представлен один из возможных путей решения проблем, возникающих при разработке программных продуктов, имеющих недочёты, а также связанных с временными задержками. Рассмотрены история возникновения наиболее популярной методологии разработки программного обеспечения – водопадной методологии, и те проблемы, которые данная методология представляет. Методология, которая была создана для решения проблем водопадной модели, набирает всё большую популярность ввиду того, что она позволяет более гибкий путь создания программного обеспечения за счёт разделения всего процесса разработки программного обеспечения на небольшие управляемые итерации. Заказчик может менять требования и адаптировать итоговый продукт к требованиям рынка от итерации к итерации. Однако эта новая методология – гибкая методология разработки – ставит ряд новых проблем. Данная статья рассматривает самую главную проблему – обеспечение качества продукта с каждой итерацией разработки. Решение, предложенное в статье, основывается на создании и поддержании правильной тестовой пирамиды, с указанием и описанием всех слоёв данной пирамиды. Было проведено исследование на примере проекта, которое показало, что тестовая пирамида позволила уменьшить количество дефектов на 25 %.

Ключевые слова: разработка программного обеспечения, гибкая методология, тестовая пирамида, водопадная методология, юнит тесты, интеграционные тесты, системные тесты, приёмочные тесты.

УДК 51

Г.Ж. Каршыгина

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
(E-mail: karshygina84@mail.ru)

Оптимальные вложения потенциалов типа Бесселя и Рисса на базе пространств Лоренца

В статье изучено пространство потенциалов на n-мерном евклидовом пространстве. В частности, в рассмотрение включены пространства классических потенциалов Бесселя и Рисса. Они построены на основе перестановочно-инвариантных пространств (ПИП) с помощью сверток с ядрами общего вида. Установлены интегральные свойства потенциалов. Для них найдены критерии вложения в ПИП и получены явные описания оптимальных ПИП для этих вложений в случае базового весового пространства Лоренца.

Ключевые слова: свертка, конусы убывающих перестановок, перестановочно-инвариантное пространство, пространство потенциалов, обобщенные потенциалы Бесселя и Рисса.

Введение

В работе изучается пространство потенциалов $H_E^G \equiv H_E^G(R^n)$ на n-мерном евклидовом пространстве:

$$H_E^G(R^n) = \{U = G * f : f \in E(R^n)\},$$

где $E(R^n)$ — перестановочно-инвариантное пространство (ПИП).

Мы используем здесь аксиоматику, развитую в книге К. Беннетта и Р. Шарпли [1, 2]. Ядро свертки назовем допустимым, если $G \in L_1(R^n) + E'(R^n)$. Здесь $E'(R^n)$ означает ассоциированное ПИП для ПИП $E(R^n)$. В работе рассмотрены два варианта дополнительных условий на допустимые ядра. Соответствующие потенциалы можно назвать обобщенными потенциалами Бесселя и Рисса. В частности, исследование охватывает обобщение классических потенциалов Бесселя и Рисса, построенных на базе $L_p(R^n)$ (их теория развита, например, в книгах С.М. Никольского [3], И. Стейна [4] и В.Г. Мазьи [5]). В данной работе обобщение строится на базе весового пространства Лоренца. Здесь мы существенно используем результаты работы [6], в которой установлены точные теоремы вложения в ПИП для обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса:

$$H_E^G(R^n) \subset X(R^n). \tag{1}$$

В них проблема вложения редуцирована к оценкам норм комбинированных операторов типа Харди на положительной полуоси. Установлено точное описание оптимального ПИП, в которое вложено пространство потенциалов. Это значит, что описано ПИП $X_0(R^n)$ такое, что вложение (1) справедливо при $X(R^n) = X_0(R^n)$, и если для ПИП верно вложение (1), то справедливо также вложение $X_0(R^n) \subset X(R^n)$.

Цель данной работы — дать явное описание оптимального ПИП $X_0(R^n)$ для вложения (1) в случае, когда базовое ПИП $E(R^n)$ совпадает с весовым пространством Лоренца $\Lambda_p(u)$.

Обозначения и предварительные сведения

Всюду в работе мы считаем, что $T \in (1, \infty)$ для потенциалов Бесселя, $T = \infty$ для потенциалов Рисса.

Для ПИП $E \equiv E(R^n)$ обозначим через $E' \equiv E'(R^n)$ — ассоциированное ПИП, , т.е. ПИП, в котором норма задается соотношением

$$\|g\|_{E'} = sup\left\{\int\limits_{R^n} |gf| d\mu_n : f \in E; \|f\|_E \le 1\right\},$$

а через $\tilde{E} \equiv \tilde{E}(R_+)$, $\tilde{E}' \equiv \tilde{E}'(R_+)$ — их представления Люксембурга, т.е. такие ПИП, что

$$\|f\|_E = \|f^*\|_{\tilde{E}},\ \|g\|_{E'} = \|g^*\|_{\tilde{E}'}, \tag{2}$$

где f^* — убывающая перестановка функции f, т.е. неотрицательная, убывающая, непрерывная справа функция на $R_+ = (0, \infty)$, которая равноизмерима с f :

$$\mu_n\{x \in R^n : |f(x)| > y\} = \mu_1\{t \in R_+ : f^*(t) > y\}, y \in R_+.$$

Здесь μ — это мера Лебега (в R^n или на R_+, соответственно, см. [1; гл. 1, 2]). Введем пространство потенциалов $H_E^G \equiv H_E^G(R^n)$:

$$H_E^G(R^n) = \{F = G * f : f \in E(R^n)\}; \tag{3}$$

$$\|F\|_{H_E^G} = \inf\{\|f\|_E : \quad f \in E(R^n); \quad G * f = F\}. \tag{4}$$

Ядро представления G назовем допустимым, если

$$G \in L_1(R^n) + E'(R^n). \tag{5}$$

Свертка $G * f$ определяется как интеграл

$$(G * f)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} G(x - y) f(y) dy \tag{6}$$

(мы ввели множитель $(2\pi)^{-n/2}$ для удобства при использовании преобразования Фурье). В общем случае для данной $F \in H_E^G$ не гарантирована единственность функции $f \in E$, дающая представление $G * f = F$. Поэтому в (4) взят инфимум по всем $f \in E$, дающим данное представление (фактор-норма).

Теорема 1. [6]. Пусть G — допустимое ядро. Тогда интеграл (6) сходится для почти всех $x \in R^n$. Кроме того, $H_E^G(R^n)$ есть банахово пространство, причем

$$H_E^G(R^n) \subset E(R^n) + L_\infty(R^n), \tag{7}$$

$$\|u\|_{E+L_\infty} \leq \|G\|_{L_1+E'} \|u\|_{H_E^G}, \quad u \in H_E^G. \tag{8}$$

Замечание 1. В случае допустимых ядер мы можем для потенциалов $F \in H_E^G$ определить убывающие перестановки F^* и

$$F^{**}(t) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t F^*(\tau) d\tau, \quad t \in R_+. \tag{9}$$

Опишем представление обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса. Пусть $R \in (0, \infty]$. Скажем, что функция $\Phi : R_+ \to R_+$ принадлежит классу $\Im_n(R)$, если выполнены следующие условия:

1) Φ убывает и непрерывна на $(0, R)$;

Существует постоянная $c \in R_+$, такая, что

$$2) \int\limits_0^r \Phi(\rho) \rho^{n-1} d\rho \leq c \Phi(r) r^n, \quad r \in (0, R). \tag{10}$$

Например, для классических потенциалов Рисса

$$\Phi(\rho) = \rho^{\alpha - n} \in \Im_n(\infty), \qquad (0 < \alpha < n).$$

Для $\Phi \in \Im_n$ в силу убывания справедлива оценка

$$\int\limits_0^r \Phi(\rho) \rho^{n-1} d\rho \geq n^{-1} \Phi(r) r^n, \quad r \in (0, R). \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что для $\Phi \in \Im_n(R)$

$$\int\limits_0^r \Phi(\rho) \rho^{n-1} d\rho \cong \Phi(r) r^n, \quad r \in (0, R).$$

Для $\Phi \in \Im_n(R)$ обозначим

$$T = V_n R^n, R \in (0,\infty); \quad T = \infty, \quad R = \infty;$$

$$\varphi(\tau) := \Phi\left((\tau/V_n)^{1/n}\right) \in \Im_1(T); \quad f_\Phi(t,\tau) = min\left\{\varphi(t), \varphi(\tau)\right\}, \quad t, \tau \in (0,T). \tag{12}$$

Считаем, что ядро $G \in S_R(\Phi)$, если

$$G(x) \cong \Phi(\rho), \quad \rho = |x| \in (0,R). \tag{13}$$

Предложение 1. Пусть $\Phi \in \Im_n(\infty)$; $f_\Phi(t;\cdot) \in \tilde{E}'(R_+)$, $(t \in R_+)$; $G \in S_\infty(\Phi)$. Тогда G удовлетворяет условиям (5) и, следовательно, является допустимым.

Доказательство. Для $r \in R_+$ обозначим $B_r = \{x \in R^n : |x| \le r\}$, $B_r^c = R^n \backslash B_r$. Тогда

$$G = G_r + \tilde{G}_r; \quad G_r = G\chi_{B_r}, \quad \tilde{G}_r = G\chi_{B_r^c}. \tag{14}$$

При этом $G_r(x) \cong \Phi(|x|)\chi_{B_r}(x)$, так что, переходя к сферическим координатам, имеем

$$\int\limits_{R^n} |G_r| dx \cong \int\limits_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1} d\rho < \infty, \tag{15}$$

т.е. $G_r \in L_1(R^n)$. Далее

$$\tilde{G}_r(x) \le c\Phi(|x|)\chi_{B_r^c}(x) \le c\min\{\Phi(r), \Phi(|x|)\}. \tag{16}$$

Для измеримой функции $f : R^n \to R$ обозначим через $f^\sharp$ симметрическую перестановку функции, т.е. радиально симметричную неотрицательную функцию, убывающую и непрерывную справа как функция сферического радиуса $\rho = |x|$ и равноизмеримую с f . Известна формула, связывающая убывающую перестановку f^* и симметрическую перестановку $f^\sharp$. Именно

$$f^\sharp(x) = f^*(V_n|x|^n), \tag{17}$$

где V_n — объем шара единичного радиуса. Из (16) следует, что

$$\tilde{G}_r^\sharp(x) \le c\min\left\{\Phi(r), \Phi(|x|)\right\}.$$

Поэтому, обозначив $t = V_n r^n$; $\tau = V_n|x|^n$, имеем оценку

$$\tilde{G}_r^*(\tau) \le c\min\left\{\Phi\left((t/V_n)^{1/n}\right), \quad \Phi\left((\tau/V_n)^{1/n}\right)\right\} = f_\Phi(t;\tau).$$

Значит,

$$\|\tilde{G}_r\|_{E'(R^n)} = \|\tilde{G}_r^*\|_{\tilde{E}'(R_+)} \le c\|f_\Phi(t;\cdot)\|_{\tilde{E}'(R_+)} < \infty.$$

Итак, представление (14) показывает, что ядро G допустимо. Отметим, что условия $f_\Phi(t;\cdot) \in \tilde{E}'R_+$ эквивалентны между собой при различных значениях $t \in R_+$ $\square$.

Определение 1. В условиях предложения 1 потенциалы $F \in H_E^G(R^n)$ назовем потенциалами типа Рисса [4-6]. Здесь

$$\Phi(\rho) = \rho^{\alpha-n} \in \Im_n(\infty); \quad G \in S_\infty^0(\Phi), \quad f_\Phi(t;\cdot) \in \tilde{E}'(R_+), \ t \in R_+ \quad \Leftrightarrow \quad \tau^{\alpha/n-1} \in \tilde{E}'(t,\infty).$$

Приведем пример. Если $\alpha < n/p$, тогда $E = L_p$, $1 < p < \infty$.

Пусть

$$B_R = \{x \in R^n : \ |x| < R\}, \quad R \in R_+, \quad G_R^0 = G\chi_{B_R}, \quad G_R^1 = G\chi_{R^n/B_R}. \tag{18}$$

Определение 2. Пусть $R \in R_+$, $\Phi \in J_n$ и $X = X(R^n)$ является ПИП.

Если

$$(G_R^0)^\sharp(\rho) \cong \Phi(\rho), \quad \rho \in (0,R), \quad G_R^1 \in X(R^n), \tag{19}$$

тогда $G \in S_R(\Phi; X)$.

Если
$$(G_R^0)(x) \cong \Phi(\rho),\ \rho = |x| \in (0, R), \qquad G_R^1 \in X(R^n), \tag{20}$$
тогда $G \in S_R^0(\Phi; X)$. Ясно, что $S_R^0(\Phi; X) \subset S_R(\Phi; X)$.

Замечание 2. Пусть $R \in R_+$, $\Phi \in J_n$ и $G \in S_R(\Phi; E')$. Тогда G является допустимым.

Определение 3. Пусть $R \in R_+$, $\Phi \in J_n$ и
$$G \in S_R^0(\Phi; L_1 \cap E'), \qquad \int\limits_{R^n} G dx \neq 0. \tag{21}$$
Тогда потенциалы $F \in H_E^G(R^n)$ назовем потенциалами типа Бесселя [4-6].

Приведем критерий вложения потенциалов типа Бесселя и Рисса в ПИП $X = X(R^n)$ и опишем оптимальное ПИП $X_0 = X_0(R^n)$ для такого вложения. Важнейшую роль здесь играет комбинированный оператор типа Харди $\Re_{\varphi,T}: \ \tilde{E}_0(0,T) \to \tilde{X}(0,T), \quad T \in (0,\infty]$,
$$\Re_{\varphi,T}[g](t) = \int\limits_0^T f_\Phi(t,\tau) g(\tau) d\tau,\ t \in (0,T); \quad g \in \tilde{E}_0(0,T). \tag{22}$$
Здесь
$$\tilde{E}_0(0,T) = \left\{ g \in \tilde{E}(0,T): \quad 0 \le g \downarrow; \ \ g(t+0) = g(t), t \in (0,T) \right\}. \tag{23}$$
Отметим, что ввиду равенства (12) и убывания функции φ справедливо представление оператора в виде суммы двух операторов типа Харди на конусе убывающих функций:
$$\Re_{\varphi,T}[g](t) = \varphi(t) \int\limits_0^t g(\tau) d\tau + \int\limits_t^T \varphi(\tau) g(\tau) d\tau,\ t \in R_+: \quad g \in \tilde{E}_0(R_+). \tag{24}$$

Теорема 2 ([6]). 1) Для потенциалов типа Рисса вложение (1) эквивалентно ограниченности оператора $\Re_{\varphi,T}: \ \ \tilde{E}_0(0,T) \to \tilde{X}(0,T), T = \infty$.

2) Для потенциалов типа Бесселя вложение (1) эквивалентно совокупности двух условий:

а) ограниченность оператора $R_{\varphi,T}: \ \ \tilde{E}_0(0,T) \to \tilde{X}(0,T)$;

б) справедливость вложения $E(R^n) \cap L_\infty(R^n) \subset X(R^n)$).

Оптимальным для вложения (1) является ПИП $X_0(R^n)$, норма в котором, в представлении Люксембурга, имеет вид
$$\|f\|_{\tilde{X}_0(0,T)} = sup \left\{ \int\limits_0^\infty f^* g^* dt : g \in L_0(R_+); \|\Re_{\phi,,T}[g^*]\|_{\tilde{E}'(0,T)} \le 1 \right\}. \tag{25}$$

Некоторые вспомогательные утверждения и основная теорема

Лемма 1 [7]. Справедливо соотношение
$$\|\Re_{\phi,T}\|_{\tilde{E}(0,T)\to\tilde{X}(0,T)} = \|\Re_{\phi,T}\|_{\tilde{E}_0(0,T)\to\tilde{X}(0,T)}.$$

Лемма 2 [7]. Справедливо соотношение
$$\Re_{\phi,T}^*[g^*] = \Re_{\phi,T}[g^*].$$

Доказательство. Так как g^* — убывающая перестановка функции g, а ϕ — из класса монотонных функций $\Im_1(\infty)$, то $\Re_{\phi,T}[g^*]$ как функция от t неотрицательна и убывает. В силу непрерывности функции ϕ и абсолютной непрерывности интеграла Лебега $\Re_{\phi,T}[g^*]$ функция от t является непрерывной. Таким образом, верно искомое соотношение.

ПИП — пространство Лоренца $E(R^n) = \Lambda^p(u)$ с весом u определяется в следующем виде:

$$\|f\|_{\Lambda^p(u)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{*p}(t)u(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 < p < \infty; \\ ess \sup\limits_{t\in(0,\infty)} \{f^*(t)u(t)\}, \ p = \infty. \end{cases} \tag{26}$$

Пространством Лоренца с весом u называется и пространство $\Gamma^p(u)$:

$$\|f\|_{\Gamma^p(u)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{**p}(t)u(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 < p < \infty; \\ ess \sup\limits_{t\in(0,\infty)} \{f^{**}(t)u(t)\}, \ p = \infty. \end{cases} \tag{27}$$

Пространство $\Gamma^\infty(u)$ называют также пространством Марцинкевича.

Ассоциированными к пространствам Лоренца являются пространства, определяемые следующим образом (см., например, [8]):

$$\Lambda^p(u)' = \begin{cases} \Gamma^\infty\left(\frac{t}{U(t)}\right), p = 1; \\ \Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right), 1 < p < \infty; \\ \Lambda^1\left(\frac{1}{ess \sup\limits_{0<s<t} u(s)}\right), p = \infty. \end{cases} \tag{28}$$

Пусть

$$\Omega_1 = \{f \geq 0 : f(\tau) \downarrow\}. \tag{29}$$

Введем величину

$$H_{\Omega_1}(B_\mu) = \sup_{f\in\Omega_1} \frac{\left(\int\limits_0^T (B_\mu f)^q d\gamma\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_0^T f^p d\beta\right)^{\frac{1}{q}}}, \quad \text{где} \quad p, q \in (1, \infty). \tag{30}$$

В качестве B_μ рассмотрим обобщенный оператор Харди

$$(B_\mu f)(t) = \int\limits_{[t,T)} f d\mu.$$

Здесь β, γ, μ — неотрицательные меры Бореля на $(0, T)$.

Для формулировки результатов об оценке величины $H_{\Omega_1}(B_\mu)$ используем следующие обозначения:

$$\omega_p(t) = \left(\int\limits_0^t d\beta\right)^{\frac{1}{p}}, \ t \in (0, T); \tag{31}$$

$$\Psi(t, \tau) = \int\limits_t^\tau d\mu, \quad 0 < t < \tau < T; \tag{32}$$

$$V_p(t) = \left\{\int\limits_t^T \Psi^{p'}(t,\tau)\left(-d\left[\frac{1}{\omega_p^{p'}(\tau)}\right]\right)\right\}^{\frac{1}{p'}}, \qquad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1; \tag{33}$$

$$W_q(t) = \left(\int\limits_0^t d\gamma\right)^{\frac{1}{q}}, t \in (0, T). \tag{34}$$

Критерий конечности $H_\Omega(B_\mu)$ при $p \le q$ будет сформулирован с помощью следующих величин:

$$E_{pq} = \sup_{\tau\in(0,T)} \left[\left(\int_0^\tau \Psi^q(t,\tau) d\gamma(t) \right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\omega_p(\tau)} \right], \quad p \le q; \tag{35}$$

$$F_{pq} = \sup_{\tau\in(0,T)} \left[V_p(t) W_q(t) \right], \qquad p \le q. \tag{36}$$

Кроме того, считаем, что $\beta = N_p(1) \Leftrightarrow \int_0^1 d\beta = 1, \quad \int_1^T d\beta = \infty$.

Предложение 2. Пусть $1 < p \le q < \infty, \quad \beta \in N_p(1)$, и пусть функции ω_p и W_q непрерывны на $(0,T)$ и $\omega_p(+0) = 0$. Тогда существует постоянная $c_1 = c_1(p,q) \in [1,\infty)$ такая, что

$$c_1^{-1}(E_{pq} + F_{pq}) \le H_{\Omega_1}(B_\mu) \le c_1(E_{pq} + F_{pq}). \tag{37}$$

Доказательство. В работе [9] было показано, что при $p \le q$

$$c_2^{-1}(\dot{E_{pq}} + F_{pq}) \le H_{\Omega_1}(B_\mu) \le c_2(\dot{E_{pq}} + F_{pq}), \tag{38}$$

где $\alpha \in (0,1)$ фиксировано; $\xi_\alpha(\tau) = \omega_p^{-1}(\alpha\omega_p(\tau))$; $\quad c_2 = c_2(p,q,\alpha) \in [1,\infty)$;

$$\dot{E}_{pq} = \sup_{\tau\in(0,T)} \left[\left(\int_{\xi_\alpha(\tau)}^\tau \left(\int_t^\tau d\mu \right)^q d\gamma(t) \right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\omega_p(\tau)} \right].$$

Так как $\xi_\alpha(\tau) \in (0,\tau)$, то, в силу (32), получим

$$\dot{E_{pq}} \le E_{pq} = \sup_{\tau\in(0,T)} \left[\frac{\left(\int_0^\tau \left(\int_t^T g_\tau d\mu \right)^q d\gamma(t) \right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int_0^T g_\tau^p d\beta \right)^{\frac{1}{p}}} \right],$$

где $g_\tau(\xi) = \chi_{(0,\tau)}(\xi) \in \Omega_1$, $\quad$ так как $\quad 0 \le g_\tau(\xi) = \chi_{(0,\tau)}(\xi) \downarrow$ (по ξ).

Отсюда

$$E_{pq} \le \sup_{g\in\Omega_1} \left[\frac{\left(\int_0^T \left(\int_t^T g d\mu \right)^q d\gamma(t) \right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int_0^T g^p d\beta \right)^{\frac{1}{p}}} \right] = H_{\Omega_1}(B_\mu).$$

Из полученного неравенства и левой части оценки (38) следует левая часть оценки (37). Правая часть (37) очевидна, так как $\dot{E_{pq}} \le E_{pq}$. Предложение 2 доказано.

Замечание 3. Доказанное предложение 2 будем применять в следующих обозначениях:

$$d\beta(t) = (\varphi(t)t)^p \upsilon(t) dt,$$

т.е. $\omega_p(t) = \left(\int_0^t (\varphi(\tau)\tau)^p \upsilon(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{p}} : \omega_p(T) = \infty, \qquad d\mu = \varphi(\tau) d\tau.$

Сформулируем основной результат работы. Пусть $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, пусть $T = \infty$ для потенциалов типа Рисса, $T \in (1,\infty)$ для потенциалов типа Бесселя пусть u — измеримая функция, $0 < u < \infty$ почти всюду на $(0,T)$ и для $t \in (0,T)$.

$$U(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad \upsilon(t) = \frac{t^{2p'} u(t) \varphi(t)^{p'}}{U(t)^{p'}}, \; V(t) = \int_0^t \upsilon(\tau) d\tau.$$

Теорема 3. Пусть в обозначениях замечания 3 весовые функции таковы, что выполнены условия

$$H_{\Omega_1}(B_\mu) < \infty. \tag{39}$$

Тогда оптимальное ПИП $X_0(R^n)$ для вложения

$$H^G_{\Lambda^p(u)}(R^n) \subset X(R^n) \tag{40}$$

имеет эквивалентную норму в представлении Люксембурга:

1) для потенциалов типа Рисса

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(0,T)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(w;(0,T))};$$

2) для потенциалов типа Бесселя

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(0,T)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(w;(0,T))} + \|f\|_{\tilde{E}(R_+)},$$

где

$$w(t) = \frac{t^{p+p'-1} V(t) \int\limits_t^T \tau^{-p'} \upsilon(\tau) d\tau}{\left(V(t) + t^{p'} \int\limits_t^T \tau^{-p'} \upsilon(\tau) d\tau\right)^{p+1}}.$$

Замечание 3. Критерий выполнения условий (39) был приведен в предложении 2.

Доказательство теоремы. Воспользуемся формулой (22) из равенства (28). Из определения пространства Лоренца для нормы оператора $R_{\phi,T}$ в пространстве $(\Lambda^p(u))'$ имеем

$$\|R_{\phi,T}[g^*]\|_{\Lambda^p(u)'} = \|R_{\phi,T}[g^*]\|_{\Gamma^p(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)})} = \left(\int\limits_0^T \left(R^{**}_{\phi,T}[g^*](t)\right)^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)} dt\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Отсюда из того, что $\varphi \in J_1(T)$, так что $\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau \cong \varphi(t)$, (в предложении оценки (10), и по лемме 2 следует

$$\|R^{**}_{\phi,T}[g^*(t)]\| \cong \|R^{*}_{\phi,T}[g^*(t)]\| = \|R_{\phi,T}[g^*(t)]\|_{\Lambda^p(u)'} = \left(\int\limits_0^T \left[\int\limits_0^T f_\phi(t,\tau) g^*(\tau) d\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)} dt\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Далее, используя определение функции $f_\phi(t,\tau)$ и учитывая неотрицательность подынтегральных функций, имеем

$$\|R_{\phi,T}[g^*]\|_{(\Lambda^p(u))'} = \left(\int\limits_0^T \left[\phi(t)\int\limits_0^t g^*(\tau)d\tau + \int\limits_t^T \phi(\tau) g^*(\tau) d\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \cong$$

$$\cong \left(\int\limits_0^T \left[\phi(t)\int\limits_0^t g^*(\tau)d\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)} dt\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int\limits_0^T \left[\int\limits_t^T \phi(\tau) g^*(\tau) d\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)} dt\right)^{\frac{1}{p'}} = I_1 + I_2;$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^T \left[\phi(t)\int\limits_0^t g^*(\tau)d\tau\right]^{p'} \tilde{u}(t)dt, \qquad \tilde{u}(t) = \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)};$$

$$I_2 = \left(\int\limits_0^T \left[\int\limits_t^T \phi(\tau) g^*(\tau) d\tau\right]^{p'} \tilde{u}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Теперь оценим слагаемое I_2 через слагаемое I_1.

Отметим, что в силу убывания функции g^* интеграл I_1 можно оценить снизу:

$$I_1 \geq \left(\int\limits_0^T g^*(t)^{p'} (\phi(t)t)^{p'} \tilde{u}(t)dt \right)^{\frac{1}{p'}} := S. \tag{41}$$

Оценим I_2 сверху через S, т.е. докажем, что

$$I_2 \leq cS, \tag{42}$$

где $c \in (0,\infty)$ не зависит от функции $g \in M(0,\infty)$, измеримой по Лебегу. Отметим что $g \in M(0,\infty) \Leftrightarrow f = g^* \in \Omega_1$.

В результате имеем эквивалентность (42) $\Leftrightarrow H_{\Omega_1}(B_\mu) < \infty$ при $q = p'$.

Для оценки величины $H_{\Omega_1}(B_\mu)$ воспользуемся результатом предложения 2 и замечания 3, согласно которым

$$H_{\Omega_1}(B_\mu) < \infty \Leftrightarrow E_{qq} + F_{qq<\infty},$$

где

$$E_{qq} = \sup_{\tau \in (0,T)} \left[\left(\int\limits_0^\tau \Psi^q(t,\tau) d\gamma(t) \right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\omega_q(\tau)} \right],$$

т.е.

$$E_{qq} = \sup_{\tau \in (0,T)} \left[\left(\int\limits_0^\tau \left(\int\limits_t^\tau \varphi d\xi \right)^q \upsilon(t)dt \right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\left(\int\limits_0^\tau (\varphi(\xi)\xi)^q \upsilon(\xi)d\xi \right)^{\frac{1}{q}}} \right];$$

$$F_{qq} = \sup_{\tau \in (0,T)} [V_q(t)W_q(t)] = \sup_{\tau \in (0,T)} \left[V(t)^{\frac{1}{q}} \left\{ \int\limits_t^T \Psi^{q'}(t,\tau) \left(-d\left[\frac{1}{\omega_q^{q'}(\tau)} \right] \right) \right\}^{\frac{1}{q'}} \right].$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\Psi^{q'}(t,t) = 0, \quad \omega_q(T) = \infty$,

$$\int\limits_t^T \Psi^{q'}(t,\tau) \left(-d\left[\frac{1}{\omega_q^{q'}(\tau)} \right] \right) = \int\limits_t^T \frac{1}{\omega_q^{q'}(\tau)} d\left[\Psi^{q'}(t,\tau) \right] = q' \int\limits_t^T \frac{\Psi^{q'-1}(t,\tau) d\left[\Psi(t,\tau) \right]}{\omega_q^{q'}(\tau)}.$$

Тогда

$$\int\limits_t^T \Psi^{q'}(t,\tau) \left(-d\left[\frac{1}{\omega_q^{q'}(\tau)} \right] \right) = q' \int\limits_t^T \frac{\left(\int\limits_t^\tau \varphi(\xi)d\xi \right)^{q'-1} \varphi(\tau)d\tau}{\left(\int\limits_0^\tau (\varphi(\xi)\xi)^{q'} \upsilon(\xi)d\xi \right)^{\frac{q'}{q}}} = q' \int\limits_t^T \frac{\left(\int\limits_t^\tau \varphi(\xi)d\xi \right)^{q'-1} \varphi(\tau)d\tau}{\left(\int\limits_0^\tau (\varphi(\xi)\xi)^q \upsilon(\xi)d\xi \right)^{q'-1}}.$$

Итак, при $q = p'$, т.е $q' = p$, получаем (42) $\Leftrightarrow E_{qq} + F_{qq} < \infty$, где

$$F_{qq} = \sup_{t>0} \left[V(t)^{\frac{1}{q}} \left\{ q' \int\limits_t^T \frac{\left(\int\limits_t^\tau \varphi(\xi)d\xi \right)^{q'-1} \varphi(\tau)d\tau}{\left(\int\limits_0^\tau (\varphi(\xi)\xi)^q \upsilon(\xi)d\xi \right)^{q'-1}} \right\}^{\frac{1}{q'}} \right].$$

Из (41) и (42) следует, что $I_1 + I_2 \approx I_1$, и тогда

$$\|R_{\varphi,T}[g^*]\|_{\Lambda^p(u)'} = \|R_{\varphi,T}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} \approx I_1 = \left(\int\limits_0^T \left[\varphi(t)\int\limits_0^t g^*(\tau)d\tau\right]^{p'} \tilde{u}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^T \left[\varphi(t)\frac{1}{t}\int\limits_0^t g^*(\tau)d\tau\right]^{p'} \frac{t^{2p'}u(t)}{U^{p'}(t)}dt\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int\limits_0^T [\varphi(t)g^{**}(t)]^{p'} \frac{t^{2p'}u(t)}{U^{p'}(t)}dt\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^T g^{**}(t)^{p'} \frac{t^{2p'}u(t)\varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}dt\right)^{\frac{1}{p'}} = \|g\|_{\Gamma^{p'}(\upsilon)}. \tag{43}$$

Из формулы (25) видим, что норма в оптимальном ПИП $\widetilde{X}_0(0,T)$ является ассоциированной к норме (43), т.е.

$$\|f\|_{\widetilde{X}_0(0,T)} \cong \|f\|_{[\Gamma^{p'}(\upsilon)]'}, \tag{44}$$

где

$$\upsilon(t) = \frac{t^{2p'}u(t)\varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}.$$

В работе [10] показано, что норма, стоящая в правой части (44), может быть записана в следующем виде:

$$\|f\|_{[\Gamma^{p'}(\upsilon)]'} \cong \left(\int\limits_0^T \frac{t^{p+p'-1}f^{**}(t)^p V(t)\int\limits_t^T \tau^{-p'}\upsilon(\tau)d\tau}{\left(V(t) + t^{p'}\int\limits_t^T \tau^{-p'}\upsilon(\tau)d\tau\right)^{p+1}}dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$V(t) = \int\limits_0^t \upsilon(\tau)d\tau = \int\limits_0^t \frac{\tau^{2p'}u(\tau)\varphi^{p'}(\tau)}{U^{p'}(\tau)}d\tau;$$

$$\omega(t) = \frac{t^{p+p'-1}V(t)\int\limits_t^T \tau^{-p'}\upsilon(\tau)d\tau}{\left(V(t) + t^{p'}\int\limits_t^T \tau^{-p'}\upsilon(\tau)d\tau\right)^{p+1}}.$$

Функция $\omega(t)$ является весом, который входит в условие теоремы 3.

Таким образом, мы получаем, что:

1) для обобщенных потенциалов Рисса:

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(R_+)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(w;R_+)};$$

2) для обобщенных потенциалов Бесселя

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(R_+)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(w;(0,T))} + \|f\|_{\tilde{E}(R_+)},$$

тем самым, теорема доказана.

Замечание 4. В работе [7] были рассмотрены обобщенные потенциалы Рисса. При получении оптимального ПИП для вложения (37) на весовые функции было наложено условие, гарантирующее конечность величины:

$$H(B_\mu) = \sup_{0\le f\in M(0,\infty)} \frac{\left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_t^\infty g d\tau\right)^q \upsilon(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_0^\infty g(t)^q t^q \upsilon(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}},$$

а именно:

$$H(B_\mu) < \infty \Leftrightarrow B = \sup_{r>0} \left(\int_0^r \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_r^\infty \frac{U^p(t)}{t^{2p} u^{\frac{p}{p'}}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Условия, наложенные в данной работе, учитывают убывание функций $f \in \Omega_1$ и эквивалентны конечности величины $H_{\Omega_1}(B_\mu)$. Эти условия, приведенные в предложении 2, менее жесткие, чем условие $B < \infty$. Кроме того, в данной работе в рассмотрение включены также обобщенные потенциалы Бесселя.

