ISSN 2518-7929

№ 1(85)/2017

МАТЕМАТИКА сериясы
Серия МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS Series

ҚАРАҒАНДЫ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

ВЕСТНИК КАРАГАНДИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF THE KARAGANDA UNIVERSITY

ISSN 2518-7929
Индексі 74618
Индекс 74618

ҚАРАҒАНДЫ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ **ХАБАРШЫСЫ**

ВЕСТНИК КАРАГАНДИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF THE KARAGANDA UNIVERSITY

МАТЕМАТИКА сериясы

Серия МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS Series

№ 1(85)/2017

Қаңтар–ақпан–наурыз
30 наурыз 2017 ж.

Январь–февраль–март
30 марта 2017 г.

January–February–March
March, 30, 2017

1996 жылдан бастап шығады
Издается с 1996 года
Founded in 1996

Жылына 4 рет шығады
Выходит 4 раза в год
Published 4 times a year

Қарағанды, 2017
Караганда, 2017
Karaganda, 2017

Редакцияның мекенжайы: 100028, Қазақстан, Қарағанды қ., Университет к-сі, 28
Тел.: (7212) 77-03-69 (ішкі 1026); факс: (7212) 77-03-84.
E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Сайт: vestnik.ksu.kz

Редакторы
Ж.Т.Нурмуханова
Компьютерде беттеген
Г.Қ.Қалел

Қарағанды университетінің хабаршысы. «Математика» сериясы.
ISSN 2518-7929.

Меншік иесі: «Академик Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті» РММ.
Қазақстан Республикасының Мәдениет және ақпарат министрлігімен тіркелген. 23.10.2012 ж.
№ 13104–Ж тіркеу куәлігі.

Басуға 29.03.2017 ж. қол қойылды Пішімі 60×84 1/8. Қағазы офсеттік. Көлемі 10,0 б.т. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша. Тапсырыс № 19.

Е.А.Бөкетов атындағы ҚарМУ баспасының баспаханасында басылып шықты.
100012, Қазақстан, Қарағанды қ., Гоголь к-сі, 38. Тел. 51-38-20. E-mail: izd_kargu@mail.ru

Адрес редакции: 100028, Казахстан, г. Караганда, ул. Университетская, 28
Тел.: (7212) 77-03-69 (внутр. 1026); факс: (7212) 77-03-84.
E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Сайт: vestnik.ksu.kz

Редактор
Ж.Т.Нурмуханова
Компьютерная верстка
Г.К.Калел

Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика».
ISSN 2518-7929.

Собственник: РГП «Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова».

Зарегистрирован Министерством культуры и информации Республики Казахстан. Регистрационное свидетельство № 13104–Ж от 23.10.2012 г.

Подписано в печать 29.03.2017 г. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная. Объем 10,0 п.л. Тираж 300 экз. Цена договорная. Заказ № 19.

Отпечатано в типографии издательства КарГУ им. Е.А.Букетова
100012, Казахстан, г. Караганда, ул. Гоголя, 38, тел.: (7212) 51-38-20. E-mail: izd_kargu@mail.ru

Postal address: 28, University Str., 100028, Kazakhstan, Karaganda
Tel.: (7212) 77-03-69 (add. 1026); fax: (7212) 77-03-84.
E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Web-site: vestnik.ksu.kz

Editor
Zh.T.Nurmukhanova
Computer layout
G.K.Kalel

Bulletin of the Karaganda University. «Mathematics» series.
ISSN 2518-7929.

Proprietary: RSE «Academician Ye.A.Buketov Karaganda State University».

Registered by the Ministry of Culture and Information of the Republic of Kazakhstan. Registration certificate No. 13104–Zh from 23.10.2012.

Signed in print 29.03.2017. Format 60×84 1/8. Offset paper. Volume 10,0 p.sh. Circulation 300 copies. Price upon request. Order № 19.

Printed in the Ye.A.Buketov Karaganda State University Publishing house.
38, Gogol Str., 100012, Kazakhstan, Karaganda, Tel.: (7212) 51-38-20. E-mail: izd_kargu@mail.ru

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА

МЕРЕЙТОЙ ИЕЛЕРІ

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

CONTENTS

MATHEMATICS

OUR ANNIVERSARIES

УДК 517.95

Ж.А. Балкизов

Институт прикладной математики и автоматизации Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», Нальчик, Россия
(E-mail: giraslan@yandex.ru)

Краевая задача для уравнения третьего порядка с нелокальным условием по времени

В конечной прямоугольной области рассмотрена однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, с условиями периодичности по времени. Единственность решения исследуемой задачи доказана с использованием метода априорных оценок. Методом разделения переменных для частного случая исследуемой задачи построено решение в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи. Исследована равномерная сходимость полученного решения и его производных порядка, входящих в уравнение.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача, априорная оценка решения, метод Фурье, задача на собственные значения, собственные значения и функции задачи, равномерная сходимость ряда, непрерывность функции и ее производных.

Введение

В прямоугольной области $D = \{(x, y): \ 0 < x < r, \ 0 < y < h\}$ евклидовой плоскости точек $z = (x, y)$ рассмотрим уравнение

$$Lu = u_{xxx}(z) + a_2(z)\, u_{xx}(z) + a_1(z)\, u_x(z) + b_2(z)\, u_{yy}(z) + b_1(z)\, u_y(z) + b_0(z)\, u = -f(z), \qquad (1)$$

где $a_i(z) = a_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$, $b_j(z) = b_j(x, y)$ $(j = 0, 1, 2)$, $f(z) = f(x, y)$ – заданные функции из класса $a_i(z) \in C_x^i\left(\bar{D}\right)$, $b_j(z) \in C_y^j\left(\bar{D}\right)$, $f(z) \in C\left(\bar{D}\right)$, а $u(z) = u(x, y)$– искомая функция.

Уравнение (1), которое в монографии [1; 132] названо уравнением третьего порядка с кратными характеристиками, относится к уравнению параболического типа [2; 72]. Как показано в [3], линейное приближение распространения нелинейных звуковых волн в жидкости при кавитации описывается уравнением вида (1) при $b_2(z) \equiv 0$. В работах [4–7] изучены локальная, нелокальная и общие краевые задачи для уравнения (1) в случае, когда коэффициент $b_2(z) \equiv 0$.

В работах [8–10] различными методами получены фундаментальные решения модельного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками вида

$$u_{xxx}(z) - u_{yy}(z) = 0, \qquad (2)$$

а также изучены свойства полученных решений и, в частности, получены оценки построенных фундаментальных решений и их производных.

Краевые задачи для уравнений вида (2) и (1) при $b_2\,(x,\, y) \neq 0$ как в ограниченной, так и в неограниченной областях изучены в работах [11–16].

Постановка задачи

Регулярным в области D решением уравнения (1) назовем функцию $u\,(z) = u\,(x,\,y)$ из класса $C\left(\bar{D}\right) \cap C^{3,\,2}_{x,\,y}\,(D)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

В данной работе исследуется следующая

Задача А. Требуется найти регулярное в области D решение уравнения (1) из класса $u(x,y) \in C^1_y\,(D \cup \{y=0\} \cup \{y=h\}) \cap C^2_x\,(D \cup \{x=r\})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\,(0,\,y) = 0, \quad u_x\,(0,\,y) = 0, \quad u_{xx}\,(r,\,y) - \alpha\,u\,(r,\,y) = 0, \quad 0 < y < h; \tag{3}$$

$$u\,(x,\,0) = u\,(x,\,h)\,, \quad u_y\,(x,\,0) = u_y\,(x,\,h)\,, \quad 0 < x < r, \tag{4}$$

где $\alpha = const$ — заданное действительное число.

Единственность решения задачи А

Обозначим

$$(u,\,v)_0 = \int\limits_D u(z)v(z)\,dx\,dy, \quad \|u\|^2_0 = (u,\,u)_0 = \int\limits_D u^2\,(z)\,\,dx\,dy.$$

Справедлива следующая

Теорема. Пусть коэффициенты $a_i(x,y)$ $(i=1,\,2)$, $b_j(x,y)$ $(j=0,\,1,\,2)$ α *таковы, что обладают свойствами*

$$a_2(x,y) \geq 0, \quad b_2(x,y) \geq 0 \quad \forall \;\; (x,y) \in D; \tag{5}$$

$$a_{2xx}(x,y) + b_{2yy}(x,y) - a_{1x}\,(x,\,y) - b_{1y}(x,y) + 2\,b_0\,(x,\,y) < 0 \quad \forall \;\; (x,y) \in D; \tag{6}$$

$$a_{2x}\,(r,\,y) - a_1\,(r,\,y) - 2\,\alpha \geq a^2_2\,(r,\,y) \quad \forall \;\; y \in [0,h]; \tag{7}$$

$$b_2\,(x,\,h) = b_2\,(x,\,0)\,, \quad b_{2y}\,(x,\,h) - b_{2y}\,(x,\,0) \geq b_1\,(x,\,h) - b_1\,(x,\,0) \quad \forall \;\; x \in [0,\,r]\,. \tag{8}$$

Тогда для решения $u(z) = u(x,y)$ задачи А имеет место энергетическое неравенство

$$\|u(z)\|_0 \leq C\,\,\|f(z)\|_0\,, \tag{9}$$

где C – положительная постоянная, не зависящая от искомой функции $u(z)$.

Доказательство. Обозначим через $D_\varepsilon = \{(x,\,y):\; \varepsilon < x < r-\varepsilon,\; \varepsilon < y < h-\varepsilon\}$, где ε – произвольное, достаточно малое положительное число. Для исходного оператора Lu справедливо тождество

$$2u\,Lu = \frac{\partial Q(z)}{\partial\,x} - \frac{\partial P(z)}{\partial\,y} + a_{00}(z)\,u^2 - 2a_2(z)\,u^2_x - 2b_2(z)\,u^2_y, \tag{10}$$

где

$$P(z) = [b_{2y}(z) - b_1(z)]\;u^2 - 2\,b_2(z)\,u\,u_y;$$

$$Q(z) = [a_1(z) - a_{2x}(z)]\;u^2 + 2\,u\,u_{xx} + 2\,a_2(z)u\,u_x - u^2_x;$$

$$a_{00}(z) = a_{2xx}(z) + b_{2yy}\,(z) - a_{1x}(z) - b_{1y}(z) + 2b_0\,(z)\,.$$

Интегрируя тождество (10) по вспомогательной области D_ε, а затем применяя к полученному равенству формулу Грина, будем иметь

$$2\int\limits_{D_\varepsilon} u\,Lu\,dx\,dy = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} P(x,y)dx + Q(x,y)dy +$$

$$+\int\limits_{D_\varepsilon}\left[a_{00}(z)u^2 - 2a_2(z)u^2_x - 2b_2(z)u^2_y\right]dx\,dy = -2\int\limits_{D_\varepsilon} u(z)f(z)dx\,dy, \tag{11}$$

где Γ_ε — граница вспомогательной области D_ε.

Перейдем в равенстве (11) к пределу при $\varepsilon \to 0$. Легко заметить, что при этом область D_ε переходит в D. Тогда, с учетом граничных условий (3), (4), получим

$$-2\,(u,\,f)_0 = 2\int\limits_0^r \left[b_2\,(x,h) - b_2\,(x,0)\right] u\,(x,0)\,u_y\,(x,0)\,dx +$$

$$+\int\limits_0^r \left[b_{2y}\,(x,0) - b_{2y}\,(x,h) + b_1\,(x,h) - b_1\,(x,0)\right] u^2\,(x,0)\,dx +$$

$$+\int\limits_0^r \left[(2\alpha + a_1\,(r,y) - a_{2x}\,(r,y))\,u^2\,(r,y) + 2a_2\,(r,y)\,u\,(r,y)\,u_x\,(r,y) - u_x^2\,(r,y)\right] dy +$$

$$+\int\limits_D \left[a_{00}(z)u^2 - 2a_2\,(z)\,u_x^2 - 2b_2(z)u_y^2\right] dx\,dy = I_1 - I_2 - I_3 - I_4. \tag{12}$$

Из условия (8) теоремы следует, что

$$I_1 = 2\int\limits_0^r \left[b_2\,(x,h) - b_2\,(x,0)\right] u\,(x,0)\,u_y\,(x,0)\,dx = 0.$$

Тогда равенство (12) перепишется в следующей форме:

$$2\,(u,f)_0 = \int\limits_0^r \left[b_{2y}\,(x,h) - b_{2y}\,(x,0) + b_1\,(x,0) - b_1\,(x,h)\right] u^2\,(x,0)\,dx +$$

$$+\int\limits_0^r \left[u_x^2\,(r,y) - 2a_2\,(r,y)\,u\,(r,y)\,u_x\,(r,y) + (a_{2x}\,(r,y) - a_1\,(r,y) - 2\alpha)\,u^2\,(r,y)\right] dy +$$

$$+\int\limits_D \left[2a_2(z)u_x^2 + 2b_2\,(z)\,u_y^2 - a_{00}(z)u^2\right] dx\,dy. \tag{13}$$

В силу условий (7) и (8) теоремы справедливы неравенства

$$I_2 = \int\limits_0^r \left[b_{2y}\,(x,h) - b_{2y}\,(x,0) + b_1\,(x,0) - b_1\,(x,h)\right] u^2\,(x,0)\,dx \geq 0;$$

$$I_3 = \int\limits_0^r \left[u_x^2\,(r,y) - 2a_2\,(r,y)\,u\,(r,y)\,u_x\,(r,y) + (a_{2x}\,(r,y) - a_1\,(r,y) - 2\alpha)\,u^2\,(r,y)\right] dy \geq 0,$$

а в силу условий (5) справедливо

$$I_4 = \int\limits_D \left[2a_2(z)u_x^2 + 2b_2\,(z)\,u_y^2 - a_{00}(z)u^2\right] dx\,dy \geq -\int\limits_D a_{00}(z)u^2(z)dx\,dy.$$

С учетом полученных выше неравенств из (13) находим

$$m\,\|u\|_0^2 \leq 2\,(u,f)_0 \leq \varepsilon_1\,\|u\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}\,\|f\|_0^2\,,$$

где $m = \min\limits_{(x,y)\in D} |a_{00}(z)| = \min\limits_{(x,y)\in D} |a_{2xx}(z) + b_{2yy}\,(z) - a_{1x}(z) - b_{1y}(z) + 2b_0\,(z)|$; ε_1 — достаточно малое положительное число.

Выбирая $\varepsilon_1 = \frac{m}{2}$ из последнего неравенства, приходим к априорной оценке (9). Теорема доказана.

Из априорной оценки (9) вытекает единственность регулярного решения исследуемой задачи А.

Существование решения задачи A

Далее перейдем к исследованию вопроса о существовании решения задачи A. Существование решения задачи (3), (4) для уравнения (1) будем доказывать с использованием метода разделения переменных (метода Фурье) для частного случая уравнения (1), когда

$$b_2(x,y) = \lambda = const, \quad b_0(x,y) = \mu = const, \quad a_1(x,y) = a_2(x,y) = b_1(x,y) \equiv 0.$$

Условия (5)–(8) при этом будут выполнены, если

$$\lambda \geq 0, \quad \mu < 0, \quad \alpha \leq 0. \tag{14}$$

При сделанных предположениях относительно коэффициентов $a_i(z) = a_i(x,\ y)\,(i = 1,\ 2)$, $b_j\,(z) = b_j(x,\ y)$ $(j = 0,\ 1,\ 2)$ задача (1), (3), (4) переходит к следующей задаче:

$$u_{xxx} + \lambda\, u_{yy} + \mu\, u = -f(x,y), \quad (x,y) \in D; \tag{15}$$

$$u\,(0,\ y) = 0, \quad u_x\,(0,\ y) = 0, \quad u_{xx}\,(r,\ y) - \alpha\, u\,(r,\ y) = 0, \quad y \in (0,h); \tag{16}$$

$$u\,(x,\ 0) = u\,(x,\ h)\,, \quad u_y\,(x,\ 0) = u_y\,(x,\ h)\,, \quad x \in (0,\ r)\,. \tag{17}$$

Вначале положим, что $f(x,y) = 0$. Решение задачи (15)–(17) ищем в виде

$$u(x,y) = X(x)\,Y\,(y)\,. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (15), с учетом условий (17), приходим к следующей задаче на собственные значения относительно $Y(y)$:

$$Y''\,(y) + \theta\, Y\,(y) = 0; \tag{19}$$

$$Y\,(0) = Y\,(h)\,, \quad Y'\,(0) = Y'\,(h)\,. \tag{20}$$

При $\theta < 0$ задача (19), (20) имеет только тривиальное решение $Y(y) \equiv 0$.

Пусть $\theta = 0$. В этом случае функция $Y_0\,(y) = \frac{A_0}{2}$, где $A_0 = const$, является собственной функцией задачи (19), (20), соответствующей собственному значению $\theta_0 = 0$.

И, наконец, при $\theta > 0$ собственные значения задачи (19), 20) будут иметь вид

$$\theta_n = \left(\frac{2\,\pi\, n}{h}\right)^2, \quad n \in N,$$

а собственными функциями, соответствующими собственным значениям θ_n, будут

$$Y_n\,(y) = A_n\,\cos\left(\frac{2\pi\, n}{h} y\right) + B_n\,\sin\left(\frac{2\pi\, n}{h}\, y\right).$$

Легко заметить, что система функций $\left\{\frac{1}{2};\ \cos\left(\frac{2\pi n}{h}\, y\right);\ \sin\left(\frac{2\pi n}{h}\, y\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ образует полную ортогональную систему в $L_2[0,h]$.

Пусть теперь $f(x,y) \neq 0$. Решение неоднородного уравнения (15) будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи (19), (20)

$$u(x,y) = \frac{A_0\,(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(x)\,\cos\left(\frac{2\pi\, n}{h} y\right) \,+\, B_n(x)\,\sin\left(\frac{2\pi\, n}{h}\, y\right)\right], \tag{21}$$

где $A_0(x),\ A_n(x),\ B_n(x)$ — пока неизвестные достаточно гладкие функции.

Предположим, что правая часть $f(x,y)$ уравнения (15) допускает разложение в ряд Фурье по собственным функциям задачи (19), (20):

$$f(x,y) = \frac{F_0\,(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[F_n(x)\,\cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) \,+\, \Phi_n(x)\,\sin\left(\frac{2\pi n}{h}\, y\right)\right], \tag{22}$$

где $F_n(x) = \frac{2}{h}\int\limits_0^h f(x,y)\cos\left(\frac{2\pi n}{h}y\right)dy$, $\Phi_n(x) = \frac{2}{h}\int\limits_0^h f(x,y)\sin\left(\frac{2\pi n}{h}y\right)dy$, $n = 0, 1, 2, ...$

Подставляя (21) в уравнение (15), с учетом (22), приходим к равенству

$$\frac{A_0'''(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n'''(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{h}y\right) + B_n'''(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{h}y\right)\right] -$$

$$-\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi n}{h}\right)^2\left[A_n(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{h}y\right) + B_n(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{h}y\right)\right] +$$

$$+\frac{\mu}{2}A_0(x) + \mu\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{h}y\right) + B_n(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{h}y\right)\right] =$$

$$= -\frac{F_0(x)}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[F_n(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{h}y\right) + \Phi_n(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{h}y\right)\right].$$

Из последнего равенства, с учетом условий (16), приходим к следующим задачам относительно искомых функций $A_0(x)$, $A_n(x)$, $B_n(x)$:

$$A_0'''(x) + \mu A_0(x) = -F_0(x); \quad 0 < x < r; \tag{23}$$

$$A_0(0) = 0, \quad A_0'(0) = 0, \quad A_0''(r) - \alpha A_0(r) = 0; \tag{24}$$

$$A_n'''(x) + \mu A_n(x) - \lambda\left(\frac{2\pi n}{h}\right)^2 A_n(x) = -F_n(x), \quad n \in N, \quad 0 < x < r; \tag{25}$$

$$A_n(0) = 0, \quad A_n'(0) = 0, \quad A_n''(r) - \alpha A_n(r) = 0; \tag{26}$$

$$B_n'''(x) + \mu B_n(x) - \lambda\left(\frac{2\pi n}{h}\right)^2 B_n(x) = -\Phi_n(x), \quad n \in N, \quad 0 < x < r; \tag{27}$$

$$B_n(0) = 0, \quad B_n'(0) = 0, \quad B_n''(r) - \alpha B_n(r) = 0. \tag{28}$$

Решения задач (23–28) выписываются по формулам

$$A_n(x) = -\int\limits_0^r G_n(x,t)\,F_n(t)\,dt, \quad n \in N \cup 0;$$

$$B_n(x) = -\int\limits_0^r G_n(x,t)\,\Phi_n(t)\,dt, \quad n \in N,$$

где $G_n(x, t)$ — функция Грина оператора

$$L[g] = g'''(x) - \omega_n^3 g(x)$$

с условиями

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(r) - \alpha g(r) = 0,$$

явный вид которой определяется формулой

$$G_n(x,t) = \begin{cases} \left[e^{\omega_n x} - 2e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\sin\left(\kappa_n x + \frac{\pi}{6}\right)\right]a_{1n}, \quad 0 \le x < t, \\ \left[e^{\omega_n x} - 2e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\sin\left(\kappa_n x + \frac{\pi}{6}\right)\right]a_{1n} + \frac{1}{3\omega_n^2}\left[e^{\omega_n(x-t)} - 2e^{-\frac{\omega_n}{2}(x-t)}\sin\left(\kappa_n(x-t) + \frac{\pi}{6}\right)\right], \\ t < x \le r. \end{cases}$$

Здесь $\omega_n^3 = \lambda\left(\frac{2\pi n}{h}\right)^2 - \mu > 0$, $\kappa_n = \frac{\sqrt{3}\,\omega_n}{2}$;

$$a_{1n} = -\frac{\left(\omega_n^2 - \alpha\right)e^{\omega_n(r-t)} + 2\omega_n^2 e^{-\frac{\omega_n}{2}(r-t)}\cos\left(\kappa_n(r-t)\right) + 2\alpha e^{-\frac{\omega_n}{2}(r-t)}\cos\left(\kappa_n(r-t) - \frac{\pi}{3}\right)}{3\omega_n^2\left[\left(\omega_n^2 - \alpha\right)e^{\omega_n r} + 2\omega_n^2 e^{-\frac{\omega_n r}{2}}\cos\left(\kappa_n r\right) + 2\alpha e^{-\frac{\omega_n r}{2}}\cos\left(\kappa_n r - \frac{\pi}{3}\right)\right]}.$$

Подставляя значения $A_0(x)$, $A_n(x)$, $B_n(x)$ в (21), находим

$$u(x,y) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^r G_0\,(x,\,t)\;F_0\,(t)\;dt - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^r G_n\,(x,\,t)\;F_n\,(t)\;dt\,\cos\left(\frac{2\pi\, n}{h}y\right) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^r G_n\,(x,\,t)\;\Phi_n\,(t)\;dt\;\sin\left(\frac{2\pi\, n}{h}y\right)\right]. \tag{29}$$

С учетом значений $F_0(x)$, $F_n(x)$, $\Phi_n(x)$ из (29) приходим к следующему представлению решения исследуемой задачи A:

$$u(x,y) = -\frac{2}{h}\int\limits_0^h\int\limits_0^r G\,(x,\,t;\,y-s)\;f\,(t,\,s)\;dt\,ds, \tag{30}$$

где

$$G\,(x,\,t;\,y-s) = \frac{1}{2}\,G_0\,(x,\,t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n\,(x,\,t)\,\cos\left(\frac{2\pi n}{h}\,(y-s)\right).$$

Покажем, что знаменатель

$$\Delta = \left(\omega_n^2 - \alpha\right)\,e^{\omega_n\,r} + 2\,\omega_n^2\,e^{-\,\frac{\omega_n\,r}{2}}\,\cos\left(\kappa_n\,r\right) + 2\,\alpha\,e^{-\,\frac{\omega_n\,r}{2}}\,\cos\left(\kappa_n\,r - \frac{\pi}{3}\right)$$

коэффициента $a_{1n}\,(t)$ не равен нулю. Для этого рассмотрим однородную задачу

$$L\,[g] = g'''\,(x) - \omega_n^3\,g\,(x) = 0, \quad 0 < x < r \tag{31}$$

с условиями

$$g\,(0) = 0, \quad g'\,(0) = 0, \quad g''\,(r) - \alpha\,g\,(r) = 0. \tag{32}$$

Умножая уравнение (31) скалярно на функцию $g(x)$, с учетом условий (32), находим

$$(g(x),\,L\,[g])_0 = \int\limits_0^r g(x)\,\left[g'''\,(x) - \omega_n^3\,g\,(x)\right]\,dx = \alpha\,g^2\,(r) - \frac{1}{2}g'^{\,2}\,(r) - \omega_n^3\int\limits_0^r g^2(x)\,dx = 0.$$

Так как $\alpha \le 0$, а $\omega_n^3 > 0$, то последнее равенство может иметь место в том и только в том случае, когда $g(x) \equiv 0$, т. е. однородная задача (31), (32) имеет только нулевое решение.

С другой стороны, общее решение уравнения (31) можно представить в следующем виде:

$$g(x) = \frac{1}{(3+\sqrt{3})\,\omega_n^2}\,\left[\left(2\,e^{\omega_n x} + \left(1+\sqrt{3}\right)\,e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\cos\left(\kappa_n x\right) + \left(1-\sqrt{3}\right)\,e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\sin\left(\kappa_n x\right)\right)\,\omega_n^2\,c_1 + \right.$$

$$+ \left(e^{\omega_n x} - e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\cos\left(\kappa_n x\right) + \left(2+\sqrt{3}\right)\,e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\sin\left(\kappa_n x\right)\right)\,\omega_n\,c_2 +$$

$$\left. + \left(\sqrt{3}\,e^{\omega_n x} - \sqrt{3}\,e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\cos\left(\kappa_n x\right) - 3\,e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\sin\left(\kappa_n x\right)\right)\,c_3\,\right]. \tag{33}$$

Удовлетворяя (33) условиям (32), находим, что

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0;$$

$$\left[\left(\omega_n^2 - \alpha\right)\,e^{\omega_n r} + 2\,\omega_n^2\,e^{-\,\frac{\omega_n r}{2}}\,\cos\left(\kappa_n r\right) + 2\,\alpha\,e^{-\,\frac{\omega_n\,r}{2}}\,\cos\left(\kappa_n r - \frac{\pi}{3}\right)\right]\,c_3 = 0. \tag{34}$$

Если $\Delta = 0$, то, как видно из (34), постоянная c_3 будет произвольной и поэтому задача (31), (32) будет иметь нетривиальное решение вида

$$g(x) = \frac{1}{(1+\sqrt{3})\,\omega_n^2}\,\left(e^{\omega_n x} - \,e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\cos\left(\kappa_n x\right) - \sqrt{3}\,e^{-\frac{\omega_n x}{2}}\sin\left(\kappa_n x\right)\right)\,c_3.$$

Однако выше доказано, что однородная задача (31), (32) имеет только нулевое решение. Полученное противоречие доказывает, что

$$\Delta = \left(\omega_n^2 - \alpha\right) e^{\omega_n r} + 2\,\omega_n^2\, e^{-\frac{\omega_n r}{2}} \cos\left(\kappa_n r\right) + 2\,\alpha\, e^{-\frac{\omega_n r}{2}} \cos\left(\kappa_n r - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0,$$

и, стало быть, при условиях (14) существует единственная функция Грина $G_n\,(x,\,t)$ задачи (31), (32).