Список литературы

1 Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1990. — 724 с.

2 Bennett C. Interpolation of Operators / C.Bennett, R.Sharpley. — Leningrad: Academic Press INC, 1946. — 469 p.

3 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М.Никольский. — М.: Наука, 1977. — 456 с.

4 Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И.М.Стейн. — М.: Мир, 1973. — 344 с.

5 Мазья В.Г. Пространства Соболева / В.Г.Мазья. — Л.: ЛГУ, 1985. — 415 с.

6 Goldman M.L. Optimal Embeddings of Generalized Bessel and Riesz Potentials / M.L. Goldman // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics. —2010.—№ 4.—pp. 1–21.

7 Гольдман М.Л. Оптимальные вложения потенциалов типа Бесселя и Рисса / М.Л. Гольдман, О.М. Гуссельникова // Вестн. РУДН. Сер. Математика, информатика, физика. — 2011. — № 3. — С. 5–17.

8 Малышева А.В. Оптимальные вложения обобщенных потенциалов Рисса / А.В. Малышева // Вестн. РУДН. Сер. Математика, информатика, физика. — 2013. — № 2. — С. 28–37.

9 Gogatishvili A. Characterisation of embeddings in Lorentz spaces / A.Gogatishvili, M.Johansson, C.A. Okpoti and L.-E.Persson // Bulletin Austral. Math. Soc. — 2007. — Vol. 76. — No. 1. — P. 69–92.

10 Гольдман М.Л. Об оценке равномерного модуля непрерывности обобщенного потенциала Бесселя / М.Л. Гольдман, А.В. Малышева // Труды Математического ин-та им.В.А.Стеклова. — 2013. — 283. — № 4. — С. 1–12.

Г.Ж. Қаршыгина

Лоренц кеңістігі базасында Бессел және Рисс түріндегі потенциалдарды тиімді іштестіру

Мақалада n-өлшемді евклид кеңістігінде потенциалдар кеңістігі қарастырылды. Олар жалпы түрдегі түйіндердің орамдарының көмегімен алмастырылымды-инвариантты кеңістіктер негізінде құрастырылған. Соның ішінде классикалық Бессел және Рисс потенциалдар кеңістіктері зерттелді. Сондай-ақ потенциалдардың интегралдық қасиеттері қойылуын және олар үшін алмастырылымды-инвариантты кеңістіктерге іштестіру критерийлері табылған. Салмағы бар Лоренц кеңістігі базасында тиімді іштестіру жолы дәлелденген.

Кілт сөздер: орам, кемімелі алмастырылымды конустар, алмастырылымды-инвариантты кеңістіктер, потенциалдар кеңістігі, жалпыланған Бессел және Рисс кеңістіктері.

G.Zh. Karshygina

Optimal embeddings potentials type Bessel and Riesz on the base of Lorentz spaces

In this article, we study the spaces of potentials is n-dimensional Euclidean space. They constructed on the basis of rearrangement-invariant spaces (RISs) by means of convolutions with kernels of general form. In particular included in the consideration, the classical spaces of potentials of Bessel and Riesz. For them, the criteria for embedding in the RIS are found, and explicit descriptions of the optimal RIS for these embeddings are obtained in the case of the basic weight Lorentz space.

Keywords: convolution, cones of decreasing rearrangements, potential space, generalized Bessel and Riesz potentials.

References

1 Tikhonov, A.N. & Samarsky, A.A. (1990). *Uravneniia matematicheskoi fiziki [The mathematical equation].* Moscow: Nauka [in Russian].

2 Bennett, C. & Sharpley, R. (1946). *Interpolation of Operators.* Leningrad: Academic Press INC.

3 Nikolsky, S.M. (1977). *Priblizhenie funktsii mnohikh peremennykh i teoremy vlozheniia [Approximation of functions of many variables and embedding theorems].* Moscow: Nauka [in Russian].

4 Steyn, I.M. (1973). *Sinhuliarnye intehraly i differentsialnye svoistva funktsii [Singular integrals and differential properties of functions].* Moscow: Mir [in Russian].

5 Mazya, B.G. (1985). *Prostranstva Soboleva [The Sobolev space].* Leningrad: LHU [in Russian].

6 Goldman, M.L. (2010). Optimal Embeddings of Generalized Bessel and Riesz Potentials. *Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics, 4,* 1–21.

7 Goldman, M.L.& Gusselnikova, O.M. (2011). Optimalnye vlozheniia potentsialov tipa Besselia i Rissa [Optimal Embeddings of Generalized Bessel and Riesz Potentials]. *Vestnik RUDN. Seriia matematika, informatika – Bulletin of the RUDN, series mathematics, computer science, physics, 3,* 5–17 [in Russian].

8 Malysheva, A.B. (2013). Optimalnye vlozheniia obobshchennykh potentsialov Rissa [Optimal embeddings of generalized Riesz potentials]. *Vestnik RUDN. Seriia matematika, informatika – Bulletin of the RUDN, series mathematics, computer science, physics, 2,* 28–37 [in Russian].

9 Gogatishvili, A., Johansson, M., Okpoti, C.A. & Persson, L.-E. (2007). Characterisation of embeddings in Lorentz spaces. *Bulletin Austral. Math. Soc., Vol. 76,* 1, 69–92.

10 Goldman, M.L. & Malysheva, A.B. (2013). Ob otsenke ravnomernoho modulia nepreryvnosti obobshchennoho potentsiala Besselia [On the estimation of the uniform modulus of continuity of the generalized Bessel potential]. Trudy Matematicheskoho instituta imeni V.A.Steklova – Proceeding of the V.A.Steklov Institute of Mathematics, 283, 4, 1–12 [in Russian].

УДК 517.968.2

Ж.Х. Жунусова

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
(E-mail: zhzhkh@mail.ru)

Построение поверхности к сингулярному односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера

Одной из актуальных задач математики является исследование нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Исследование в данном направлении очень важно, так как результаты находят теоретическое и практическое применение. Существуют различные подходы к решению данных уравнений. Методы теории солитонов позволяют построить решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Одним из методов решения указанных выше уравнений является метод обратной задачи рассеяния. Цель данной работы — построение поверхности, соответствующей сингулярному односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера с притяжением в (1+1)-размерности. Автором рассмотрено построение поверхности в (1+1)-размерности в смысле Фокаса-Гельфанда. Согласно данному подходу в (1+1)-мерном случае нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных даются в виде условий нулевой кривизны и являются условием совместности системы линейных уравнений. В этом случае существует поверхность с иммерсионной функцией. Поверхность, определенная посредством иммерсионной функции, идентифицируется с поверхностью в трехмерном пространстве. С помощью солитонной иммерсии для сингулярного односолитонного решения нелинейного уравнения Шредингера найдена поверхность с соответствующими коэффициентами первой квадратичной формы.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, поверхность, солитонное решение, фундаментальная форма, условие нулевой кривизны.

1 Введение

Некоторые нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных являются интегрируемыми, допускают физически интересные точные решения, более того, эти интегрируемые уравнения разрешимы методом обратной задачи рассеяния [1-6]. Исследование интегрируемых уравнений в (1+1)-, (2+1)-измерениях являются актуальными с точки зрения математической физики [2-5]. Интегрируемые уравнения допускают различные виды решений: односолитонное решение, решение доменной стенки, вихревое решение и т.д. Более того, решения интегрируемых уравнений имеют геометрические характеристики. Для исследования геометрических свойств решений применяется теория дифференциальной геометрии кривых и поверхностей.

Одной из известных моделей является модель ферромагнетика Гейзенберга

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times \mathbf{S}_{xx},$$

где $\times$ — векторное произведение; $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$; $\mathbf{S} = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$.

Лакшмананом установлено, что данная модель при $\mathbf{S}^2 = +1$ эквивалентна в геометрическом смысле нелинейному уравнению Шредингера с притяжением, которое важно для физических приложений. Эту эквивалентность называют лакшманановой. Отметим, что лакшмананова эквивалентность разработана не только для интегрируемых, но и для неинтегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, и ее область применимости по определению ограничена установлением эквивалентности спиновой системы и некоторого нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, например, шредингеровского типа. Заметим, что для интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных лакшмананова эквивалентность не предполагает знания представления Лакса рассматриваемых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

На сегодня известны обобщения рассмотренной выше модели ферромагнетика Гейзенберга в (2+1)-измерениях. Например, в работе [5] рассмотрена обобщенная модель ферромагнетика Гейзенберга следующего вида:

$$\mathbf{S}_t = (\mathbf{S} \times \mathbf{S}_y + u\mathbf{S})_x;$$

$$u_x = -(\mathbf{S}, (\mathbf{S}_x \times \mathbf{S}_y)),$$

где $\mathbf{S}$ — спин-вектор, $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$; $\times$ — векторное произведение; u — скалярная функция. Мы отождествляем спин-вектор $\mathbf{S}$ с вектором $\mathbf{r}_x$ согласно работе [2]:

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{r}_x.$$

Тогда обобщенная модель ферромагнетика Гейзенберга принимает вид

$$\mathbf{r}_{xt} = (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_{xy} + u\mathbf{r}_x)_x;$$

$$u_x = -(\mathbf{r}_x, (\mathbf{r}_{xx} \times \mathbf{r}_{xy})).$$

Таким образом, единый спиновый подход используется для исследования геометрических характеристик решения нелинейного уравнения.

В данной работе мы рассматриваем построение поверхности в (1+1)-мерном пространстве в смысле Фокаса-Гельфанда [3].

2 Построение поверхности в смысле Фокаса-Гельфанда

Согласно работе Фокаса-Гельфанда [3] приведем построение солитонной поверхности. В (1+1)-мерном случае нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных даются в виде условий нулевой кривизны:

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \tag{1}$$

где $[U, V] = UV - VU$, матрица U задана, а матрица V выражается в терминах элементов матрицы U.

Одной из хорошо известных моделей является нелинейное уравнение Шредингера, которое важно для физических приложений,

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2\beta|\psi|^2\psi = 0, \tag{2}$$

где $\beta = +1$, ψ является комплексной функцией.

Также нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных (1) являются условием совместности системы линейных уравнений:

$$\phi_x = U\phi, \phi_t = V\phi. \tag{3}$$

В этом случае существует поверхность с иммерсионной функцией $P(x,t)$, определяемая следующими формулами: $\frac{\partial P}{\partial x} = \phi^{-1}X\phi, \frac{\partial P}{\partial t} = \phi^{-1}Y\phi$. Поверхность, определенная посредством $P(x,t)$, идентифицируется с поверхностью в трехмерном пространстве, определенной координатами $x_j = P_j(x,t),\ j = 1, 2, 3$. Репер на поверхности дается тройкой [3]:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \phi^{-1}X\phi, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \phi^{-1}Y\phi, \quad N = \phi^{-1}J\phi,$$

где $J = \frac{[X,Y]}{|[X,Y]|}, \quad |\ X\ | = \sqrt{< X, X >}$. Здесь по определению

$$< X, Y > = -\frac{1}{2}tr(XY),$$

где X, Y являются некоторыми матрицами. Первая и вторая фундаментальные формы в смысле Фокаса-Гельфанда даются как

$$I = < X, X > dx^2 + 2 < X, Y > dxdt + < Y, Y > dt^2; \tag{4}$$

$$II = < \frac{\partial X}{\partial x} + [X, U], J > dx^2 + 2 < \frac{\partial X}{\partial t} + [X, V], J > dxdt + < \frac{\partial Y}{\partial t} + [Y, V], J > dt^2. \tag{5}$$

Как показано в работе [3], функция иммерсии P может быть определена как

$$P = \gamma_0 \phi^{-1}\phi_\lambda + \phi^{-1} M_1 \phi = \sum_{j=1}^{3} P_j f_j,$$

где M_1 является матричной функцией, определенной по λ, x, t. Здесь $f_j = -\frac{i}{2}\sigma_j$ является базисом соответствующей алгебры, σ_j матрицы Паули и $[f_i, f_j] = f_k$. В этом случае X, Y можно записать как

$$X = \gamma_0 U_\lambda + M_{1x} + [M_1, U], Y = \gamma_0 V_\lambda + M_{1t} + [M_1, V].$$

Пусть матрицы X, Y, J имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В этом случае элементы матрицы J выражаются через элементы матрицы X и Y в соответствии со следующими формулами:

$$c_{11} = \frac{a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21}}{|\,[X,Y]\,|}; \quad c_{21} = \frac{a_{21}(b_{11} - b_{22}) + b_{21}(a_{22} - a_{11})}{|\,[X,Y]\,|};$$

$$c_{12} = \frac{b_{12}(a_{11} - a_{22}) + a_{12}(b_{22} - b_{11})}{|\,[X,Y]\,|}, \quad c_{22} = \frac{a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12}}{|\,[X,Y]\,|}. \tag{7}$$

Тогда первая фундаментальная форма (4) двухмерной поверхности будет $I = Edx^2 + 2Fdxdt + Gdt^2$, где

$$E = -\frac{1}{2}(a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{22}^2), \quad F = -\frac{1}{2}(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}); \tag{8}$$

$$G = -\frac{1}{2}(b_{11}^2 + 2b_{12}b_{21} + b_{22}^2). \tag{9}$$

В качестве примера солитонного уравнения, приводящего к такой иммерсии, рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера (2). В этом случае матрицы U, V имеют вид [4]

$$U = \frac{\lambda\sigma_3}{2i} + U_0,\ U_0 = i\begin{pmatrix} 0 & \bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix};$$

$$V = \frac{i\lambda^2}{2}\sigma_3 + i|q|^2\sigma_3 - i\lambda\begin{pmatrix} 0 & \bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \bar{q}_x \\ -q_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Справедлива следующая.

Лемма. Вторая фундаментальная форма в смысле Фокаса-Гельфанда, соответствующая сингулярному односолитонному решению q нелинейного уравнения Шредингера, имеет вид

$$II = Ldx^2 + 2Mdxdt + Ndt^2, \tag{11}$$

где

$$L = -\frac{1}{2}\{a_{11x}c_{11} + a_{12x}c_{21} + a_{21x}c_{12} + a_{22x}c_{22} - \lambda i(a_{21}c_{12} - a_{12}c_{21}) +$$
$$+ iq(a_{12}c_{11} + a_{22}c_{12} - a_{11}c_{12} - a_{12}c_{22}) + i\bar{q}(a_{21}c_{22} + a_{11}c_{21} - a_{22}c_{21} - a_{21}c_{11})\}; \tag{12a}$$

$$M = -\frac{1}{2}\{a_{11t}c_{11} + a_{12t}c_{21} + a_{21t}c_{12} + a_{22t}c_{22} + i(\lambda^2 + 2|q|^2)(a_{21}c_{12} - a_{12}c_{21}) +$$
$$+ (q_x + \lambda iq)(a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} - a_{12}c_{11} - a_{22}c_{12}) +$$
$$+ (\bar{q}_x - \lambda i\bar{q})(a_{11}c_{21} + a_{21}c_{22} - a_{21}c_{11} - a_{22}c_{21})\}; \tag{12b}$$

$$N = -\frac{1}{2}\{b_{11t}c_{11} + b_{12t}c_{21} + b_{21t}c_{12} + b_{22t}c_{22} + i(\lambda^2 + 2|q|^2)(b_{21}c_{12} - b_{12}c_{21}) +$$
$$+ (q_x + \lambda iq)(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} - b_{12}c_{11} - b_{22}c_{12}) +$$
$$+ (\bar{q}_x - \lambda i\bar{q})(b_{11}c_{21} + b_{21}c_{22} - b_{21}c_{11} - b_{22}c_{21})\}. \tag{12c}$$

Доказательство. Подставляем матрицы (6), (10) в (5). После некоторых вычислений получим (11), (12a)–(12c). Лемма доказана.

3 Теорема о поверхности, соответствующей сингулярному односолитонному решению

Рассмотрим частный случай иммерсии при $\gamma_0 = 1, \quad M_1 = 0$. В данном случае имеем

$$X = U_\lambda = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ Y = V_\lambda = -i\begin{pmatrix} -\lambda & \bar{q} \\ q & \lambda \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\bar{q}}{\sqrt{q\bar{q}}} \\ \frac{q}{\sqrt{q\bar{q}}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

и $P = \phi^{-1}\phi_\lambda$. Чтобы вычислить явные выражения для функций иммерсии P, рассмотрим сингулярное односолитонное решение нелинейного уравнения Шредингера, которое имеет вид [4]

$$q(x,t) = 2\eta\frac{exp(-2i\xi x - 4i(\xi^2 - \eta^2)t - i\delta)}{sh[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}, \tag{14}$$

где $x_0 = \frac{1}{2\eta}ln|\frac{m_{02}}{m_{01}}|$, $\delta = argm_{02} - argm_{01}$, $\xi = Re\lambda$, $\eta = Im\lambda$.

Теорема. Сингулярному односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера соответствует поверхность в смысле Фокаса-Гельфанда со следующими коэффициентами первой фундаментальной формы:

$$E = \frac{64\eta^2}{(\lambda - \bar{\lambda})^4 sh^4[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}(2\eta^2 + (\xi^2 + \eta^2)sh^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]); \tag{15a}$$

$$\begin{aligned} F = \frac{128\eta^2}{(\lambda - \bar{\lambda})^4 sh^4[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}&(\xi(\xi^2 - \eta^2)sh^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + \\ +2\xi\eta^2 ch^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)])&(cos^2(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta) - sin^2(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta) + \\ +(6\eta\xi^2 - 2\eta^3)&cos(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta)sin(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta) \times \\ \times sh[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]&ch[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + 2\eta\xi; \end{aligned} \tag{15b}$$

$$\begin{aligned} G = \frac{256\eta^2}{(\lambda - \bar{\lambda})^4 sh^4[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}&((\xi^2 - \eta^2)^2 sh^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + \\ +4\xi^2\eta^2 ch^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + 4\xi^2\eta^2), \end{aligned} \tag{15c}$$

где $\lambda_1 = const$.

Доказательство. Решение линейной системы найдем в виде

$$\psi = \phi e^{-(\frac{\lambda\sigma_3}{2i}x + \frac{i\lambda^2}{2}\sigma_3 t)}. \tag{16}$$

Учитывая (16) и применяя (10), имеем

$$\psi_x = (\frac{\lambda\sigma_3}{2i} + U_0)\psi - \psi\frac{\lambda\sigma_3}{2i} = \frac{\lambda\sigma_3}{2i}\psi - \psi\frac{\lambda\sigma_3}{2i} + U_0\psi = [\frac{\lambda\sigma_3}{2i}, \psi] + U_0\psi. \tag{17}$$

Возьмем

$$\psi = I - \frac{\tilde{A}}{\lambda - \lambda_1^*}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1^* - const. \tag{18}$$

Подставим (18) в (17):

$$\psi_x = U_0 - \frac{U_0\tilde{A}}{\lambda - \lambda_1^*} - \frac{1}{2i}[\sigma_3, \tilde{A}] - \frac{\lambda_1^*}{2i(\lambda - \lambda_1^*)}[\sigma_3, \tilde{A}]. \tag{19}$$

С другой стороны, из (18) следует

$$\psi_x = -\frac{\tilde{A}_x}{\lambda - \lambda_1^*}. \tag{20}$$

Из (19) и (20) имеем

$$-\frac{\tilde{A}_x}{\lambda - \lambda_1^*} = U_0 - \frac{U_0\tilde{A}}{\lambda - \lambda_1^*} - \frac{1}{2i}[\sigma_3, \tilde{A}] - \frac{\lambda_1^*}{2i(\lambda - \lambda_1^*)}[\sigma_3, \tilde{A}]. \tag{21}$$

Таким образом,

$$\tilde{A}_x = U_0\tilde{A} + \frac{\lambda_1^*}{2i}[\sigma_3, \tilde{A}], U_0 = \frac{1}{2i}[\sigma_3, A]. \tag{22}$$

Заметим, что

$$[\sigma_3, \tilde{A}] = \sigma_3\tilde{A} - \tilde{A}\sigma_3 = 2\begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ -\tilde{c} & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Затем, подставляя (23) в (7), получим

$$U_0 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ -\tilde{c} & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Подставляя (23) в (22), имеем

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_x & \tilde{b}_x \\ \tilde{c}_x & \tilde{d}_x \end{pmatrix} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} \tilde{b}\tilde{c} & \tilde{b}\tilde{d} \\ -\tilde{c}\tilde{a} & -\tilde{c}\tilde{b} \end{pmatrix} + \frac{\lambda_1^*}{i}\begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ -\tilde{c} & 0 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

Из (10) и (24) получим

$$i\begin{pmatrix} 0 & \bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i\bar{q} = \frac{1}{i}b \\ iq = -\frac{1}{i}c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\bar{q} \\ c = q. \end{cases} \tag{26}$$

Таким образом, мы нашли матрицу $\tilde{A}$ в явном виде с компонентами (25). Используя (14), получим

$$\tilde{a} = i2\eta cth[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + c_1. \tag{27}$$

Из (25) следует $\tilde{a} = -\frac{i\tilde{c}_x}{c} - \lambda_1^* \Rightarrow \tilde{a} = -\frac{1}{i}\int \bar{q}q dx$. Используя (14), получим

$$\tilde{a}_x = \frac{1}{i}\tilde{b}\tilde{c} \Rightarrow \tilde{a}_x = \frac{1}{i}(-\bar{q})q, \tag{28}$$

Тогда

$$\tilde{a} = -\frac{iq_x}{q} - \lambda_1^*. \tag{29}$$

Следовательно, из (25), (26) имеем

$$\tilde{d} = \frac{i\tilde{b}_x}{\tilde{b}} - \lambda_1^* \Rightarrow \tilde{d} = \frac{i(-\bar{q})_x}{(-\bar{q})} - \lambda_1^* \Rightarrow \tilde{d} = \frac{i\bar{q}_x}{\bar{q}} - \lambda_1^*. \tag{30}$$

Из (25), (26) следует

$$\tilde{d}_x = -\frac{1}{i}\tilde{c}\tilde{b}, \tag{31}$$

Более того, из (23), (31) следует

$$\tilde{d} = \frac{1}{i}\int q\bar{q}dx \tag{32}$$

Учитывая (22), получим (28) в виде

$$\tilde{d} = -\tilde{a}. \tag{33}$$

Следовательно,

$$\tilde{a} = -i2\eta cth[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + c_1. \tag{34}$$

Таким образом, матрица $\tilde{A}$ для сингулярного односолитонного решения (14) нелинейного уравнения Шредингера принимает вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} i2\eta cth[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + c_1 & -2\eta\frac{exp\{i(2\xi x + 4(\xi^2-\eta^2)t + \delta)\}}{sh[2\eta(x - x_0 + 4\xi t)]} \\ 2\eta\frac{exp\{-i(2\xi x + 4(\xi^2-\eta^2)t + \delta)\}}{sh[2\eta(x - x_0 + 4\xi t)]} & -i2\eta cth[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + c_1 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Далее возьмем $\phi = I - \frac{A}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}$, где λ_1 является постоянной, тогда из (13) имеем

$$P = \phi^{-1}\phi_\lambda = (I + \frac{\tilde{A}}{\lambda - \lambda_1})\frac{\tilde{A}}{(\lambda - \bar{\lambda_1})^2}. \tag{36}$$

С другой стороны, получим

$$P = \sum_{j=1}^{3} P_j f_j = -\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{3} P_j \sigma_j = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}P_3 & -\frac{i}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_2 \\ -\frac{i}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 & \frac{i}{2}P_3 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Из (36), (37) посредством (31) имеем $P_3 = \dfrac{2i\tilde{a}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}$. Теперь с помощью (33) найдем P_3 в явном виде для сингулярного односолитонного решения нелинейного уравнения Шредингера:

$$P_3 = -\frac{4\eta}{(\lambda - \bar{\lambda})^2} cth[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + \frac{2ic_1}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)}. \tag{38}$$

Из (36), (37) имеем $P_2 = \frac{\tilde{c} - \tilde{b}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}$. Таким образом,

$$P_1 = \frac{i(\tilde{c} + \tilde{b})}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}, \quad P_2 = \frac{(\tilde{c} - \tilde{b})}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}, \quad P_3 = \frac{2i\tilde{a}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}.$$

Из (36), (14), используя известные формулы

$$sh\zeta = \frac{e^{\zeta} - e^{-\zeta}}{2};\ ch\zeta = \frac{e^{\zeta} + e^{-\zeta}}{2};\ cos\zeta = \frac{e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}}{2};\ sin\zeta = \frac{e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}}{2i}, \tag{39}$$

где $\zeta = 2\eta(x - x_0 + 4\xi t)$, получим явные значения для компонентов P_1, P_2 матрицы P:

$$P_1 = -\frac{4i\eta sin(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta)}{(\lambda - \bar{\lambda})^2 sh[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}, \tag{40a}$$

$$P_2 = \frac{4\eta cos(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta)}{(\lambda - \bar{\lambda})^2 sh[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}. \tag{40b}$$

Теперь вычислим коэффициенты первой фундаментальной формы, т.е.

$$E = P_{1x}^2 + P_{2x}^2 + P_{3x}^2. \tag{41}$$

Для этого вычислим P_{1x}, P_{2x}, P_{3x}. Возводим в квадрат первые производные и подставим в (41), тогда

$$E = \frac{64\eta^2}{(\lambda - \bar{\lambda})^4 sh^4[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}(2\eta^2 + (\xi^2 + \eta^2)sh^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]).$$

Подобным образом, согласно формулам

$$F = P_{1x}P_{1t} + P_{2x}P_{2t} + P_{3x}P_{3t}, \quad G = P_{1t}^2 + P_{2t}^2 + P_{3t}^2,$$

получим значения

$$F = \frac{128\eta^2}{(\lambda - \bar{\lambda})^4 sh^4[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}(\xi(\xi^2 - \eta^2)sh^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] +$$

$$+2\xi\eta^2 ch^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)])(cos^2(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta) - sin^2(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta) +$$

$$+(6\eta\xi^2 - 2\eta^3)cos(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta)sin(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta)\times$$

$$\times sh[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]ch[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + 2\eta\xi);$$

$$G = \frac{256\eta^2}{(\lambda - \bar{\lambda})^4 sh^4[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}((\xi^2 - \eta^2)^2 sh^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] +$$

$$+4\xi^2\eta^2 ch^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + 4\xi^2\eta^2).$$

Теорема доказана.

4 Заключение

Таким образом, мы исследовали построение поверхности в смысле Фокаса-Гельфанда в (1+1)-измерении. В качестве примера рассмотрели (1+1)-мерное нелинейное уравнение Шредингера с притяжением. Найдена первая фундаментальная форма с соответствующими коэффициентами (15) для интегрируемой поверхности, соответствующей сингулярному односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера с притяжением. Для нахождения поверхности применены подход Фокаса-Гельфанда и теория дифференциальной геометрии поверхностей.

Список литературы

1 Ablowitz M.J. Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering / M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson. — Cambridge: Cambridge University Press, 1992. — 516 p.

2 Myrzakulov R. A (2+1)-dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterparts, solitons and localized coherent structures / R.Myrzakulov, S.Vijayalakshmi et all. // J. Phys. Lett. A. — 1997. — No. 233A. — P. 391–396.

3 Ceyhan O. Deformations of surfaces associated with integrable Gauss-Mainardi-Codazzi equations / O.Ceyhan, A.S.Fokas, M.Gurses // J. Math. Phys. — 2000. — No. 4. — P. 2551–2270.

4 Маханьков В.Г. Задача Римана на плоскости и нелинейное уравнение Шредингера / В.Г.Маханьков, Р.Мырзакулов // В кн. «Сообщения Объединенного института ядерных исследований» Р5-84-742. — Дубна, 1984. — С. 6.

5 Zhunussova Zh. Geometrical features of the soliton solution / Zh.Zhunussova // Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Springer, Series: Trends in Mathematics. — 2015. — P. 671–677.

6 Zhunussova Zh. Reconstruction of surface corresponding to domain wall solution / Zh.Zhunussova // Proceeding of the forth International conference «Modern problems of Applied mathematics and information technologies». — Samarkand: Al-Khorezmiy, 2014. — P. 283.

Ж.Х. Жүнісова

Сызықты емес Шредингер теңдеуінің сингулярлы бірсолитондық шешіміне сәйкес бет құру

Сызықты емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді зерттеу — математиканың өзекті проблемаларының бірі. Нәтижелердің теориялық және практикалық қолданысы болғандықтан, бұл бағыттағы зерттеулер маңызды. Бұл теңдеулерді шешу үшін әртүрлі әдістер бар. Сызықты емес дербес туындылы теңдеулердің шешімін солитондар теориясы әдістерін қолданып табуға болады. Кері сейілу әдісі — айтылған теңдеулерді шешуге арналған әдістердің бірі. Жұмыстың мақсаты — (1+1)-өлшемдегі сызықты емес, Шредингер теңдеуінің сингулярлық бір солитондық шешіміне сәйкес бет құру. Мақалада (1+1)-өлшемде Фокас-Гельфанд мағынасындағы бетті құру қарастырылған. (1+1)-өлшемде сызықты емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер нөлдік қисықтық шарты арқылы беріледі және сызықты теңдеулердің шарты болып табылады. Бұл жағдайда иммерсиялық функциясы бар бет табылады. Иммерсиялық функциясы арқылы анықталған бет үш өлшемді кеңістіктегі бетпен сәйкестендіріледі. Сызықты емес Шредингер теңдеуінің сингулярлық бір солитондық шешіміне сәйкес бірінші квадраттық форманың коэффициенттерімен берілген бет солитондық иммерсия арқылы құрылады.

Кілт сөздер: сызықты емес теңдеу, бет, солитондық шешім, фундаменталдық форма, нөлдік қисықтық шарты.

Zh.Kh. Zhunussova

The surface to singular solitonic solution of the nonlinear Schrodinger equation

One of the topical problems of mathematics is studying of nonlinear differential equations in partial derivatives. Investigation in this area is important, since the results get the theoretical and practical applications. There are some different approaches for solving of the equations. Methods of the theory of solitons allow to construct the solutions of the nonlinear differential equations in partial derivatives. One of the methods for solving of the equations is the inverse scattering method. The aim of the work is to construct a surface corresponding to a singular onesolitonic solution of the nonlinear Schrodinger equation with gravity in (1+1)-dimensions. In this work the construction of the surface in (1+1)-dimensions in Fokas-Gelfand sense is considered. According to the approach the nonlinear differential equations in (1+1)-dimension are given in the form of zero curvature condition and are compatibility condition of the linear system equations. In this case there is a surface with immersion function. The surface defined by the immersion function is identified to the surface in three-dimensional space. Surface with coefficients of the first fundamental form corresponding to the singular onesolitonic solution of the nonlinear Schrodinger equation is found by soliton immersion.

Keywords: nonlinear equation, surface, solitonic solution, fundamental form, zero curvature condition.

References

1 Ablowitz, M.J. & Clarkson, P.A. (1992). Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press.

2 Myrzakulov, R., Vijayalakshmi, S. & et all. (1997). A (2+1)-dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterparts, solitons and localized coherent structures. *J. Phys. Lett. A., 233A,* 391–396.

3 Ceyhan, O., Fokas, A.S. & Gurses, M. (2000). Deformations of surfaces associated with integrable Gauss-Mainardi-Codazzi equations. *J. Math. Phys., 4,* 2551–2270.

4 Makhankov, V.G. & Myrzakuov, R. (1984). Zadacha Rimana na ploskosti i nelineinoe uravnenie Shredinhera [Riemann Problem on a Plane and Nonlinear Schroedinger Equation]. *V knihe «Soobshcheniia Obieedinennoho instituta iadernykh issledovanii» P5-84-742 – In book «Communication of the Joint Institute for Nuclear Research» P5-84-742.* Dubna [in Russian].

5 Zhunussova, Zh. (2015). Geometrical features of the soliton solution. *Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Springer, Series: Trends in Mathematics,* 671–677.

6 Zhunussova, Zh. (2014). Reconstruction of surface corresponding to domain wall solution. *Proceeding of the forth International conference «Modern problems of Applied mathematics and information technologies, 283.* Samarkand: Al-Khorezmiy.

УДК 517.51

А. Калыбай[1], Р. Ойнаров[2], С. Шалгинбаева[3]

[1] *Университет КИМЭП, Алматы, Казахстан;*
[2] *Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан;*
[3] *Казахский университет международных отношений и мировых языков им. Абылай хана, Алматы, Казахстан*
(E-mail: o_ryskul@mail.ru)

Дискретное весовое неравенство Харди в разностной форме

В статье мы находим необходимые и достаточные условия для выполнения дискретного неравенства Харди с весами, записанного в разностной форме. Задача исследуется на множестве финитных последовательностей. Ключевой результат данной статьи – это нахождение оценок для точной константы исследуемого неравенства. Данные оценки в дальнейшем будут нами применены для установления качественных характеристик, таких как условия осцилляторности и неосцилляторности, некоторых разностных уравнений. Более того, как следствие основных результатов, мы находим критерии вложения некоторых пространств и компактности этого вложения.

Ключевые слова: неравенство Харди, весовые последовательности, оператор, пространство последовательностей, вложение, компактность.

Введение

Пусть $0 < p, q \leq \infty$. Пусть $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ – неотрицательная, а $\rho = \{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$ – положительная последовательности действительных чисел.