Таким образом, формула (30) дает представление единственного решения задачи А для уравнения (1) в случае, когда коэффициенты $a_1\,(x,\,y) = a_2(x,y) = b_1(x,y) \equiv 0$, а

$$b_2(x,y) = \lambda = const \geq 0, \quad b_0(x,y) = \mu = const < 0, \quad \alpha \leq 0.$$

Список литературы

1 *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. — Ташкент: ФАН, 1979. — 238 с.

2 *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.

3 *Красильников В.А., Кузнецов В.П.* Распространение нелинейных звуковых волн в жидкости при кавитации // Акустический журн. — 1974. — Т. 20. — № 3. — С. 473–477.

4 *Cattabriga L.* Annali della seuola normole Superici di pisa e mathematics. — 1959. — Vol. 13. — No. 2. — P. 163.

5 *Иргашев Ю.* Некоторые краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками // Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения: сб. науч. тр. — Ташкент: ФАН, 1976. — С. 17–31.

6 *Джураев Т.Д., Абдиназаров С.* Краевые задачи типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками // Известия АН Узбекской ССР. — 1981. — № 1. — С. 8–11.

7 *Абдиназаров С.* Общие краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17. — № 1. — С. 3–12.

8 *Block H.* Sur les equations lineaires aux derivies partielles a caracteristiques mulptiples // Arkiv for Mat. Astr. och Fysik. — 1912. — Bd.7. — P. 3–20.

9 *Cattabriga L.* Potenziale di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple // Rendiconti del seminario Matem. della univ. di Padava. — 1961. — Vol. 31.

10 *Джураев Т.Д., Апаков Ю.П.* Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. — 2007. — № 2(16). — С. 18–26.

11 *Апаков Ю.П.* Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: материалы III Междунар. конф. — Нальчик: Эльбрус, 2006. — С. 37–39.

12 *Иргашев Ю., Апаков Ю.П.* Первая краевая для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа // Узбек. мат. журн. — 2006. — № 2. — С. 44–51.

13 *Апаков Ю.П.* К решению краевых задач для уравнения $u_{xxx} - u_{yy} = 0$ в неограниченных областях // Докл. АН Республики Узбекистан. — 2006. — № 3. — С. 17–20.

14 *Апаков Ю.П.* О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Укр. мат. журн. — Т. 64. — № 1. — 2012. — С. 3–13.

15 *Балкизов Ж.А., Кодзоков А.Х.* О представлении решения краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Кабардино-Балкарского науч. центра РАН. — 2010. — № 4. — С. 64–69.

16 *Балкизов Ж.А.* Краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Докл. Адыгской (Черкесской) МАН. — 2015. — Т. 17. — № 3. — С. 13–21.

Ж.А. Балкизов

Уақыт бойынша бейлокалды шарттары бар үшінші ретті теңдеу үшін шеттік есеп

Мақалада тікбұрышты шекті облыста уақыт бойынша периодты шартты, еселі сипаттаушылары бар үшінші ретті теңдеу үшін бейлокалды шеттік есептің бірмәнді шешімділігі дәлелденген. Априорлы бағалау әдісімен зерттеліп отырған есеп шешімінің жалғыздығы дәлелденген. Берілген есептің дербес жағдайы үшін айнымалыларды бөліктеу әдісімен есептің меншікті функциялары бойынша Фурье қатары түрінде шешімі табылған. Алынған шешімнің салынған шешуі мен теңдеуге енгізілген туындыларының бірқалыпты жинақтылығы жан-жақты зерттелген.

Кілт сөздер: бейлокалды шеттік есеп, шешімнің априорлық бағалануы, Фурье әдісі, меншікті мәндерге қойылған есеп, есептің меншікті мәндері мен меншікті функциялары, қатардың бірқалыпты жинақталуы, функция мен оның туындысының байланысы.

Zh.A. Balkizov

A boundary value problem for a third-order equation with a nonlocal condition for the time

At the end of the rectangular area in the unique solvability of a nonlocal boundary value problem for a third-order equation with multiple characteristics with the terms of the frequency with respect to time. Uniqueness of the solution of the problem is proved by the method of a priori estimates. The method of separation of variables for the particular case of the problem solution is constructed in the form of a Fourier series in eigenfunctions of the problem. Studied uniform convergence of the solution and its derivatives of order, included in the equation.

Keywords: nonlocal boundary value problem, a priori estimate of the solution, Fourier method, the problem on their own values, their own values and tasks functions, uniform convergence of the series, the continuity of the function and its derivatives.

References

1 Juraev T.D. *Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types,* Tashkent: FAN, 1979, 238 p.

2 Nahushev A.M. *Equations of mathematical biology,* Moscow: Vysshaya shkola, 1995, 301 p.

3 Krasilnikov V.A., Kuznetsov V.P. *Acoustic of the Journal,* 1974, 20, 3, p. 473–477.

4 Cattabriga L. *Annali della seuola normole Superici di pisa e mat.,* 1959, 13, 2, p. 163.

5 Irgashev Yu. *Boundary value problems for differential equations and their applications: collection of scientific papers,* Tashkent: FAN, 1976, p. 17–31.

6 Juraev T.D., Abdinazarov S. *News of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR,* 1981, 1, p. 8–11.

7 Abdinazarov S. *Differential Equations,* 1981, 17, 1, p. 3–12.

8 Block H. *Arkiv for Mat. Astr. och Fysik.*, 1912, 7, p. 3–20.

9 Cattabriga L. *Rendiconti del seminario Matem. della univ. di Padava,* 1961, 31.

10 Juraev T.D., Apakov Yu.P. *Bulletin of Samara State Technical University. A series of physical and mathematical sciences,* 2007, 2(16), p. 18–26.

11 Apakov Yu.P. *Nonlocal boundary-value problems and related problems of mathematical biology, informatics and physics: materials III International conferences,* Nalchik: Elbrus, 2006, p. 37–39.

12 Irgashev Yu., Apakov Yu.P. *Uzbek Mathematical Journal,* 2006, 2, p. 44–51.

13 Apakov Yu.P. *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,* 2006, 3, p. 17–20.

14 Apakov Yu.P. *Ukrainian Mathematical Journal,* 2012, 64, 1, p. 3–13.

15 Balkizov Zh.A., Kodzokov A.Kh. *News of the Kabardino-Balkar Scientific Centre of Russian Academy of Sciences,* 2010, 4, p. 64–69.

16 Balkizov Zh.A. *Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences,* 2015, 17, 3, p. 13–21.

УДК 667.64:678.026

А.В. Букетов, А.В. Акимов, В.Д. Нигалатий, Н.В. Браило,
Аль-Джавахери Али Андан Мансур

Херсонская государственная морская академия, Украина
(E-mail: buketov@tstu.edu.ua)

Применение методов математической статистики для оптимизации состава защитных покрытий

В статье методом математической статистики определено оптимальное содержание в полимерном композитном материале модификатора, ультрадисперсного алмаза и мелкозернистого наполнителя карбоната лития для формирования адгезионного и функционального слоев защитного покрытия. В процессе эксперимента было изучено влияние трех факторов (содержание добавок) на физико-механические (модуль упругости при изгибе, ударная вязкость) и теплофизические (теплостойкость по Мартенсу, термический коэффициент линейного расширения) свойства композитов. Доказана адекватность полученных моделей и согласованность их с результатами оптимизации по критерию желательности.

Ключевые слова: математическая модель, полимерный композит, матрица, наполнитель, модификатор, защитное покрытие.

Введение

Экспериментальные исследования, связанные с оптимизацией состава защитных покрытий, являются, как правило, многофакторными (оптимизация свойств композитов и содержание наполнителей). Методы математической статистики позволяют адекватно оценить содержание нескольких компонентов различной дисперсности с учетом технологических факторов и комплекса физико-механических и теплофизических свойств [1–3]. В работе методом математической статистики определяли оптимальное содержание в полимерном композитном материале (ПКМ) модификатора (бензен-1,3-диамина), ультрадисперсного алмаза и мелкозернистого наполнителя карбоната лития для формирования адгезионного и функционального слоев защитного покрытия. Цель работы — методом математической статистики определить оптимальное содержание в полимерном покрытии дисперсных ингредиентов.

Материалы исследования

В виде основы для связующего при формировании ПКМ использовали эпоксидный диановый олигомер марки ЭД-20 (ГОСТ 10587-84), который характеризуется комплексом свойств: высокой адгезионной прочностью к металлической основе, возможностью отверждения при низких температурах, незначительной усадкой, отсутствием выделения летучих веществ при формировании в изделия, технологичностью при нанесении на детали сложного профиля.

В качестве модификатора использовали бензен-1,3-диамин (ДБ). Модификатор вводили в связующее при содержании от 0,10 до 2,00 масс.ч. на 100 масс. ч. эпоксидного олигомера ЭД-20. Формула бензен-1,3-диамина имеет вид $C_6H_8N_2$.

Для сшивания эпоксидных композиций использовали отвердитель полиэтиленполиамин (ПЭПА (ТУ 6-05-241-202-78), что позволяет отверждать материалы при комнатных температурах. Отвердитель ПЭПА является низкомолекулярным веществом, которое состоит из взаимосвязанных компонентов $[-CH_2-CH_2-NH-]_n$. Разные стадии сшивания моделировали и исследовали при введении отвердителя в композицию при содержании 10 масс. ч. на 100 масс.ч. эпоксидного олигомера ЭД-20 с целью определения оптимального для соответствующих характеристик соотношения компонентов в системе «связующее – модификатор».

В виде наполнителя использовали ультрадисперсный алмаз (УДА), полученный при помощи детонационного синтеза. Методом электронной микроскопии определили размер частиц алмаза, который составляет $d = 4...6$ нм. УДА состоит из углерода (80 ... 88 %), который в основном находится в алмазной фазе.

Дополнительно в частицах присутствуют кислород (10 % и больше), водород (0,5...1,5 %), азот (2...3 %) и огнестойкий остаток (0,5...8,0 %), который состоит из оксидов, карбидов и солей разных элементов, таких как *Fe, Ti, Cr, Cu, K, Ca, Si, Zn, Pb* и т. п.

В виде наполнителя также использовали частицы карбоната лития (КЛ) зернистостью 8 ... 10 мкм. Карбонат лития – белый порошок, малорастворяемый в воде, практически нерастворяемый в спирте. Используют его при производстве керамики, защитных покрытий камер сгорания и сопел ракетных двигателей, эмалей, кислотостойких покрытий и грунтовок для алюминия, листовой стали, чугуна, стекла с повышенной прочностью и стойкостью к атмосферной коррозии.

Обсуждение результатов исследования

На предварительном этапе экспериментально исследовали физико-механические и теплофизические свойства ПКМ, модифицированного бензен-1,3-диамином и наполненного каждым из указанных наполнителей различной зернистости и физической природы. Для прогнозирования свойств и оптимизации содержания каждого наполнителя в ПКМ проводили их статистическую обработку с помощью прикладного пакета STATGRAPHICS® Centurion XVI.

Для описания экспериментальных данных использовали трехфакторный центральный композиционный план ротатабельного типа.

В процессе эксперимента было изучено влияние на физико-механические (модуль упругости при изгибе, E, ГПа; ударня вязкость, W, кДж/$_2$) и теплофизические (теплостойкость по Мартенсу, T, K; термический коэффициент линейного расширения, $\alpha,^{-1}$) свойства ПКМ трех факторов: содержание модификатора бензен-1,3-диамина, ультрадисперсного алмаза и карбоната лития.

Исходные данные для статистической обработки результатов исследования свойств ПКМ приведены в таблице 1.

Таблица 1

Исходные данные для статистической обработки результатов исследований свойств ПКМ

Уровень варьирования	Переменные факторы		
	Содержание бензен-1,3-диамина, q_1, масс.ч.	Содержание ультрадисперсного алмаза, q_2, масс.ч.	Содержание карбоната лития, q_3, масс.ч.
Верхний	1,75	0,10	5,5
Нижний	0,25	0,05	0,5

В таблице 2 приведены исходные данные и результаты реализации математической модели по результатам исследования свойств ПКМ.

Таблица 2

Исходные данные и результаты реализации математической модели по результатам экспериментальных исследований свойств ПКМ

№ опыта	Факторы			Отклики			
	$q_1(A)$, масс.ч.	$q_2(B)$, масс.ч.	$q_3(C)$, масс.ч.	E, ГПа	W, кДж/м^2	T, K	α, K^{-1}
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	0,075	10,0	2,8	4,8	352	4,3
2	0,25	0,1	17,0	4,1	9,2	360	2,7
3	0,25	0,05	17,0	4,2	8,3	358	3,0
4	0,25	0,05	3,0	3,8	11,8	364	3,0
5	0,25	0,1	3,0	3,8	11,3	364	2,8
6	1,0	0,075	10,0	3,6	7,0	358	3,4
7	1,0	0,075	22,0	4,0	7,3	354	3,4
8	1,0	0,117	10,0	3,5	6,6	356	3,2
9	1,0	0,033	10,0	3,5	6,6	357	3,8

1	2	3	4	5	6	7	8
10	1,5	0,075	10,0	4,8	12,9	376	3,5
11	1,0	0,075	3,0	4,3	9,8	370	3,3
12	1,75	0,1	17,0	4,0	7,9	368	3,0
13	1,75	0,05	17,0	3,8	8,8	368	3,4
14	1,75	0,1	3,0	3,6	8,7	370	3,1
15	1,75	0,05	3,0	3,6	9,2	370	3,6
16	2,25	0,075	10,0	3,0	5,0	353	4,0

Примечание. A, B, C – обозначение концентраций q_1, q_2, q_3 (см. рис. 1).

Для определения значимости факторов использовали карты Парето (рис. 1, а-г) и графики нормального вероятностного распределения (рис. 2, а-г).

Анализ полученных с помощью прикладного пакета STATGRAPHICS® Centurion XVI результатов статистической обработки экспериментальных испытаний физико-механических (E, W) и теплофизических (T, α) свойств ПКМ, модифицированного бензен-1,3-диамином и наполненного частицами ультрадисперсного алмаза и карбоната лития, показывает следующее.

На картах Парето (рис. 1, а-г) показано, что статистически значимые эффекты имеют те факторы и их сочетания (соответствующие им колонки на картах Парето), пересекающие вертикальную линию – 95 %-ую доверительную вероятность. Также анализ полученных графиков диагностики ошибок прогноза значений (рис. 2, а-г) показывает, что факторы и сочетания, которые существенно отклоняются от прямой нормального распределения, являются значимыми в математической модели, в отличие от других факторов, расположенных непосредственно возле прямой распределения. Эти результаты являются подтверждением выводов о значимости факторов математической модели, сделанных с помощью карты Парето (рис. 1, а-г).

Исключив незначимые факторы и сочетания, получили поверхности отклика для физико-механических (T, α) и теплофизических (T, α) свойств ПКМ. Результаты статистической обработки экспериментальных данных представлены поверхностями отклика (рис. 3, а-г), а также контурными графиками (рис. 4, а-г).

Математические модели рассматриваемых физико-механических и теплофизических свойств композиционного материала приведены в таблице 3. Оптимальные значения показателей физико-механических и теплофизических свойств ПКМ при соответствующих содержаниях наполнителей (бензен-1,3-диамин – q_1, ультрадисперсный алмаз – q_2 и q_3 – карбонат лития), согласно данным статистической обработки, приведены в таблице 3.

Таблица 3

Математические модели физико-механических и теплофизических свойств ПКМ

Регрессионная модель	Коэффициент детерминации R^2, %	Уточненный коэффициент детерминации R^2_{adj}, %
$E = 5,04 - 0,0079 \cdot q_3 + 0,304 \cdot q_1^2 - 0,021 \cdot q_3^2$	92,3	86,2
$W = 14,45 - 0,757 \cdot q_1 - 0,959 \cdot q_3 + 0,108 \cdot q_3^2$	84,8	75,2
$T = 372,4 + 16,09 \cdot q_1 - 5,434 \cdot q_1^2 - 3124,8 \cdot q_2^2$	98,2	96,1
$\alpha = 1,943 + 0,409 \cdot q_1 + 0,0943 \cdot q_3 - 162,5 \cdot q_2^2$	99,8	98,7

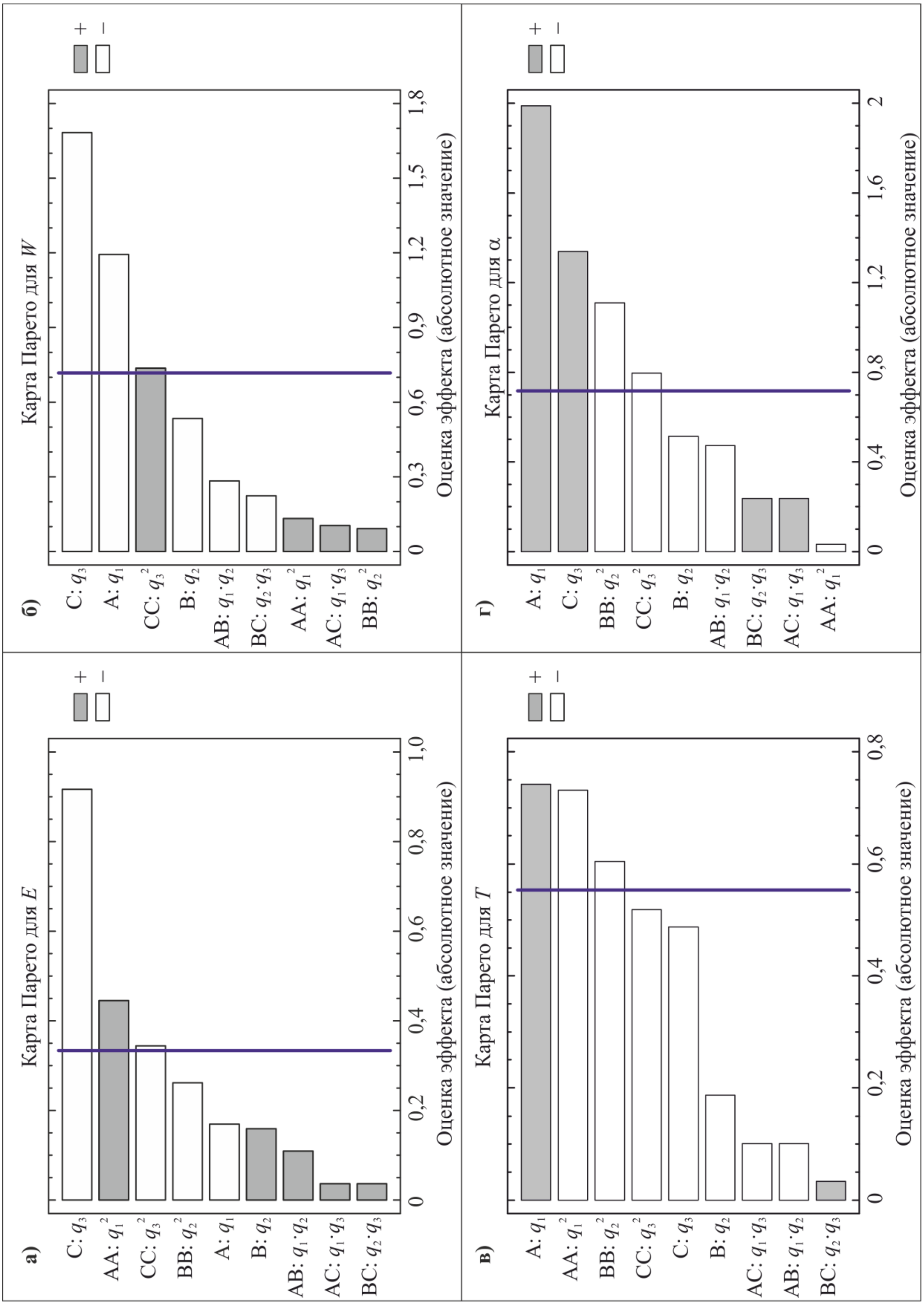

Рисунок 1. Карты Парето (а-г) для откликов E, W, T и α

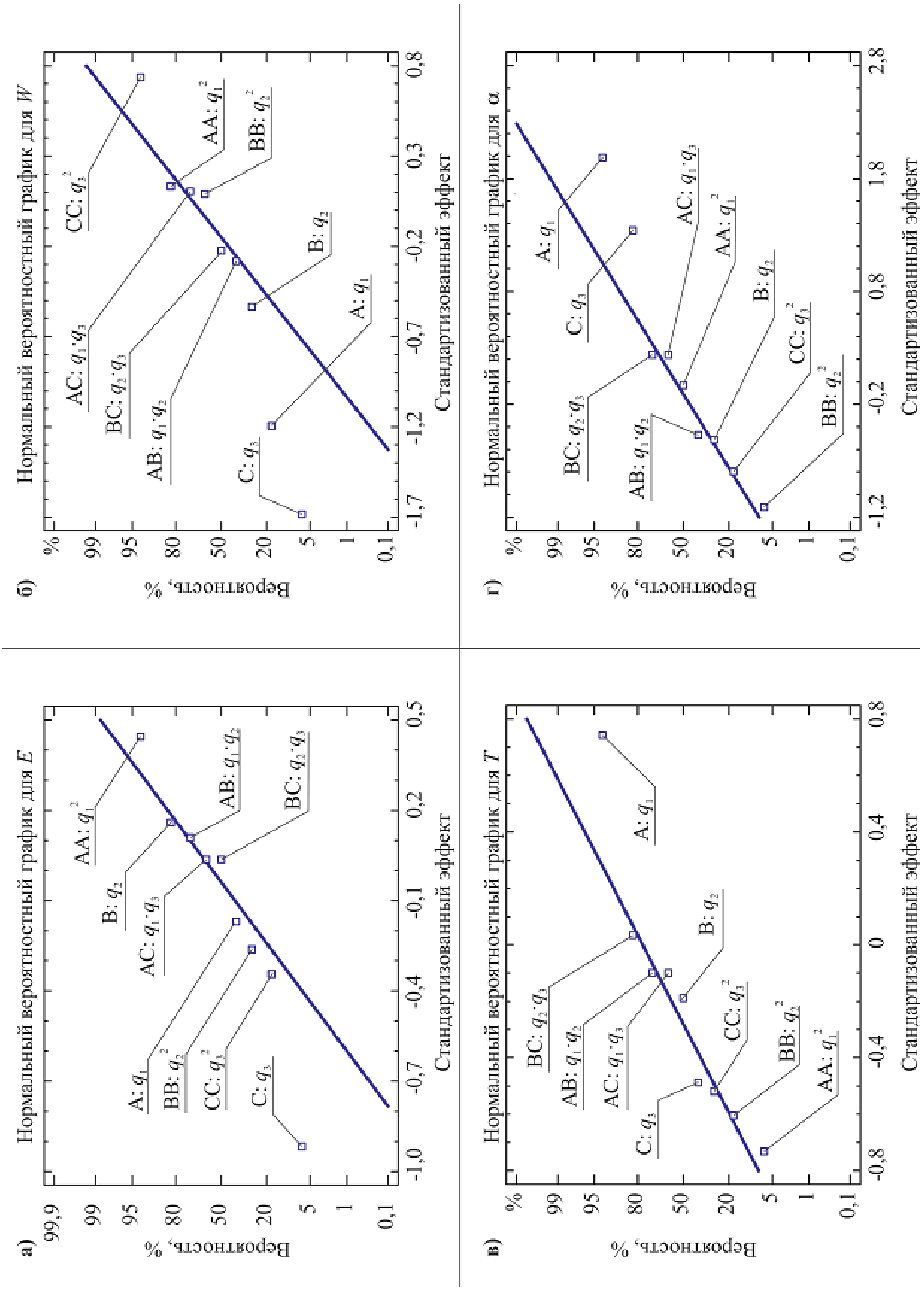

Рисунок 2. Графики диагностики отклонения ошибок прогнозирования значений выходного параметра от нормального распределения (а-г) для откликов E, W, T и α

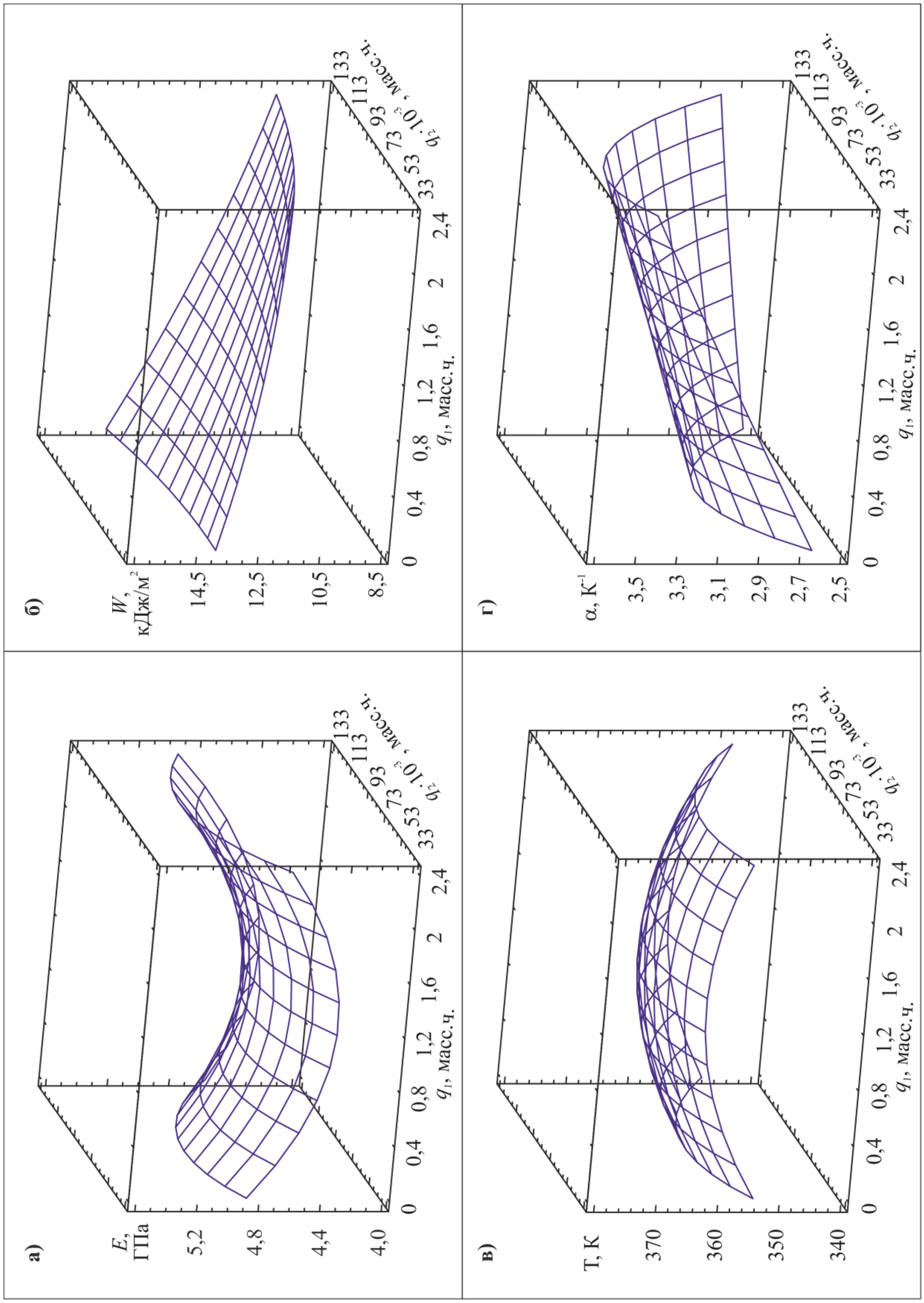

Рисунок 3. Поверхности отклика (а-г) для откликов E, W, T и α при значениях q_3, приведенных в таблице 4