Дискретным весовым неравенством Харди называется неравенство вида

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

для всех последовательностей действительных чисел $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Неравенство для всех $0 < p, q \leq \infty$ исследовано достаточно хорошо в работах [1-3], а в книге [4] даны история вопроса и сводка полученных результатов по неравенству Харди (1).

Если в (1) положим $y_1 = 0$, $y_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, $n = 1, 2, ...$, то неравенство (1) переходит в неравенство Харди в разностной форме

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i |\Delta y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

для всех последовательностей действительных чисел $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, у которых $y_1 = 0$, где $v_1 = 1$, $v_n = u_{n-1}$, $n \geq 2$.

Пусть $\dot{Y}$ – множество всех ненулевых последовательностей действительных чисел $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, которые имеют конечное число начальных членов, равных нулю. Обозначим через $\overset{\circ}{Y}$ множество нетривиальных элементов $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in \dot{Y}$, для которых существует целое $m = m(y) > 1$ такое, что $y_i = 0$ при $i \geq m$.

Пусть w_p^1 – пространство всех последовательностей $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которых конечна (квази) норма

$$\|y\|_{w_p^1} = |y_1| + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i |\Delta y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 < p < \infty. \tag{3}$$

Обозначим через $\dot{w}_p^1$ и $\overset{\circ}{w}{}_p^1$ соответственно замыкания множеств $\dot{Y} \cap w_p^1$ и $\overset{\circ}{Y}$ по (квази) норме (3).

Из определения множеств $\dot{w}_p^1$ и $\overset{\circ}{w}{}_p^1$ следует, что $\dot{w}_p^1 \supset \overset{\circ}{w}{}_p^1$ и $y_1 = 0$ для любого $y \in \dot{w}_p^1$. Следовательно, неравенство (1) эквивалентно неравенству (2) на множестве $\dot{w}_p^1$.

Рассмотрим неравенство (2) на множестве $\overset{\circ}{w}{}_p^1$. Отметим, что непрерывный аналог такой задачи исследован в работах [5-7]. Понятно, что если $\dot{w}_p^1 = \overset{\circ}{w}{}_p^1$, то неравенство (1) эквивалентно неравенству (2) на множестве $\overset{\circ}{w}{}_p^1$. Поэтому выясним, когда $\dot{w}_p^1 = \overset{\circ}{w}{}_p^1$.

Лемма 1. Равенство $\dot{w}_p^1 = \overset{\circ}{w}{}_p^1$ выполнено тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i^{1-p'} = \infty$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Если $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i^{1-p'} < \infty$, то $y_i \to 0$ при $i \to \infty$ для каждого $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in \overset{\circ}{w}{}_p^1$.

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{1-p'} = \infty. \tag{4}$$

Достаточно показать $\overset{\circ}{w}{}_p^1 \supset \dot{w}_p^1$. Пусть $z = \{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ – произвольный элемент из $\dot{w}_p^1$. Ввиду условия (4) для каждого $n > 1$ найдется целое n^* такое, что $n^* > n$ и

$$|z_n| \left(\sum_{i=n}^{n^*} \rho_i^{1-p'} \right)^{-\frac{1}{p'}} \le \left(\sum_{i=n}^{\infty} \rho_i |\Delta z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

Пусть

$$y_{n,i} = \begin{cases} z_i, & 1 \le i \le n-1, \\ z_n \left(\sum\limits_{i=n}^{n^*} \rho_i^{1-p'} \right)^{-1} \sum\limits_{j=i}^{n^*} \rho_j^{1-p'}, & n \le i \le n^*, \\ 0, & i > n^*. \end{cases}$$

Очевидно, что $y_n = \{y_{n,i}\}_{i=1}^{\infty} \in \overset{\circ}{Y}$ для всех n. Используя оценку (5), имеем

$$\|z - y_n\|_{w_p^1} \le \left(\sum_{i=n}^{n^*} \rho_i |\Delta z_i - \Delta y_{n,i}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=n^*}^{\infty} \rho_i |\Delta z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=n}^{n^*} \rho_i |\Delta z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=n}^{n^*} \rho_i |\Delta y_{n,i}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=n^*}^{\infty} \rho_i |\Delta z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le 2 \left(\sum_{i=n}^{\infty} \rho_i |\Delta z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + |z_n| \left(\sum_{i=n}^{n^*} \rho_i^{1-p'} \right)^{-\frac{1}{p'}} \le 3 \left(\sum_{i=n}^{\infty} \rho_i |\Delta z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Откуда $\|z - y_n\|_{w_p^1} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $z \in \overset{\circ}{w}{}_p^1$, т.е. $\overset{\circ}{w}{}_p^1 \supset \dot{w}_p^1$.

Обратно, пусть $\dot{w}_p^1 = \overset{\circ}{w}{}_p^1$, но

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{1-p'} < \infty. \tag{6}$$

Пусть $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in \dot{w}_p^1$ и последовательность $y_n = \{y_{n,i}\}_{i=1}^{\infty} \in \overset{\circ}{w}{}_p^1$ такая, что $\|y - y_n\|_{w_p^1} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда в силу (6) для любого $j > 1$ имеем

$$|y_j - y_{n,j}| \le \sum_{i=1}^{j} |\Delta(y_i - y_{n,i})| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{1-p'} \right)^{-\frac{1}{p'}} \|y - y_n\|_{w_p^1}. \tag{7}$$

Если $y_i = 1$ для достаточно больших i, то, в силу (6), принадлежность $y \in \overset{.}{w}{}_p^1$ не нарушается и из (7) следует $y_{n,j} \to y_j$ при $n \to \infty$ для всех $j \geq 1$. Поэтому для достаточно больших j имеем $y_{n,j} > 0$. Но $y_{n,j} = 0$ при $j > m = m(n) > 1$. Полученное противоречие доказывает, что из $\overset{.}{w}{}_p^1 = \overset{\circ}{w}{}_p^1$ следует (4).

Если выполнено (6), то из (7) имеем $y_j \to 0$ при $j \to \infty$. Лемма 1 доказана.

Отметим, что следование из (4) равенства $\overset{.}{w}{}_p^1 = \overset{\circ}{w}{}_p^1$ доказано в [8] несколько другим путем.

Пусть $-\infty \leq m < n \leq \infty$. Обозначим через $\overset{\circ}{Y}(m,n)$ совокупность ненулевых последовательностей, для которых $y = \{y_i\}_{i=m}^n$ существуют целые числа такие, что $t = t(y)$, $s = s(y)$: $m < t \leq s < n$ и $y_i = 0$ при $m \leq i < t$ и $s < i \leq n$.

В настоящей работе исследуется неравенство

$$\left(\sum_{i=m}^{n} v_i |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{i=m}^{n} \rho_i |\Delta y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ y \in \overset{\circ}{Y}(m,n). \tag{8}$$

При $m = 1$ и $n = \infty$ неравенство (8) совпадает с неравенством (2) на множестве $\overset{\circ}{w}{}_p^1$. Неравенство (8) при конечных m и n имеет самостоятельное значение.

Положим

$$B_{p,q}(m,n) = \sup_{m<t\leq s<n} \frac{\left(\sum\limits_{i=t}^{s} v_i\right)^{\frac{1}{q}}}{\left[\left(\sum\limits_{i=m}^{t-1} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\sum\limits_{i=s}^{n} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right]^{\frac{1}{p}}},$$

$$\alpha_q = \inf_{\lambda>1} \frac{\lambda(\lambda^q - 1)^{\frac{1}{q}}}{(\lambda - 1)}, \ \gamma_0 = \gamma_0(q) = \frac{2q}{q+1}\left(\frac{2q}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{2q}{q-1}\right)^{\frac{1}{q'}};$$

$$\gamma_1 = \gamma_1(q) = \frac{2q}{q+1} q^{\frac{1}{q}} \left(\frac{2q}{q-1}\right)^{\frac{1}{q'}}, \ \gamma_2 = \gamma_2(q) = q q^{\frac{1}{q}} (q')^{\frac{1}{q'}},$$

где $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Основные результаты

Теорема 1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и $-\infty \leq m < n \leq \infty$. Неравенство (8) выполнено тогда и только тогда, когда $B_{p,q}(m,n) < \infty$. При этом

$$B_{p,q}(m,n) \leq C \leq 2^{\frac{1}{p}} \alpha_q B_{p,q}(m,n), \tag{9}$$

где

$$\gamma_0 < \alpha_q < \min\{\gamma_1, \gamma_2, 4\} \text{ при } q \neq 2; \tag{10}$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}-1}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ при } q = 2,$$

и C – наименьшая постоянная в (8).

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $f(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda^q-1)^{\frac{1}{q}}}{\lambda-1}$, $1 < q < \infty$. Существует точка λ_q такая, что

$$\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ \text{ и } \ \frac{2q}{q+1} < \lambda_q < \min\{q, 2\} \text{ при } q \neq 2; \tag{11}$$

$$\inf_{\lambda>1} f(\lambda) = f(\lambda_q) = \frac{\lambda_q^2}{(\lambda_q - 1)^{\frac{1}{q'}}} \ \text{ и } \ f(\lambda_2) = \left(\frac{\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}-1}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

и при $q \neq 2$ имеет место оценка
$$\gamma_0 < f(\lambda_q) < \min\{\gamma_1, \gamma_2, 4\}. \tag{13}$$

Доказательство. Функция $f(\lambda)$ непрерывно дифференцируема при $\lambda > 1$ и $\lim\limits_{\lambda\to 1+} f(\lambda) = \infty$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = \infty$. Следовательно, она имеет минимум. Производную функции f представим в виде
$$f'(\lambda) = \frac{(\lambda^q - 1)^{\frac{1}{q}}}{\lambda - 1}\varphi(\lambda) = \frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda^q-1)^{\frac{1}{q'}}}d(\lambda),$$
где $\varphi(\lambda) = \frac{\lambda^q}{\lambda^q - 1} - \frac{1}{\lambda - 1}$ и $d(\lambda) = \lambda^{q+1} - 2\lambda^q + 1$.

При $q = 2$ имеем $d(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 1)$. Откуда $d(\lambda_2) = f'(\lambda_2) = 0$, где $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Следовательно, при $q = 2$ имеем $\inf\limits_{\lambda>1} f(\lambda) = f(\lambda_2) = \left(\frac{\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Теперь рассмотрим случай $q \neq 2$. Пусть $\lambda = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Применяя формулу конечных приращений Лагранжа, имеем
$$\varphi(\lambda) = \frac{(1+\varepsilon)^q}{(1+\varepsilon)^q - 1} - \frac{1}{\varepsilon} \geq \frac{(1+\varepsilon)^q}{q\varepsilon(1+\varepsilon)^{q-1}} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{q\varepsilon}(\varepsilon - (q-1)).$$
Откуда $\varphi(\lambda) > 0$, а тем самым $f'(\lambda) > 0$ при $\lambda > q$.

Функция $d(\lambda)$ в точке $\lambda = \frac{2q}{q+1}$ достигает своего минимума, убывает при $1 < \lambda < \frac{2q}{q+1}$ и возрастает при $\lambda > \frac{2q}{q+1}$. Так как $d(2) = 1 > 0$, то $d(\lambda) > 0$ и $f'(\lambda) > 0$ при $\lambda \geq 2$. Таким образом, $f'(\lambda) > 0$ при $\lambda \geq \min\{q, 2\}$.

Из $d(1) = 0$ и убывания функции $d(\lambda)$ при $1 < \lambda \leq \frac{2q}{q+1}$ следует, что $f'(\lambda) < 0$ при $1 < \lambda \leq \frac{2q}{q+1}$. Поэтому, в силу непрерывности функции f', существует точка λ_q, удовлетворяющая условию (11). Так как $f'(\lambda_q) = \varphi(\lambda_q) = 0$ и точка λ_q является точкой пересечения графиков двух убывающих функций $\frac{\lambda^q}{\lambda^q-1}$ и $\frac{1}{\lambda-1}$, то функция $f(\lambda)$ убывает при $1 < \lambda < \lambda_q$, возрастает при $\lambda > \lambda_q$ и в точке λ_q принимает минимум, т.е. $\inf\limits_{\lambda>1} f(\lambda) = f(\lambda_q)$. Подставляя $\lambda_q^q - 1 = \lambda_q^q(\lambda_q - 1)$, вытекающее из $\varphi(\lambda_q) = 0$, в выражение $f(\lambda_q)$, получим $f(\lambda_q) = \frac{\lambda_q^2}{(\lambda_q-1)^{\frac{1}{q'}}}$. Таким образом, выполнено (12).

Функция $g(t) = \frac{t^2}{(t-1)^{\frac{1}{q'}}}$ в точке $t = \frac{2q}{q+1}$ принимает минимум. Так как $\lambda_q > \frac{2q}{q+1}$, то $f(\lambda_q) > g\left(\frac{2q}{q+1}\right)$. Поэтому
$$f(\lambda_q) > g\left(\frac{2q}{q+1}\right) = \frac{2q}{q+1}\left(\frac{2q}{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{2q}{q-1}\right)^{\frac{1}{q'}} = \gamma_0(q). \tag{14}$$

С другой стороны, из (11) имеем
$$f(\lambda_q) < \min\left\{f\left(\frac{2q}{q+1}\right), f(q), f(2)\right\}. \tag{15}$$

Нетрудно заметить, что $f(2) < 4$. Из $\varphi(\lambda_q) = 0$ и $\lambda_q < q$ следует $\frac{q^q}{q^q-1} > \frac{1}{q-1}$ или $q(q-1)^{\frac{1}{q}} > (q^q-1)^{\frac{1}{q}}$. Поэтому
$$f(q) = \frac{q(q^q-1)^{\frac{1}{q}}}{q-1} < \frac{q^2}{(q-1)^{\frac{1}{q'}}} = qq^{\frac{1}{q}}(q')^{\frac{1}{q'}} = \gamma_2(q). \tag{16}$$

Оценим $f\left(\frac{2q}{q+1}\right)$:
$$f\left(\frac{2q}{q+1}\right) = \frac{2q}{q-1}\left[\left(1 + \frac{q-1}{q+1}\right)^q - 1\right]^{\frac{1}{q}} \leq$$
$$\leq \frac{2q}{q-1}\left[q\frac{q-1}{q+1}\left(\frac{2q}{q+1}\right)^{q-1}\right]^{\frac{1}{q}} = \frac{2q}{q+1}q^{\frac{1}{q}}\left(\frac{2q}{q-1}\right)^{\frac{1}{q'}} = \gamma_1(q). \tag{17}$$

Из (14)–(17), с учетом $f(2) < 4$, имеем (13). Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть выполнено неравенство (8) с наименьшей постоянной $C > 0$. Пусть α, t, s, β — целые числа, удовлетворяющие условию $m < \alpha \le t \le s \le \beta < n$.

Построим пробную последовательность $y = \{y_k\}$ следующим образом

$$y_k \equiv y_k^{\alpha,t,s,\beta} = \begin{cases} \sum\limits_{i=\alpha-1}^{k-1} \rho_i^{1-p'} \left(\sum\limits_{i=\alpha-1}^{t-1} \rho_i^{1-p'} \right)^{-1}, & \alpha \le k \le t, \\ 1, & t \le k \le s, \\ \sum\limits_{i=k}^{\beta} \rho_i^{1-p'} \left(\sum\limits_{i=s}^{\beta} \rho_i^{1-p'} \right)^{-1}, & s \le k \le \beta, \\ 0, & m \le k < \alpha \text{ или } \beta < k \le n. \end{cases}$$

Очевидно, что $y \in \overset{\circ}{Y}(m,n)$. Тогда

$$\left(\sum_{i=m}^{n} \rho_i |\Delta y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left[\left(\sum_{i=\alpha-1}^{t-1} \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} + \left(\sum_{i=s}^{\beta} \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} \right]^{\frac{1}{p}} \tag{18}$$

и

$$\left(\sum_{i=m}^{n} v_i |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \ge \left(\sum_{i=t}^{s} v_i \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{19}$$

Из (8), (18) и (19) имеем

$$\left(\sum_{i=t}^{s} v_i \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left[\left(\sum_{i=\alpha-1}^{t-1} \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} + \left(\sum_{i=s}^{\beta} \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Откуда, в силу независимости левой части от α и β, а также независимости постоянной C от t и s, имеем

$$B_{p,q}(m,n) \le C. \tag{20}$$

Достаточность. Пусть $B_{p,q}(m,n) < \infty$. Пусть $y = \{y_i\} \in \overset{\circ}{Y}(m,n)$. Не ограничивая общности, будем считать $y_i \ge 0$ для всех i. Пусть $\lambda > 1$. Для любого целого числа k определим множество $T_k \equiv T_k(\lambda, y) = \{i : y_i > \lambda^k\}$. В силу ограниченности множества $\{y_i\}$ существует целое число $\tau = \tau(y, \lambda)$ такое, что $T_\tau \ne \oslash$, $T_{\tau+1} = \oslash$. Положим $\Delta T_k = T_k \backslash T_{k+1}$. Тогда

$$[m,n] = \bigcup_{k=-\infty}^{\tau} T_k = \bigcup_{k=-\infty}^{\tau} \Delta T_k. \tag{21}$$

Если $n = \infty$, то $[m,n] = [m,\infty)$. Из определения T_k и из $T_\tau \ne \oslash$ следует, что $T_k \ne \oslash$ при всех $k \le \tau$. Пусть $k < \tau$. Множество T_k представим в виде $T_k = \bigcup\limits_j [t_k^j, s_k^j]$, $[t_k^j, s_k^j] \bigcap [t_k^i, s_k^i] = \oslash$ при $i \ne j$. Положим $M_k^j = T_{k+1} \bigcap [t_k^j, s_k^j]$, $\Omega_k = \{j : M_k^j \ne \oslash\}$ и для $j \in \Omega_k$ определим $x_k^j = \min M_k^j$, $z_k^j = \max M_k^j$. Тогда $t_k^j \le x_k^j$, $z_k^j \le s_k^j$ и

$$T_{k+1} \subset \bigcup_{j \in \Omega_k} [x_k^j, z_k^j], \ \Delta T_k \supset \bigcup_{j \in \Omega_k} \left([t_k^j, x_k^i - 1] \bigcup [z_k^j + 1, s_k^j] \right). \tag{22}$$

Пусть $t_k^j < x_k^j$. Тогда

$$y_{t_k^j - 1} \le \lambda^k, \ y_{x_k^j} > \lambda^{k+1} \text{ и } \lambda^k(\lambda - 1) = \lambda^{k+1} - \lambda^k \le y_{x_k^j} - y_{t_k^j - 1} =$$

$$= \sum_{i=t_k^j}^{x_k^j - 1} \Delta y_i \le \left(\sum_{i=t_k^j}^{x_k^j - 1} \rho_i^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=t_k^j}^{x_k^j - 1} \rho_i |\Delta y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Откуда

$$\lambda^{pk}\left(\sum_{i=t_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\leq\frac{1}{(\lambda-1)^p}\sum_{i=t_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i|\Delta y_i|^p. \tag{23}$$

Аналогично, если $z_k^j<s_k^j$, то

$$\lambda^{pk}\left(\sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\leq\frac{1}{(\lambda-1)^p}\sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}\rho_i|\Delta y_i|^p. \tag{24}$$

Пусть $z_k^j=s_k^j$. Тогда $y_{s_k^j}=y_{z_k^j}>\lambda^{k+1}$, $y_{s_k^j+1}=y_{z_k^j+1}\leq\lambda^k$ и

$$\lambda^k(\lambda-1)\leq y_{z_k^j}-y_{z_k^j+1}=-\Delta y_{z_k^j}=\sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}(-\Delta y_i).$$

Откуда

$$\lambda^{pk}\rho_{z_k^j}=\lambda^{pk}\left(\sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\leq\frac{\rho_{z_k^j}}{(\lambda-1)^p}|\Delta y_{z_k^j}|^p=\frac{1}{(\lambda-1)^p}\sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}\rho_i|\Delta y_i|^p. \tag{25}$$

Аналогично, если $t_k^j=x_k^j$, то

$$\lambda^{pk}\rho_{x_k^j-1}=\lambda^{pk}\left(\sum_{i=t_k^j-1}^{x_k^j-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\leq\frac{\rho_{x_k^j-1}}{(\lambda-1)^p}|\Delta y_{x_k^j-1}|^p=\frac{1}{(\lambda-1)^p}\sum_{i=t_k^j-1}^{x_k^j-1}\rho_i|\Delta y_i|^p. \tag{26}$$

Неравенства (23)–(26) можно, объединив, написать в виде

$$\lambda^{pk}\left(\sum_{i=\tilde{t}_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\leq\frac{1}{(\lambda-1)^p}\sum_{i=\tilde{t}_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i|\Delta y_i|^p; \tag{27}$$

$$\lambda^{pk}\left(\sum_{i=\tilde{t}_k^j}^{s_k^j}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\leq\frac{1}{(\lambda-1)^p}\sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}\rho_i|\Delta y_i|^p, \tag{28}$$

где $\tilde{t}_k^j=t_k^j$, если $t_k^j<x_k^j$, и $\tilde{t}_k^j=t_k^j-1$, если $t_k^j=x_k^j$. Из $B_{p,q}(m,n)<\infty$ имеем

$$\sum_{i=x_k^j}^{z_k^j}v_i\leq B_{p,q}^q(m,n)\left[\left(\sum_{i=\tilde{t}_k^j}^{x_k^j-1}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}+\left(\sum_{i=z_k^j}^{s_k^j}\rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right]^{\frac{q}{p}}. \tag{29}$$

Положим

$$\omega_k^+=\left\{j\in\Omega_k:\ t_k^j<x_k^j,\ z_k^j<s_k^j\right\},\ \omega_{k,1}=\left\{j\in\Omega_k:\ t_k^j=x_k^j,\ z_k^j<s_k^j\right\};$$

$$\omega_{k,2}^+=\left\{j\in\Omega_k:\ t_k^j<x_k^j,\ z_k^j=s_k^j\right\},\ \omega_k^-=\left\{j\in\Omega_k:\ t_k^j=x_k^j,\ z_k^j=s_k^j\right\};$$

$$\Delta_{k,1}^+=\omega_k^+\bigcup\omega_{k,2},\ \Delta_{k,2}^+=\omega_k^+\bigcup\omega_{k,1},\ \Delta_{k,1}^-=\omega_k^-\bigcup\omega_{k,1},\ \Delta_{k,2}^-=\omega_k^-\bigcup\omega_{k,2}.$$

Очевидно, что $\Omega_k=\omega_k^+\bigcup\omega_{k,1}\bigcup\omega_{k,2}\bigcup\omega_k^-$. Из соотношения для ΔT_k в (22) имеем

$$\Delta T_k\supset\left(\bigcup_{j\in\Delta_{k,1}^+}[t_k^j,x_k^j-1]\right)\bigcup\left(\bigcup_{j\in\Delta_{k,2}^+}[z_k^j+1,s_k^j]\right). \tag{30}$$

Теперь мы готовы оценить левую часть неравенства (18). Далее будем считать, что сумма по пустому множеству равна нулю. Поэтому имеем

$$\sum_{i\in\Delta T_{k+1}} v_i|y_i|^q \le \lambda^{q(k+2)} \sum_{i\in\Delta T_{k+1}} v_i, \tag{31}$$

вне зависимости, пустое множество ΔT_{k+1} или нет. Используя (21), (22), (31) и равенство $\lambda^{qk} = (1-\lambda^{-q}) \sum\limits_{t=-\infty}^{k} \lambda^{qt}$, имеем

$$F \equiv \sum_{k=m}^{n} v_k|y_k|^q = \sum_{k=-\infty}^{\tau-1} \sum_{i\in\Delta T_{k+1}} v_i|y_i|^q \le \sum_{k=-\infty}^{\tau-1} \lambda^{q(k+2)} \sum_{i\in\Delta T_{k+1}} v_i =$$

$$= \lambda^{2q} \sum_{k=-\infty}^{\tau-1} \lambda^{qk} \sum_{i\in\Delta T_{k+1}} v_i = \lambda^{2q}(1-\lambda^{-q}) \sum_{k=-\infty}^{\tau-1} \sum_{i\in\Delta T_{k+1}} v_i \sum_{t=-\infty}^{k} \lambda^{qt} \le$$

$$\le \lambda^q(\lambda^q-1) \sum_{t=-\infty}^{\tau-1} \lambda^{qt} \sum_{k\ge t} \sum_{i\in\Delta T_{k+1}} v_i = \lambda^q(\lambda^q-1) \sum_{t=-\infty}^{\tau-1} \lambda^{qt} \sum_{i\in\Delta T_{t+1}} v_i =$$

$$= \lambda^q(\lambda^q-1) \sum_{k=-\infty}^{\tau-1} \lambda^{qk} \sum_{j\in\Omega_k} \sum_{i=x_k^j}^{z_k^j} v_i. \tag{32}$$

Подставляя (29) в (32), а затем применяя (27), (28) и неравенство Йенсена, получим

$$F \le \lambda^q(\lambda^q-1) B_{p,q}^q(m,n) \sum_{k=-\infty}^{\tau} \sum_{j\in\Omega_k} \left[\lambda^{pk} \left(\sum_{i=\tilde{t}_k^j}^{x_k^j-1} \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} + \lambda^{pk} \left(\sum_{i=z_k^j}^{s_k^j} \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} \right]^{\frac{q}{p}} \le$$

$$\le \frac{\lambda^q(\lambda^q-1)}{(\lambda-1)^q} B_{p,q}^q(m,n) \left(\sum_{k=-\infty}^{\tau} \sum_{j\in\Omega_k} \left[\sum_{i=\tilde{t}_k^j}^{x_k^j-1} \rho_i|\Delta y_i|^p + \sum_{i=z_k^j}^{s_k^j} \rho_i|\Delta y_i|^p \right] \right)^{\frac{q}{p}}. \tag{33}$$

Так как

$$\sum_{j\in\Omega_k} \left(\sum_{i=\tilde{t}_k^j}^{x_k^j-1} \rho_i|\Delta y_i|^p + \sum_{i=z_k^j}^{s_k^j} \rho_i|\Delta y_i|^p \right) = \sum_{j\in\omega_k^+} \left(\sum_{i=t_k^j}^{x_k^j-1} \rho_i|\Delta y_i|^p + \sum_{i=z_k^j+1}^{s_k^j} \rho_i|\Delta y_i|^p + \rho_{z_k^j}|\Delta y_{z_k^j}|^p \right) +$$

$$+ \sum_{j\in\omega_{k,1}} \left(\rho_{x_k^j-1}|\Delta y_{x_k^j-1}|^p + \sum_{i=z_k^j+1}^{s_k^j} \rho_i|\Delta y_i|^p + \rho_{z_k^j}|\Delta y_{z_k^j}|^p \right) +$$

$$+ \sum_{j\in\omega_{k,2}} \left(\sum_{i=t_k^j}^{x_k^j-1} \rho_i|\Delta y_i|^p + \rho_{z_k^j}|\Delta y_{z_k^j}|^p \right) + \sum_{j\in\omega_k^-} \left(\rho_{x_k^j-1}|\Delta y_{x_k^j-1}|^p + \rho_{z_k^j}|\Delta y_{z_k^j}|^p \right) =$$

$$= \left(\sum_{j\in\Delta_{k,1}^+} \sum_{i=t_k^j}^{x_k^j-1} \rho_i|\Delta y_i|^p + \sum_{j\in\Delta_{k,2}^+} \sum_{i=z_k^j+1}^{s_k^j} \rho_i|\Delta y_i|^p \right) +$$

$$+ \left(\sum_{j\in\Delta_{k,1}^-} \rho_{x_k^j-1}|\Delta y_{x_k^j-1}|^p + \sum_{j\in\Delta_{k,2}^-\bigcup\Delta_{k,2}^+} \rho_{z_k^j}|\Delta y_{z_k^j}|^p \right) = F_{k,1} + F_{k,2},$$

то, подставляя полученное равенство в (33), имеем

$$F \leq \frac{\lambda^q(\lambda^q-1)}{(\lambda-1)^q} B^q_{p,q}(m,n) \left(\sum_{k=-\infty}^{\tau} (F_{k,1}+F_{k,2}) \right)^{\frac{q}{p}}. \tag{34}$$

На основании (30) имеем $F_{k,1} \leq \sum\limits_{i\in\Delta T_k} \rho_i|\Delta y_i|^p$. Поэтому

$$\sum_{k=-\infty}^{\tau} F_{k,1} \leq \sum_{k=-\infty}^{\tau} \sum_{i\in\Delta T_k} \rho_i|\Delta y_i|^p = \sum_{i=m}^{n} \rho_i|\Delta y_i|^p. \tag{35}$$

Так $t^j_k - 1 = x^j_k \leq \lambda^k$ при $j \in \Delta^-_{k,1}$ и $z^j_k > \lambda^{k+1}$ при $j \in \Delta^-_{k,2} \bigcup \Delta^+_{k,2}$, то существуют целые числа $k_1 = k_1(k,j) < k$, $k_2 = k_2(k,j) > k$ такие, что $x^j_k - 1 \in \Delta T_{k_1}$, $j \in \Delta^-_{k,1}$ и $z^j_k \in \Delta T_{k_2}$, $j \in \Delta^-_{k,2} \bigcup \Delta^+_{k,2}$. Отметим, что $\Delta T_\tau = T_\tau$. Поэтому

$$\sum_{k=-\infty}^{\tau} F_{k,2} \leq \sum_{k=-\infty}^{\tau} \sum_{i\in\Delta T_k} \rho_i|\Delta y_i|^p = \sum_{i=m}^{n} y_i|\Delta y_i|^p. \tag{36}$$

Таким образом, из (34), (35) и (36) получим

$$F \leq 2^{\frac{q}{p}} \frac{\lambda^q(\lambda^q-1)}{(\lambda-1)^q} B^q_{p,q}(m,n) \left(\sum_{i=m}^{n} \rho_i|\Delta y_i|^p \right)^{\frac{q}{p}}$$

или

$$\left(\sum_{i=m}^{n} v_i|y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \frac{\lambda(\lambda^q-1)^{\frac{1}{q}}}{\lambda-1} B_{p,q}(m,n) \left(\sum_{i=m}^{n} \rho_i|\Delta y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Левая часть этого неравенства не зависит от $\lambda > 1$, поэтому, беря инфимум по $\lambda > 1$ в правой части, получим

$$\left(\sum_{i=m}^{n} v_i|y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \alpha_q B_{p,q}(m,n) \left(\sum_{i=m}^{n} \rho_i|\Delta y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\alpha_q = \inf\limits_{\lambda>1} \frac{\lambda(\lambda^q-1)^{\frac{1}{q}}}{\lambda-1}$, т.е. неравенство (18) выполнено с оценкой

$$C \leq 2^{\frac{1}{p}} \alpha_q B_{p,q}(m,n)$$

для наименьшей постоянной C, которая вместе с (20) дает (9). Оценка (10) следует из леммы 2. Теорема 1 доказана.

Построим простой пример. Пусть $m = 1$ и $n = 3$. Тогда неравенство (8) для $y \in \overset{\circ}{Y}(m,n)$ имеет вид $(v_2|y_2|^q)^{\frac{1}{q}} \leq C(\rho_1|y_2|^p + \rho_2|y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$, и оно выполнено тогда и только тогда, когда

$$B_{p,q}(1,3) = \frac{v_2^{\frac{1}{q}}}{(\rho_1+\rho_2)^{\frac{1}{p}}} = \frac{\left(\sum\limits_{i=2}^{2} v_i \right)^{\frac{1}{q}}}{\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{1} \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} + \left(\sum\limits_{i=2}^{2} \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} \right]^{\frac{1}{p}}} < \infty,$$

и наименьшая его константа $C = B_{p,q}(1,3)$, т.е. в этом случае левая оценка в (9) точна.

Следствие 1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i^{1-p'} < \infty$. Неравенство (2) на множестве $\overset{\circ}{w}{}^1_p$ выполнено тогда и только тогда, когда $B_{p,q}(1,\infty) < \infty$. При этом

$$B_{p,q}(1,\infty) \leq C \leq 2^{\frac{1}{p}} \alpha_q B_{p,q}(1,\infty),$$

где $\alpha_2 = \left(\frac{\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}-1} \right)^{\frac{1}{2}}$, при $q \neq 2$ оценка для величины α_q дана в (10), а C – наименьшая постоянная в (2).

Следствие 1 дает критерий непрерывного вложения $E :\overset{\circ}{w}{}_p^1 \to l_{q,v}$, где $l_{q,v}$ – совокупность всех последовательностей $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|y\|_{l_{q,v}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \ 1 < q < \infty,$$

причем норма $\|E\|$ оператора вложения $E :\overset{\circ}{w}{}_p^1 \to l_{q,v}$ совпадает с наименьшей постоянной C в (2).

Дополнительные результаты

Теорема 2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \rho_i^{1-p'} < \infty$. Тогда вложение $E :\overset{\circ}{w}{}_p^1 \to l_{q,v}$ компактно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to\infty} (B_{p,q})_t = 0, \tag{37}$$

где

$$(B_{p,q})_t = \sup_{s \geq t} \frac{\left(\sum\limits_{i=t}^{s} v_i\right)^{\frac{1}{q}}}{\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{t-1} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\sum\limits_{i=s}^{\infty} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть вложение $E :\overset{\circ}{w}{}_p^1 \to l_{q,v}$ компактно. Тогда множество $M = \{y : y \in \overset{\circ}{w}{}_p^1, \|y\|_{w_p^1} \leq 1\}$ ограничено и относительно компактно в $l_{q,v}$. По критерию из [9] относительно компактности ограниченного множества в $l_{q,v}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y \in M} \sum_{i=n}^{\infty} v_i |y_i|^q = 0. \tag{38}$$

Пусть $y^{\alpha,t,s,\beta} = \{y_i^{\alpha,t,s,\beta}\}$ – последовательность, введенная в необходимой части теоремы 1 при $m = 1$ и $n = \infty$.