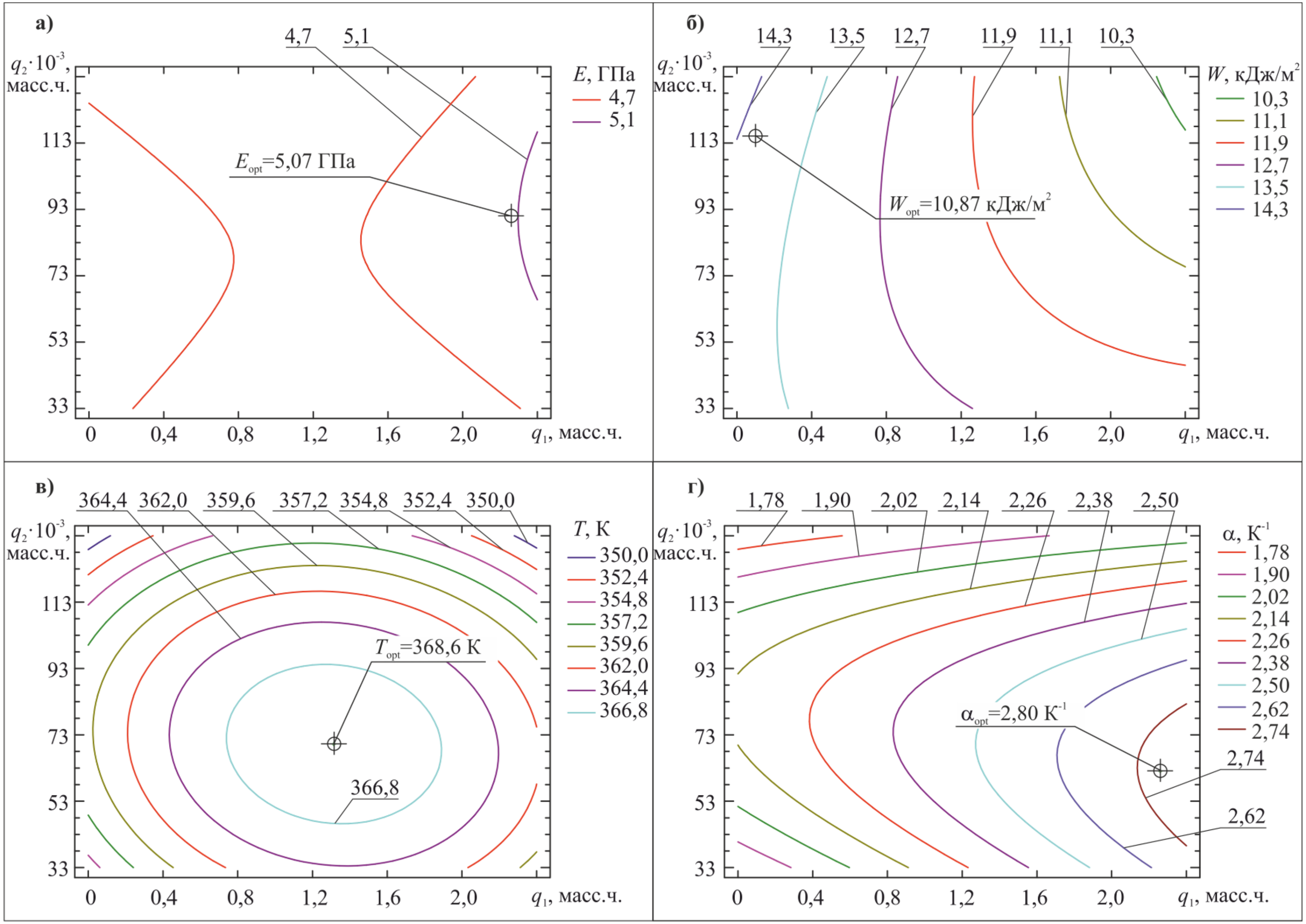

Рисунок 4. Контурные графики (а-г) для откликов E, W, T и α при значениях q_3, приведенных в таблице 4

Таблица 4

Оптимальные значения показателей физико-механических и теплофизических свойств ПКМ

Оптимальные значения		Содержание наполнителей		
		q_1, масс.ч.	q_2, масс.ч.	q_3 масс.ч.
E_{opt}, ГПа	5,07	2,26	0,100	0,60
W_{opt}, кДж/м^2	14,1	0,10	0,115	0,50
T_{opt}, К	368,6	1,31	0,070	1,95
α_{opt}, К$^-1$	2,80	2,26	0,062	5,08

Примечание. q_1 – содержание бензен-1,3-диамина в ПКМ; q_2 – содержание ультрадисперсного алмаза в ПКМ1; q_3 – содержание карбоната лития в ПКМ.

С помощью прикладного пакета STATGRAPHICS® Centurion XVI (модуль Multiple Response Optimization) провели оптимизацию полученных результатов статистической обработки для ПКМ.

После получения полиномиальных уравнений регрессии (табл. 3), связывающих зависимые и независимые переменные, математическую модель оптимизировали с одновременным учетом всех откликов – показателей физико-механических (E, W) и теплофизических (T, α) свойств ПКМ с целью определения оптимального содержания компотентов. Функцию желательности (предпочтительного использования) оценивали во всем диапазоне рассматриваемой модели. Результаты оптимизации приведены на рисунке 5 и в таблице 5. При оптимизации определяли комбинацию экспериментальных факторов по всем заданным откликам путем максимизации каждого из них.

Таблица 5

Результаты оптимизации для ПКМ

№ п/п	Одновременная комбинация откликов для определения желательности				Частные желательности для соответствующего параметра оптимизации				Обобщенная желательность
	Y_j				d_i				$D = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} d_i}$
	E	W	T	α	$d_1(E)$	$d_2(W)$	$d_3(T)$	$d_4(\alpha)$	
	ГПа	кДж/м^2	К	K^{-1}	–	–	–	–	–
1	3,7	8,6	355	3,5	0,363	0,096	0,281	0,486	0,342
2	4,6	11,3	360	2,8	0,369	0,368	0,366	0,339	0,470
3	4,8	12,2	361	2,7	0,379	0,368	0,368	0,250	0,438
4	5,2	14,7	364	2,7	0,512	0,652	0,368	0,250	0,545
5	5,2	14,8	362	2,6	0,512	0,692	0,368	0,066	0,397
6	3,6	10,2	356	3,1	0,356	0,360	0,320	0,368	0,457
7	3,0	9,6	352	3,4	0,066	0,325	0,066	0,396	0,200
8	4,0	9,5	357	3	0,368	0,314	0,343	0,368	0,452
9	5,2	12,1	375	3,2	0,512	0,368	0,592	0,368	0,586
10	3,8	9,7	355	3	0,366	0,334	0,281	0,368	0,437
11	5,4	12,7	376	3	0,692	0,369	0,692	0,368	0,658
12	5,0	12,6	371	3,2	0,416	0,369	0,393	0,368	0,503
13	4,9	11,5	368	3	0,393	0,368	0,369	0,368	0,488
14	4,6	8,6	364	3,2	0,369	0,096	0,368	0,368	0,343
15	4,4	10,2	367	3,4	0,368	0,360	0,368	0,396	0,486
16	4,2	8,5	353	3,6	0,368	0,066	0,148	0,692	0,291

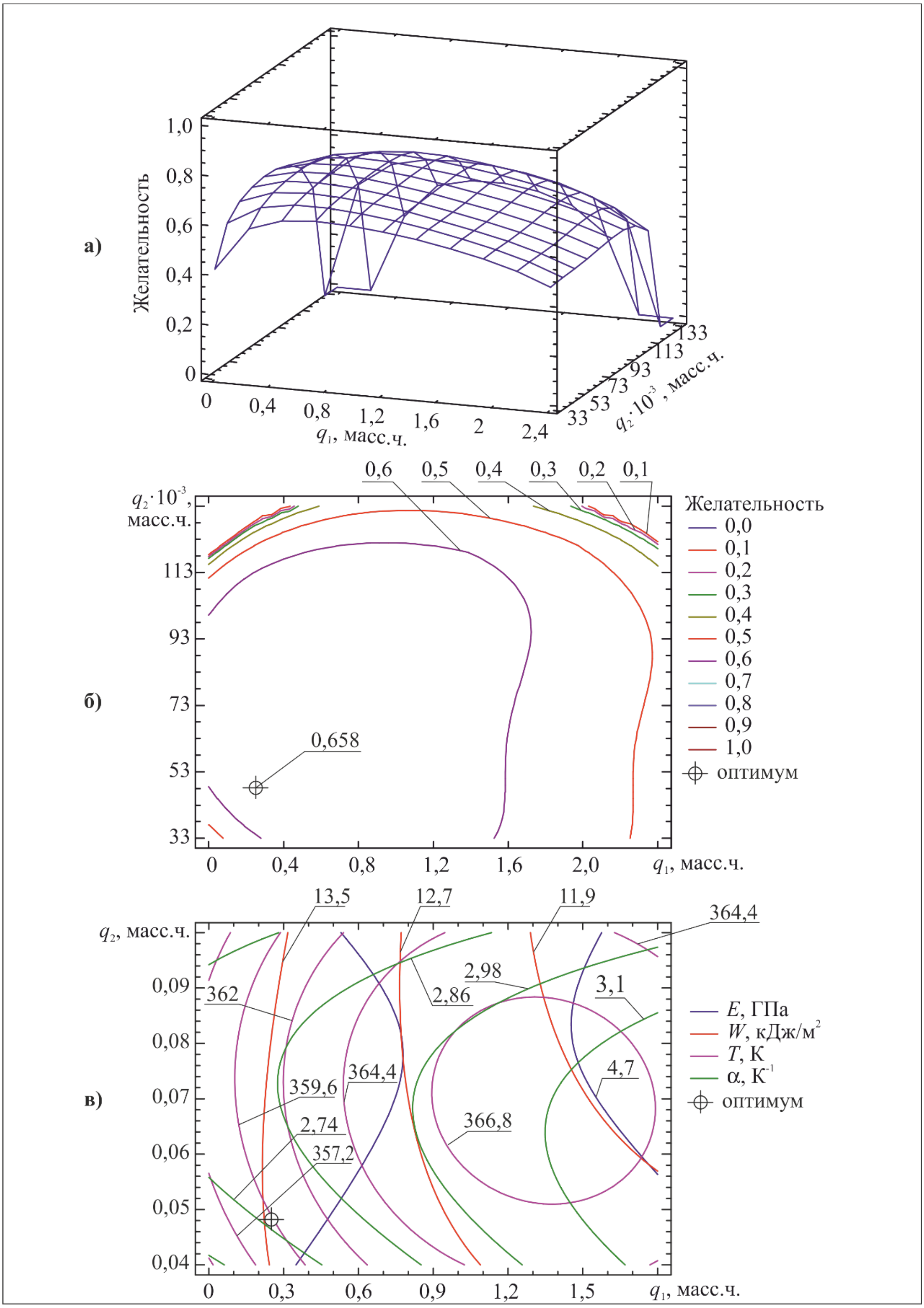

Рисунок 5. Поверхность желательности (а), контурный график желательности (б) и контурные графики (в) для откликов E, W, T и α при $q_3 = 0,5$ масс.ч.

Выводы

Таким образом, в результате проведенной оптимизации получили максимальное значение обобщенной желательности D_{opt} = 0,658 (по шкале желательности соответствует допустимому и хорошему уровню качества), при котором содержание наполнителей в композите следующее:

– q_1 = 0,25 масс.ч. – содержание бензен-1,3-диамина;

– q_2 = 0,05 масс.ч. – содержание ультрадисперсного алмаза;

– q_3 = 0,50 масс.ч. – содержание карбоната лития.

При указанном содержании наполнителей в ПКМ значения откликов составляют: E = 4,82 ГПа – модуль упругости при изгибе; W = 13,46 кДж/м^2 – ударная вязкость; T = 359,5 К – теплостойкость по Мартенсу; α = 2,75 К$^{-1}$ – термический коэффициент линейного расширения.

При сравнении полученных в результате оптимизации значений с экспериментальными установлено, что относительная погрешность следующая: для модуля упругости при изгибе – 4,93 %; для ударной вязкости – 4,54 %; для теплостойкости по Мартенсу – 2,47 %; для термического коэффициента линейного расширения – 1,79 %. Это говорит о достаточной адекватности полученных моделей и согласованности их с результатами оптимизации по критерию желательности.

Список литературы

1 *Buketov A.V.* Influence of the ultrasonic treatment on the mechanical and thermal properties of epoxy nanocomposites / A.V. Buketov, O.O. Sapronov, M.V. Brailo, V.L. Aleksenko // Materials Science. — 2014. — Vol. 49. — No. 5. — P. 696–701.

2 *Buketov A.V.* Investigation of the physico-mechanical and thermophysical properties of epoxy composites with a two-component bidisperse filler / A.V. Buketov, O.O. Sapronov, M.V. Brailo // Strength of Materials. – 2014. — Vol. 46. — No. 5. — P. 717–723.

3 *Buketov A.* Investigation of thermophysical properties of epoxy nanocomposites / A. Buketov, P. Maruschak, O. Sapronov, M. Brailo, O. Leshchenko, L. Bencheikh, A. Menou // Molecular Crystals and Liquid Crystals. – 2016. — Vol. 628:1. — P. 167–179.

А.В. Букетов, А.В. Акимов, В.Д. Нигалатий, Н.В. Браило,
Аль-Джавахери Али Андан Мансур

Қорғаныш жабын құрамын оңтайландыру мақсатында математикалық статистика әдістерін қолдану

Мақалада математикалық статистика әдісімен полимерлі композициялық материалды модификатордың, ультрадисперсиялы гауһардың және қорғаныс жабындысының функционалды қабаттары мен адгезиялық қалыптасудағы ұсақ литий карбонатты толтырғыштың тиімді құрамы анықталған. Эксперимент барысында үш фактордың (қоспалардың құрамы), олар композиттердің қасиеттеріне физикалық және механикалық (серпінділік модулі, соққы тұтқырлығы) және жылулық (Мартенс бойынша жылудың тұрақтылығы, сызықтық кеңейтудің жылу коэффициенті) әсері зерттелді. Алынған модельдердің сәйкестігі және пайым критерий бойынша оңтайландыру нәтижелерімен келісімділігі дәлелденген.

Кілт сөздер: математикалық модель, полимерлі композиция, матрица, толтырғыш, модификатор, қорғаныш жабын.

A.V. Buketov, A.V. Akimov, V.D.Nigalatii, N.V. Brailo,
Al-Dzhavakheri Ali Andan Mansur

Application of methods of mathematical statistics to optimize the composition of protective coatings

In the method of mathematical statistics determined the optimal content of the polymer composite material modifier, ultrafine diamond and fine lithium carbonate filler to form an adhesive and the functional layers of the protective coating. During the experiment, we studied the effect of three factors (additive contents) on the physical and mechanical (flexural modulus, impact strength) and thermal (heat resistance according to Martens, the thermal coefficient of linear expansion) properties of the composites. We prove the adequacy of the obtained models and their consistency with the results of the optimization by the criterion of desirability.

Keywords: mathematical model, the polymer composite matrix filler modifier, composition of protective.

References

1 Buketov A.V. *Materials Science,* 2014, 49, 5, p. 696–701.

2 Buketov A.V. *Strength of Materials,* 2014, 46, 5. p. 717–723.

3 Buketov A. *Molecular Crystals and Liquid Crystals,* 2016, 628:1, p. 167–179.

УДК 517.95

М.Т. Дженалиев[1], С.А. Искаков[2], М.И. Рамазанов[2]

[1]*Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан;*
[2]*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова, Казахстан*
(E-mail: ramamur@mail.ru)

Об однородной параболической задаче в бесконечной угловой области

Рассмотрена однородная задача Солонникова-Фазано для уравнения параболического типа в вырождающейся бесконечной угловой области со специальными граничными условиями на подвижной границе. Используя тепловые потенциалы, данная задача сведена к решению особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода, к которому неприменим метод последовательных приближений. Решение интегрального уравнения найдено методом интегральных преобразований. Показано, что в классе существенно ограниченных функций с заданным весом однородная задача Солонникова-Фазано, помимо тривиального решения, имеет ненулевое решение с точностью до постоянного множителя.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение параболического типа, тепловые потенциалы, интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода, преобразование Лапласа.

Введение

Рассматривается однородная граничная задача

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,\ \{x,t\} \in G = \{x,t:\ 0 < x < t,\ t > 0\}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = 0,\quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=t} + \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} = 0, \tag{2}$$

где $\tilde{u}(t) = u(t,t)$.

Отметим, что задача (1), (2) является однородным случаем задачи, изученной в [1], причем для простоты коэффициенты из указанной работы приняты равными $k = b = 1$. Эти изменения не противоречат постановке задачи из [1]. Как отмечено в [1], случай неоднородной граничной задачи «... оказывается полезным при изучении некоторых задач со свободными границами». Например, для однофазной задачи «... Стефана при следующих предположениях: жидкая фаза с положительной температурой $u(x,t)$ занимает отрезок $0 < x < s(t)$, при $x = 0$ задается положительный поток тепла, а свободная граница $x = s(t)$ начинается у твердой стенки $x = 0$, т.е. выполняется условие $s(0) = 0$». В [1] установлена теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой там граничной задачи в весовых гельдеровских пространствах.

В настоящей работе, наряду с тривиальным решением, мы устанавливаем в классе существенно ограниченных функций с заданным весом существование нетривиального решения с точностью до постоянного множителя и постоянного слагаемого. Введем этот класс следующим образом:

$$(x + t^{1/2})^{-1}\, u(x,t) \in L_\infty(G),\ \text{в.Г.}\ u(x,t) \in L_\infty(G;\, (x + t^{1/2})^{-1}). \tag{3}$$

1 Преобразование задачи (1), (2) и сведение ее к интегральному уравнению

Преобразуем задачу (1), (2). Для этого введем функцию $v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$. Далее, формально дифференцируя по переменной x уравнение (1), получаем

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < t,\ t > 0; \tag{4}$$

$$v(x,t)|_{x=0} = 0, \ \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + \frac{2}{a^2} v(x,t) \right) |_{x=t} = 0. \tag{5}$$

Решение задачи (4), (5) ищем в виде суммы потенциалов двойного и простого слоя [2; 476–479]:

$$v(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \nu(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \varphi(\tau) d\tau, \tag{6}$$

где функции $\nu(t)$ и $\varphi(t)$ являются неизвестными и подлежат определению.

Удовлетворим решение (6) первому из условий (5). Имеем

$$v(x,t)_{|x=0} = \frac{\nu(t)}{2a^2} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{\tau^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \varphi(\tau) d\tau = 0. \tag{7}$$

Отсюда выразим функцию $\nu(t)$ через $\varphi(t)$

$$\nu(t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{\tau^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \varphi(\tau) d\tau. \tag{8}$$

Используя представление (6) и равенство (8), получим следующее выражение для решения задачи (4), (5):

$$v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[-\exp\left\{ -\frac{(x+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} + \exp\left\{ -\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \right] \varphi(\tau) d\tau. \tag{9}$$

Для того чтобы удовлетворить второму граничному условию из (5), найдем из (9) ее производную по переменной x:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \left[\frac{x+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{(x+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{x-\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \right] \varphi(\tau) d\tau. \tag{10}$$

Согласно второму граничному условию из (5) имеем

$$\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + \frac{2}{a^2} v(x,t) \right) |_{x=t} = \frac{\varphi(t)}{2a^2} + \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \varphi(\tau) d\tau -$$

$$- \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{t-\tau}{4a^2} \right\} \varphi(\tau) d\tau -$$

$$- \frac{1}{a^3\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \varphi(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{a^3\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{t-\tau}{4a^2} \right\} \varphi(\tau) d\tau = 0. \tag{11}$$

Используя равенства

$$t+\tau = 2t - (t-\tau), \ (t+\tau)^2 = (t-\tau)^2 + 4t\tau,$$

из (11) получим интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi(t)$:

$$\varphi(t)+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{2t}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\varphi(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{5}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\varphi(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{3}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\varphi(\tau)d\tau=0,\ t>0. \tag{12}$$

Решение интегрального уравнения (12) мы будем искать в классе $\sqrt{t}\ \varphi(t)\in L_\infty(G)$, т.е. $\varphi(t)\in L_\infty(G;\sqrt{t})$.

Отметим, что подобные интегральные уравнения Вольтерра второго рода нами были исследованы в работах [3–5].

2 Решение интегрального уравнения (12)

Если ввести новую неизвестную функцию

$$\varphi_1(t)=\varphi(t)\exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\},$$

то из (12) следует, что

$$\varphi_1(t)+\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{t}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\varphi_1(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{5}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}\varphi_1(\tau)d\tau+\frac{3}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\varphi_1(\tau)d\tau=0. \tag{13}$$

В интегральном уравнении (13) произведем замену независимой переменной и введем новую неизвестную функцию:

$$t=\frac{1}{t_1},\ \tau=\frac{1}{\tau_1},\ \varphi_2(t_1)=\frac{1}{\sqrt{t_1}}\varphi_1(1/t_1),$$

в результате этого из (13) получим

$$\varphi_2(t_1)+\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_{t_1}^\infty \frac{1}{(\tau_1-t_1)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{1}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\}\varphi_2(\tau_1)d\tau_1-$$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_{t_1}^\infty \frac{1}{(\tau_1-t_1)^{1/2}}\left[5\exp\left\{-\frac{1}{a^2(\tau_1-t_1)}\right\}-3\right]\frac{1}{\tau_1}\varphi_2(\tau_1)d\tau_1=0. \tag{14}$$

Отметим, что из решения интегрального уравнения (14), возвращаясь к первоначальному независимому переменному и исходной неизвестной функции, мы можем получить решение исходного интегрального уравнения (12).

Для решения уравнения (14) будем использовать преобразование Лапласа. Имеем

$$\left[1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right]\hat{\varphi}_2(p)-\frac{1}{2a\sqrt{-p}}\left[5\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}-3\right]\int\limits_p^\infty \hat{\varphi}_2(q)dq=0. \tag{15}$$

Здесь были использованы следующие формулы преобразования Лапласа [6; 472] и [7; 158]:

$$\mathcal{L}\left[\int_{t_1}^{\infty} k(t_1-\tau_1)\varphi_2(\tau_1)d\tau_1\right] = \hat{k}(-p)\cdot\hat{\varphi}_2(p);$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t_1}\cdot\varphi_2(t_1)\right] = \int\limits_p^{\infty}\hat{\varphi}_2(q)dq.$$

Перейдем от интегрального уравнения (15) к дифференциальному уравнению, вводя новую неизвестную функцию-образ:

$$\hat{\psi}(p) = \int\limits_p^{\infty}\hat{\varphi}_2(q)dq, \qquad \text{т.е.} \qquad \hat{\varphi}_2(p) = -\frac{d\hat{\psi}(p)}{dp}. \tag{16}$$

$$\left[1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right]\frac{d\hat{\psi}(p)}{dp} + \frac{1}{2a\sqrt{-p}}\left[5\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}-3\right]\hat{\psi}(p) = 0$$

или

$$\frac{d\hat{\psi}(p)}{\hat{\psi}(p)} = -\frac{5\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}-3}{2a\sqrt{-p}\left[1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right]}dp. \tag{17}$$

Интегрируя уравнение (17), получим

$$\ln\left(\frac{\hat{\psi}(p)}{C}\right) = -\int\frac{5\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}-3}{2a\sqrt{-p}\left[1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right]}dp =$$

$$= \left\|-\frac{2}{a}\sqrt{-p} = z,\ dz = \frac{dp}{a\sqrt{-p}}\right\| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{(5\exp\{z\}+5)-8}{1+\exp\{z\}}dz = -\frac{5}{2}z + 4\int\frac{\exp\{-z\}dz}{1+\exp\{-z\}} =$$

$$= -\frac{5}{2}z - 4\int\frac{d(1+\exp\{-z\})}{1+\exp\{-z\}} = -\frac{5}{2}z - 4\ln\left(1+\exp\{-z\}\right) =$$

$$= \left\|z = -\frac{2}{a}\sqrt{-p},\right\| = \frac{5}{a}\sqrt{-p} + \ln\left[\left(1+\exp\left\{\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^{-4}\right]. \tag{18}$$

Из (18) будем иметь

$$\hat{\psi}(p) = C\cdot\frac{\exp\left\{\frac{5}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1+\exp\left\{\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^4} = C\cdot\frac{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^4}. \tag{19}$$

Используя формулу (16), из равенства (19) находим решение интегрального уравнения (15):

$$\hat{\varphi}_2(p) = -\frac{3}{2a\sqrt{-p}}\cdot\frac{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^4} +$$

$$+4\frac{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}}{\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^5}\cdot\frac{\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}}{a\sqrt{-p}} =$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}}{a\sqrt{-p}\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^5}\left[-\frac{3}{2}\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)+4\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right] =$$

$$= \left[-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right]\cdot\frac{\exp\left\{-\frac{3}{a}\sqrt{-p}\right\}}{a\sqrt{-p}\left(1+\exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right)^5}. \tag{20}$$

Далее для нахождения оригинала для функции $\hat{\varphi}_2(p)$ будем пользоваться следующим разложением:

$$\frac{1}{(1+z)^5} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A_k z^k, \;\; z = \exp\left\{-\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}, \;\; |z|<1, \tag{21}$$

где

$$A_k = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4!}.$$

Отметим, что если $z=1$, то верно равенство

$$\left.\frac{1}{(1+z)^5}\right|_{z=1} = \frac{1}{32}.$$

Используя разложение (21) из равенства (20), получим представление функции $\hat{\varphi}_2(p)$ в виде ряда

$$\hat{\varphi}_2(p) = \frac{1}{2a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A_k \left[\frac{5}{\sqrt{-p}}\exp\left\{-\left(k+\frac{5}{2}\right)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{\sqrt{-p}}\exp\left\{-\left(k+\frac{3}{2}\right)\frac{2}{a}\sqrt{-p}\right\}\right], \;\; \text{для} \;\; \forall\, p \in \{p:\ \mathrm{Re}\{\sqrt{-p}\} > 0. \tag{22}$$

Так как имеет место формула обращения для образа Лапласа [6; 497]

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp\{-\alpha\sqrt{q}\}}{\sqrt{q}}\right] = \frac{\exp\{-\alpha^2/(4t_1)\}}{\sqrt{\pi t_1}}, \;\; 0<t_1<\infty,$$

то из (22) имеем функцию-оригинал $\varphi_2(t_1)$ для всех $0<t_1<\infty$

$$\varphi_2(t_1) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t_1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A_k \left[5\exp\left\{-\left(k+\frac{5}{2}\right)^2\frac{1}{a^2 t_1}\right\} - 3\exp\left\{-\left(k+\frac{3}{2}\right)^2\frac{1}{a^2 t_1}\right\}\right].$$

Далее, возвращаясь к исходной независимой переменной $0<t<\infty$, получим

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\varphi_{1,k}^{(1)}(t) - \varphi_{1,k}^{(2)}(t)\right], \tag{23}$$

где

$$\varphi_{1,k}^{(1)}(t) = \frac{5A_k}{2a\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\left(k+\frac{5}{2}\right)^2\frac{t}{a^2}\right\}, \; \varphi_{1,k}^{(2)}(t) = \frac{3A_k}{2a\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\left(k+\frac{3}{2}\right)^2\frac{t}{a^2}\right\}. \tag{24}$$

Таким образом, искомое решение исходного интегрального уравнения (12) определяется по формуле

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\varphi_k^{(1)}(t) - \varphi_k^{(2)}(t)\right], \;\; 0<t<\infty, \tag{25}$$

где

$$\varphi_k^{(1)}(t) = \varphi_{1,k}^{(1)}(t)\exp\left\{-\frac{t}{4a^2}\right\}, \; \varphi_k^{(2)}(t) = \varphi_{1,k}^{(2)}(t)\exp\left\{-\frac{t}{4a^2}\right\}. \tag{26}$$

Решение (25) действительно принадлежит классу $L_\infty(G;\sqrt{t})$.