Положим, что

$$x \equiv x^{\alpha,t,s,\beta} = y^{\alpha,t,s,\beta} \left[\left(\sum_{i=\alpha-1}^{t-1} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\sum_{i=s}^{\beta} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right]^{-\frac{1}{p}}. \tag{39}$$

Тогда из $y^{\alpha,t,s,\beta} \in \overset{\circ}{Y}(1,\infty)$ и (18) следует, что $x \in \overset{\circ}{w}{}_p^1$ и $\|x\|_{w_p^1} \leq 1$. Значит, $x \in M$. Пусть $\{\alpha, t, s, \beta\} = \{\alpha, t, s, \beta : 1 < \alpha \leq t \leq s \leq \beta < \infty\}$. Из (38) имеем

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sup_{y \in M} \sum_{i=n}^{\infty} v_i |y_i|^q \geq \lim_{n\to\infty} \sup_{\{\alpha,t,s,\beta\}} \sum_{i=n}^{\infty} v_i |x_i^{\alpha,t,s,\beta}|^q \geq$$

$$\geq \lim_{t\to\infty} \sup_{s \geq t} \frac{\sum\limits_{i=t}^{s} v_i}{\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{t-1} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\sum\limits_{i=s}^{\infty} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right]^{\frac{q}{p}}} = \lim_{t\to\infty} (B_{p,q})_t,$$

т.е. выполнено (37).

Достаточность. Пусть выполнено (37). Тогда нетрудно заметить, что $B_{p,q}(1,\infty) < \infty$. Пусть $n \geq 1$ и $M_n = \{y : y \in \overset{\circ}{Y}(n,\infty), \|y\|_{w_p^1} \leq 1\}$. Так как $B_{p,q}(1,\infty) \geq B_{p,q}(n,\infty)$, то на основании теоремы 1 имеем

$$\left(\sum_{i=n}^{\infty} v_i |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \alpha_q B_{p,q}(n,\infty), \ y \in M_n. \tag{40}$$

Из определения $B_{p,q}(n,\infty)$ следует, что

$$B_{p,q}(n,\infty) \leq \sup_{s\geq t>n} \frac{\left(\sum\limits_{i=t}^{s} v_i\right)^{\frac{1}{q}}}{\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{t-1} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\sum\limits_{i=s}^{\infty} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right]^{\frac{1}{p}}} = \sup_{t>n}(B_{p,q})_t. \tag{41}$$

Пусть $n>1$. Для $y\in M_1$ определим последовательность $y^n=\{y_i^n\}$ такую, что $y_n^n=y_n$ и $y_i^n=0$ при $i\neq n$. Положим $z_i=y_i-y_i^n$, $i\geq n$. Тогда $z=\{z_i\}_{i=n}^{\infty}\in M_n$. Поэтому на основании (40) и (41) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in M_1}\left(\sum_{i=n}^{\infty} v_i|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \lim_{n\to\infty}\sup_{y\in M_1}\left(\sum_{i=n}^{\infty} v_i|y_i-y_i^n|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \lim_{n\to\infty}\sup_{y\in M_1}\left(\sum_{i=n}^{\infty} v_i|y_i^n|^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sup_{z\in M_n}\left(\sum_{i=n}^{\infty} v_i|z_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \lim_{n\to\infty} v_n y_n \leq 2^{\frac{1}{p}}\alpha_q \lim_{n\to\infty}\sup_{t>n}(B_{p,q})_t = \lim_{t\to\infty}(B_{p,q})_t = 0. \tag{42}$$

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} v_n y_n = 0$ в силу $y\in\overset{\circ}{Y}(1,\infty)$. Так как $\overset{\circ}{Y}(1,\infty)$ всюду плотно в $\overset{\circ}{w}{}_p^1$, то из (42) имеем (38). Следовательно, вложение $E:\overset{\circ}{w}{}_p^1\to l_{q,v}$ компактно. Теорема 2 доказана.

Существенной нормой оператора A, действующего из банахового пространства X в банахово пространство Z, называется число $\|A\|_{ess}=\inf\limits_{T\in K}\|A-T\|_{X\to Z}$, где K – совокупность компактных операторов из X в Z.

Теорема 3. Пусть $1<p\leq q<\infty$. Тогда для существенной нормы оператора вложения $E:\overset{\circ}{w}{}_p^1\to l_{q,v}$ справедлива оценка $2^{\frac{1}{p'}}\leq\|E\|_{ess}\gamma_{p,q}^{-1}\leq 2^{\frac{1}{p}}\alpha_q$, где $\gamma_{p,q}=\lim\limits_{t\to\infty}\sup(B_{p,q})_t$.

Доказательство. Пусть $\{t_k\}$ – последовательность целых чисел такая, что $t_k\to\infty$ при $k\to\infty$ и

$$\lim_{k\to\infty}(B_{p,q})_{t_k} = \lim_{t\to\infty}\sup(B_{p,q})_t.$$

Из определения величины $(B_{p,q})_t$ для каждого t_k существует целое число $s_k=s_k(t_k)\geq t_k$ такое, что

$$(B_{p,q})_{t_k} = \frac{\left(\sum\limits_{i=t_k}^{s_k} v_i\right)^{\frac{1}{q}}}{\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{t_k-1} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\sum\limits_{i=s_k}^{\infty} \rho_i^{1-p'}\right)^{1-p}\right]^{\frac{1}{p}}}. \tag{43}$$

Пусть α_k – наибольшее, а β_k – наименьшее целые числа, для которых выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{t_k-1}\rho_i^{1-p'} \leq 2\sum_{i=\alpha_k-1}^{t_k-1}\rho_i^{1-p'};\quad \sum_{i=s_k}^{\infty}\rho_i^{1-p'} \leq 2\sum_{i=s_k}^{\beta_k}\rho_i^{1-p'}. \tag{44}$$

Пусть $x^{t_k}\equiv x^{\alpha_k,t_k,s_k,\beta_k}$ – последовательность (39) при $\alpha=\alpha_k$, $t=t_k$, $s=s_k$ и $\beta=\beta_k$. Ясно, что $x^{t_k}\in\overset{\circ}{w}{}_p^1$, $\sup\limits_k\|x^{t_k}\|_{w_p^1}\leq 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{t_k}=0$ для всех $i\geq 1$. Кроме того, из (19) при $m=1$ и $n=\infty$ вместе с (43) и (44) имеем

$$\lim_{k\to\infty}\|x^{t_k}\|_{l_{q,v}} \geq 2^{\frac{1}{p'}}\lim_{k\to\infty}(B_{p,q})_{t_k} = 2^{\frac{1}{p'}}\gamma_{p,q}.$$

Пусть T – произвольный компактный оператор из $\overset{\circ}{w}{}_p^1$ в $l_{q,v}$. Из $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{t_k}=0$ для всех $i\geq 1$ следует, что последовательность $\{t_k\}$ сходится к нулю слабо в $l_{q,v}$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty}\|Tx^{t_k}\|_{l_{q,v}}=0$ и

$$\lim_{k\to\infty}\|x^{t_k}-Tx^{t_k}\|_{l_{q,v}} \geq \lim_{k\to\infty}\left|\|x^{t_k}\|_{l_{q,v}}-\|Tx^{t_k}\|_{l_{q,v}}\right| = \lim_{k\to\infty}\|x^{t_k}\|_{l_{q,v}} \geq 2^{\frac{1}{p'}}\gamma_{p,q}.$$

Это означает, что

$$\inf_{T\in K} \|E-T\|_{\overset{\circ}{w}{}^1_p \to l_{q,v}} \geq 2^{\frac{1}{p'}}\gamma_{p,q}. \tag{45}$$

Обозначим через T_n, $n>1$, оператор, действующий из $\overset{\circ}{w}{}^1_p$ в $l_{q,v}$ следующим образом: $Ty=\widetilde{y}^n$ для любого $y\in\overset{\circ}{w}{}^1_p$, где последовательность $\widetilde{y}^n=\{\widetilde{y}_i^n\}_{i=1}^\infty$ такая, что $\widetilde{y}_i^n=y_i$ при $1\leq i\leq n$ и $\widetilde{y}_i^n=0$ при $i>n$. Очевидно, что оператор T_n компактен из $\overset{\circ}{w}{}^1_p$ в $l_{q,v}$. Тогда $y-Ty\in M_n$ и, в силу (40) и (41), имеем

$$\|y-Ty\|_{l_{q,v}}=\left(\sum_{i=n}^\infty v_i|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{p}}\alpha_q \sup_{t>n}(B_{p,q})_t.$$

Значит,

$$\inf_{T\in K} \|E-T\|_{\overset{\circ}{w}{}^1_p \to l_{q,v}} \leq 2^{\frac{1}{p}}\alpha_q\gamma_{p,q}.$$

Это неравенство и (45) доказывает теорему 3.

В качестве примера рассмотрим спектральную задачу

$$-\Delta(\rho_i\Delta y_i)=\lambda v_{i+1}y_{i+1},\ i=1,2,... \tag{46}$$

с условием Дирихле

$$y_1=0,\ y_\infty=\lim_{i\to\infty}y_i=0. \tag{47}$$

На основании теоремы Релиха изучение спектра задачи (46) и (47) можно свести к изучению оператора $E:\overset{\circ}{w}{}^1_2\to l_{2,v}$ (см. [10, глава VI]). Тогда теоремы 1–3 приводят к следующим результатам.

Теорема 4. Пусть $\sum\limits_{i=1}^\infty \rho_i^{-1}<\infty$. Тогда

(i) нижняя граница спектра задачи (46) и (47) отделена от нуля тогда и только тогда, когда $B_{2,2}(1,\infty)<\infty$;

(ii) спектр задачи (46) и (47) дискретен, если и только если $\lim\limits_{t\to\infty}(B_{2,2})_t=0$;

(iii) для нижней грани μ точки накопления спектра задачи (46) и (47) справедлива оценка $\frac{1}{2}\alpha_2^{-2}\leq\mu\gamma_{2,2}^2\leq\frac{1}{2}$, где $\alpha_2=\left(\frac{\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и образования Казахстана. Грант № 5495/GF4 по направлению «Интеллектуальный потенциал страны».

Список литературы

1 Bennett G. Some elementary inequalities. I / G.Bennett // Quart. J. Math. Oxford. — 1987. — Vol. 38. — No. 2. — P. 401–425.

2 Bennett G. Some elementary inequalities. II / G.Bennett // Quart. J. Math. Oxford. — 1988. — Vol. 39. — No. 2. — P. 385–400.

3 Bennett G. Some elementary inequalities. III / G.Bennett // Quart. J. Math. Oxford. — 1991. — Vol. 42. — No. 2. — P. 149–174.

4 Kufner A. The Hardy inequality. About its history and some related results / A.Kufner, L.Maligranda, L.-E.Persson. — Pilsen: Vydavatelský servis, 2007.

5 Opic B. Hardy-type inequalities / B.Opic, A.Kufner. — Harlow: Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific and Technical, 1990.

6 Kufner A. Weighted Inequalities of Hardy type / A.Kufner, L.-E.Persson. — New Jersey, London, Singapore; Hong Kong: World Scientific, 2003.

7 Абылаева А.М. Весовое дифференциальное неравенство Харди на множестве $\overset{\circ}{AC}(I)$ / А.М.Абылаева, А.О.Байарыстанов, Р.Ойнаров // Сибирский математический журнал. — 2014. — Т. 55.— № 3. — С. 477–493.

8 Алимагамбетова А.З. Критерий осцилляторности и неосцилляторности полулинейного разностного уравнения второго порядка / А.З.Алимагамбетова, Р.Ойнаров // Математический журнал. — 2007. — Т. 7. — № 1(23). — С. 15–24.

9 Крейн С.Г. Функциональный анализ / С.Г.Крейн. — М.: Наука, 1972.

10 Мынбаев К.Т. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов / К.Т.Мынбаев, М.О.Отелбаев. — М.: Наука, 1988.

А. Қалыбай, Р. Ойнаров, С. Шалгинбаева

Айырымдық түрдегі дискретті салмақты Харди теңсіздігі

Мақалада айырымдық түрде жазылған салмақтары бар дискретті Харди теңсіздігінің орындалуы үшін қажетті және жеткілікті шарттар табылған. Есеп финитті тізбектер жиынында зерттелді. Бұл мақаланың негізгі нәтижесі зерттелетін теңсіздіктің нақты константасының бағалауларын алу болып табылады. Осы бағалаулар кейбір айырымдық теңдеулердің тербелімділігі және тербелімсіздігі шарттары сияқты сапалық қасиеттерін анықтау үшін қолданылады. Бұған қоса, осы негізгі нәтижелерінің салдары ретінде біз кейбір кеңістіктердің енгізілуін және бұл енгізілуінің шағын болуының критерийлерін табамыз.

Кілт сөздер: Харди теңсіздігі, салмақты тізбектер, оператор, тізбектер кеңістігі, енгізілу, теңсіздік.

A. Kalybay, R. Oinarov, S. Shalginbayeva

Discrete weighted Hardy inequality in difference form

In this paper we find necessary and sufficient conditions for the fulfillment of the discrete Hardy inequality with weights written in the difference form. The problem is investigated on the set of finitely supported sequences. The key result of this article is finding of estimates for the exact constant of this inequality. These estimates will be later used to establish qualitative characteristics, such as oscillation and non-oscillation conditions, of certain difference equations. Moreover, as a consequence of the main results, we find criteria for the embedding of some spaces and for the compactness of this embedding.

Keywords: Hardy inequality, weighted sequences, operator, space of sequences, embedding, compactness.

References

1 Bennett, G. (1987). Some elementary inequalities. I. *Quart. J. Math. Oxford, Vol. 38,* 2, 401–425.

2 Bennett, G. (1988). Some elementary inequalities. II. *Quart. J. Math. Oxford, Vol. 39,* 2, 385–400.

3 Bennett, G. (1991). Some elementary inequalities. III. *Quart. J. Math. Oxford, Vol. 42,* 2, 149–174.

4 Kufner, A., Maligranda, L. & Persson, L.-E. (2007). *The Hardy inequality. About its history and some related results.* Pilsen: Vydavatelský servis.

5 Opic, B. & Kufner, A. (1990). Hardy-type inequalities. Harlow: Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific and Technical.

6 Kufner, A. & Persson, L.-E. (2003). *Weighted Inequalities of Hardy type.* New Jersey, London, Singapore; Hong Kong: World Scientific.

7 Abylaeva, A.M. & Oinarov, R. (2014). Vesovoe differentsialnoe neravenstvo Khardi na mnozhestve $\overset{\circ}{AC}(I)$ [The weighted differential Hardy inequality on the set $\overset{\circ}{AC}(I)$]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal – Siberian Mathematical Journal, Vol. 55,* 3, 477–493 [in Russian].

8 Alimagambetova, A.Z. & Oinarov, R. (2007). Kriterii ostsilliatornosti i neostsilliatornosti polulineinoho raznostnogo uravneniia vtoroho poriadka [The criterion of oscillation and non-oscillation of a second-order semilinear difference equation]. *Matematicheskii zhurnal – Mathematical Journal, Vol. 7,* 1(23), 15–24 [in Russian].

9 Krein, S.G. (1972). *Funktsionalnyi analiz [Functional Analysis].* Moscow: Nauka [in Russian].

10 Mynbaev, K.T. & Otelbaev, M.O. (1988). Vesovye funktsionalnye prostranstva i spektr differentsialnykh operatorov [Weighted functional spaces and the spectrum of differential operators]. Moscow: Nauka [in Russian].

УДК 517.928

Д.Н. Нургабыл, У.А. Бекиш

Жетысуский государственный университет им. И. Жансугурова, Талдыкорган, Казахстан
(E-mail: kebek.kz@mail.ru)

Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной краевой задачи с граничными скачками

В статье рассмотрена сингулярно возмущенная общая краевая задача для дифференциального уравнения третьего порядка в условно устойчивом случае. Определен вид асимптотики искомого решения с помощью установленных асимптотических оценок решения исследуемой сингулярно возмущенной краевой задачи. Описан алгоритм, при помощи которого определяются последовательно все члены асимптотического разложения для рассматриваемой задачи. Установлены экспоненциальные оценки для пограничных функций. Получена оценка асимптотической точности, которую дает частичная сумма асимптотического разложения решения рассматриваемой сингулярно возмущенной общей краевой задачи. Доказана теорема о существовании, единственности и справедливости асимптотического разложения решения краевой задачи. Исследованы вопросы предельного перехода решения возмущенной задачи к решению невозмущенной задачи при стремлении малого параметра к нулю, существования явления граничных скачков. Найдены формулы для граничных скачков, порядки скачков.

Кючевые слова: дифференциальные уравнения, сингулярные возмущения, краевая задача, граничные скачки, малый параметр, асимптотика, предельный переход.

Введение

Для построения асимптотических приближений решений некоторых сингулярно возмущенных краевых задач возникает вопрос о предварительном определении характера роста производных искомого решения в граничной точке при стремлении малого параметра к нулю. К таким задачам можно отнести краевые задачи с начальными скачками [1, 2]. В [3, 4] выделены классы краевых задач, обладающих явлением начальных скачков, получены асимптотические оценки решения этих задач. Однако в этих работах ничего не говорится о точности асимптотических приближений. Естественно поставить вопрос о получении равномерной асимптотики решения и их производных с точностью до произвольного порядка. Именно это и является целью настоящей работы.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую сингулярно возмущенную краевую задачу:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t) y'' + B(t) y' + C(t) y = F(t); \tag{1}$$

$$\begin{gathered} L_1 y \equiv \alpha_{10} y(0,\varepsilon) + \alpha_{11} y'(0,\varepsilon) + \beta_{10} y(1,\varepsilon) = a_1;, \\ L_2 y \equiv \alpha_{21} y'(0,\varepsilon) + \beta_{20} y(1,\varepsilon) = a_2;, \\ L_3 y \equiv \alpha_{30} y(0,\varepsilon) + \beta_{30} y(1,\varepsilon) = a_3, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр; $a_i,\ \alpha_{ij},\ \beta_{ij}$ – константы.

В работе [1] были установлены следующие предельные равенства:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y\left(t,\varepsilon\right) = \bar{y}\left(t\right), \quad 0 \le t \le 1, \lim_{\varepsilon\to 0} y^{(j)}\left(t,\varepsilon\right) = \bar{y}^{(j)}\left(t\right),\ \ 0 < t < 1,\ \ j = 1,2, \tag{3}$$

где $y\left(t,\varepsilon\right)$ — решение задачи (1), (2); $\bar{y}\left(t\right)$ — решение соответствующей вырожденной задачи. Из (3) видно, что $\bar{y}^{(j)}\left(t\right),\ j = 1,2,$ можно использовать в качестве асимптотического приближения к $y^{(j)}\left(t,\varepsilon\right),\ j = 1,2,$ только на промежутке $0 < t_0(\varepsilon) \le t \le t_1(\varepsilon) < 1$, причем эти предельные равенства ничего не говорят о точности этих приближений. Естественно поставить вопрос о получении равномерного приближения с любой точностью по малому параметру.

Построение асимптотического разложения решения краевой задачи

Для построения асимптотики решения задачи (1), (2) потребуем выполнения следующих условий:

I. Пусть коэффициенты $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и правая часть $F(t)$ уравнения (1) достаточное число раз дифференцируемы на отрезке $0 \le t \le 1$.

II. Пусть $B(t) \neq 0$ *при* $t \in [0,1]$ *и* $\tilde{\alpha} = \alpha_{10}\alpha_{21}\beta_{30} - \alpha_{30}\alpha_{21}\beta_{10} + \alpha_{11}\alpha_{30}\beta_{20} \neq 0$.

III. Дополнительное характеристическое уравнение

$$\mu^3 + A(t)\mu^2 + B(t)\mu = 0$$

имеет различные корни $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$, *причем* $\mu_1 = 0$, $Re\mu_2 < 0$, $Re\,\mu_3 > 0$.

Исходя из оценки (18) работы [1], заключаем, что асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) следует искать в виде

$$y\,(t,\varepsilon) = y_\varepsilon\,(t) + \varepsilon\, u_\varepsilon\,(\tau) + w_\varepsilon\,(s)\,,\ \tau = \frac{t}{\varepsilon},\ \ s = \frac{t-1}{\varepsilon},\ 0 \le t \le 1 \tag{4}$$

Подставим (4) в (1):

$$\varepsilon^2 y_\varepsilon'''\,(t) + \frac{d^3u_\varepsilon}{d\tau^3} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{d^3w_\varepsilon}{ds^3} + \varepsilon\, A\,(t)\left(y_\varepsilon''\,(t) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}\frac{d^2u_\varepsilon}{d\tau^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2w_\varepsilon}{ds^2}\right) +$$

$$+B\,(t)\left(y_\varepsilon'\,(t) + \frac{du_\varepsilon}{d\tau} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{dw_\varepsilon}{ds}\right) + C\,(t)\,(y_\varepsilon\,(t) + \varepsilon\, u_\varepsilon\,(\tau) + w_\varepsilon\,(s)) = F\,(t)\,. \tag{5}$$

Теперь, приравнивая в (5) выражения, зависящие от t, τи s по отдельности, получаем:

$$\varepsilon^2 y_\varepsilon'''\,(t) + \varepsilon A\,(t)\, y_\varepsilon''\,(t) + B\,(t)\, y_\varepsilon'\,(t) + C\,(t)\, y_\varepsilon\,(t) = F\,(t)\,; \tag{6}$$

$$\frac{d^3u_\varepsilon}{d\tau^3} + A\,(\varepsilon\tau)\,\frac{d^2u_\varepsilon}{d\tau^2} + B\,(\varepsilon\tau)\,\frac{du_\varepsilon}{d\tau} + \varepsilon C\,(\varepsilon\tau)\, u_\varepsilon\,(\tau) = 0; \tag{7}$$

$$\frac{d^3w_\varepsilon}{ds^3} + A\,(1+\varepsilon s)\,\frac{d^2w_\varepsilon}{ds^2} + B\,(1+\varepsilon s)\,\frac{dw_\varepsilon}{ds} + \varepsilon C\,(1+\varepsilon s)\, w_\varepsilon\,(s) = 0 \tag{8}$$

Решение уравнения (6) ищем в виде разложения

$$y_\varepsilon\,(t) = y_0\,(t) + \varepsilon y_1\,(t) + \varepsilon^2 y_2\,(t) + ..., \tag{9}$$

а решения (7) и (8) в виде

$$u_\varepsilon\,(\tau) = u_0\,(\tau) + \varepsilon u_1\,(\tau) + \varepsilon^2 u_2\,(\tau) + ...\ . \tag{10}$$

$$w_\varepsilon\,(s) = w_0\,(s) + wu_1\,(s) + \varepsilon^2 w_2\,(s) + ...\ . \tag{11}$$

Подставляя (9) в (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем:

$$B\,(t)\, y_0'\,(t) + C\,(t)\, y_0\,(t) = F\,(t)\,; \tag*{$(12)_0$}$$

$$B\,(t)\, y_1'\,(t) + C\,(t)\, y_1\,(t) = -A\,(t)\, y_0''(t); \tag*{$(12)_1$}$$

$$B\,(t)\, y_k'\,(t) + C\,(t)\, y_k\,(t) = -A\,(t)\, y_{k-1}''\,(t) - y_{k-2}'''\,(t)\,. \tag*{$(12)_k$}$$

Теперь, подставляя (10) в (7), представляя $A\,(\varepsilon\tau)\,,\ B\,(\varepsilon\tau)\,,\ C\,(\varepsilon\tau)$ в ряды по степеням ε и приравнивая выражения стоящих при одинаковых степенях ε, находим:

$$\frac{d^3u_0}{d\tau^3} + A(0)\frac{d^2u_0}{d\tau^2} + B(0)\frac{du_0}{d\tau} = 0; \tag*{$(13)_0$}$$

$$\frac{d^3u_1}{d\tau^3} + A(0)\frac{d^2u_1}{d\tau^2} + B(0)\frac{du_1}{d\tau} = \Phi_1\,(\tau)\,; \tag*{$(13)_1$}$$

$$\frac{d^3u_k}{d\tau^3}+A(0)\frac{d^2u_k}{d\tau^2}+B(0)\frac{du_k}{d\tau}=\Phi_k\left(\tau\right)\quad k=2,3,..., \tag{13$_k$}$$

где

$$\Phi_1\left(\tau\right)=-\frac{A'\left(0\right)\tau}{1!}\ddot{u}_0\left(\tau\right)-\frac{B'\left(0\right)\tau}{1!}\dot{u}_0\left(\tau\right)\ +C(0)u_0\left(\tau\right);$$

$$\Phi_k\left(\tau\right)=-\sum_{j=1}^{k}\frac{A^{(j)}\left(0\right)\tau^j}{j!}\ddot{u}_{k-j}\left(\tau\right)-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{B^{(j)}\left(0\right)\tau^j}{j!}\dot{u}_{k-j}\left(\tau\right)-\sum_{j=1}^{k}\frac{C^{(j-1)}\left(0\right)\tau^{j-1}}{(j-1)!}u_{k-j}\left(\tau\right) \tag{14}$$

Здесь точки сверху означают производные по τ.

Аналогично, подставляя (11) в (8), представляя $A\left(1+\varepsilon s\right)$, $B\left(1+\varepsilon s\right)$, $C\left(1+\varepsilon s\right)$ в ряды по степеням ε и приравнивая выражения стоящих при одинаковых степенях ε находим:

$$\frac{d^3w_0}{ds^3}+A(1)\frac{d^2w_0}{ds^2}+B(1)\frac{dw_0}{ds}=0; \tag{15$_0$}$$

$$\frac{d^3w_1}{ds^3}+A(1)\frac{d^2w_1}{ds^2}+B(1)\frac{dw_1}{ds}=P_1\left(s\right); \tag{15$_1$}$$

$$\frac{d^3w_k}{ds^3}+A(1)\frac{d^2w_k}{ds^2}+B(1)\frac{dw_k}{ds}=P_k\left(s\right)\ ,\ k=2,3,..., \tag{15$_k$}$$

где

$$P_1\left(s\right)=-\frac{A'\left(1\right)\ s}{1!}\ddot{w}_0\left(s\right)-\frac{B'\left(1\right)s}{1!}\dot{w}_0\left(s\right)\ +C(1)w_0\left(s\right);$$

$$P_k\left(s\right)=-\sum_{j=1}^{k}\frac{A^{(j)}\left(1\right)s^j}{j!}\ddot{w}_{k-j}\left(s\right)-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{B^{(j)}\left(1\right)s^j}{j!}\dot{w}_{k-j}\left(s\right)-\sum_{j=1}^{k}\frac{C^{(j-1)}\left(1\right)\ s^{j-1}}{(j-1)!}w_{k-j}\left(s\right). \tag{16}$$

Здесь точки сверху означают производные по s.

Для однозначного определения $y_k\left(t\right)$, $u_k\left(\tau\right)$, w_k(s) подставим разложения (4), (9), (10), (11) в краевые условия (2):

$$\alpha_{10}\left(y_0\left(0\right)+\varepsilon y_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k y_k\left(0\right)+...+\varepsilon u_0\left(0\right)+\varepsilon^2u_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k u_{k-1}\left(0\right)+...\right)+$$

$$+\alpha_{11}\left(y_0'\left(0\right)+\varepsilon y_1'\left(0\right)+...+\varepsilon^k y_k'\left(0\right)+...+\dot{u}_0\left(0\right)+\varepsilon\dot{u}_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k\dot{u}_k\left(0\right)+...\right)+$$

$$+\beta_{10}\left(y_0\left(1\right)+\varepsilon y_1\left(1\right)+...+\varepsilon^k y_k\left(1\right)+...+w_0\left(0\right)+\varepsilon w_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k w_k\left(0\right)+...\right)=a_1;$$

$$\alpha_{21}\left(y_0'\left(0\right)+\varepsilon y_1'\left(0\right)+...+\varepsilon^k y_k'\left(0\right)+...+\dot{u}_0\left(0\right)+\varepsilon\dot{u}_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k\dot{u}_k\left(0\right)+...\right)+$$

$$+\beta_{20}\left(y_0\left(1\right)+\varepsilon y_1\left(1\right)+...+\varepsilon^k y_k\left(1\right)+...+w_0\left(0\right)+\varepsilon w_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k w_k\left(0\right)+...\right)=a_2;$$

$$\alpha_{30}\left(y_0\left(0\right)+\varepsilon y_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k y_k\left(0\right)+...+\varepsilon u_0\left(0\right)+\varepsilon^2u_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k u_{k-1}\left(0\right)+...\right)+$$

$$+\beta_{30}\left(y_0\left(1\right)+\varepsilon y_1\left(1\right)+...+\varepsilon^k y_k\left(1\right)+...+w_0\left(0\right)+\varepsilon w_1\left(0\right)+...+\varepsilon^k w_k\left(0\right)+...\right)=a_3.$$

Отсюда, приравнивая выражения стоящих при одинаковых степенях ε, получаем:

$$\begin{gathered}L_1y_0+\alpha_{11}\dot{u}_0\left(0\right)+\beta_{10}w_0\left(0\right)=a_1;\\ L_2y_0+\alpha_{21}\dot{u}_0\left(0\right)+\beta_{20}w_0\left(0\right)=a_2;\\ L_3y_0+\beta_{30}w_0\left(0\right)=a_3;\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}L_1y_k+\alpha_{11}\dot{u}_k\left(0\right)+\beta_{10}w_k\left(0\right)=-\alpha_{10}u_{k-1}\left(0\right);\\ L_2y_k+\alpha_{21}\dot{u}_k\left(0\right)+\beta_{20}w_k\left(0\right)=0;\\ L_3y_k+\beta_{30}w_k\left(0\right)=-\alpha_{30}u_{k-1}\left(0\right).\end{gathered} \tag{18$_k$}$$

Следовательно, условие для решения $\bar{y}(t)$ вырожденного уравнения $(12)_0$ можно получить из (17) в виде
$$H\bar{y} \equiv \tilde{\alpha}\, \bar{y}\,(0) = \tilde{a}, \tag{19}$$
где $\tilde{\alpha} = \alpha_{10}\alpha_{21}\beta_{30} - \alpha_{30}\alpha_{21}\beta_{10} + \alpha_{11}\alpha_{30}\beta_{20}, \tilde{a} = \alpha_{21}\beta_{30}a_1 - \alpha_{11}\beta_{30}a_2 + (\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10})a_3$, что является одним из особенностей исследуемой задачи. Условия I, II позволяют определить решение $\bar{y}(t)$ вырожденной задачи $(12)_0$, (19) однозначно на отрезке $0 \le t \le 1$:
$$\bar{y}(t) = \tilde{a}\frac{u_1(t)}{\tilde{\alpha}} + \int_1^t \frac{u_1(t)F(s)}{u_1(s)B(s)}ds, \bar{y}'(t) = \tilde{a}\frac{u_1'(t)}{\tilde{\alpha}} + \int_1^t \frac{u_1'(t)F(s)}{u_1(s)B(s)}ds + \frac{F(t)}{B(t)}.$$

Обратимся к системе (17). Используя первые два уравнения системы (17) и начальное условие (19), получаем:
$$w_0\,(0) = \frac{\bar{a} - \tilde{\alpha}y_0\,(1)}{\tilde{\alpha}}; \tag{20}$$
$$\dot{u}_0\,(0) = \frac{\bar{\bar{a}} - \tilde{\alpha}y_0'\,(0)}{\tilde{\alpha}}, \tag{21}$$
где $\bar{a} = \alpha_{11}\alpha_{30}a_2 - \alpha_{21}\alpha_{30}a_1 + \alpha_{21}\alpha_{10}a_3$, $\bar{\bar{a}} = \alpha_{30}\beta_{20}a_1 - \alpha_{10}\beta_{20}a_3 + (\alpha_{10}\beta_{30} - \alpha_{30}\beta_{10})a_2$.