3 Решение граничной задачи (1), (2)

Решение $v(x,t)$ граничной задачи (4), (5) определяется согласно формулам (9) и (25), (26), а решение исходной граничной задачи (1), (2) будет иметь вид

$$u(x,t) = C_2\int_0^x v(\xi,t)d\xi + C_1 = C_2\tilde{u}(x,t) + C_1, \tag{27}$$

так как ее решение находится с точностью до постоянного множителя C_2 и постоянного слагаемого C_1, где $v(x,t)$ определяется согласно формуле (9).

Для установления ограниченности полученного решения $u(x,t)$ (27) задачи (1), (2) нам необходимо изучить свойства решения $v(x,t)$ (9) задачи (4), (5). Так как $\varphi(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+, \sqrt{t})$, то нам необходимо оценить и показать ограниченность интеграла $I(x,t)$ для всех $\{x,t\} \in G$:

$$I(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t I_1(x,t,\tau) \frac{\exp\left\{-\frac{\tau}{4a^2}\right\}}{\sqrt{\tau}} d\tau, \tag{28}$$

где

$$I_1(x,t,\tau) = \int\limits_0^x \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \left[-\exp\left\{ -\frac{(x_1+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} + \exp\left\{ -\frac{(x_1-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \right] dx_1. \tag{29}$$

Вычислим интеграл (28). Для этого после замены

$$\left\| z = \frac{x_1 \pm \tau}{2a\sqrt{t-\tau}},\ dz = \frac{dx_1}{2a\sqrt{t-\tau}} \right\|$$

из (29) имеем

$$I_1(x,t,\tau) = a\sqrt{\pi} \left[-\mathrm{erf}\left(\frac{x+\tau}{2a\sqrt{t-\tau}} \right) + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\tau}{2a\sqrt{t-\tau}} \right) \right]. \tag{30}$$

И далее, подставляя значение интеграла $I_1(x,t,\tau)$ (30) в (28), получим

$$I(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t \left[-\mathrm{erf}\left(\frac{x+\tau}{2a\sqrt{t-\tau}} \right) + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\tau}{2a\sqrt{t-\tau}} \right) \right] \frac{\exp\left\{-\frac{\tau}{4a^2}\right\}}{\sqrt{\tau}} d\tau. \tag{31}$$

Отсюда непосредственно вытекает оценка для интеграла (31):

$$I(x,t) \le 4a \int\limits_0^{\sqrt{t}/(2a)} \exp\{-\xi^2\} d\xi = 2a\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{2a} \right). \tag{32}$$

Таким образом, мы установили равномерную ограниченность интеграла (28) по переменным $\{x,t\} \in G$, т.е. показали, что решение $\tilde{u}(x,t)$ (26) граничной задачи (1), (2) принадлежит классу $L_\infty(G)$. Заметим, что решение $\tilde{u}(x,t)$ определяется с точностью до постоянного множителя C_2, т.е. формула

$$u(x,t) = C_2\tilde{u}(x,t) + C_1,\ u(x,t) \in L_\infty(G)$$

определяет общее решение граничной задачи (1), (2). Оценка (32) также позволяет получить ее порядок малости при любых $\{x,t\} \in G$, т.е. имеет место включение

$$\tilde{u}(x,t) \in L_\infty(G;\, (x + t^{1/2})^{-1}).$$

Это следует из асимптотики для функции $\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right)$ при малых значениях переменной t (имеющей место и для малых значений x), а для больших значений переменных $\{x,t\} \in G$ зависит от свойства ограниченности решения $u(x,t)$ на G и ограниченности выражения $(x+\sqrt{t})^{-1}\,\tilde{u}(x,t)$.

4 Основные результаты

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. Граничная задача (1), (2) имеет наряду с тривиальным решением и нетривиальное решение $u(x,t) = C_2\,\tilde{u}(x,t) + C_1$, где $\tilde{u}(x,t) \in L_\infty(G,\, (x+\sqrt{t})^{-1})$, и $C_1,\, C_2 = const$.

Теорема 2. В классе функций $L_\infty\left(G;\, [x^{1+\alpha} + t^{(1+\alpha)/2}]^{-1}\right)$ граничная задача (1), (2) имеет только тривиальное решение $u(x,t) \equiv 0$.

Список литературы

1 *Солонников В.А., Фазано А.* Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2000. — Т. 269. — С. 322–338.

2 *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 735 с.

3 *Jenaliyev M.T., Amangaliyeva M.M., Kostmakova M.T., Ramazanov M.I.* On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel // Advances in Difference Equations. — 2015 (March). — Vol. 71. — P. 14.

4 *Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kostmakova M.T., Ramazanov M.I.* About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain // Boundary Value Problems. — 2014. — Vol. 213. — P. 21.

5 *Амангалиева М.М., Дженалиев М.Т., Космакова М.Т., Рамазанов М.И.* Об одной однородной задаче для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области // Сиб. матем. журн. — 2015. — Т. 56, № 6. — С. 1234–1248.

М.Т. Дженалиев, С.А. Искаков, М.И. Рамазанов

Бұрыштық облыстағы бір параболалық есеп жайында

Мақалада қозғалмалы шекарада арнайы шекаралық шарттары бар шексіз бұрыштық облыста туындайтын параболалық теңдеулер үшін біртекті Солонников-Фазано есебі қарастырылды. Жылу потенциалдарын қолдана отырып, берілген есеп екінші текті Вольтер типті ерекше интегралдық теңдеудің шешімін табуға келтірілді. Мұндай есептерге біртіндеп жуықтау әдісін қолдану мүмкін емес. Берілген салмағы бар елеулі шектелген функциялар класында біртекті Солонников-Фазано есебінің нөлдік шешімінен басқа, тұрақты көбейткішке дейінгі дәлдікпен нөлдік емес шешімінің бар болатындығы дәлелденген.

Кілт сөздер: шекаралық есеп, параболалық типті теңдеу, жылу потенциалы, екінші текті Вольтер типті интегралдық теңдеу, Лаплас түрлендіруі.

M.T. Jenaliyev, S.A. Iskakov, M.I. Ramazanov

On a parabolic problem in an infinite corner domain

The paper deals with homogeneous problem of Solonnikov-Fasano for parabolic equations in the degenerating infinite angular domain with special boundary conditions on a moving boundary. Using heat potentials, this problem is reduced to solving a special Volterra integral equation of the second kind, to which the method of successive approximations is not applicable. The solution of the integral equation was found by the method of integral transformations. It is shown that in the class of essentially bounded functions with a given weight, the homogeneous problem of Solonnikov-Fasano, in addition to the trivial solution, has a nontrivial solution, up to a constant factor.

Keywords: boundary value problem, parabolic equation, heat potentials, integral equation of Volterra type of the second kind, Laplace transformation.

References

1 Solonnikov V.A., Fasano A. *Notes of scientific seminars of POMI,* 2000, 269, p. 322–338.

2 Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Equations of mathematical physics,* Moscow: Nauka, 1972, 735 p.

3 Jenaliyev M.T., Amangaliyeva M.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. *Advances in Difference Equations,* 2015, 71, p. 14.

4 Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. *Boundary Value Problems,* 2014, 213, p. 21.

5 Amangaliyeva M.M., Jenaliyev M.T., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I. *Siberian mathematical Journal,* 2015, 56, 6, p. 1234–1248.

UDC 510.67

A.R. Yeshkeyev

Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan
(E-mail: modth1705@mail.ru)

The properties of central types with respect to enrichment by Jonsson set

The main results of the article are for a new class of theories, namely existential prime strongly convex Jonsson theories. This class is quite broad in terms of algebra, for example it includes the class of all Abelian groups and groups. This article examines the issues relating to the following subjects. The language on considered a signature adds a new predicate symbol which reflects the presence of the Jonsson set. The concept of Jonsson sets in Jonsson theory is a generalization of the concept of the dimension of the linear space. T.G. Mustafin in due time, introduced and proved the basic properties of the syntactic and semantic similarity. In this paper, in the extended language we have similare to the results for the considered theories. In this direction, the main results of the work are the following results: The coincidence of P–stability for the prototype and its central-type center. The equivalence of syntactic similarity of existentially $EPSCJ$ compleate theories and syntactical similarity of their centers was consedered. From this it can be seen a lot of useful facts. In particular semantic similarity. As well as a list of semantic properties, which are stored at the semantic similarity. For example, the semantic properties that invariant properties of the first order applies Morley rank of the central type.

Keywords: Jonsson theory, Jonsson set, fragment of Jonsson sets, Existentially Prime Strongy Convex Jonsson theories.

This work is associated with the concepts of convex theory in the class of existentially prime Jonsson theories. We denote such theories as $ExistentiallyPrimeStrongyConvexJonsson(EPSCJ)$.

In [1] was defined the class of $\Delta - PJ$ theories. Such theories are generalized the concept of Jonson's theories. In this paper we investigate the corresponding concept in which the notion of $P - \lambda$-stable (in sense [2]) and the notion of syntactical similar in sense [3] are replaced in some equivalent style in the class of $\exists$-complete perfect $EPSCJ$ theories. Moreover we are considered some enrichment of signatures of such theories and we defined and considered the concept of central types of ones. This generalization led us to different questions of note of stability in enrich signature, for example like in [2]. And finally we can to conclude that it is appropriate to consider and to investigate the $EPSCJ$ – analogues of some properties and notions from classical model theory in frames of $EPSCJ$ – theories.

Let L be a countable first-order language.

Definition 1. The inductive theory T called existential prime, if:

1. It has a algebraicslly prime model and the class of all algebraically prime models it is denoted by AP_T.

2. The class (E_T) of model theory T has nonempty intersection with an AP class, ie, $T_{AP} \cap E_T \neq \emptyset$.

It is well known [1] that if Jonsson Theories T is perfect, then the class of its existentially closed models E_T is elementary and coincides with the $ModT^*$, where T^* its center. Otherwise, i.e. if the theory T is not perfect, instead of $ModT$ we are working with the class E_T, ie, it is assumed that all the allegations relate only existentially closed models. Also, we assume in the case of an imperfect, that besides the existential closure of all these models is algebraically prime.

We say that all $\forall\exists$ – corollary of the arbitrary theory form a Jonsson fragment of this theory, if the deductive closure of these $\forall\exists$ – corollary is Jonsson Theories. Obtained in this case Jonsson theories will be called Jonsson fragment (further fragment). Accordingly, it is determined by the fragment of Jonsson set. In both cases, we can carry out research Jonsson fragments on the connection with an initial theory that the new formulation of the problem research is Jonsson's theory.

Let X Jonsson set in the theory T and M is existentially closed submodel of semantic model C, considered Jonsson theory T where $dcl(X) = M$. Then let $Th_{\forall\exists}(M) = Fr(X)$, $Fr(X)$ is Jonsson fragment of Johnson sets X.

Definition 2. The theory T is called convex if for any model $\mathfrak{A}$ and any family $\{\mathfrak{B}_i | i \in I\}$ of its substructures, which are models of the theory T, the intersection $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{B}_i$ is a model theory T. It is assumed that this intersection is not empty. If this intersection is never empty, then the theory is called the strongly convex.

We give the necessary definitions related to Jonsson theories in the enriched signature.

Let T is an arbitrary Jonsson theory in the language of the first order signature σ. Let C is a semantic model of theory T. Let $A \subseteq C$ is a Jonsson set of theory T. Let $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a | a \in A\} \cup \Gamma$, $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$.

Let $T_A^C = T \cup Th_{\forall\exists}(C, a)_{a\in A} \cup \{P(c_a) | a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{''P \subseteq''\}$ where $\{''P \subseteq''\}$ is an infinite set of sentences expressing the fact that the interpretation of symbol P is existentially closed submodel in the language of the signatures $\sigma_\Gamma(A)$ and this model is a definable closure of the set A. It is understood that the consideration the set of sentences is Jonsson theory and this theory generally is not complete.

Let T^* is the center of the Jonsson theory T_A^C and $T^* = Th(C')$ where C' is a semantic model of the theory T_A^C. By restriction theory T_A^C to signatures $\sigma_\Gamma(A) \backslash \{c\}$ the theory T_A^C becomes a complete type. This type we call a central type of the theory T relatively the Jonsson set A and denoted by P_A^C.