Теперь в $(15)_0$, используя корень $\mu = \mu_3$, где $Re\mu_3 > 0$, и условие (20), получаем:
$$w_0\,(s) = \frac{\bar{a} - \tilde{\alpha}y_0\,(1)}{\tilde{\alpha}}e^{\mu_3(1)s}, \;\; s \le 0; \dot{w}_0\,(s) = \mu_3(1)\frac{\bar{a} - \tilde{\alpha}y_0\,(1)}{\tilde{\alpha}}e^{\mu_3(1)s}, \;\; s \le 0 \tag{22}$$

Аналогично в $(13)_0$ используя корень $\mu = \mu_2$, где $Re\mu_2 < 0$, и условие (21), получаем:
$$\dot{u}_0\,(\tau) = \frac{\bar{\bar{a}} - \tilde{\alpha}y_0'\,(0)}{\tilde{\alpha}}e^{\mu_2(0)\tau}, \;\; u_0\,(\tau) = \frac{\bar{\bar{a}} - \tilde{\alpha}y_0'\,(0)}{\mu_2(0)\tilde{\alpha}}e^{\mu_2(0)\tau}. \tag{23}$$

Кроме того, из (22) и (23) находим
$$\ddot{w}_0\,(s) = \mu_3^2(1)\frac{\bar{a} - \tilde{\alpha}y_0\,(1)}{\tilde{\alpha}}e^{\mu_3(1)s}\,, \, s \le 0; \quad \ddot{u}_0\,(\tau) = \mu_2(0)\frac{\bar{\bar{a}} - \tilde{\alpha}y_0'\,(0)}{\tilde{\alpha}}e^{\mu_2(0)\tau}. \tag{24}$$

Из формул (22)–(24) для $w_0\,(s)\,,\, \dot{w}_0\,(s)\,,\, \ddot{w}_0\,(s)\,,\, u_0\,(\tau)\,,\, \dot{u}_0\,(\tau)\,,\, \ddot{u}_0\,(\tau)$ получим экспоненциальные оценки
$$\left|u_0^{(j)}(\tau)\right| \le Ke^{\bar{\mu}_2(0)\tau}, \;\tau \ge 0; \quad \left|w_0^{(j)}(\tau)\right| \le Ke^{\bar{\mu}_3(1)s}, \, s \le 0, \;\; j = 0,1,2. \tag{25}$$

Итак, построены члены асимптотики нулевого порядка. В свою очередь из системы $(18)_k$ определяются начальные условия
$$y_k(0) = u_{k-1}(0), \;\; w_k(0) = y_k(0), \;\; \dot{u}_k(0) = -y_k'(1). \tag*{$(26)_k$}$$

Теперь обратимся к уравнению $(12)_1$ и условиям $(26)_1$. Откуда получаем задачу
$$B\,(t)\,y_1'\,(t) + C\,(t)\,y_1\,(t) = -A\,(t)\,y_0''(t), y_1(0) = u_0(0).$$
Отсюда определяется $y_1(t)$ при $0 \le t \le 1$.

Далее обратимся к уравнениям $(15)_1$, $(17)_1$ и равенствам (22). Откуда получаем задачи
$$\frac{d^3w_1}{ds^3} + A(1)\frac{d^2w_1}{ds^2} + B(1)\frac{dw_1}{ds} = P_1\,(s)\,, \dot{w}_1\,(0) = y_1\,(1)\,; \tag{27}$$
$$\frac{d^3u_1}{d\tau^3} + A(0)\frac{d^2u_1}{d\tau^2} + B(0)\frac{du_1}{d\tau} = \Phi_1\,(\tau)\,, \dot{u}_1\,(0) = -y_1'\,(0)\,, \tag{28}$$
где
$$\Phi_1\,(\tau) = e^{\mu_2(0)\tau}\,\tilde{\Phi}_1\,(\tau)\,, \;\; \tau \ge 0, P_1\,(s) = \tilde{P}_1\,(s)\,e^{\mu_3(1)s}\,, \;\; s \le 0,$$
$\tilde{\Phi}_1\,(\tau)$ — многочлен первой степени относительно τ; $\tilde{P}_1\,(s)$ — многочлен первой степени относительно s. Тогда, в силу условия III, задача (27) имеет решение
$$\dot{w}_1\,(s) = y_1\,(1)\,e^{\mu_3(1)s} + s\,z_1\,(s)\,e^{\mu_3(1)s}, \;\; s \le 0, \tag{29}$$

где функция $z_1(s)$ — многочлен первой степени. Из (29), используя требования $w_1(s) \to 0$ при $s \to -\infty$, получаем:

$$w_1(s) = \frac{y_1(1)}{\mu_3(1)} e^{\mu_3(1)s} - \int_s^{-\infty} p\, z_1(p)\, e^{\mu_3(1)p} dp\,, \;\; s \le 0, w_1(0) = \frac{y_1(1)}{\mu_3(1)} - \int_0^{-\infty} p\, z_1(p)\, e^{\mu_3(1)p} dp;$$

$$\ddot{w}_1(s) = \mu_3(1) y_1(1)\, e^{\mu_3(1)s} + \left(z_1(s) + s\, z_1'(s) + s\, z_1(s)\, \mu_3(1)\right) e^{\mu_3(1)s}\,, \quad s \le 0. \tag{30}$$

В силу условия III задача (28) имеет решение

$$\dot{u}_1(\tau) = -y_1'(0)\, e^{\mu_2(0)\tau} + \tau\, x_1(\tau)\, e^{\mu_2(0)\tau}\,, \; \tau \ge 0. \tag{31}$$

Здесь функция $x_1(\tau)$ — многочлен первой степени. Отсюда, используя требования $u_1(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$, получаем:

$$u_1(\tau) = -\frac{y_1'(0)}{\mu_2(0)} e^{\mu_2(0)\tau} - \int_\tau^{\infty} p\, x_1(p)\, e^{\mu_2(0)p} dp \quad u_1(0) = -\frac{y_1'(0)}{\mu_2(0)} - \int_0^{\infty} p\, x_1(p)\, e^{\mu_2(0)p} dp, \tag{32}$$

а также имеем

$$\ddot{u}_1(\tau) = -y_1'(0)\, \mu_2(0) e^{\mu_2(0)\tau} + \left(x_1(\tau) + \tau\, x_1'(\tau) + \tau\, x_1(\tau)\, \mu_2(0)\right) e^{\mu_2(0)\tau}\,, \; \tau \ge 0. \tag{33}$$

Из формул (29)–(33) вытекают оценки для $w_1(s)\,,\; \dot{w}_1(s)\,,\; \ddot{w}_1(s)\,,\; u_1(\tau)\,,\; \dot{u}_1(\tau)\,,\; \ddot{u}_1(\tau)$:

$$\left|u_1^{(j)}(\tau)\right| \le K e^{\bar{\mu}_2(0)\tau}, \;\; \tau \ge 0, \left|w_1^{(j)}(s)\right| \le K e^{\bar{\mu}_3(1)s}, \; s \le 0, \;\; j = 0, 1, 2. \tag{34}$$

Таким образом, определены члены разложения (4) с номером 1.

Определение следующих членов асимптотики проходит по такой же схеме для любого $k \ge 2$. Допустим, что уже определены все члены с номерами до $k-1$ включительно, причем для функций $w_i(s)\,,\; \dot{w}_i(s)\,,\; \ddot{u}_i(s)\,,$ $u_i(\tau)\,,\; \dot{u}_i(\tau)\,,\; \ddot{u}_i(\tau)\,, \quad i = 0, 1, ..., k-1$, получаются выражения типа (22)–(24), (29)–(33):

$$\ddot{u}_i(\tau) = -y_i'(0)\, \mu_2(0) e^{\mu_2(0)\tau} + \left(x_i(\tau) + \tau\, x_i'(\tau) + \tau\, x_i(\tau)\, \mu_2(0)\right) e^{\mu_2(0)\tau}\,, \; \tau \ge 0.$$

$$\dot{u}_i(\tau) = -y_i'(0)\, e^{\mu_2(0)\tau} + \tau\, x_i(\tau)\, e^{\mu_2(0)\tau}\,, \quad \tau \ge 0. \tag{35}$$

$$u_i(\tau) = -\frac{y_i'(0)}{\mu_2(0)} e^{\mu_2(0)\tau} - \int_\tau^{\infty} p\, x_i(p)\, e^{\mu_2(0)p} dp\,, \;\; \tau \ge 0.$$

$$\ddot{w}_i(s) = \mu_3(1) y_i(1)\, e^{\mu_3(1)s} + \left(z_i(s) + s\, z_i'(s) + s\, z_i(s)\, \mu_3(1)\right) e^{\mu_3(1)s}\,, \quad s \le 0.$$

$$\dot{w}_i(s) = y_i(1)\, e^{\mu_3(1)s} + s\, z_i(s)\, e^{\mu_3(1)s}\,, \quad s \le 0. \tag{36}$$

$$w_i(s) = \frac{y_i(1)}{\mu_3(1)} e^{\mu_3(1)s} - \int_s^{-\infty} p\, z_i(p)\, e^{\mu_3(1)p} dp\,, \;\; s \le 0.$$

отсюда последовательно получаем, что функции $w_i(s)\,,\; \dot{w}_i(s)\,,\; \ddot{u}_i(s)\,,\; (i = 0, 1, ..., k-1)$, при $s \to -\infty$, функции $u_i(\tau)\,,\; \dot{u}_i(\tau)\,,\; \ddot{u}_i(\tau)\,,\; (i = 0, 1, ..., k-1)$, при $\tau \to +\infty$ будут экспоненциально убывающими:

$$\left|u_i^{(j)}(\tau)\right| \le K e^{\bar{\mu}_2(0)\tau}, \;\; \tau \ge 0, \left|w_i^{(j)}(s)\right| \le K e^{\bar{\mu}_3(1)s}, \; s \le 0, \;\; j = 0, 1, 2. \tag{37}$$

Тогда из $(12)_k$, $(26)_k$ получим задачу

$$B(t)\, y_k'(t) + C(t)\, y_k(t) = -A(t)\, y_{k-1}''(t) - y_{k-2}'''(t)\,, \quad y_k(0) = u_{k-1}(0).$$

Отсюда однозначно определяется $y_k(t)$ при $0 \le t \le 1$.

Рассмотрим $\Phi_k(\tau)\,, P_k(s)$ из (14), (16), где $\Phi_k(\tau)$ выражается через $u_i^{(j)}(\tau)$ $(j = 0, 1, 2;\; i < k)$, а $P_k(s)$ — через $w_i^{(j)}(s)$ $(j = 0, 1, 2;\; i < k)$. Тогда с учетом (22)–(24), (29)–(33), (35), (36) функции $\Phi_k(\tau)$,$P_k(s)$ записываются в виде

$$\Phi_k(\tau) = e^{\mu_2(0)\tau}\,\tilde{\Phi}_k(\tau)\,;\;\; \tau \geq 0, P_k(s) = \tilde{P}_k(s)\,e^{\mu_3(1)s}\,,\; s \leq 0, \tag{38}$$

$\tilde{\Phi}_k(\tau)$ — многочлен первой степени относительно τ; $\tilde{P}_k(s)$ — многочлен первой степени относительно s.

С учетом (38) из $(13)_k$, $(15)_k$ для $w_k(\tau)$, $u_k(\tau)$ получаем уравнение

$$\frac{d^3 w_k}{ds^3} + A(1)\frac{d^2 w_k}{ds^2} + B(1)\frac{dw_k}{ds} = \tilde{P}_k(s)\,e^{\mu_3(1)s}\,,\;\; s \leq 0; \tag{39}$$

$$\frac{d^3 u_k}{d\tau^3} + A(0)\frac{d^2 u_k}{d\tau^2} + B(0)\frac{du_k}{d\tau} = e^{\mu_2(0)\tau}\,\tilde{\Phi}_k(\tau)\,,\;\; \tau \geq 0. \tag{40}$$

Решая (49), (50) с учетом $(26)_k$:

$$w_k(0) = y_k(1),\;\; \dot{u}_k(0) = -y_k'(1),$$

получаем решения

$$\dot{u}_k(\tau) = -y_k'(1)\,e^{\mu_2(0)\tau} + \tau\,x_k(\tau)\,e^{\mu_2(0)\tau}\,,\;\;\; \tau \geq 0; \tag{41}$$

$$\dot{w}_k(\tau) = y_k(1)\,e^{\mu_3(1)s} + s\,z_k(s)\,e^{\mu_3(1)s}\,,\;\;\; s \leq 0. \tag{42}$$

Решая (41), (42), с учетом требований $u_k(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$, $w_k(\tau) \to 0$ при $s \to -\infty$, получаем решения

$$u_k(\tau) = -\frac{y_k'(0)}{\mu_2(0)}e^{\mu_2(0)\tau} - \int_\tau^\infty p\,x_k(p)\,e^{\mu_2(0)p}dp\,,\;\; \tau \geq 0;$$

$$w_k(\tau) = -\frac{y_k'(1)}{\mu_3(1)}e^{\mu_3(1)s} - \int_s^{-\infty} p\,z_k(p)\,e^{\mu_3(1)p}dp\,,\;\; s \leq 0. \tag{43}$$

и начальные условия

$$w_k(0) = -\frac{y_k'(1)}{\mu_3(1)} - \int_0^{-\infty} p\,x_k(p)\,e^{\mu_3(1)p}dp; \quad u_k(0) = -\frac{y_k'(0)}{\mu_2(0)} - \int_0^\infty p\,x_k(p)\,e^{\mu_2(0)p}dp \tag{44}$$

Из (41), (42) будем иметь

$$\ddot{w}_k(s) = -\mu_3(1)y_k'(1)\,e^{\mu_3(1)s} + (z_k(s) + s\,z_k'(s) \,+ s\,z_k(s)\,\mu_3(1))\,e^{\mu_3(1)s}\,,\;\;\; s \leq 0;$$

$$\ddot{u}_k(\tau) = -y_k'(0)\,\mu_2(0)e^{\mu_2(0)\tau} + (x_k(\tau) + \tau\,x_k'(\tau) + \tau\,x_k(\tau)\,\mu_2(0))\,e^{\mu_2(0)\tau}\,, \tau \geq 0. \tag{45}$$

Из (41), (52), (43), (45) вытекает справедливость следующих оценок:

$$\left|u_k^{(j)}(\tau)\right| \leq Ke^{\bar{\mu}_2(0)\tau}\;\; \tau \geq 0; \quad \left|w_k^{(j)}(s)\right| \leq Ke^{\bar{\mu}_3(1)s},\;\; s \leq 0,\;\; j = 0, 1, 2. \tag{46}$$

Таким образом, члены разложения (4) при всех $k = 1, 2, ...$ построены.

Доказательство справедливости асимптотического разложения решения краевой задачи

Для доказательства справедливости асимптотического разложения решения задачи (1), (2) определим члены разложения (4), (9)–(11) до номера N включительно и образуем частичную сумму $Y_N(t, \varepsilon)$ разложения (4):

$$Y_N(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k y_k(t) + \varepsilon \sum_{k=0}^N u_k\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\varepsilon^k + \sum_{k=0}^N w_k\left(\frac{t-1}{\varepsilon}\right)\varepsilon^k. \tag{47}$$

Лемма. Пусть выполнены условия I–III. Тогда функция $Y_N(t, \varepsilon)$, выражаемая формулой (47), удовлетворяет сингулярно возмущенную задачу (1), (2) с точностью порядка $O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$ при $\varepsilon \to 0$:

$$L_\varepsilon Y_N\left(t,\varepsilon\right)-F\left(t\right)=O\left(\varepsilon^{N+1}\right)\,,\ 0\leq t\leq 1; \tag{48}$$

$$L_1Y_N-a_1=O(\varepsilon^{N+1})\,,\quad L_2Y_N-a_2=O\left(\exp\left(-\frac{\nu}{\varepsilon}\right)\right)\,,\quad L_3Y_N-a_3=O\left(\varepsilon^{N+1}\right).$$

Доказательство леммы непосредственно следует из самого способа построения функций $y_k\left(t\right)$, $W_k\left(\tau\right)$.

Теорема. Пусть выполнены условия I–III. Тогда при достаточно малых $\varepsilon>0$ *на сегменте* $0\leq t\leq 1$ *решение задачи (1), (2) существует, единственно и удовлетворяет оценке*

$$y\left(t,\varepsilon\right)=Y_N\left(t,\varepsilon\right)+O\left(\varepsilon^{N+1}\right),\ 0\leq t\leq 1. \tag{49}$$

Доказательство. Положим $R\left(t,\varepsilon\right)=y\left(t,\varepsilon\right)-Y_N\left(t,\varepsilon\right)$, где $y\left(t,\varepsilon\right)$ — решение задачи (1), (2); $Y_N\left(t,\varepsilon\right)$ — частичная сумма разложения (4). Подставив $y\left(t,\varepsilon\right)=R\left(t,\varepsilon\right)+Y_N\left(t,\varepsilon\right)$ в задачу (1), (2), для остаточного члена $R\left(t,\varepsilon\right)$ получим задачу

$$L_\varepsilon R=\varepsilon^2R'''+\varepsilon A\left(t\right)R''+B\left(t\right)R'+C\left(t\right)R=F\left(t,\varepsilon\right); \tag{50}$$

$$L_1R=a_1-L_1Y_N=O(\varepsilon^{N+1})\,,\ \ L_2R=\ a_2-L_2Y_N=-H(t,\varepsilon)\,,\ L_3R=\ a_3-\ L_3Y_N=O\left(\varepsilon^{N+1}\right)\,, \tag{51}$$

где $F\left(t,\varepsilon\right)=F\left(t\right)-\left[\varepsilon^2Y_N'''+\varepsilon A\left(t\right)Y_N''+B\left(t\right)Y_N'+C\left(t\right)Y_N\right]$, которая в силу (49), удовлетворяет при достаточно малых ε оценкам

$$F\left(t,\varepsilon\right)=O\left(\varepsilon^{N+1}\right)\,,\ 0\leq t\leq 1\,. \tag{52}$$

Задача (50), (51) удовлетворяет всем условиям теоремы 1 работы [1]. Применяя теперь утверждения этой теоремы к краевой задаче (50), (51) и оценку (52), получим, что при достаточно малых ε решение задачи (61), (62) существует, единственно и удовлетворяет оценке $\max\limits_{0\leq t\leq 1}\left|R\left(t,\varepsilon\right)\right|=O\left(\varepsilon^{N+1}\right)$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y(t,\varepsilon)=y_0(t),\quad 0\leq t<1,\lim_{\varepsilon\to 0}y'(t,\varepsilon)=y_0'(t),\quad 0<t<1;$$

$$\Delta_1^0=\lim_{\varepsilon\to 0}y(1,\varepsilon)-y_0(1)=\frac{1}{\tilde{\alpha}}\left(\bar{a}-H_1^0\bar{y}\right),\ \ y'(1,\varepsilon)=\frac{\mu_3(1)}{\varepsilon\tilde{\alpha}}\left(\bar{a}-H_0^1\bar{y}+O(\varepsilon)\right);$$

$$\Delta_0^1=\lim_{\varepsilon\to 0}y'(0,\varepsilon)-y_0'(0)=\frac{1}{\tilde{\alpha}}\left(\bar{\bar{a}}-H_0^1\bar{y}\right),\ \ y''(1,\varepsilon)=\frac{\mu_2(0)}{\varepsilon\tilde{\alpha}}\left(\bar{\bar{a}}-H_0^1\bar{y}+O(\varepsilon)\right),$$

где $H_1^0\bar{y}=\ \tilde{\alpha}y(0)$, $H_0^1\bar{y}=\tilde{\alpha}\bar{y}'(0)$.

Отсюда заключаем, что сингулярно возмущенная краевая задача (1), (2) в окрестности точки $t=0$ обладает явлением скачка первого порядка, а в окрестности точки $t=1$ — явлением скачка нулевого порядка, что является одной из особенностей изучаемой задачи.

Список литературы

1 Нургабыл Д.Н. Аналитический метод исследования решения начальной задачи для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных / Д.Н.Нургабыл // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2014. — № 1. — С. 68–72.

2 Nurgabyl D. Asymptotic estimates for the Solution of a Restoration Problem with Initial Jump / D.Nurgabyl // Journal of Applied Mathematics (USA). — Vol. 2014.

3 Нургабыл Д.Н. Асимптотические оценки решения краевой задачи с начальным скачком для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных / Д.Н.Нургабыл, К.А.Касымов, А.Б.Уаисов // Украинский математический журнал. — 2013. — №. 5. — С. 629–641.

4 Nurgabyl D. Boundary value problems with boundary jumps for singularly perturbed differential equations of conditionally stable type in the critical case / D.Nurgabyl, F.Boribekova, G.Nurgabylova // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2016. — No. 3. 4.

Д.Н. Нұрғабыл, Ұ.А. Бекіш

Шеттік секірісі бар ерекше ауытқыған шекаралық есеп шешімінің асимптотикалық жіктелісі

Мақалада шартты орнықты үшінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін ерекше ауытқыған шекаралық есеп қарастырылды. Зерттеліп отырған ерекше ауытқыған есеп шешімінің асимптотикалық бағамдары арқылы ізделінді, шешімнің асимптотикасының түрі анықталды. Қарастырылып отырған есеп шешімінің асимптотикалық жіктелісінің барлық мөшелерін тізбектей анықтау алгоритмі көрсетілді. Шеттік функциялардың экспоненциалдық бағамдары алынды. Қарастырылып отырған ерекше ауытқыған шекаралық есеп шешімінің асимптотикалық жіктелісінің дербес қосындысы беретін асимптотикалық дәлдіктің бағамы анықталды. Шекаралық есеп шешімінің бар болуы, жалғыздығы және асимптотикалық жіктелістің негізділігі туралы теорема дәлелденді. Кішкене параметр нөлге ұмтылғанда ауытқыған есеп шешімінің ауытқымаған есеп шешіміне шектік көшуі туралы, шеттік секірістер құбылысының барлығы туралы сұрақтары зерттелді. Шеттік секірістер формулалары, олардың реттері табылды.

Кілт сөздер: дифференциалдық теңдеулер, ерекше ауытқу, шекаралық есеп, шеттік секірістер, кіші параметр, асимптотика, шекке көшу.

D.N. Nurgabyl, U.A. Bekish

Asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed boundary value problem with boundary initial jumps

In this paper we consider a singularly perturbed general boundary value problem for a third-order differential equation in the conditionally stable case. The form of the asymptotics of the desired solution is determined with the help of the established asymptotic estimates for the solution of the singularly perturbed boundary-value problem under study. An algorithm is described with which all the terms of the asymptotic expansion for the problem under consideration are determined successively. Exponential estimates for boundary functions are established. An asymptotic accuracy estimate is obtained that is obtained by the partial sum of the asymptotic expansion of the solution of the singularly perturbed general boundary value problem under consideration. A theorem on the existence, uniqueness, and validity of the asymptotic expansion of the solution of the boundary value problem is proved. The questions of the limiting transition of the solution of the perturbed problem to the solution of the unperturbed problem are studied with the small parameter tending to zero, the existence of the boundary jump phenomenon. Formulas for boundary jumps, and the order of jumps are found.

Keywords: differential equations, singular perturbations, boundary value problem, boundary jumps, small parameter, asymptotic, limit transition.

References

1 Nurgabyl, D.N. (2014). Analiticheskii metod issledovaniia resheniia nachalnoi zadachi dlia lineinykh differentsialnykh uravnenii s malym parametrom pri proizvodnykh [An analytical method for investigating the solution of the initial problem for linear differential equations with a small parameter for derivatives]. *Vestnik Karahandinskoho universiteta. Seria Matematika – Bulletin of Karaganda University. Mathematics Series, 1,* 68–72 [in Russian].

2 Nurgabyl, D. (2014). Asymptotic estimates for the Solution of a Restoration Problem with Initial Jump. *Journal of Applied Mathematics (USA).*

3 Nurgabyl, D.N., Kasymov, K.A. & Uaisov, A.B. (2013). Asimptoticheskie otsenki resheniia kraevoi zadachi s nachalnym skachkom dlia lineinykh differentsialnykh uravnenii s malym parametrom pri proizvodnykh [Asymptotic estimates for the solutions of boundary-value problems with initial jump for linear differential equations with small parameter in the coefficients of derivatives]. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal – Ukrainian Mathematical Journal, 65,* 5, 694–708 [in Russian].

4 Nurgabyl, D., Boribekova, F. & Nurgabylova, G. (2016). Boundary value problems with boundary jumps for singularly perturbed differential equations of conditionally stable type in the critical case. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 3,* 4, 3425–3432.

UDC 004.94

G. Saltanova, T. Aisina

Kh.Dosmukhamedov Atyrau State University, Kazakhstan
(E-mail: galiyasaltanova@yandex.ru)

Mathematical model of non-isothermal flow of oil through the trunk pipeline

In this article are described a non-isothermal current of high-viscosity oil. A non-isothermal current of viscous liquid on the trunk pipeline it is characteristic of transportation of oil and oil products with preliminary heating from places of production to a customer, of a current of hot water from combined heat and power plant to inhabited arrays and production locations, etc. The one-dimensional mathematical model of a non-isothermal current of viscous liquid and a formula of cost fuel – power expenses for the stationary mode of a current are examined. It is spoken in detail the process of calculation of optimum speed of a current for transportation of high-viscosity oil and oil products in the warmed-up state on pipelines at which the total cost of energy costs of pumping and heating of oil would be minimum.

Keywords: high-viscosity oil, viscous liquid, non-isothermal current, stationary mode of a current, pipeline, energy expenses, speed of current.

Introduction

The Kazakhstan oil is considered very viscous, and its transportation in the warmed-up state on pipes requires big energy expenses. On the other hand, the considerable time pipelines work with plan underload. Therefore, the choice of the modes of a current in case of which the cost of pumping will be minimum is very demanded. The purpose of work – to investigate process of non-isothermal flow of high-viscosity oil in the main pipeline and to find such management of process of a flow at which the total cost for power expences of pumping and for heating of oil would be minimum when transporting by the pipelines working with planned under loading [1].

For achieving the purpose it is necessary to solve the following problems:

– to study process of non-isothermal flow of high-viscosity oil in the main pipeline;
– to put and solve the problem of a thermo - hydraulic flow of liquid in the pipeline;
– to estimate the cost of transportation of high-viscosity oil;
– to calculate the optimum speed of a flow of oil at which cost would be minimum.

Basic calculations

Computation of optimum speed of operation of the underloaded oil pipeline were executed by means of object-oriented programming language C#.

Calculation of temperature, pressure and energy consumption for operation of the pipeline

Calculation of temperature at an entrance to each site. Calculation of temperature is calculated by means of the following formula

$$T_{j-1}^{+} = T_{env} + (T_j^{-} - T_{env}) \cdot e^{\frac{\alpha_{j-1}}{w}};$$

$$T_j^{-} = T_{min} = 33\,^{\circ}C.$$

For finding of temperatures on sites, it is necessary for us a difference of sites, which they are provided in drawing from above under L_j value (Fig. 1) [2].

$$L_j = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = [145000, 177000, 111000, 95000, 213000] km.$$

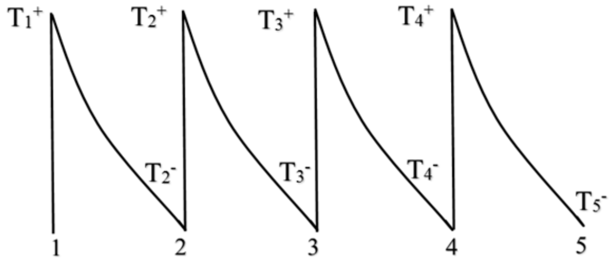

Figure 1. Distribution of temperature along the route of the oil pipeline

Calculation of pressure on an entrance to each site (Fig. 2). Calculation of pressure on an entrance to each site is calculated by means of the following formula

$$\Delta P_j = P_j^+ - P_j^- = H_{j-1} + E \cdot w^{2-m}[A_{j-1} - B_{j-1} \cdot \Delta T_{env} \cdot w(e^{\frac{\alpha_{j-1}}{w}(x_{j-1}-x_j)} - 1)];$$

$$P_j^- = P_{min} = 2atm.$$

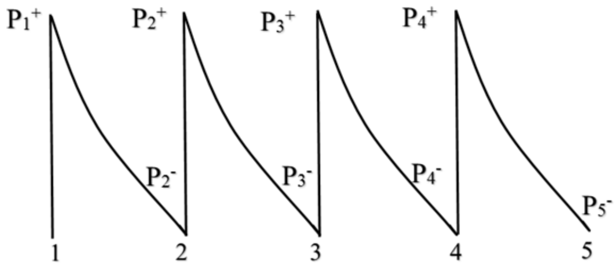

Figure 2. Distribution of pressure along the route of the oil pipeline [2]

Calculation of energy consumption for exploitation of the pipeline. Calculation of cost is calculated by means of the following formula

$$S = ae \cdot w \cdot \sum_{j=1}^{N} \varphi_j \Delta P_j + \delta \cdot w \cdot \sum_{j=1}^{N} y_j \Delta T_j.$$

Calculation of optimal speed

Calculation of optimal speed is calculated by means of the following formula

$$w = \delta \cdot \Delta T_{env} \sum_{j=1}^{N} y_j \alpha_j \cdot e^{\frac{\alpha_{j-1}}{w}} + \alpha e \cdot E \cdot w^{3-m}[(4-m) \cdot \Delta T_{env} \cdot w \cdot \sum_{j=1}^{N} y_j B_j (e^{\frac{\alpha_{j-1}}{w}} - 1) -$$

$$-(3-m)\sum_{j=1}^{N} y_j A_j - \Delta T_{env} \sum_{j=1}^{N} y_j B_j \alpha_j e^{\frac{\alpha_{j-1}}{w}}] :$$

$$: [\alpha e \sum_{j=1}^{N} \varphi_j H_j + \delta \cdot \Delta T_{env} \sum_{j=1}^{N} y_j (e^{\frac{\alpha_{j-1}}{w}} - 1)].$$

By means of the found speeds, we find anew temperature, pressure and cost. In which speed, cost will be minimum – it will be optimum speed [3-5].

Results of thermal-hydraulic calculation for different seasons

Heat hydraulic calculation for spring. For spring temperature surrounding will be $T_{env} = 10\ ^\circ C$.

In Figure 3 provides the view of interface which gives the results of thermal-hydraulic calculation for spring.

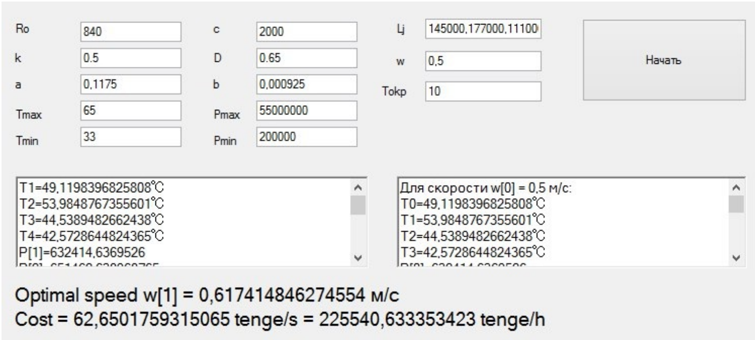

Figure 3. Window of results of thermal-hydraulic calculation for spring

From Figure 4, we can assume that at $w = 0,61$ speed, we have the minimum cost. Therefore, for spring it will also be optimum speed.

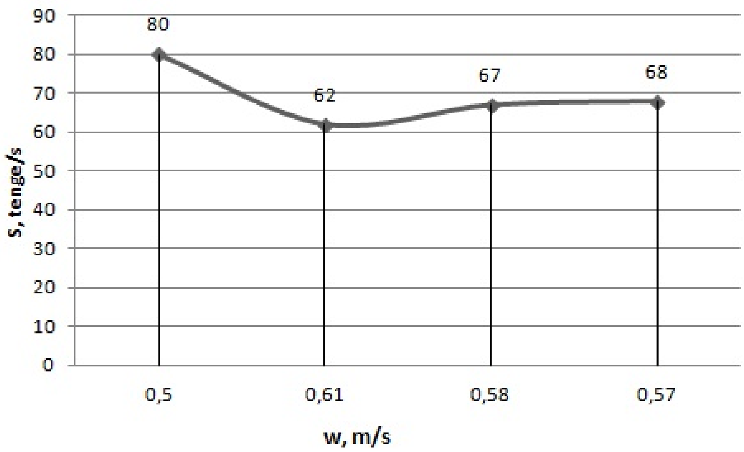

Figure 4. Dependence of working cost of the oil pipeline on speed

Thermal-hydraulic calculation for summer. For summer temperature surrounding will be $T_{env} = 18\,^{\circ}C$.

In Figure 5 provides the view of interface which gives the results of thermal-hydraulic calculation for summer.

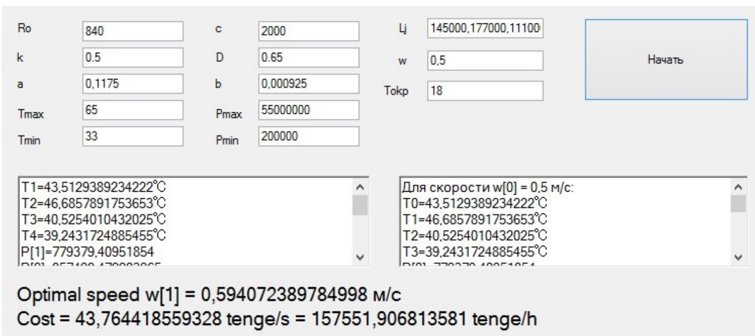

Figure 5. Window of results of thermal-hydraulic calculation for summer

From Figure 6, we can assume that at $w = 0,59$ speed, we have the minimum cost. Therefore, for summer it will also be optimum speed.

Thermal-hydraulic calculation for winter.For summer temperature surrounding will be $T_{env} = 2\,^{\circ}C$.

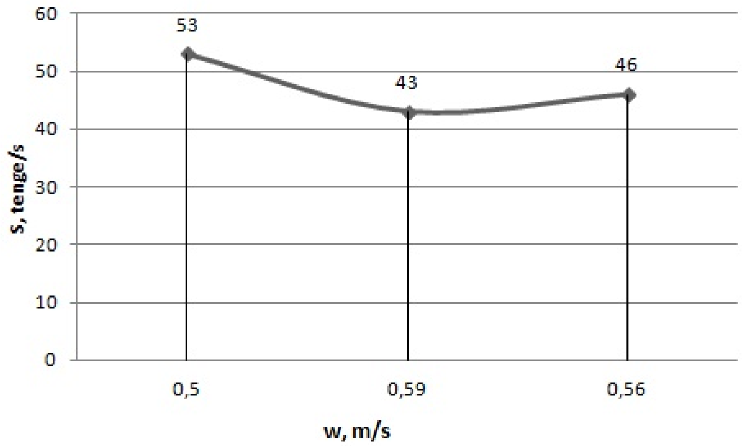

Figure 6. Dependence of working cost of the oil pipeline on speed

In Figure 7 provides the view of interface which gives the results of thermal-hydraulic calculation for winter.

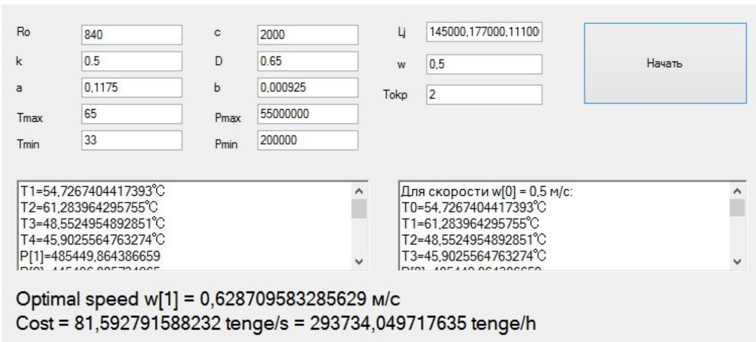

Figure 7. Window of results of thermal-hydraulic calculation for winter

From Figure 8, we can assume that at $w = 0,62$ speed, we have the minimum cost. Therefore, for winter it will also be optimum speed.

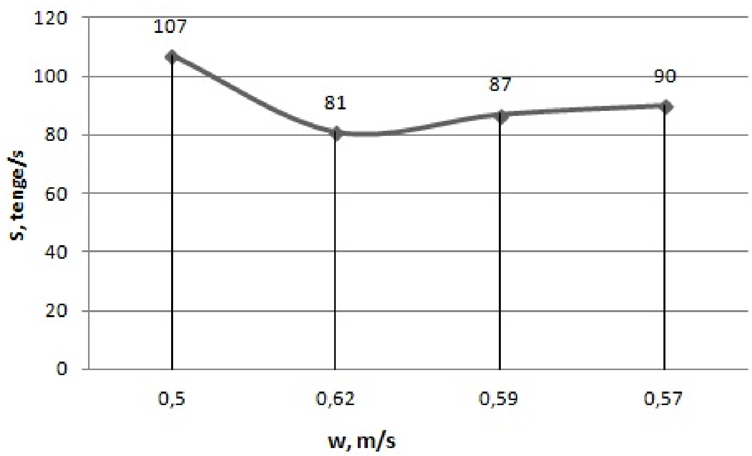

Figure 8. Dependence of working cost of the oil pipeline on speed

In Figure 9 provide the change of optimum speed at different seasons, i.e. for spring, summer and winter.

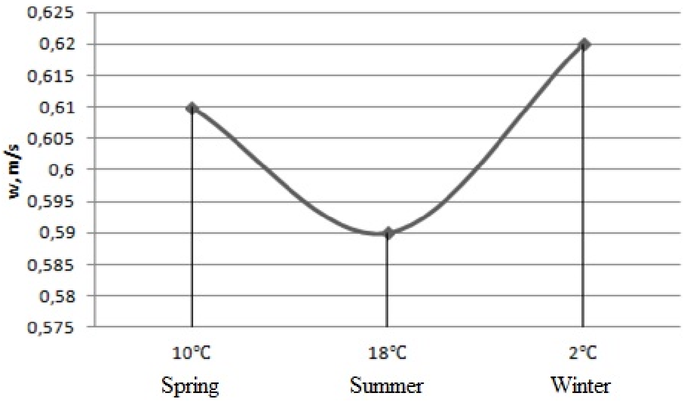

Figure 9. The change of optimum speeds at different seasons

We can assume, in winter that transportation requires more speed than in other two seasons. And respectively, there will be more energy consumption in the winter than in other two [6].

The received results

As a result of the conducted research, we can draw the following conclusions:

1. Process of transportation of oil through the pipeline is investigated.
2. Not isothermal current of high-viscosity oil is explored.
3. The one-dimensional mathematical model of not isothermal current of viscous liquid is investigated.
4. Calculation of temperature and pressure for different speeds of a current of oil with estimation of cost is executed.
5. The technique of obtaining optimum speed of a current of oil at which working costs of the oil pipeline are minimum is developed.

References

1 Карымсакова Э.С. Развитие трубопроводного транспорта нефти в Республике Казахстан / Э.С. Карымсакова, А.А. Коршак, Э.М. Мовсумзаде. — М.: Химия, 2003. — 192 с.

2 Нестеренкова Л.А. Математическое моделирование нестационарного течения в недогруженном нефтепроводе / Л.А. Нестеренкова, Г.В. Вдовиченко // Вестн. Казахс. ун-та. Сер. матем. — Алма-Ата: КазГУ, 1995. — 85 с.

3 Нестеренкова Л.А. Решение задач в неизотермическом движении нефти в трубопроводе / Л.А. Нестеренкова // Математическое моделиование и оптимальное управление. — Алма-Ата: КазГУ, 1980. — 200 с.

4 Нестеренкова Л.А. Теплогидравлический расчет установившегося неизотермического течения нефти в разветвленном нефтепроводе / Л.А. Нестеренкова // Математическое моделирование нестационарных процессов. — Алма-Ата: КазГУ, 1988. — 130 с.

5 Нестеренкова Л.А. Оптимизация неизотермического в течения недогруженном нефтепроводе / Л.А. Нестеренкова, А.Т. Лукьянов // Математическое моделирование явлений переноса. — Алма-Ата: КазГУ, 1987. — 65 с.

6 Салтанова Г.А. Математическая модель неизотермического течения вязкой нефти в трубопроводе / Г.А. Салтанова, Т.С. Айсина // Вестн. Атырау. гос. ун-та. — 2016. — № 4(43). — 188 с.

Г.Салтанова, Т.Айсина

Мұнайдың магистралды құбыр арқылы изотермиялық емес қозғалысының математикалық моделі

Мақалада тұтқырлығы жоғары мұнайдың изотермиялық емес ағыны сипатталған. Магистралдық мұнай құбыры бойынша тұтқыр сұйықтықтың изотермиялық емес ағыны, мұнай мен мұнай өнімдерін өндіру алаңынан тұтынушыға дейін, ЖЭО-нан тұрғын үйлер мен өндірістік нысандарға дейін ыстық су ағымын және тағы басқа тасымалдау үшін тән. Тұтқыр сұйықтықтың изотермиялық емес ағынының бірөлшемді математикалық моделі және тұрақты ағын тәртібіне арналған отын-энергия шығындарын есептеудің негізгі формуласы зерттелді. Тұтқырлығы жоғары мұнай мен мұнай өнімдерін қыздырылған күйінде құбырлар бойынша тасымалдау үшін мұнайды айдауға және жылытуға кететін отын-энергия шығындарының жалпы құны аз болатындай ағынның оңтайлы жылдамдығын есептеу үдерісі толық сипатталған.

Кілт сөздер: тұтқырлығы жоғары мұнай, тұтқыр сұйықтық, изотермиялық емес ағын, ағынның стационарлық тәртібі, құбыр, энергетикалық шығын, ағын жылдамдығы.

Г.Салтанова, Т.Айсина

Математическая модель неизотермического движения нефти по магистральному трубопроводу

В статье описано неизотермическое течение высоковязкой нефти. Неизотермическое течение вязкой жидкости по магистральному трубопроводу характерно для транспортировки нефти и нефтепродуктов с предварительным подогревом от мест добычи к потребителю, для течения горячей воды от ТЭЦ до жилых массивов и производственных помещений и т.п. Исследованы одномерная математическая модель неизотермического течения вязкой жидкости и формула стоимости топливно-энергетических затрат для стационарного режима течения. Подробно описан процесс вычисления оптимальной скорости течения для транспортировки высоковязкой нефти и нефтепродуктов в подогретом состоянии по трубопроводам, при котором общая стоимость энергетических затрат на перекачку и подогрев нефти была бы минимальной.

Ключевые слова: высоковязкая нефть, вязкая жидкость, неизотермическое течение, стационарный режим течения, трубопровод, энергетические затраты, скорость течения.

References

1 Karymsakova, E., Korshak, A. & Movsumzade, E. (2003). *Razvitie truboprovodnoho transporta nefti v Respublike Kazakhstan [Development of pipeline transport of oil in the Republic of Kazakhstan].* Moscow: Chemistry [in Russian].

2 Nesterenkova, L. & Vdovichenko, G. (1995). Matematicheskoe modelirovanie nestatsionarnogo techeniia v nedogruzhennom nefteprovode [Mathematical modeling of a non-stationary current in the underloadedoil pipeline]. *Vestnik Kazakhskii universiteta. Seria matematichtskaia – Bulletin of KAZSU. Mathematic series,* 85. Alma-Ata: KazHU [in Russian].

3 Nesterenkova, L. (1980). Reshenie zadach v neizotermicheskom dvizhenii nefti v truboprovode [The solution of tasks in non-isothermal movement of oil in the pipeline]. *Matematicheskoe modeliovanie i optimalnoe upravlenie – Mathematical modeling and optimum control,* 200. Alma-Ata: KazHU [in Russian].

4 Nesterenkova, L. (1988). Teplohidravlicheskii raschet ustanovivshehosia neizotermicheskoho techeniia nefti v razvetvlennom nefteprovode [Thermal-hydraulic calculation of the established non-isothermal current of oil in the branched oil pipeline]. *Matematicheskoe modelirovanie nestatsionarnykh protsessov – Mathematical modeling of non-stationary processes,* 130. Alma-Ata: KazHU [in Russian].

5 Nesterenkova, L. & Lukyanov, A. (1987). Optimizatsiia neizotermicheskogo v techeniia nedohruzhennom nefteprovode [Optimization of non-isothermal current underloaded oil pipeline]. *Matematicheskoe modelirovanie iavlenii perenosa – Mathematical modeling of the phenomena of transfer,* 65. Alma-Ata: KazHU [in Russian].

6 Saltanova, G. & Aisina, T. (2016). Matematicheskaia model neizotermicheskoho techeniia viazkoi nefti v truboprovode [Mathematical model of non-isothermal flow of oil in a pipeline]. *Vestnik Atyrauskoho hosudarstvennoho universiteta — Bulletin of the Atyrau State University, 4(43),* 188 [in Russian].

UDC 517.51

S.Shaimardan[1], S.Shalgynbaeva[2]

[1]*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan;*
[2]*Kazakh Ablai Khan University of International Relations and World Languages, Almaty, Kazakhstan*
(E-mail: salta_sinar@mail.ru)

Hardy-type inequalities for matrix operators

We establish necessary and sufficient conditions the validity of the discrete Hardy-type inequality

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}f_j\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}f_i^p v_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, f=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}\geq 0,$$

with $0<p\leq q<\infty$ and $0<p\leq 1$, where the matrices $(a_{i,j})$ is an arbitrary matrix and the entries of the matrix $(a_{i,j})\geq 0$ such that $a_{i,j}$ is non-increasing in the second index. Also some further results are pointed out on the cone of monotone sequences. Moreover, we give that the applications of the main results for the non-negative and triangular matrices ($a_{i,j}\geq 0$ for $1\leq j\leq i$ and $a_{i,j}=0$ for $i<j$).

Keywords: inequality, weighted sequences, matrix operators, integral.

1. Introduction and preliminaries

Let $0<p,q<\infty$. Let $\omega_i=\{\omega_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$ and $u=\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ be are non-negative real number sequences and $v=\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ be a positive real number sequence. $f=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ is a non-negative sequence.

We consider the following inequalities:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}(\mathcal{A}f)_i^q\,u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sum_{i=1}^{\infty}f_i^p v_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall f\geq 0, \tag{1}$$

and

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}(\mathcal{A}^*f)_j^q\,u_j^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C^*\left(\sum_{i=1}^{\infty}f_i^p v_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall f\geq 0, \tag{2}$$

for the operators in the following form:

$$(\mathcal{A}f)_i:=\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}f_j, \qquad i\geq 1; \tag{3}$$

$$(\mathcal{A}^*f)_j:=\sum_{i=1}^{\infty}a_{i,j}f_i, \qquad j\geq 1, \tag{4}$$

respectively, where C and C^* — are positive finite constants independent of f and $(a_{i,j})$ is an arbitrary non-negative matrix.

The main aim of this paper is to investigate that the problems necessary and sufficient conditions the validity of inequalities (1) and (2) with the case $0<p\leq q<\infty$, $0<p<1$ and under weaker conditions on the matrices $(a_{i,j})$ in operators defined by (3) and (4) for all sequences $f\geq 0$ (see theorems 2.1–2.2). Moreover, we study these problems on the cone of monotone sequences (see theorems 2.3–2.6). Finally, we will get the applications of the main results.

Notation. The symbol $M\ll K$ means that there exists $\alpha>0$ such that $M\leq \alpha K$, where α is a constant which may depend only on parameters such as p, q, r. If $M\ll K\ll M$, then we write $M\approx K$.

We also need the following well-known result (see [1]):

Lemma A. [1]. *Let $\gamma > 0$. Then*

$$\left(\sum_{k=1}^{j}\beta_k\right)^{\gamma} \approx \sum_{k=1}^{j}\beta_k\left(\sum_{i=1}^{k}\beta_i\right)^{\gamma-1}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

for all sequences $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ of positive real numbers and

$$\left(\sum_{k=j}^{N}\beta_k\right)^{\gamma} \approx \sum_{k=j}^{N}\beta_k\left(\sum_{i=k}^{N}\beta_i\right)^{\gamma-1}, \tag{6}$$

for all $j,k \in \{1,2,...,N\}$, $N \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ and for all sequences $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ of positive real numbers such that $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k < \infty$.

The main results

2. On nonnegative sequences

Our main results read as follows.

Theorem 2.1. Let $0 < p \le q < \infty$ and $0 < p \le 1$. Let the entries of the matrix $(a_{i,j}) \ge 0$ such that $a_{i,j}$ is non-increasing in the second index. Then the inequality (1) holds if and only if

$$\mathcal{B} = \sup_{j\ge1}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{i,j}^{q}u_i^{q}\right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} < \infty,$$

holds. Moreover, $\mathcal{B} \approx C$, where C is the best constant in (1).

Theorem 2.2. Let $0 < p \le q < \infty$ and $0 < p \le 1$. Let the entries of the matrix $(a_{i,j}) \ge 0$ such that $a_{i,j}$ is non-decreasing in the first index. Then the inequality (2) holds if and only if

$$\mathcal{B}^* = \sup_{i\ge1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}^{q}u_j^{q}\right)^{\frac{1}{q}} v_i^{-1} < \infty,$$

holds. Moreover, $\mathcal{B}^* \approx C^*$, where C^* is the best constant in (2).

Proof of Theorem 2.1. Necessity. Let the inequality (1) holds. Let us show that $\mathcal{B} < \infty$. For $1 \le j \le k \le i$, we assume that

$$\widetilde{f} = \{\widetilde{f}_j\}_{j=1}^{\infty}: \quad \widetilde{f}_j = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \ne k. \end{cases} \tag{7}$$

By substituting $\widetilde{f}$ into the inequality (1) we get that

$$Cv_k \ge \left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{i,k}^{q}u_i^{q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Therefore

$$\mathcal{B} \ll C. \tag{8}$$

The proof of necessity is complete.

Sufficiency. Let $\mathcal{B} < \infty$. Now, we prove the inequality (1) holds. Let $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ be a non-negative sequence. Then for $1 \le n < \infty$ we assume that $f^{\varepsilon} = \{f_i^{\varepsilon}\}_{i=1}^{\infty}$:

$$f_j^{\varepsilon} = \begin{cases} f_i + \varepsilon, & 1 \le j \le n, \\ 0, & j > n, \end{cases} \qquad a_{i,j}^{\delta} = \begin{cases} a_{i,j} + \delta, & 1 \le j \le n, \\ a_{i,j}, & j > n. \end{cases}$$

where $\delta, \varepsilon > 0$.

Since $a_{i,k} \geq a_{i,j}, 1 \leq k \leq j$, then using the (5) we find that

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} f_j^{\varepsilon} \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{\delta} f_j^{\varepsilon} \approx \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{\delta} f_j^{\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^{j} a_{i,k}^{\delta} f_k^{\varepsilon} \right)^{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left(a_{i,j}^{\delta}\right)^{p} f_j^{\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^{j} f_k^{\varepsilon} \right)^{p-1} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{9}$$

From (9) its follows that

$$I_n := \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} f_j \right)^{q} u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{\delta} f_j^{\varepsilon} \right)^{q} u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(a_{i,j}^{\delta}\right)^{p} f_j^{\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^{j} f_k^{\varepsilon} \right)^{p-1} \right)^{\frac{q}{p}} u_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Now, we apply Minkowski's inequality for $\dfrac{q}{p} \geq 1$ and we find that

$$I_n \leq \left(\sum_{j=1}^{n} f_j^{\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^{j} f_k^{\varepsilon} \right)^{p-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_{i,j}^{\delta}\right)^{q} u_i^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

From $\lim\limits_{\delta \to 0} a_{i,j}^{\delta} = a_{i,j}$ it follows that

$$I_n \leq \left(\sum_{j=1}^{n} f_j^{\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^{j} f_k^{\varepsilon} \right)^{p-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_{i,j}\right)^{q} u_i^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \mathcal{B} \left(\sum_{j=1}^{n} f_j^{\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^{j} f_k^{\varepsilon} \right)^{p-1} v_j^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Since $\left(f_j^{\varepsilon}\right)^{p-1} \geq \left(\sum\limits_{k=1}^{j} f_k^{\varepsilon} \right)^{p-1}$ for $0 < p \leq 1$, we drive that

$$I_n \leq \mathcal{B} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(f_j^{\varepsilon}\right)^{p} v_j^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

where $f_j^{\varepsilon} \to f_j$ as $\varepsilon \to 0$. Consequently,

$$I_n \leq \mathcal{B} \left(\sum_{j=1}^{n} f_j^p v_j^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Since $\forall n \in N$, we have that

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} f_j \right)^{q} u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \mathcal{B} \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j^p v_i^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

i.e.

$$C \ll \mathcal{B}. \tag{10}$$

Thus, by combining (8) and (10) its follows that $\mathcal{B} \approx C$. The proof is complete. □

The proof of the Theorem 2.2 is completely analogous to the proof of Theorem 2.1, so we leave out the details.

2.2 On monotone sequences

Assume that

$$B = \sup_{k\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\right)^{q} u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{m=1}^{k} v_m^p\right)^{-\frac{1}{p}};$$

$$B^{*} = \sup_{k\geq 1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,j}\right)^{q} u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{m=k}^{\infty} v_m^p\right)^{-\frac{1}{p}};$$

$$A := \sup_{k\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{k} u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\right)^{p} v_j^p\right)^{-\frac{1}{p}};$$

$$A^{*} := \sup_{k\geq 1}\left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,j}\right)^{p} v_j^p\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Our main result for the operators defined by (3) and (4) on the cone of monotone sequences reads as follows:

Theorem 2.3. Let $0 < p \leq q < \infty$ *and* $0 < p \leq 1$. *Then the inequality (1) on the cone of non-negative and non-increasing sequences* $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *holds if and only if* $B < \infty$ *holds. Moreover,* $B \approx C$, *where* C *is the best constant in (1).*

Theorem 2.4. Let $0 < p \leq q < \infty$ *and* $0 < p \leq 1$. *Then the inequality (2) on the cone of non-negative and non-decreasing sequences* $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *holds if and only if* $B^* < \infty$ *holds. Moreover,* $B^* \approx C^*$, *where* C^* *is the best constant in (2).*

Theorem 2.5. Let $1 < p \leq q < \infty$. *Then the inequality*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sum_{i=1}^{\infty} (\mathcal{A}f)_i^p\, v_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{11}$$

on the cone of non-negative and non-increasing sequences $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *holds if and only if* $A < \infty$ *holds. Moreover,* $A \approx C$, *where* C *is the best constant in (11).*

Theorem 2.6. Let $1 < p \leq q < \infty$. *Then the inequality*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C^*\left(\sum_{j=1}^{\infty} (\mathcal{A}^* f)_j^p\, u_j^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{12}$$

on the cone of non-negative and non-decreasing sequences $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *holds if and only if* $A^* < \infty$ *holds. Moreover,* $A^* \approx C^*$, *where* C^* *is the best constant in (12).*

The proof of the Theorem 2.4 and 2.6 are completely analogous to the proof of Theorem 2.3 and 2.5 respectively, so we will only prove Theorems 2.3 and 2.5.

Proof of Theorem 2.3. Necessity. Suppose that the inequality (1) holds with the best constant $C > 0$. We take a test sequence $\hat{f}_k = \{\hat{f}_j\}_{j=1}^{\infty}$ such that

$$\hat{f}_j = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq k, \\ 0, & j > k, \end{cases}$$

for $1 \leq k < \infty$.

Substituting the test sequence $\hat{f}_k$ in the inequality (1) we obtain that

$$C\left(\sum_{i=1}^{k} v_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

i.e.

$$B \ll C. \tag{13}$$

The proof of necessity is complete.

Sufficiency. Let the inequality (1) holds. We will show that $B<\infty$. We known that for all non-negative and non-increasing sequence $f=\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ write in the form:

$$f_j=\tilde{f}_j+c, \quad c\geq 0,$$

where $\tilde{f}_j \geq \tilde{f}_{j+1} \geq 0$, for $j\geq 1$ and $\lim\limits_{j\to\infty}\tilde{f}_j=0$.

We consider two cases separately: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k^p=\infty$ and $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k^p<\infty$.

Let $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k^p=\infty$. Then $c=0$ and $f_j=\tilde{f}_j$ for $j\geq 1$.

We suppose that $\{g_j\}_{j=0}^{\infty}: g_j>0$, $g_j>g_{j+1}$, $\lim\limits_{j\to\infty} g_j=0$ and $f_j^{\varepsilon}=\tilde{f}_j+\varepsilon g_j$. Then $f_j^{\varepsilon}>f_{j+1}^{\varepsilon}$, $\lim\limits_{j\to\infty} f_j^{\varepsilon}=0$. Let $a_j=\Delta\tilde{f}_j=\tilde{f}_j-\tilde{f}_{j+1}\geq 0$, $b_j=\Delta g_j>0$, $c_j^{\varepsilon}=\Delta f_j^{\varepsilon}>0$. Then $c_j^{\varepsilon}=a_j+\varepsilon b_j$ and $f_j^{\varepsilon}=\sum\limits_{k=j}^{\infty} c_k^{\varepsilon}$. From (6) its follows that

$$f_i^{\varepsilon} \approx \left(\sum_{k=j}^{\infty} c_k^{\varepsilon}\left(\sum_{m=k}^{\infty} c_m^{\varepsilon}\right)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{14}$$

By using (14) and apply Minkowski's inequality for $\frac{1}{p}\geq 1$, we find that

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} f_j^{\varepsilon} \approx \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\left(\sum_{k=j}^{\infty} c_k^{\varepsilon}\left(\sum_{m=k}^{\infty} c_m^{\varepsilon}\right)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\varepsilon}\left(\sum_{m=k}^{\infty} c_m^{\varepsilon}\right)^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

and

$$I(f^{\varepsilon}) := \left(\sum_{i=1}^{\infty} (Af^{\varepsilon})_i^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\varepsilon}\left(\sum_{m=k}^{\infty} c_m^{\varepsilon}\right)^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\right)^p\right)^{\frac{q}{p}} u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Next, apply Minkowski's inequality for $\frac{q}{p}\geq 1$ and using (6), we get that

$$I(\tilde{f}) < I(f^{\varepsilon}) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\varepsilon}\left(\sum_{m=k}^{\infty} c_m^{\varepsilon}\right)^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq B\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\varepsilon}\left(\sum_{m=k}^{\infty} c_m^{\varepsilon}\right)^{p-1}\sum_{i=1}^{k} v_i^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= B\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p \sum_{k=i}^{\infty} c_k^{\varepsilon}\left(\sum_{m=k}^{\infty} c_m^{\varepsilon}\right)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \approx$$

$$\approx B\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p\left(f_i^{\varepsilon}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{15}$$

Since $I(f)=I(\tilde{f})$ and $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_i^{\varepsilon}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\tilde{f}_j+\varepsilon g_j\right]=f$ we have that

$$I(f)< B\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p\left(f_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Therefore,

$$C \ll B. \tag{16}$$

Let $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k^p<\infty$. Then

$$I(f)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}(Af)_i^q\, u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \approx I(\tilde{f})+c\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Since $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_i^p\right)^{-\frac{1}{p}}\leq B$, then from (15) we obtain that

$$I(f)\leq B\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p\tilde{f}_j^p\right)^{\frac{1}{p}}+B\left(\sum_{i=1}^{\infty} c^p v_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \approx$$

$$\approx B\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p\left(\tilde{f}_j+c\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= B\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p f_j^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{17}$$

Therefore,

$$C \ll B, \tag{18}$$

and (1) holds. According to (14) and (18), we have that $B\approx C$, where C is the best constant for which (1) holds. The proof is complete. □

Proof of Theorem 2.5. The Necessity part in the same way as to proof of Theorem 2.3. Therefore,

$$A \ll C. \tag{19}$$

To prove sufficiency we proceed as follows. We assume that $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k^p=\infty$. By using (14) and apply Minkowski's inequality for $\frac{q}{p}\geq 1$, we find that

$$J(f^{\varepsilon}):=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(f_i^{\varepsilon}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{p}{q}} \approx$$

$$\approx \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{m=i}^{\infty} c_m^{\varepsilon} \left(\sum_{k=m}^{\infty} c_k^{\varepsilon} \right)^{p-1} \right)^{\frac{q}{p}} u_i^q \right)^{\frac{p}{q}} \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} c_m^{\varepsilon} \left(\sum_{k=m}^{\infty} c_k^{\varepsilon} \right)^{p-1} \left(\sum_{i=1}^{m} u_i^q \right)^{\frac{p}{q}}.$$

By using

$$\left(\sum_{i=1}^{m} u_i^q \right)^{\frac{p}{q}} \leq A^p \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \right)^p v_i^p \tag{20}$$

and applying Minkowski's inequality for $p > 1$ and (6) we have that

$$J(\tilde{f}) < J(f^{\varepsilon}) \leq A^p \sum_{m=1}^{\infty} c_m^{\varepsilon} \left(\sum_{k=m}^{\infty} c_k^{\varepsilon} \right)^{p-1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \right)^p v_i^p =$$

$$= A^p \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m^{\varepsilon} \left(\sum_{k=m}^{\infty} c_k^{\varepsilon} \right)^{p-1} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p v_i^p \leq$$

$$\leq A^p \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} \left(\sum_{m=j}^{\infty} c_m^{\varepsilon} \left(\sum_{k=m}^{\infty} c_k^{\varepsilon} \right)^{p-1} \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p v_i^p \approx$$

$$\approx A^p \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} f_j^{\varepsilon} \right)^p v_i^p. \tag{21}$$

Since $J(f) = J(\tilde{f})$ and $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_i^{\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left[\tilde{f}_j + \varepsilon g_j \right] = f$ we get that

$$J(f) < A^p \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} f_j \right)^p v_i^p.$$

Therefore,

$$C \ll A. \tag{22}$$

Let $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k^p < \infty$. From (20) and (21) its follows that

$$J(f) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (c + g_i)^{\frac{q}{p}} u_i^q \right)^{\frac{p}{q}} \approx$$

$$\approx c^p \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{p}{q}} + J(\tilde{f}) \leq$$

$$\leq A^p \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} c \right)^p v_i^p + A^p \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} \tilde{f}_j \right)^p v_i^p \approx$$

$$\approx A^p \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} \left(c + \tilde{f} \right) \right)^p v_i^p =$$

$$= A^p \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} f_j \right)^p v_i^p.$$

Therefore,

$$A \ll C, \tag{23}$$

and (11) holds. According to (19), (22) and (23), we have that $A \approx C$, where C is the best constant for which (11) holds. The proof is complete. □

3. Applications

The inequalities (1) and (2) have been investigated for the case $0 < p, q < \infty$ with a triangular matrix ($a_{i,j} \geq 0$ for $1 \leq j \leq i$ and $a_{i,j} = 0$ for $i < j$) in [2-5] and the references given therein. However, these inequalities have not been studied for the case $0 < p \leq q < \infty$ and $p \leq 1$. Only, in 1991 G. Bennett [3] studied the inequality (1) for the this case with the identity matrix. He proved that the inequality (1) holds if and only if

$$\sup_{n \in N} \left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k^q \right)^{\frac{1}{q}} v_n^{-p} < \infty,$$

holds for this case.

The continuous case it is known that the Hardy inequality is not holds for arbitrary non-negative measurable functions in L_p-spaces with $0 < p < 1$, but it is able to found the sharp constant in the Hardy-type inequality for non-negative monotone functions. Moreover,we can get the more informations about the direction in [7-11] and the references given therein. Therefore the investigation of the Hardy inequalities for matrix operators one of the big important question.

The corresponding results for the non-negative and triangular matrices ($a_{i,j} \geq 0$ for $1 \leq j \leq i$ and $a_{i,j} = 0$ for $i < j$) could have the following.

Corollary 3.1. Let $0 < p \leq q < \infty$ and $0 < p \leq 1$. Let the entries of the matrix $(a_{i,j})$ such that $a_{i,j}$ is non-increasing in the second index. Then the inequality (1) holds if and only if

$$\mathcal{B}_1 = \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{i=j}^{\infty} (a_{i,j})^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} v_j^{-1} < \infty$$

holds. Moreover, $\mathcal{B}_1 \approx C$, where C is the best constant in (2).

Corollary 3.2. Let $0 < p \leq q < \infty$ and $0 < p \leq 1$. Let the entries of the matrix $(a_{i,j})$ such that $a_{i,j}$ is non-decreasing in the first index. Then the inequality (2) holds if and only if

$$\mathcal{B}^*{}_1 = \sup_{i \geq 1} \left(\sum_{j=1}^{i} (a_{i,j})^q u_j^q \right)^{\frac{1}{q}} v_i^{-1} < \infty,$$

holds. Moreover, $\mathcal{B}^*{}_1 \approx C^*$, where C^* is the best constant in (2).

From Theorems 2.3-2.6 we obtain immediately the validity of the following statements:

Corollary 3.3. Let $0 < p \leq q < \infty$ and $0 < p \leq 1$. Then the inequality (1) on the cone of non-negative and non-increasing sequences $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ holds if and only if $\widehat{B}_1 < \infty$ holds. where

$$\widehat{B}_1 = \sup_{k \geq 1} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_{i,j} \right)^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{m=1}^{k} v_m^p \right)^{-\frac{1}{p}} < \infty.$$

Moreover, $\widehat{B} \approx C$, where C is the best constant in (1).

Corollary 3.4. Let $0 < p \le q < \infty$ *and* $0 < p \le 1$*. Then the inequality (2) on the cone of non-negative and non-decreasing sequences* $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *holds if and only if* $\widehat{B}_1^* < \infty$ *holds. Where*

$$\widehat{B}_1^* = \sup_{k\ge 1} \left(\sum_{j=1}^{i} \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,j} \right)^{q} u_j^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{m=k}^{\infty} v_m^p \right)^{-\frac{1}{p}} < \infty.$$

Moreover, $\widehat{B}^* \approx C^*$*.* C^* *is the best constant in (2).*

Corollary 3.5. Let $1 < p \le q < \infty$*. Then the inequality (11) on the cone of non-negative and non-increasing sequences* $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *holds if and only if* $\mathcal{A} < \infty$ *holds. Where*

$$\mathcal{A} := \sup_{k\ge 1} \left(\sum_{i=1}^{k} u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{i} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{i,j} \right)^{p} v_i^p \right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Moreover, $\mathcal{A} \approx C$*.* C *is the best constant in (11).*

Corollary 3.6. Let $1 < p \le q < \infty$*. Then the inequality (12) on the cone of non-negative and non-decreasing sequences* $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *holds if and only if* $\mathcal{A}^* < \infty$ *holds. Where*

$$\mathcal{A}^* := \sup_{k\ge 1} \left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} a_{i,j} \right)^{p} v_i^p \right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Moreover, $\mathcal{A}^* \approx C^*$*.* C^* *is the best constant in (12).*

Acknowledgments

The authors wishes to thank Professor Ryskul Oinarov for several discussions and suggestions, which have improved the final version of this paper. This work was supported by Scientific Committee of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, grant no. 5495/GF4.

References

1 Oinarov, R., Okpoti, C.A. & Persson, L.-E. (2007). Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case $q < p$, Math. Inequal. Appl., 10, 4, 843–861.

2 Oinarov, R. & Taspaganbetova, Zh. (2012). Criteria of boundedness and compactness of a class of matrix operators. *J. Inequal. Appl., 53,* 1–18.

3 Oinarov, R., Persson, L-E. & Temirkhanova, A.M. (2009). Weighted inequalities for a class of matrix operators: the case $p \le q$, Math. Inequal. Appl., 12, 4, 891–903.

4 Taspaganbetova, Zh. (2013). Boundedness and Compactness of matrix operarors in weighted speces of sequences and applcations, PhD thesis, University of Padova, Italy, 118.

5 Temirkhanova, A.M. (2008). Weighted inequalities for a class of matrix operators: the case $1 < q < p < \infty$. *Eurasian Math. J., 2,* 117–127.

6 Bennett, G. (1996). Some elementary inequalities. III, Quart. *J. Math. Oxford Ser., 42,* 166, 149–174.

7 Bandaliyev, R.A. (2010). On a two-weight criterion for Hardy type operator in the variable Lebesgue spaces with measures. Trans. of NAS of Azerbaijan, 304, 45–54.

8 Bandaliev, R.A. (2013). On Hardy type inequalities in weighted variable exponent spaces $L_{p(x),\omega}$ for $0 < p(x) < 1$. *Eurasian Math. J., 4,* 4, 5–16.

9 Mamedov, F.I. (2012). On Hardy type inequality in variable exponent Lebesgue space $L^{p(\cdot)}(0;\ell)$: *Azerbaijan Jour. of Math., 2,* 1, 96–106.

10 Mamedov, F.I. & Mamedova, F.M. (2014). A necessary and suficient condition for Hardy's operator in $L^{p(\cdot)}(0;\ell)$: Math. Nachr., 287, 6, 666–676.

11 Mamedov, F.I. (2012). On Hardy type inequality in variable exponent Lebesgue space $L^{p(\cdot)}(0;\ell)$. *Azerbaijan Jour. of Math., 2,* 1, 194–203.

С.Шаймардан, С.Шалгинбаева

Матрицалық операторлар үшін Харди типтес теңсіздіктер

Мақалада Харди типтес дискретті теңсіздіктің қажетті және жеткілікті шарттары алынған

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}f_j\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}f_i^p v_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, f=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}\geq 0,$$

$0<p\leq q<\infty$, $0<p\leq 1$, мұнда $(a_{i,j})$ — еркін матрица, ал $(a_{i,j})\geq 0$ және ai,j — екінші индексте өсімсіз. Сондай-ақ жұмыста монотонды тізбектердің конусында кейбір нәтижелер көрсетілген. Сонымен қатар теріс емес және үшбұрышты матрицалар үшін негізгі қосымша нәтижелер берілген ($a_{i,j}\geq 0$, $1\leq j\leq i$ және $a_{i,j}=0$, $i<j$).

Кілт сөздер: теңсіздік, тізбектер, матрицалық операторлар, интеграл.

С.Шаймардан, С.Шалгинбаева

Неравенства типа Харди для матричных операторов

В статье установлены необходимые и достаточные условия дискретного неравенства типа Харди

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}f_j\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}f_i^p v_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, f=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}\geq 0,$$

$0<p\leq q<\infty$, $0<p\leq 1$ где $(a_{i,j})$ — произвольная матрица, а матрица $(a_{i,j})\geq 0$ такая, что ai,j не возрастает во втором индексе. Также указаны некоторые результаты на конусе монотонных последовательностей. Кроме того, даны приложения основных результатов для неотрицательных и треугольных матриц ($a_{i,j}\geq 0$ и $1\leq j\leq i$ и $a_{i,j}=0$ и $i<j$).

Ключевые слова: неравенство, взвешенные последовательности, матричные операторы, интеграл.

UDC 378:658.336.3

B.Shayakhmetova[1], N.Orumbayeva[1], Sh.Omarova[2], Yu.Antipov[3]

[1] *Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan;*
[2] *Karaganda Economic University of Kazpotrebsoyuz, Kazakhstan;*
[3] *Kaliningrad Technical University, Russia*
(E-mail: orumbayevan@mail.ru)

Analysis of theoretical and methodological bases of teaching object-oriented programming languages in higher school

One of the most urgent tasks of our time is the problem of teaching in higher education. The task of teachers is to train young people in the field of the latest computer technologies. When teaching, the teacher must also change the methodology of training specialists in higher education in an adequately changing pace of development. Recently, there has been a definite bias towards the creation of software for complex systems, the tasks under consideration are becoming much more complicated, so there are not enough old techniques and methods used earlier to create simple or formalized programs. And in this regard, we will consider in detail the paradigm of object-oriented technology, which is developing at the present time.

Keywords: analysis, development, complex systems, information, object-oriented approach, model, education, methods, pedagogics, algorithmization.

Software changes due to the appearance on the market of new information technologies. The subject area of computer science changes in an extremely dynamic way.

Teachers of higher school that teach subjects associated with the technology of software creation are constantly faced with the problems of changing the content of curricula, working programs, methodical support (lectures, labs, tests, etc.), the development of new teaching and learning aids.

In connection with the application in the educational process of the various versions of educational software, teaching guides on the use of this software have to be accordingly changed.

A certain bias towards the creation of software for complex systems has been recently observed; the tasks under consideration become much more complicated, so the old techniques and methods previously used to create simple or formalized programs are not enough.

Teachers themselves have difficulties to acquire literature and e-learning programs. Lack of financial opportunities for the acquisition of high-quality scientific literature is a factor that the level of training teachers in higher educational institutions lags behind the fast-changing pace of development of new information technologies.

Rapidly changing software and PC models require accordingly the change in the content of working programs on the courses «Programming technology» and «Algorithmization and programming languages». Students' training for professional activities is based on a set of necessary information subjects. Such a set should contain a sufficient number of theoretical and, especially, practical lessons.

Information profile subjects mentioned above are conducted in accordance with SES RK 23.08.1080-2012 curricula [1].

The Bachelor's qualification characteristics (specialty 5B070300 — «Information Systems», 5B070500 — «Mathematical and computer modeling») in the Kazakhstani universities standards reveal the content of professional activities, which envisage the creation of information systems components, the production of software and software systems. Requirements to the key competences of the Bachelor on the specialty 5B070300 — «Information Systems» point out that Bachelor should be able to program with the use of modern instrumental tools to solve the professional tasks in a competent and responsible way. Thus, these educational standards reflect the requirements of the modern information society to those skilled in the activity. Requirements to the key competences of future specialists in computer science and information technologies declare the ability to create software products for complex systems.

Analyzing the list of information subjects taught in the universities of Kazakhstan, we can get an idea of what level of program complexity graduates will be able to develop on the basis of acquired knowledge, proceeding from the content of the proposed subjects and their volume.

Kazakhstani universities' working plans have been considered and that showed a great variation in the number and volume of information subjects.

As it follows from the analysis performed, many universities, with few exceptions, teach students of information specialties to create programs for the formalized tasks or simple programs.

At the modern stage of social development, the needs of educational, industrial, commercial entities have significantly increased, and simple programs no longer meet them. However, training of students of information specialties today lags behind growing requirements. Education of students of information specialties has not been provided yet with the necessary theoretical basis for the creation of complex software systems, the necessary subjects are often presented in the curricula fragmentary, in the list of elective courses. They include systems analysis, programming in real-time regime, systems theory, WEB-programming, multimedia programming, object-oriented programming, CASE-technology and UML language, etc.

In order to justify the use of the methodology of teaching the technology of the creation of software for complex systems in the educational process of information specialties it is necessary to consider its structure and content in details.

Complex systems in their development (life cycle) go through the following stages: planning and risk assessment; system analysis and requirements analysis; designing algorithms, data structures and program structures; encoding; testing; support. The use of pedagogical complex «Creation of software products for complex systems based on the use of object-oriented technologies» developed by the authors [2] is expedient in the methodology of teaching the technology of the creation of software for complex systems. The role of the pedagogical complex is that it contains special courses, workshops, tutorials, etc. that describe each of the above mentioned stages, the sequence of their execution. Synthesizing, we obtain the software product for the initial system.

As stated above, one of the ways to solve the problem of teaching programming at the level of the creation of programs for complex systems is the use of the proposed pedagogical complex «Creation of software products for complex systems based on the use of object-oriented technologies» in the educational process of information specialties. The need for the introduction of this complex into the educational process is supported by the results of the Kazakhstani universities curricula analysis, as the disciplines associated with the creation of software products for complex systems are currently not comprehensively taught, which adversely affects the preparation of information specialties students for their professional activities.

Obvious advantages of software creation technologies are the natural character of their methodology, the use of similar terms application areas, the ability to use a friendly user's interface. In addition, the software creation technology assumes the unity and a small number of basic designs, openness, extensibility, reusability of modules and their universality.

Software creation technologies would be best used in the development of bulk software products. The intensification of information processes predetermines the need to improve education. It is possible to consider various aspects of the problem; there are philosophical, social, psychological and pedagogical issues of the modern information society's functioning.

They determine the following ways to improve the system of education:

– an active use of information systems in the management of education;

– formation in the trainees of the desire for self-learning as an essential factor of the individual to adapt to the changing conditions of the professional activity;

– the use of the modern means of communication to find information and get an access to it.

The current state of educational research related to the programming teaching process is characterized by the search and application of formal methods, system-cybernetic approach to constructing methodical training systems. But the development of educational technology of programming teaching, which allows achieving the teaching objectives under the conditions of the object development of information processes, is far from being completed.

Many believe that the solution of the modern pedagogical problems requires a significant upgrade of teachers' relation to the definition and development of educational objectives, selection, structuring of their content, searching for new teaching methods and technologies. We pay our attention to the necessity of timely teachers' retraining with the use of innovative technologies for the development of new methods of work with students.

The study of innovative pedagogical technologies can be considered as the basic methodological approach based on complementarity of methods of science and human cognition.

The following ones can be considered to be the leading features of pedagogical training technology: diagnostically specified objectives, reproducibility, determinism of teaching process, its division into stages, stages algorithmization, determination of stages consequence, teaching process control, presentation of the studied content in the form of the system of cognitive and practical tasks, orienting basis and ways of their solution.

We should also pay attention on the fact that nowadays it's necessary to conduct various researches on such issues as the description and measurability of educational objectives, means, results, availability of the educational content to the technological form of its presentation (training courses are often incorrect, illogically designed, which doesn't allow them to be technologized).

Extensive use of cybernetics, synergetics, information science in the development of innovative pedagogical technologies is defined not only in teachers' scientific researches but also in the regulatory educational documents of many countries. For example, even the report «Education policy and new information technologies» at the II International UNESCO Congress in 1996 emphasized the special importance of information technologies as components of computer science, taking into consideration their wide application in various subject areas.

It also says that the distinguishing feature of the modern concept of teaching computer science in educational institutions is the use of the latest achievements of information technologies for the systemic, modular formation of training, based on the activity approach that allows, on the basis of the state educational standards, creating a program oriented on the future professional activity of students, taking into account their personal interests and abilities [3].

The analysis of theoretical research and practical experience on the path of improving teaching with the help of information technology tools have led to the conclusion about the necessity of searching for a new apparatus which can provide an overview of this subject area, in accordance with modern principles of didactics and an appropriate subject area in conditions of information processes intensification.

The way of thinking and its typical programming techniques make the programming paradigm. There is a direct link between the high-level programming languages and the existing programming paradigms.

The main part of the modern subject of information science, taught in most universities, represents questions connected with the programming teaching, the development of algorithmic thinking in students, and their preparation for the future professional activities using the latest instrumental systems and tools.

However, the increased requirements for this activity determine the need to improve the content and methodology systems of teaching programming. The ever-increasing necessity for professionals, who are able to handle procedural, object-oriented, logical and functional approaches to the development of algorithms and programs, makes students necessarily manage all the programming paradigms [4].

Analysis of modern methods and organizational forms of teaching programming in the university computer science courses determines the need to establish a system of courses based on the integration of programming paradigms, which is designed in accordance with the concept of computer science as a scientific discipline. Defining the essence of computer science subject and that of programming concept, it should be noted that programming is an essential part of computer science. Programming accumulates engineering issues of the algorithm implementation under the given spatio-temporal restrictions, taking into account the entire life cycle of a software product. Modern computer science course is the basis for the use of computers and software in the future professional activity of students.

Learning of several languages and programming paradigms enables us to use information technologies in the educational process on a new level of quality, makes it possible to form the necessary professional qualities of a future specialist.

The content of the training courses on computer science depends on the development of modern information and telecommunication technologies and on this basis is constantly being improved. Today, there is the need to develop a specialized system for training students, whose future profession is related to the area of computer science and the use of information technologies.

These are university students, whose future professional activity field is the development and operation of software, and students, who are studying for a degree in computer science. In the light of the development of these students' training due attention should be paid to the study of theoretical fundamentals and specific algorithmization and programming techniques [5].

A modern course in programming, based on the study of all the approaches to the development of algorithms, should give the necessary knowledge about the different linguistic means and other programming tools that allow building information technologies at this stage of computer science development.

Analysis of the development of programming ideas and their teaching shows that the main factor in their improvement has been the problem of creating software products for complex systems.

In this connection, let us consider in more details the object-oriented technology paradigm, which currently develops.

An integral part of this stage is a visual programming technology. Some examples of programming languages used at this stage are Turbo Pascal version 5.5, Smalltalk, C ++, etc. The development of programming at this stage is carried out in two related directions:

– the development of the object-oriented approach;

– the development of the environment for the production of software tools offering higher level principles of decomposition, abstraction, and hierarchy.

It should be noted that after the development of structural programming standards an opportunity to put software production process on an industrial scale has appeared. However, today due to the increasing complexity of software and the requirement to reduce the time of its development, there appeared a need to create new programming technologies. The result of studying methodological approaches to the problem of software design is the development of methods of decomposition, abstraction, and the construction of a hierarchy. On this basis, the object-oriented methodology has been created.

Processing of a variety of information is carried out today with the help of computer technologies, which are improving very quickly. In the study of any models with the help of a computer user is studying changes in the state of objects and their interactions, which requires a solid representation of an object, and the software that defines the relationships between objects that are closely associated with it. The object-oriented approach to the development of software meets best the solution of this problem.

The modern stage of information science development is accompanied by the increase in requirements for software quality, which leads to the formation of a new programming paradigm. In this regard, scientific-methodological designs of the pedagogical information science deal with the issues of correspondence between the content of teaching information science, in particular, programming and the current state of computer science, which can be realized on the basis of the object-oriented approach.

At present the tendency of transition of software development to the object-oriented basis can be noticed. Object-oriented programming is the main paradigm of the creation and development of the modern software for complex systems.

In the theoretical and applied programming the object-oriented approach develops the most intensively. Its systemic application gives an opportunity to create structured, reliable and easily modified software systems. These circumstances explain the interest in the object-oriented approach and the object-oriented programming languages.

Nowadays almost every programming system is characterized by the object-oriented features. Thus, high-level programming languages that do not have means to work with classes and objects, acquire language extensions that allow realizing the benefits of the object-oriented methodology. For example, the object-oriented language creation in C++ can be considered as the necessary extension of C structural programming language. Object-oriented interface is becoming more common in the modern software systems today. These methods are being used in local as well as in global network systems.

Object-oriented development is a brand new mode of thought in programming, which is based on abstractions that exist in the real world. It is a process of logical design, which gives an opportunity to express abstract notions in a clearer way, it also makes an interaction between the customers and software products developers easier. Object-oriented development serves as a medium for the specification, analysis, documentation and interface, as well as for programming.

System requirements analysis for the object-oriented approach comes down to the development of this system models. The applied-oriented program system design starts with the analysis of requirements, which the system should meet. It is caused by the need to identify the purpose and conditions of system operation to make up its preliminary draft. Modeling is a widely used method of studying complex objects and events. Models give an opportunity to explore system working capabilities at the early stages of its development, help to clarify system requirements, and if necessary, allow correcting system design at any stage or phase of its life cycle.

In the object model, it is necessary to reflect notions and objects of the real world, which are important for the system being developed; the model describes the structure of the objects that make up the developing system, their attributes, operations and relations with other objects. Description of the set of objects and actions performed on them defines the class concept. In accordance with the terminology of the object-oriented programming language an object class is characterized as the defined base data type, and a separate object – as a variable of this type. The definition of object classes for a specific set of tasks allows the individual to describe the problem in terms of the class of problems.

The object-oriented approach requires the following during the program development: the attribution of the object used; the declaration of these objects; the creation of the necessary objects instantiations; the declaration of their interconnections.

Object-oriented approach requires to identify classes of objects used in the program, to build their description, and then to create samples of the necessary objects and to define interaction between them during the program design.

In the process of object-oriented subject area analysis abstractions and their general properties, the presence of which greatly simplifies the development of the applied task, are revealed. Object-oriented analysis has three stages:

– building information model, abstracting real entities in terms of objects and attributes;

– constructing the state model to formalize life cycles of objects and display of this model through diagrams and transition tables, where the interaction between objects involve sending messages about current events happened to them;

– development of process models, in which the actions of states models are subdivided into fundamental and reusable processes.

There are other approaches to the object-oriented analysis:

– formal description method, where nouns and verbs in the subject area description are revealed. Nouns are considered as candidates to form classes, and verbs - as candidates to operate with these classes.

– structural analysis, wherein due to the system model, represented by the data flowcharts, external events and objects, data basis, control flow and control flow transformation are noticed. Further, on the basis of the data flow analysis and the control flow analysis, classes and class methods are revealed.

– designing, as we can see, implies taking into account the set of conflicting requirements. Its products are models and algorithms that allow understanding the structure and functioning of the future system, balancing requirements and outlining the scheme of its application. Each model describes a certain part of the considered system in a certain aspect. Designing is to develop models of the future system.

Object-oriented designing is a progressive iterative process. The boundary between the object-oriented analysis and designing is conventional, the construction of the software product consists of a series of cycles, in which the descriptions of classes and the interactions between them are specified, programs that implement them are developed, their debugging and testing are conducted and according to the results of each stage working documents of the previous stages are clarified, descriptions of classes and programs are being finalized. These cycles are repeated until the desired result.

In the object-oriented approach to the software development one should base on the following assumptions:

– program is a model of a real process, that is of a part of the real world;

– a model of the real world (or part thereof) can be described as a collection of interacting objects;

– an object should be described with a set of parameters, the values of which determine its condition, and a set of operations that it can perform;

– interaction between objects is carried out by sending messages from one object to another; a message received by the object requires certain actions, for example, changes in the state of the object;

– class of similar objects is made up by objects described by the same set of parameters and capable of performing the same set of actions.

Computer software used in the production, business, research and other areas are developed on the basis of the real-world models. Models of real processes and systems are characterized by a set of variables called variable states. Changing the state of the process or system corresponds to a change of model's state variables. Mathematical model is generally described by a set of state variables and the relationship between these variables. State variables can be numeric or non-numeric, including words and sentences of a natural language.

Development and designing of complex systems programs is a time-consuming process. As an approach, organizing the structuring of the mathematical model and the simplifying of its programming, there is the object approach, which reflects the real system as a collection of interacting objects. The information model is designed by the principles of the object-oriented approach to research, design and implementation of the real-world models in computer environment. Object-oriented programming includes the best features of structural programming, complements it with new ideas, which transfer it into a new quality approach to creating programs that is ranked as the most modern approach to the creation of programs for complex systems. This technology is justified not only in terms of the process of drawing up the algorithms, but also in terms of the results of current research in the field of psychology, where the separation of subject area into objects and identification of their interactions most accurately correspond to the process of human mental activity.

Regulations on functional-system and object organization of mental processes are justified in psychological and educational research. Based on the research results of mathematical modeling, psychological and pedagogical aspects of the computerization of education and conclusions about the object-structural nature of human mental activity, and taking into account the degree of preparedness and practical opportunities for students, as well as the real need for the technological process of development of new information technologies, the need for teaching object-oriented programming at universities that prepare specialists in computer science should be noted. Application of object-oriented programming allows us to quickly develop complex software products. Therefore, the study of subjects' cycle on the object-oriented programming allows graduates of information specialties change the direction of their work from the applied to the systemic, depending on the industrial necessity.

References

1 Государственный общеобязательный стандарт образования Республики Казахстан. Образование высшее профессиональное. Бакалавриат. ГОСО РК 23.08.1080-2012. — Астана: Министерство образования и науки РК, 2012.

2 Шаяхметова Б.К. Технология создания программ для сложных систем / Б.К.Шаяхметова. — Астана: МПА Туран-Профи, 2010. — 170 с.

3 Национальный доклад РФ на II-м Международном конгрессе ЮНЕСКО «Образование и информатика», «Политика в области образования и новые информационные технологии». — М., 1996. — 34 с.

4 Жужжалов В.Е. Интеграционные методы изучения программирования в вузовском курсе информатики / В.Е.Жужжалов // Вестн. МГПУ. Серия информатика и информатизация образования. — М., 2003. — № 1.

5 Вирт Н. Алгоритмы + структуры программ = программы / Н.Вирт. — М.: Мир, 1985. — 406 с.

Б.Шаяхметова, Н.Орумбаева, Ш.Омарова, Ю.Антипов

Жоғары мектепте объектілі-бағытталған бағдарламалау тілдерінің теориялы-әдістемелік негіздерін оқытуды талдау

Біздің заманымыздың ең өзекті міндеттерінің бірі жоғары білім беруде оқыту мәселесі болып табылады. Мұғалімдердің міндеті — жастарды жаңа компьютерлік технологиялар саласында оқыту. Оқытқан кезде мұғалім жоғары білім беру саласындағы мамандарды даярлаудың әдіснамасын өзгертуге тиіс. Қазіргі уақытта күрделі жүйелер үшін бағдарламалық жасақтаманы құруға қатысты белгілі бір көзқарас бар, қаралып отырған тапсырмалар әлдеқайда күрделі болып келеді, сондықтан қарапайым немесе формалданған бағдарламаларды жасау үшін бұрын қолданылған ескі әдістер мен әдістер жетіспейді. Осыған байланысты, бүгінгі күні дамып келе жатқан объективті-бағытталған технологиялардың парадигмасын егжей-тегжейлі қарастырамыз.

Кілт сөздер: талдау, әзірлеу, күрделі жүйелер, ақпарат, объектілі-бағытталған көзқарас, модель, білім беру, әдістер, педагогика, алгоритм.

Б.Шаяхметова, Н.Орумбаева, Ш.Омарова, Ю.Антипов

Анализ теоретико-методологических основ преподавания объектно-ориентированных языков программирования в высшей школе

Одной из самых актуальных задач нашего времени является проблема преподавания в высшей школе. Задачей педагогов является подготовка молодых людей в области новейших компьютерных технологий. При преподавании педагог должен адекватно меняющимся темпам развития изменить также методику подготовки специалистов в высшей школе. В последнее время наблюдается определенный уклон в сторону создания программного обеспечения для сложных систем, рассматриваемые задачи значительно усложняются, поэтому недостаточно старых приемов и методов, применявшихся ранее для создания простых или формализуемых программ. И в этой связи подробно рассмотрим парадигму объектно-ориентированной технологии, которая развивается и в настоящее время.

Ключевые слова: анализ, разработка, сложные системы, информация, объектно-ориентированный подход, модель, образование, методы, педагогика, алгоритмизация.

References

1 Hosudarstvennyi obshcheobiazatelnyi standart obrazovaniia Respubliki Kazakhstan. Obrazovanie vysshee professionalnoe. Bakalavriat. HOSO RK 23.08.1080-2012 (2012). [The State Compulsory Standard of Education of the Republic of Kazakhstan. Higher professional education. Baccalaureate. SES RK 23.08.1080-2012]. Astana: Ministerstvo obrazovaniia i nauki RK [in Russian].

2 Shayakhmetova, B.K. (2010). *Tekhnolohiia sozdaniia prohramm dlia slozhnykh sistem [Technology of creating programs for complex systems].* Astana: Turan-Pro [in Russian].

3 Natsionalnyi doklad RF na II-m Mezhdunarodnom konhresse IuNESKO «Obrazovanie i informatika», «Politika v oblasti obrazovaniia i novye informatsionnye tekhnolohii» (1996). [National Report of the Russian Federation at the II International UNESCO Congress «Education and Computer Science», «Education policy and new information technologies»]. Moscow [in Russian].

4 Zhuzhzhalov, V.Ye. (2003). Intehratsionnye metody izucheniia prohrammirovaniia v vuzovskom kurse informatiki [Integration methods of learning programming in the higher school course of computer science]. *Vestnik MHPU. Seriia informatika i informatizatsiia obrazovaniia – Bulletin of Moscow State Pedagogical University. A series of computer science and informatization of education, 1.* [in Russian].

5 Virt, N. (1985). *Alhoritmy + struktury prohramm = prohrammy [Algorithms + program structure = program].* Moscow: Mir [in Russian].

УДК 94(574):340

Б.К. Шаяхметова[1], Ш.Е. Омарова[2], В.Г. Дрозд[2]

[1]*Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова, Казахстан;*
[2]*Карагандинский экономический университет Казпотребсоюза, Казахстан*
(E-mail: keu_ivs@mail.ru)

Использование математического аппарата при изучении показателей социально-экономического развития Республики Казахстан

Важным направлением в исследовании закономерностей динамики экономических процессов является изучение общей тенденции развития. В статье рассмотрены факторы, формирующие тенденции (тренды) социально-экономического развития РК, и представлены результаты проведенного исследования по анализу и прогнозированию перспектив развития основных факторов экономики страны. Рассмотрены категории экономического роста и развития в аспекте их устойчивости и стабильности. Подчеркнута диалектическая взаимосвязь факторов между категориями на уровне социума, макро- и микроэкономики. Кроме того, созданы базисные ориентиры для построения прогнозных моделей, формирующих парадигму социально-экономического развития.

Ключевые слова: экономический рост, прогнозирование, расчетное значение, экономическое развитие, тенденция развития, статистические данные, социально-экономические факторы, прогнозные показатели, временной ряд.

Особенностью современной эволюции экономических систем в условиях рынка является феномен экономического роста. По определению известного экономиста лауреата Нобелевской премии С. Кузнеца, современный экономический рост представляет собой развитие, при котором долгосрочные темпы роста производства устойчиво превышают темпы роста населения. К этому следует добавить, что темпы современного роста доходов ощущаются на протяжении жизни одного поколения. Их средняя величина по меньшей мере превышает 0,1–0,2 % в год.

Во второй половине XX века темпы роста валового внутреннего продукта в ряде отдельных стран были весьма высоки. Показатели среднегодовых темпов роста за пятилетние периоды составляли до 4,6 % в Западной Европе, до 5,0 % в США и до 10,5 % в Японии. Они достигали 7,7 % в Латинской Америке и 9,4 % на Ближнем и Среднем Востоке [1].

Однако следует отметить, что рост не всегда был устойчив. Его темпы колебались, он периодически прерывался и сменялся спадом в периоды национальных и мировых кризисов. На современном же этапе вызывает особый интерес процесс экономического роста, а также возможность его наиболее полного выражения через адекватную систему показателей.

Как отмечает Е.В. Горшенина [2], «следовало бы проводить разграничение на две группы влияющих показателей, оказывающих воздействие на экономический рост. В состав первой группы можно отнести факторы текущего состояния экономики, которые будут включать в себя: долю занятого населения, ВВП страны (региона) на душу населения, энергоемкость, экспорт обрабатывающих отраслей страны (региона) и др. Ко второй группе можно отнести факторы, для которых будут характерны современные факторы роста, такие как норма сбережений (инвестиций), сформированный образовательный потенциал, уровень открытости экономики, уровень доли государственных расходов».

Непосредственно для основных показателей, которые определяют динамику социально-экономического развития страны, проверим гипотезу о существовании тенденции, характеризующей долговременную основную закономерность развития исследуемого явления, — тенденцию роста показателей экономики страны.

Для этого проводится сравнительный анализ средних уровней ряда: временной ряд делится на две пропорциональные части по числу членов, где каждая рассматривается как самостоятельная выборочная совокупность. В случае если временной ряд будет иметь тенденцию, то средние величины должны существенно отличаться друг от друга. В обратном же случае временной ряд не имеет тенденции. Из этого следует, что проверка наличия тренда в исследуемом временном ряду сводится к подтверждению или опровержению гипотезы о равенстве средних двух нормально распределенных совокупностей [3].

Определим наличие основной тенденции (тренда) показателей социально-экономического развития Республики Казахстан по данным временного ряда за 2009–2016 гг., представленных в таблице 1.

Таблица 1

Основные социально-экономические показатели Республики Казахстан

Показатели	2009 г.	2010 г.	2011 г.	2012 г.	2013 г.	2014 г.	2015 г.	2016 г.
Численность населения на начало периода (года), тыс. чел.	15982	16203	16440	16673	16909	17160	17417	17670
Естественный прирост населения, чел.	213140	221572	227857	238125	251277	269061	266372	277567
Среднемесячная номинальная заработная плата одного работника, тенге	67333	77611	90028	101263	109141	121021	126021	142351
Валовой внутренний продукт методом производства, млрд тенге	17007,647	21815,517	28243,052	31015,186	35999,025	39675,832	40884,133	46193,380
Объем производства промышленной продукции (товаров, услуг), млрд тенге	9121,525	12105,526	15929,052	16851,775	17833,994	18531,774	14925,230	18559,213

Примечание. Таблица составлена по данным Облстатуправления.

Делим ряд на две части: n_1, n_2. По каждой вычисляем средние значения и выборочные дисперсии:

$$\overline{y}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_i}{n_1}; S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \overline{x})^2}{n_1}; \tag{1}$$

$$\overline{y}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} x_j}{n_2}; S_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2}(x_j - \overline{x})^2}{n_2}; \tag{2}$$

$\overline{y}_1$ =16325 ; S_1^2 =66670; $\overline{y}_2$ =17290 ; S_2^2 =80602.

Проверяем гипотезу о равенстве дисперсии при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Ответом на эти вопросы служит F-распределение [4]:

$$F_{расч} = \frac{S_2^2/\sigma_x^2}{S_1^2/\sigma_y^2} = \frac{80602}{66670} = 1,208.$$

где σ_x^2 и σ_y^2 — генеральные дисперсии двух выборок n_x и n_y .

Когда генеральные дисперсии равны, расчетное значение F-распределения принимает вид

$$F_{расч} = \frac{S_2^2}{S_1^2} \approx \frac{80602}{66670} = 1,208,$$

F- распределение является табулированным. Оно определяется двумя параметрами ν_1 и ν_2 — степенями свободы:

$\nu_1 = n_x - 1;\ \nu_2 = n_y - 1.\ \nu_1 = 4 - 1 = 3;\ \nu_2 = 4 - 1 = 3.$ $\mathrm{F}_{кр}(0,05; 3,3) = 9,28.$

Так как $\underline{F_{расч}} < \underline{F_{кр}}$ (0,05; 3,3), то нет оснований отвергать нулевую гипотезу. По данным наблюдения дисперсии генеральных совокупностей равны $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, исправленные выборочные дисперсии (S_1^2 и S_2^2) различаются незначительн (расхождение между ними случайно). Тогда можно проверить основную гипотезу:

$$H_0 : \overline{y}_1 = \overline{y}_2; \;\; H_1 : \overline{y}_1 \neq \overline{y}_2.$$

$$T_{расч} = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{\sqrt{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} \approx$$

$$\approx \frac{16325-17290}{\sqrt{(4-1)\cdot 66670+(4-1)\cdot 80602}} \cdot \sqrt{\frac{4\cdot 4\cdot (4+4-2)}{4+4}} \approx 5,030.$$

Сравниваем $T_{расч}$ с табулированным значением $t_{кр}$ (α , κ) — критической точкой распределения Стьюдента.

Где κ = n — 2 степень свободы; α — заданный уровень значимости.

$\kappa = 8 - 2 = 6$; $t_{кр}$. (0,05; 6) = 2,45

Так как $|T_{расч}| > t_{кр}$ (0,05; 6), то нет оснований отвергать нулевую гипотезу о том, что временной ряд имеет тенденцию, так как средние величины, вычисленные для каждой совокупности, существенно (значимо) различаются между собой. Отсюда вывод, что тренд показателя «Численность населения на начало периода (года)» присутствует.

Расчетные значения других показателей приведены в таблице 2.

Таблица 2

Тенденция развития основных показателей развития экономики Республики Казахстан

Показатель	$F_{расч.}$ / $F_{табл.}$	F-критерий	$T_{расч.}$ / $T_{табл.}$	T-критерий	Наличие тенденции
Численность населения на начало периода (года), тыс. чел.	1,208 / 9,28	$F_{расч.} < F_{кр.}$	5,03 / 2,45	$T_{расч.} > T_{кр.}$	Присутствует
Естественный прирост населения, чел.	1,082 / 9,28	$F_{расч.} < F_{кр.}$	6,21 / 2,45	$T_{расч.} > T_{кр.}$	Присутствует
Среднемесячная номинальная заработная плата одного работника, тенге	0,871 / 9,28	$F_{расч.} < F_{кр.}$	4,64 / 2,45	$T_{расч.} > T_{кр.}$	Присутствует
Валовой внутренний продукт методом производства, млрд тенге	0,445 / 9,28	$F_{расч.} < F_{кр.}$	4,91 / 2,45	$T_{расч.} > T_{кр.}$	Присутствует
Объем производства промышленной продукции (товаров, услуг), млрд тенге	0,233 / 9,28	$F_{расч.} < F_{кр.}$	2,31 / 2,45	$T_{расч.} > T_{кр.}$	Отсутствует (слабо выражена)

Пимечание. Таблица составлена на основе расчета статистических данных по Республике Казахстан.

Значения, полученные в ходе расчетов, характеризуют наличие общей тенденции развития динамики показателей экономики в целом по Республике Казахстан. Нами ставится задача по выявлению общей тенденции роста значений факторов социально-экономического развития на период исследуемого интервала времени. Данное решение обусловлено тем обстоятельством, что, помимо воздействия определяющих факторов, на значение расчетного показателя также оказывают влияние и другие многочисленные случайные факторы [5].

При различных методах, реализующих сглаживание временного ряда, с целью нахождения основной тенденции прежде всего исходят из развития динамики по факту рассматриваемого периода времени. Чаще всего применяемым методом сглаживания временных рядов выступает метод наименьших квадратов. Используемый на практике математический аппарат данного метода наименьших квадратов очень подробно описан в научной литературе [5].

Прогнозные модели на основе экстраполяции рядов динамики можно реализовывать в форме определенного значения функции

$$Y^*_{t+l} = f(y_i, l, a_j), \qquad (3)$$

где Y^*_{t+l} — прогнозное значение исследуемого ряда динамики; yi — взятый за базу экстраполяции уровень ряда; l — упреждающий период; aj — значение параметра уравнения тренда.

Реализация процедуры сглаживания временного ряда на базе метода наименьших квадратов позволяет получить линейную трендовую зависимость следующего вида:

$$\hat{Y}_t = f(t). \qquad (4)$$

Выполнение экстраполяции можно проводить путем подстановки в полученное уравнение тренда соответствующего значения независимой переменной t, которая будет соответствовать величине периода намечаемого упреждения. Данная процедура предоставляет возможность получить математически точное расчетное значение прогноза, т.е. дает оценку прогнозируемого показателя в позиции по уравнению, которое описывает тенденцию прогнозируемого показателя.

Значение доверительного интервала для экстраполируемого временного ряда рассчитывается по следующей формуле:

$$Y^*_{t+l} \pm K^* \cdot S_y, \tag{5}$$

$$t = n, \qquad l = 1, 2, \dots L$$

где Y^*_{t+l} — значение точечного прогноза на момент времени $(t+l)$; Sy — расчетная средняя квадратическая ошибка исследуемого тренда; K^* — табулированное значение множителя.

Табличное значение K* имеет зависимость от числа наблюдений n (общего количества уровней исследуемого ряда) и l (упреждаемого периода). С ростом числа показатель значения K^* уменьшается, а в случае роста l он будет увеличиваться.

Значение стандартной (средне квадратической) ошибки для оценки расчетного прогнозируемого показателя S_y вычисляется по формуле [3, 4]

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(Y - \hat{Y})^2}{n - m}}, \tag{6}$$

где Y — значение уровня по факту; $\hat{Y}$ — расчитанная по модели оценка исследуемого показателя; n — количество выборки временного ряда; m — количество параметров в исследуемой зависимости *f(t)*.

Используем предложенный метод с целью прогнозирования основных показателей развития экономики Республики Казахстан, по которым характеризуется динамика развития экономики страны.

Для проведения вычислений воспользуемся данными временного ряда за 2009–2016 гг., представленными в таблице 1. В результате проведенных вычислений получаем линейную трендовую зависимость:

$$\hat{Y}_t = 241,45 \cdot t + 15720.$$

Проводимая экстраполяция осуществляется путем подстановки в уравнение тренда значения независимой переменной t, которая соответствует значению периода упреждения.

Таблица 3

Расчетные параметры модели

Год	T	Yt	$\hat{Y}_t$	$Y_t - \hat{Y}_t$	$(Y_t - \hat{Y}_t)^2$
2009	1	15982	15961,667	20,333	413,431
2010	2	16203	16203,119	-0,119	0,014
2011	3	16440	16444,571	-4,571	20,894
2012	4	16673	16686,024	-13,024	169,625
2013	5	16909	16927,476	-18,476	341,363
2014	6	17160	17168,929	-8,929	79,727
2015	7	17417	17410,381	6,619	43,811
2016	8	17670	17651,833	18,167	330,040
Σ					**1398,905**

Имеем: $n = 8, \ m = 2$,

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \hat{Y}_t)^2}{n - m}} = \sqrt{\frac{1398,905}{8-2}} = 15,269. \tag{7}$$

Значение K^* для оценки доверительных интервалов прогноза табулировано.

Результаты расчета представлены в таблице 4.

Таблица 4

Прогноз развития основных показателей экономики Республики Казахстан на период 2017–2019гг.

Показатель	Уравнения модели	Годы	Прогноз
Численность населения на начало периода (года), тыс. чел.	$\hat{Y}_t = 241,45 \cdot t + 15720$ $R^2 = 0,948$ $Sy = 15{,}269$	2017	17893
		2018	18135
		2019	18376
Естественный прирост населения, чел.	$\hat{Y}_t = 9663,7 \cdot t + 202135$ $R^2 = 0,971$ $Sy = 4385{,}867$	2017	289108
		2018	198772
		2019	308436
Среднемесячная номинальная заработная плата одного работника, тенге	$\hat{Y}_t = 10334 \cdot t + 57844$ R2=0,993 $Sy = 2215{,}778$	2017	150850
		2018	161184
		2019	171518
Валовой внутренний продукт методом производства, млрд тенге	$\hat{Y}_t = 4034,8 \cdot t + 14448$ R2=0,982 $Sy = 1425{,}723$	2017	50761,2
		2018	54796,0
		2019	58830,8
Объем производства промышленной продукции (товаров, услуг), млрд тенге	$\hat{Y}_t = 1059 \cdot t + 10717$ R2=0,697 $Sy = 2289{,}317$	2017	20248
		2018	21307
		2019	22366

Примечание. Таблица составлена на основе расчета статистических данных по Республике Казахстан.

Модели, на основе которых осуществлялся прогноз, с принятым уровнем вероятности 0,9, другими словами, с доверительной вероятностью 90 %, позволяют утверждать, что при сохранении сложившихся закономерностей развития прогнозируемая величина будет достигать расчетного значения.

Резюмируя следует отметить, что модели, полученные с помощью математического аппарата, дают возможность прогнозировать варианты развития экономических процессов и явлений, с целью изучения тенденции изменения экономических показателей, т.е. служат базовым инструментом формирования научно обоснованных предсказаний. Результаты прогноза являются исходным материалом для постановки реальных экономических целей и задач, для выявления и принятия наилучших управленческих решений, для разработки хозяйственной и финансовой стратегий в будущем.

Список литературы

1 Болотин Б.М. Экономика развивающихся стран в цифрах / Б.М. Болотин, В.Л. Шейнис. — М.: Наука, 1998. — С. 68–71.

2 Горшенина Е.В. Социально-экономическое состояние региона / Е.В.Горшенина. — Тверь: ТГСХА, 1999. — С. 11.

3 Гамбаров Г.М. Статистическое моделирование и прогнозирование: учеб. пособие / Г.М. Гамбаров, Н.М. Журавель, Ю.Г. Королев и др.; под ред. А.Г. Гранберга. — М.: Финансы и статистика, 1990. — 383 с.

4 Самуэльсон Л. Экономика / Л. Самуэльсон, В. Нордхаус. — М.: Бином-Кнорус, 1999. — С. 570, 571.

5 Бабич Т.Н. Прогнозирование и планирование в условиях рынка: учеб. пособие / Т.Н. Бабич, И.А. Козьева, Ю.В. Вертакова, Э.Н. Кузьбожев. — М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. — 336 с.

Б.К. Шаяхметова, Ш.Е. Омарова, В.Г. Дрозд

Қазақстан Республикасының әлеуметтік-экономикалық даму көрсеткіштерін зерттеуде математикалық аппаратты пайдалану

Экономикалық процестер динамикасының заңдарын зерделеудің маңызды бағыты дамудың жалпы әдісін зерттеу болып табылады. Мақалада Қазақстан Республикасының әлеуметтік-экономикалық дамуының тенденцияларын (үрдістерін) қалыптастыратын факторлар қарастырылып, ел экономикасының негізгі факторларын дамыту перспективаларын талдау және болжау бойынша өткізілген зерттеулердің нәтижелері келтірілген. Экономикалық өсу мен дамудың санаттары олардың тұрақтылығы тұрғысынан қарастырылды. Әлеуметтік-экономикалық дамудың парадигмасын қалыптастыратын болжамды модельдерді құру үшін негіз бола отырып, макро- және микроэкономикадағы макро- және микроэкономиканың санаттары арасындағы санаттар арасындағы диалектикалық өзара байланыс атап өтілді.

Кілт сөздер: экономикалық өсім, болжау, бағалау бағалары, экономикалық даму, статистикалық деректер, әлеуметтік-экономикалық факторлар, болжамдық көрсеткіштер, уақытша сериялар.

B.K. Shayakhmetova, Sh.E. Omarova, V.G. Drozd

Use of the mathematical apparatus in the study of indicators of socio-economic development of the Republic of Kazakhstan

An important direction in the study of the laws of the dynamics of economic processes is the study of the general trend of development. The article considers the factors that form the trends (trends) of the social and economic development of the Republic of Kazakhstan and presents the results of the conducted research on the analysis and forecasting of the prospects for the development of the main factors of the country's economy. The categories of economic growth and development are considered in terms of their stability and stability. The dialectical interconnection of factors between the categories at the level of society, macro- and microeconomics is emphasized, thereby forming the basic reference points for the construction of forecast models forming the paradigm of social and economic development.

Keywords: economic growth, forecasting, estimated value, economic development, development trend, statistical data, socio-economic factors, forecast indicators, time series.

References

1 Bolotin, B.M. & Sheinis, V.L. (1998). *Ekonomika razvivaiushchikhsia stran v tsifrakh [The economy of developing countries in figures]*. Moscow: Nauka [in Russian].

2 Gorshenina, E.V. (1999). *Sotsialno-ekonomicheskoe sostoianie rehiona [Socio-economic state of the region]*. Tver: TGSHA [in Russian].

3 Gambarov, G.M., Zhuravel, N.M., Korolev Yu.G. & et al. (1990). *Statisticheskoe modelirovanie i prohnozirovanie [Statistical modeling and forecasting]*. A.G. Granberg (Ed.). Moscow: Finansy i statistika [in Russian].

4 Samuelson, L. & Nordhaus, V. (1999). *Ekonomika [Economy]*. Moscow: Binom-Knorus [in Russian].

5 Babich, T.N., Kozyeva, I.A., Vertakova, Yu.V. & Kuzbozhev, E.N. (2013). *Prohnozirovanie i planirovanie v usloviiakh rynka [Forecasting and planning in market conditions]*. Moscow: NITs INFRA-M [in Russian].

УДК 517.518.235

Г.Ш. Искакова, К.С. Шаукенова, М.С. Алдибекова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова, Казахстан
(E-mail: iskakova.1975@mail.ru)

О многовесовом анизотропном неравенстве вложения

В статье рассмотрены пространства Соболева, анизотропные по порядкам производных, по показателям суммируемости и по весовым множителям при этих производных. Задачи вложения пространств функций с теми или иными дифференциальными характеристиками актуальны в связи с их важными приложениями в теории дифференциальных операторов, в численных прикладных задачах, в исследовании аппроксимативных характеристик интегральных операторов, действующих в пространствах суммируемых функций. Исследование проведено методом локализации для оценок норм интегральных операторов в весовых пространствах Лебега. В статье получена многовесовая теорема вложения анизотропных пространств Соболева общего типа.

Ключевые слова: вложение, анизотропное, многовесовое, многопараметрическое, интегральные операторы, метод локализации, весовые пространства.

Введение

Пусть G — область в R^n, $l=(l_1,...,l_n)$, $\alpha=(\alpha_1,..,\alpha_n)$ — векторы с целыми координатами $l_i>0$, $\alpha_i\geq 0$.

Ниже нами будут использованы обозначения: для $x=(x_i)=(x_1,\ldots,x_n)\in(-\infty,+\infty)^n$, $y=(y_i)\in(0,+\infty]^n$, $\lambda=(\lambda_i)\in(0,+\infty)^n, t\in(0,+\infty)$ пусть $x\leq y$, $x<y$ — запись покоординатного сравнения,

$$\lambda x\_=(\lambda_i x_i),(\lambda,\, x)=\sum_1^n\lambda_i x_i,\frac{x}{y}\_=x:\;\; y=\left(\frac{x_i}{y_i}\right),\;\;\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{y_i}\right);$$

$$|\lambda|=\sum_1^n\lambda_i,\;\; t^\lambda=(t^{\lambda_i}),|x|_\lambda\_=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|^{1/\lambda_i},\quad 1=(1),\;\;\infty=(+\infty).$$

Для $x\in R^n$, множеств $E,\;\;F\subset R^n$ и $\lambda\in(0,+\infty)^n$ пусть

$$x\pm\lambda E=\{y\;\;:\;\;y=x\pm\lambda z,z\in E\},E\pm F=\{z\;\;:\;\;z=x\pm y,x\in E,y\in F\}.$$

Пусть $Q_0=(-1,\,1)^n$, область $G\subset R^n$,

$$\begin{array}{l} G\left(\frac{1}{\lambda},\,t\right)=\_\{x\;\;:\;\;x=y+\left(\frac{t}{2}\right)^\lambda Q_0\}\subset G,\\ G_t=\_\{x\;\;:\;\;x\in G,\,dist(x,\partial G)>t\}.\end{array}$$

Пусть далее $l\in N^n$, $\alpha\in Z^n$, $\alpha\geq 0$.

$$Q=Q_d=Q_d(x)\overset{\mathbf{def}}{=}\{y\in\mathrm{R}^n\;\;:\;\;|y_i-x_i|<d/2,\;\;i=1,\ldots,n\}=Q_{(2d,\,\lambda)}(x),$$

при $\lambda=(\lambda_1,...,\,\lambda_n)$, $\lambda_1=...=\lambda_n=1$. Положим

$$\tau(x)\overset{\mathbf{def}}{=}\min\left(1,\sup_{d>0}\{d\;\;:\;\;2Q_d(x)\subset G\}\right);$$

$$Q(x)=\tfrac{1}{2}Q_{\tau(x)}(x);$$

и пусть

$$I_\tau^n=\bigcup\nolimits_{x\in G}\{Q\;\;:\;\;Q\subset Q(x)\}.$$

Через $\upsilon(Q)$, $\tilde{\rho}_i(Q)$, $|Q|$ будут обозначаться соответственно $\int\limits_Q \upsilon^{1-r'}$, $\int\limits_Q \rho_i^{1-p_i'}$, $\int\limits_Q dx$. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i$, для $x \in R^n$

$$|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2};$$

$$B(x; r) = \{y \in R^n \quad : \quad |y - x| < r\}.$$

Через $L_{p\upsilon}(G)$, будет обозначаться весовое лебегово пространство с нормой [1]

$$|f; L_{p\upsilon}(G)| = \left(\int\limits_G |f|^p \upsilon\right)^{1/p}.$$

Ниже запись $A << B$ будет означать, что $A \leq cB$.

Обозначим через M^*f максимальный оператор относительно дифференциального базиса

$$B = \bigcup_{x \in G} B_x, \quad 345 \;\; B_x = \{Q \quad : \quad Q = Q_{(\tau,\, \lambda)}, \;\; x \in Q \subset Q(x)\};$$

$$M^*f(x) = \sup_{Q \in B_x,\; x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f|.$$

Рассмотрим случай $\kappa = 1 - (\alpha, \lambda) - |\lambda| > 0$,

Теорема. Пусть $1 < p < q < \infty$, $1 < p_i < q < \infty$, $i = 1, ..., n$, $\kappa = 1 - (\alpha, \lambda) - |\lambda| > 0$, *а веса* ρ_i, υ *и* ω *подчиняются относительно некоторой функции* $\tau(x)$ *и* $c_0 \in (0, 8^{-|\lambda|}\eta^5]$ *условиям*

$$A_0 = \sup_{x \in G} \tau(x)^{-(\alpha,\, \lambda) - |\lambda|/p} \left[\int\limits_{Q(x)} (M^*\upsilon(t))^{q/p'} \omega(t) dt\right]^{1/q} < \infty;$$

$$B_0 = \left[\int\limits_G \left(\int\limits_{G \setminus c_0^\lambda Q(x)} \tilde{\upsilon}(y) dy\right)^{q/p'} \tau(x)^{-q(\alpha,\, \lambda) - |\lambda| q/p} \omega(x) dx\right]^{1/q} < \infty;$$

$$A_i = \sup_{x \in G} \left[\int\limits_{Q(x)} \tau(t)^{q?} \left(\int\limits_{Q(t)} \tilde{\rho}_i\right)^{q/p_i'} \omega(t) dt\right]^{1/q} < \infty \;\; (i = 1, ..., n);$$

$$B_i = \left[\int\limits_G \tau(x)^{q?} \omega(x) \left(\int\limits_{G \setminus c_0^\lambda Q(x)} \tilde{\rho}_i(y) dy\right)^{q/p_i'} dx\right]^{1/q} < \infty \;\; (i = 1, ..., n).$$

Тогда справедлива оценка

$$\left(\int\limits_G |D^\alpha u|^q \omega(x) dx\right)^{1/q} \leq C \left|u; W^{\bar{l}}_{\bar{p},\, p}(G; \bar{\rho}, \upsilon)\right|, \quad u \in C^\infty W.$$

с точной постоянной

$$C \leq c \sum_{j=0}^n (A_i + B_i),$$

где $c > 0$ не зависит G от и весов ρ_i, υ.

Доказательство. Заметим, что G локально удовлетворяет условию гибкого $l-$ рога относительно функции $\rho(t^\lambda) = (t^{\lambda_1}, ..., t^{\lambda_n})$, а именно:

$$x + V(\lambda, x, \delta_0) = x + \bigcup_{0 < t \leq T_x} [\rho(t^\lambda) + t^\lambda \delta^\lambda Q_0] \subset 2^\lambda Q(x) \;?@8\; 0 < \delta < 1, \;\; T_x = \tau(x).$$

Для $\lambda_i = 1/l_i$ $(i = 1, ..., n)$ представление [2]

$$f^{(\alpha)}(x) = f^{(\alpha)}_{(T)}(x,\, \rho(T^\lambda)) + (-1)^{|\alpha|} \int\limits_0^T \lambda_i t^{-1-|\lambda|-(\alpha,\,\lambda)+\lambda_i l_i} \times$$

$$\times \int\limits_G K_i \left(\frac{y}{t^\lambda},\, \frac{\rho(t^\lambda)}{t^\lambda},\, \rho'(t^\lambda)\right) D_i^{l_i} f(x+y) dy dt,$$

перепишется в виде

$$f^{(\alpha)}(x) = f^{(\alpha)}_{T_x}(x,\, t^\lambda) + (-1)^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int D_i^{l_i} f(y) N_{i,\,\delta}(x,\, y-x) dy, \tag{1}$$

где

$$N_{i,\,\delta}(x,\, y-x) = \int\limits_0^{T_x} t^{-|\lambda|-(\alpha,\,\lambda)} K_i \left(\frac{y-x}{t^\lambda},\, 1,\, 1\right) \chi(t,\, y) dt,$$

$\chi(t,\, y)$– характеристическая функция параллелепипеда $\delta^\lambda Q_{(t,\,\lambda)}(x)$.

Для $|N_{i,\,\delta}(x,\, y)|$ из [2] имеем оценки

$$|N_{i,\,\delta}(x,\, y)| << \int\limits_0^{T_x} t^{-(\alpha,\,\lambda)-|\lambda|} H(t\delta_0 - |y|_\lambda) dt = \tag{2}$$

$$= c \begin{cases} \frac{1}{\kappa}\left(\frac{|y|_\lambda}{\delta_0}\right)^\kappa \left[\left(\frac{\delta_0 T_x}{|y|_\lambda}\right) - 1\right], & \text{5A;8 } \kappa = 1 - |\lambda| - (\alpha,\,\lambda) \neq 0; \\ \ln \frac{\delta_0 T_x}{|y|_\lambda}, & \text{5A;8 } \kappa = 1 - |\lambda| - (\alpha,\,\lambda) = 0; \end{cases}$$

$$<< \begin{cases} T_x^\kappa H(\delta_1 T_x - |y|_\lambda), & \text{5A;8 } \kappa > 0; \\ \delta_1^{-\kappa} |y|_\lambda^\kappa H(\delta_1 T_x - |y|_\lambda), & \text{5A;8 } \kappa < 0; \end{cases} \tag{3}$$

$$|N_{i,\,\delta}(x,\, y)| \leq c \ln(\delta_1 T_x |y|_\lambda^{-1}), \quad \text{5A;8 } \kappa = 0. \tag{4}$$

Для первого слагаемого, в (1) в силу оценки

$$\left|\Omega_y^{(\alpha)}(\frac{y-x}{t^\lambda},\, 1)\right| \leq c_3 \chi_{2^{1/\lambda}\delta Q_{(t,\,\lambda)}(x)}(y-x).$$

в [2]

$$\begin{array}{l} |f^{(\alpha)}_{T_x}(x,\, t^\lambda)| = T_x^{\kappa-1} \left| \int f(x+y) \Omega^{(\alpha)}\left(\frac{y}{t^\lambda},\, 1\right) dy \right| << \\ << \tau(x)^{\kappa-1} \int\limits_G |f(y)| \chi(t,\, y-x) dy. \end{array} \tag{5}$$

Заметим, что $\Omega^{(\alpha)}(y) = 0$, если $|y_i| \geq (1 + \delta_1^{\lambda_i})\ \tau(x)^{\lambda_i}$.

Из представления(1) и оценок (3), (5) следует поточечная оценка

$$|f^\alpha(x)| \leq c \int\limits_G k_0(x,\, y) |f(y)| dy + c \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int\limits_G k_i(x,\, y) |D_i^{l_i} f(y)| dy, \tag{6}$$

где

$$k_i(x,\, y) = \begin{cases} \tau^\kappa(x) H(\delta_1 \tau(x) - |y-x|_\lambda), & \text{5A;8 } \kappa > 0; \\ |y-x|_\lambda^\kappa H(\delta_1 \tau(x) - |y-x|_\lambda), & \text{5A;8 } \kappa < 0; \end{cases} \tag{7}$$

$$k_0(x,\, y) = \tau^{\kappa-1}(x) H(\delta_0 \tau(x) - |y-x|_\lambda). \tag{8}$$

В свою очередь оценка (6) приводит к неравенству

$$\left\| f^{(\alpha)} \right\|_{L_{q,\,\omega}(G)} \leq \|K_0|f|\|_{L_{q,\,\omega}(G)} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left\| K_i |D_i^{l_i} f| \right\|_{L_{q,\,\omega}(G)}.$$

Выпишем для операторов

$$K_i f(x) = \int\limits_G k_i(x,\, y) f(y) dy \quad (i = 0,\, 1,\, ...,\, n)$$

условия лемм 1 и 2 в [3; 104], рассматривая K_0 как оператор из $L_{p,\,v}(G)$ в $L_{q,\,\omega}(G)$, а K_i как оператор из $L_{p_i,\,\rho_i}(G)$ в $L_{q,\,\omega}(G)$. При $i = 0$

$$A_{0,\sigma,q,\upsilon,\omega}(x) = ess\sup_{y\in Q(x)}\left(\int\limits_{Q(x)} |k_0(t, y)|^{\sigma}\psi_0^q(t)\omega(t)dt\right)^{1/q} <<$$

$$<< ess\sup_{y\in Q(x)} c(\delta)\left(\int\limits_{Q(x)}\left(\tau(t)^{-q(\alpha,\lambda)-q|\lambda|/p}\left(|Q(x)|^{-1}\int\limits_{Q(t)}\upsilon(y)dy\right)^{1/p'}\right)^{q}\omega(t)dt\right)^{1/q} <<$$

$$<< \tau(x)^{-(\alpha,\lambda)-|\lambda|/p}\left(\int\limits_{Q(x)}(M^*\upsilon(t))^{q/p'}\omega(t)dt\right)^{1/q}.$$

Пусть $\chi_\delta(y) = \chi(x, y)$. Тогда

$$B_0^q = \int\limits_G\left(\int\limits_{G\setminus c_0^\lambda Q(x)}|k_0(x, y)|^{p'}\tilde{\upsilon}(y)dy\right)^{q/p'}\omega(x)dx <<$$

$$<< \int\limits_G\left(\int\limits_{G\setminus c_0^\lambda Q(x)}\left(\tau(x)^{\kappa-1}\chi_\delta(x, y)\right)^{p'}\tilde{\upsilon}(y)dy\right)^{q/p'}\omega(x)dx =$$

$$= \int\limits_G\left(\int\limits_{G\setminus c_0^\lambda Q(x)}\tilde{\upsilon}(y)dy\right)^{q/p'}\tau(x)^{(\kappa-1)q}\omega(x)dx.$$

Из оценок леммы 1 в [3; 104] следует, что $K_0 \in L(L_{p,\upsilon}(G), L_{q,\omega}(G))$, если

$$A_0 = \sup_{x\in G} d(x)^{-(\alpha,\lambda)-|\lambda|/p}\left[\int\limits_{Q(x)}(M^*\upsilon(t))^{q/p'}\omega(t)dt\right]^{1/q} < \infty;$$

$$B_0 = \left[\int\limits_G d(x)^{(-(\alpha,\lambda)-|\lambda|/p)q}\omega(x)\left(\int\limits_{G\setminus c_0^\lambda Q(x)}\upsilon(y)dy\right)^{q/p'}dx\right]^{1/q} < \infty.$$

Пусть $r_i = (1-\frac{\sigma}{q})p_i'$. Тогда для $k_i(x, y)$

$$\psi_i(x) = \left(\int\limits_{Q(x)}|k_i(x, y)|^{r_i}\tilde{\rho}_i(y)dy\right)^{1/p_i'} << \left(\int\limits_{Q(x)}|\tau(x)|^{\kappa r_i}\tilde{\rho}_i(y)dy\right)^{1/p_i'} <<$$

$$<< \tau(x)^{\left(1-\frac{\sigma}{q}\right)\kappa}\left(\int\limits_{Q(x)}\tilde{\rho}_i(y)dy\right)^{1/p_i'};$$

$$A_{i,\sigma,q,\upsilon,\omega}(x) = ess\sup_{y\in Q(x)}\left(\int\limits_{Q(x)}|k_i(t, y)|^{\sigma}\psi_i^q(t)\omega(t)dt\right)^{1/q} <<$$

$$<< ess\sup_{y\in Q(x)}\left(\int\limits_{Q(x)}|\tau(t)|^{\kappa q}\left(\int\limits_{Q(t)}\tilde{\rho}_i\right)^{q/p_i'}\omega(t)dt\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int\limits_{Q(x)}\tau(t)^q\left(\int\limits_{Q(t)}\tilde{\rho}_i(y)dy\right)^{q/p_i'}\omega(t)dt\right)^{1/q}, \tag{9}$$

$$B_i = \left[\int\limits_G \left(\int\limits_{G\setminus c_0^\lambda Q(x)} |k_i(x,\, y)|^{p'} \tilde{\rho}_i(y) dy \right)^{q/p_i'} \omega(x) dx \right]^{1/q} << $$

$$<< \left[\int\limits_G \left(\int\limits_{G\setminus c_0^\lambda Q(x)} |\tau(x)|^{\kappa p'} \tilde{\rho}_i(y) dy \right)^{q/p_i'} \omega(x) dx \right]^{1/q} << $$

$$<< \left[\int\limits_G \tau(x)^{q\kappa} \omega(x) \left(\int\limits_{G\setminus c_0^\lambda Q(x)} \tilde{\rho}_i(y) dy \right)^{q/p_i'} dx \right]^{1/q} \quad (i = 1, ..., n). \tag{10}$$

Из оценок (9), (10) следует, что $K_i \in L(L_{p_i,\, \rho_i}(G),\, L_{q,\, \omega}(G))$, если

$$A_i = \sup_{x\in G} \left[\int\limits_{Q(x)} \tau(t)^{q\kappa} \left(\int\limits_{Q(t)} \tilde{\rho}_i(y) dy \right)^{q/p_i'} \omega(t) dt \right]^{1/q} < \infty \ \ (i = 1, ..., n);$$

$$B_i = \left[\int\limits_G \tau(x)^{q\kappa} \omega(x) \left(\int\limits_{G\setminus c_0^\lambda Q(x)} \tilde{\rho}_i(y) dy \right)^{q/p_i'} dx \right]^{1/q} < \infty \ \ (i = 1, ..., n).$$

Теорема доказана.

Список литературы

1 Кусаинова Л.К. Об ограниченности одного класса операторов в весовых пространствах Лебега / Л.К.Кусаинова / Труды межд. конф. — Семипалатинск, 2003. — С. 94, 95.

2 Бесов О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения для области с условием гибкого рога / О.В.Бесов / Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1984. — Т. 170. — С. 12–29.

3 Искакова Г.Ш. Об одном многовесовом анизотропном неравенстве вложения / Г.Ш.Искакова // Вестн. Караганд. ун-та. Серия Математика. — 2014. — № 1(73). — С. 103–108.

Г.Ш. Искакова, К.С. Шаукенова, М.С. Алдибекова

Көпсалмақты анизотропты кеңістіктерді енгізу жөнінде

Мақалада туындысының реті, қосындылау көрсеткіші және осы туындылардың салмақты көбейткіштері бойынша анизотропты Соболев кеңістігі қарастырылған. Функциялардың кеңістігін енгізу есептері өзінің дифференциалды сипаттамасымен олардың дифференциалды операторлар теориясында, қолданбалы сандық есептерде, интегралды операторлардың аппроксимациялық сипаттамасын зерттеуде қосындыланатын функциялардың кеңістігіне әсер ететін маңызды қосымшаларына байланысты өзекті мәселе. Зерттеу салмақты Лебег кеңістігінің интегралдық операторларының нормаларын бағалау үшін оқшаулау әдісімен жүргізілді. Мақалада жалпы типтегі анизотропты Соболев кеңістіктері үшін көп салмақты енгізу теоремасы алынды.

Кілт сөздер: енгізу, анизотропты, көпсалмақты, көп параметрлі, интегралдық операторлар, оқшаулау әдісі, салмақты кеңістіктер.

G.Sh. Iskakova, K.S. Shaukenova, M.S. Aldibekova

On a multi-weight inequality for the imbedding of anisotropic spaces

In this paper we consider Sobolev spaces that are anisotropic in order of derivatives, in terms of summability and weight factors for these derivatives. The problems of embedding spaces of functions with various differential characteristics are relevant in connection with their important applications in the theory of differential operators, in numerical applied problems, in the study of approximate characteristics of integral operators acting in spaces of summable functions. The study was carried out by the localization method for estimating the norms of integral operators in weighted Lebesgue spaces. In this paper we obtain a multi-weight embedding theorem for anisotropic Sobolev spaces of general type.

Keywords: embedding, anisotropic, multi-weight, multiparameter, integral operators, localization method, weighted spaces.

References

1 Kusainova, L.K. (2003). Ob ohranichennosti odnoho klassa operatorov v vesovykh prostranstvakh Lebeha [About limitation of one class of operators in weight spaces Lebegs]. *Trudy mezhdunarodnoi konferentsii – Works of the international conference, 94, 95.* Semipalatinsk [in Russian].

2 Besov, O.V. (1984). Intehralnye predstavleniia funktsii i teoremy vlozheniia dlia oblasti s usloviem hibkoho roha [Integrated concepts of functions and theorems of an investment for area with a condition of a flexible horn]. *Trudy Matematicheskoho instituta AN SSSR – Works of Mathematical college AN SSSR, Vol. 170,* 12–29 [in Russian].

3 Iskakova, G.Sh. (2014). Ob odnom mnohovesovom anizotropnom neravenstve vlozheniia [On one multi-weight anisotropic inequality of embedding]. *Vestnik Karahandinskoho universiteta. Seriia Matematika – Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series, 1(73),* 103–108 [in Russian].

АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
INFORMATION ABOUT AUTHORS

Alibiev, D. — Candidate of physical and mathematical Sciences, Associate Professor, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Aldibekova, M.S. — Senior lecturer, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Antipov, Yu. — Doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the Chair of Mathematics, Kaliningrad Technical University, Russia.

Aisina, T. — Postgraduate student, specialty 6M060200 — «Computer science», Kh. Dosmukhamedov Atyrau State University, Kazakhstan.

Bekish, U.A. — PhD student, I.Zhansugurov Zhetysu State University, Taldykorgan, Kazakhstan.

Giorgadze, L. — 2nd year master degree student, specialty 6M060200 — «Computer science», Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

De Chirico, G. — Lead software developer, Alpegagroup, Belgium.

Drozd, V.G. — Candidate of economic sciences, Karaganda Economic University of Kazpotrebsoyuz, Kazakhstan.

Iskakova, G.Sh. — Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department «Mathematical Analysis and Differential Equations», Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Kalybay, A. — PhD, Associate professor, KIMEP University, Almaty, Kazakhstan.

Karshygina, G.Zh. — 2-nd year PhD student of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Kazhikenova, A.Sh. — Candidate of technical sciences, Associate professor, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Nurgabyl, D.N. — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, I.Zhansugurov Zhetysu State University, Taldykorgan, Kazakhstan.

Oinarov, R. — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Omarova, Sh. — Candidate of economical sciences, Karaganda Economic University of Kazpotrebsoyuz, Kazakhstan.

Orumbayeva, N. — Candidate of physical and mathematical sciences, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Saltanova, G. — Candidate of physical and mathematical sciences, Kh.Dosmukhamedov Atyrau State University, Kazakhstan.

Shalginbayeva, S. — Candidate of physical and mathematical sciences, Associate professor, Kazakh Ablai Khan University of International Relations and World Languages, Almaty, Kazakhstan.

Shayakhmetova, B. — Candidate of pedagogical sciences, Docent, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Shaimardan, S. — PhD student, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Shaukenova, K.S. — Senior lecturer, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Zhunussova, Zh.Kh. — Candidate of physical and mathematical sciences, Professor of the Department of Differential Equations and Theory of Control, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.

2017 жылғы «Қарағанды университетінің хабаршысында» жарияланған мақалалардың көрсеткіші. «Математика» сериясы

МЕРЕЙТОЙ ИЕЛЕРІ

Указатель статей, опубликованных в «Вестнике Карагандинского университета» в 2017 году. Серия «Математика»

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Index of articles published
in the «Bulletin of the Karaganda University» in 2017 y.
«Mathematics» Series

No. p.

MATHEMATICS

OUR ANNIVERSARIES