Let T is an arbitrary $EPSCJ$ theory in first order signature σ. Let C is a semantic model of T. $A \subseteq C$. The requirement of existential closeness for a submodel is essential in that sense, that it should not be finite . The theory T_A^C is not necessary complete. Through S_Γ^A denote a set of all $\exists$ – completions of theory T_A^C. Let λ is an arbitrary cardinal.

The $EPSCJ$ theory is $J - P - \lambda$-stable, if $|\ S_\Gamma^A\ | \leq \lambda$ for any subset A of C, such that $|A| \leq \lambda$.

Lemma. If $Fr(X) = Fr(A)$ is perfect $EPSCJ$ theory, then T_A^C is perfect $EPSCJ$ theory.

Proof. First of all we need to note that adding the symbols of constants and one–placed predicate P does not spoiled of $EPSCJ$-ness of T and T^*. The proof of this ones standart cheking of definition of $EPSCJ$-ness. For proof of perfection of T_A^C it is enough to show, that T_A^C has the semantic model which will be saturated in its power.It is follows by definition T_A^C. As the given model we take semantic model C of the theory T, and in depending on a subset A and interpretation one-placed predicate P in C is the model $D = (C, M, a)_{a\in A}$,where M is existentially closed submodel of C. It is easy to see that D will be saturated in its power, since C is existentially closed model itself, as semantic model of T.

Theorem 1. Let T be a $\exists$-complete perfect $EPSCJ$ theory $Fr(A)$. Then the following conditions equivalent:

1) theory T_A^C is $P - \lambda$-stable (in sense [2]);

2) theory T^* is $J - P - \lambda$-stable.

Proof. We can now show that from 1) to 2) the proof is trivial, since if it is no more all completions than λ, then in particularly $\exists$-completions no more than λ. Let's prove from 2) in 1). Let the theory $T^* - J - P$-stable. It is equivalent to that, that T_A^C in the signature $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a | a \in A\} \cup \Gamma$ is equivalent correspondingly to the positive Kaiser's hull T^0 of the theory T. By perfection of theory T we have that $T^0 = T^*$ and hence T_A^C will be perfect $EPSCJ$ theory. Let the theory T^0 has no more, than λ $\exists$-completions. The centre of the theory T in the new signature will be equaled $Th(C, a)_{a\in A} \cup \{P(c_a) | a \in A\} \cup \{''P \preceq''\} \cup \{P(c)\}$.Clear that $T^* = T^C$. We should be shown, that T^* has no more then λ completions. That means that T^* will be $P - \lambda$ - stable. Let's understand due to what T^* it is not complete in the new signature. Addition of constants gives only inessential expansions that will not change quantity types of existentially closed submodels C. The essential role is played the realizations of a predicate P. In this case realization of a predicate P will be some elementary submodel M of the model C. As C is the semantic model of T, this one is existentially closed and by sense of a predicate P in $C(M \prec C)$ follows, that $M \in E_T$. Let's consider any completion T' theories T^* in the new signature. By definition T^* there exist such model M from E_T , such that $T' = Th(C, M, a)_{a\in A}$, where M – interpretation of a predicate P in semantic model C. $T' = Th(C, M, a)_{a\in A}$ is $EPSCJ$ theory. In this case T' is it positive model complete theory. And we have by positive model completeness T' that any formula in is equivalent to some positive existential formula in T' . Then by $\exists$-completeness of the theory T such completions by above mentioned are no more than λ. So, the statement is proved.

Let T is arbitrary $EPSCJ$ theory, then $E(T) = \bigcup_{n<\omega} E_n(T)$, where $E_n(T)$ is the lattice of positive existential formulas with exactly n free variables.

Let T_1 and T_2 are $EPSCJ$ theories.

We shall say that , T_1 and are $EPSCJ$ syntactically similar, if and only if there exist a bijection $f : E(T_1) \to$ $\to E(T_2)$ such that:

1) the restriction of f up $E_n(T_1)$ is isomorphism of the $E_n(T_1)$ and $E_n(T_2)$, $n < \omega$;

2) $f(\exists v_{n+1}\varphi) = \exists v_{n+1} f(\varphi), \varphi \in E_n(T)$, $n < \omega$;

3) $f(v_1 = v_2) = (v_1 = v_2)$.

Theorem 2. Let T_1 and T_2 are $\exists$ – complete perfect $EPSCJ$ theories. Then the following conditions equivalent:

1) T_1^* and T_2^* are J – syntactically similar in sense [4].

2) T_1^C and T_2^C are syntactical similar in sense [3].

Proof. We can now show from 1) to 2).We have that for any $n < \omega$ $E_n(T_1)$ is isomorphic to $E_n(T_2)$. Let this isomorphism is making by f_{1n}. Under conditions of theorem and perfection for any $n < \omega$ $E_n(T_1)$ and $E_n(T_2)$ are Boolean algebras. But with perfection of T_1 and T_2 we have that T_1^* and T_2^* are positive model complete and so for any $n < \omega$, $\varphi(\overline{x}) \in F_n(T_1^*)$ there exist $\psi(\overline{x})$ from $E_n(T_1^*)$ that in $T_1^* \models \varphi \leftrightarrow \psi$. And in power of T_1 is complete for positive existential sentences and $E_n(T_1) \subseteq E_n(T_1^*)$ (in power of $T_1 \subseteq T_1^*$), we have that $E_n(T_1) = E_n(T_1^*)$. With the same argument we have that $E_n(T_2) = E_n(T_2^*)$.For any $n < \omega$, $\varphi(\overline{x}) \in F_n(T_1^*)$ we are defining the following map between $F_n(T_1^*$ and $F_n(T_2^*$ by next way $f_{2n}(\varphi_1(\overline{x})) = f_{1n}(\psi_1(\overline{x}))$, where in $T_1^* \models \psi_1 \leftrightarrow \varphi_1$, for $\psi_1 \in E_n(T_1)$ .It is easy to note that under properties of f_{1n} and above mentioned f_{2n} is a bijection which giving to us isomorphism between $F_n(T_1^*)$ and $F_n(T_2^*)$. Hence, T_1^* and T_2^* - syntactically similar in sense [3]. But from previously theorem 1 under consideration of central types of $EPSCJ$ theory, since $T^* = T^C$, we have that 1)$\Rightarrow$2) of theorem 2 is proved.

2)$\Rightarrow$1). It is trivial , since $F_n(T_1^*)$ is isomorphic to $F_n(T_2^*)$ for any $n < \omega$,and in power of conditions of theorem this isomorphism is be able to go on to all subalgebras.

The following definitions led us to other kind of similarity, this one weaker than syntactical similarity. All definitions are taken from [3].

(1) By a pure triple we mean $\langle A, \Gamma, M \rangle$, where M is not empty set, Γ is a permutation group on A, and M is a family of subsets of A such that $M \in M \Rightarrow g(M) \in M$. For every $g \in \Gamma$.

(2) If $\langle A_1, \Gamma_1, M_1 \rangle$ and $\langle A_2, \Gamma_2, M_2 \rangle$ are pure triples, and $\psi : A_1 \to A2$ is a bijection, then ψ is an isomorphism, if:

(i) $\Gamma_2 = \{\psi g \psi^{-1} : g \in \Gamma_1\}$;

(ii) $M_2 = \{\psi(E) : E \in M_1\}$.

The pure triple $\langle |C|, G, N \rangle$ is called the semantically triple of T (abbreviated s.t.), where $|C|$ is the universe of C, $G = Aut(C)$ and N is the class of all subsets of $|C|$ which are universes of suitable elementary submodels of C .

Complete theories T_1 and T_2 are semantically similar is and only if their semantic triples are isomorphic.

Very interesting one can to consider this result with the following:

Proposition 1 [3]. If T_1 and T_2 are syntactically similar, then T_1 and T_2 are semantically similar.

A property (or a notion) of theories (or models, or elements of models) is called semantic if and if it is invariant relative to semantic similarity.

It is turned out that a lot important notion from classical model theory belongs to next list.

Proposition 2 [3]. The following properties and notions are semantic:

(1) type;

(2) forking;

(3) λ-stability;

(4) Lascar rank;

(5) Strong type;

(6) Morley sequence;

(7) Orthogonality, regularity of types;

(8) $I(\aleph_\alpha, T)$ – the spectrum function.

By virtue of this notice we can say that all above mentioned properties and notions from Proposition 2 in the class of centers of $\exists$-complete perfect $EPSCJ$ theories are semantic. Moreover if we are consider above mentioned enrichments of signatures of such theories and we will consider central types of ones we got that the situation will not change. And finally it is appropriate to consider the $EPSCJ$ analogues of the list of semantic properties and notions from classical model theory. All unknown notions and results which we used in this article one can find out in [1–6].

References

1 *Ешкеев А.Р.* Категоричные позитивные теории // Синтаксис и семантика логических систем: материалы рос. шк.-семин., посвящ. 100-летию со дня рождения Курт Гедель. 23-27 августа 2006 г. — Иркутск: Ин-т математики СО РАН; Изд-во гос. пед. ун-та, 2006. — С. 28–32.

2 *Мустафин Т.Г., Нурмагамбетов Т.А.* О P-стабильности полных теорий // Структурные свойства алгебраических систем: сб. науч. тр. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1990. — С. 88–100.

3 *Mustafin T.G.* On similarities of complete theories // Logic Colloquium '90: proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, Held in Helsinki, Finland, July, 15-22, — 1990. — P. 259–265.

4 *Ешкеев А.Р.* О подобии в pj-теориях // Вестн. КазНПУ. — 2007. — № 4(20). — С. 113–117.

5 *Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т.* Йонсоновские теории и их классы моделей. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2016. — С. 346.

6 *Yeshkeyev A.R.* Properties of central type for fragments of Jonsson sets // Bull. of Symbolic Logic. — 2016. — Vol. 22. — No. 3. — P. 429, 430.

А.Р. Ешкеев

Йонсондық жиынның байытылуына қатысты орталық типтердің қасиеттері

Мақаладағы негізгі нәтижелер жаңа теориялар класы үшін қарастырылды, яғни экзистенционалды жай қатты йонсондық дөңес теориялар үшін зерттелді. Берілген класс алгебра бойынша жеткілікті түрде кең болады, мысалы, оған барлық абельдік группалар және жай группалар класы жатады. Қарастырып отырған сигнатураның тілінде жаңа предикаттық символ қосылғанда, ол йонсондық жиынның бар болуын көрсетеді. Өз кезегінде модельде осындай жиынның бар болуы элементтердің өлшемі, коэффициенттері және ішкі жиындар үшін негіз болып табылады, яғни йонсондық теорияның йонсондық жиыны сызықтық кеңістіктің өлшемділік ұғымының жалпылауы орын алады. Өз уақытында Т.Ғ. Мұстафин синтаксистік және семантикалық ұқсастықтардың негізгі қасиеттерін енгізді және дәлелдеді. Бұл мақалада кеңейтілген тілде қарастырылып отырған теориялар үшін ұқсас нәтижелер берілген. Осы бағытта жұмыстың негізгі нәтижелері болып келесілер табылады. Центрлі тип және оның центрі үшін p-стабильділіктің сәйкестігі. Экзистенционалды жай кемел $EPSCJ$-теориялардың синтаксистік ұқсастығы және олардың орталықтарының синтаксистік ұқсастығы бірбіріне пара-пар. Осыдан көптеген маңызды деректерді байқауға болады, мәселен, дербес жағдайда семантикалық ұқсастық. Сонымен қатар семантикалық ұқсастықты сақтайтын семантикалық қасиеттердің тізімі келтірілген. Мысалы, семантикалық қасиетке, яғни бірінші ретті инвариантты қасиетке, орталық типтердің Морли рангін жатқызуға негізі бар.

Кілт сөздер: йонсондық теория, теориялар класы, йонсондық дөңес теориялар, йонсондық жиын, синтаксистік ұқсастық, орталық типтердің қасиеттері.

А.Р. Ешкеев

Свойства центральных типов относительно обогащения йонсоновским множеством

Основные результаты данной работы приведены для нового класса теорий, а именно для экзистенциально простых сильно йонсоновских выпуклых теорий. Данный класс является достаточно широким с точки зрения алгебры, к примеру, в него входит класс всех абелевых групп и просто групп. Автором рассмотрены вопросы, касающиеся следующей тематики. В язык рассматриваемой сигнатуры добавляется новый предикатный символ, который отражает наличие йонсоновского множества. В свою очередь, наличие такого множества в модели дает основание для размерностных соотношений элементов и подмножеств, так как понятие йонсоновского множества в йонсоновской теории есть обобщение понятия размерности в линейном пространстве. Т.Г.Мустафин в свое время ввел и доказал основные свойства синтаксического и семантического подобия. В статье в расширенном виде приведены аналогичные результаты для рассматриваемых теорий. В этом направлении основными являются следующие результаты: совпадение p-стабильности для прототипа центрального типа и его центра, эквивалентность синтаксического подобия экзистенциально полных совершенных $EPSCJ$-теорий и синтаксического подобия их центров. Из этого вытекает много полезных фактов, в частности, семантическое подобие. Кроме того, автором приведен список семантических свойств, которые сохраняются при семантическом подобии. Например, к семантическим свойствам, т.е. инвариантным свойствам первого порядка, относится и ранг Морли центральных типов.

Ключевые слова: йонсоновская теория, теория классов, йонсоновские выпуклые теории, йонсоновское множество, синтаксическое подобие, свойства центральных типов.

References

1 Yeshkeyev A.R. *Syntax and semantics of logical systems: Materials of the Russian school-seminar, Dedicated to the 100th anniversary of the birth of Kent Gedel.* Avgust, 23-27, 2006, Irkustk, Institut matematiki SO RAN. Publ. state pedagogical university, 2006, p. 28–32.

2 Mustafin T.G., Nurmagambetov T.A. *Structural properties of algebraic systems,* Karaganda: Published of KSU, 1990, p. 88–100.

3 Mustafin T.G. *Logic Colloquium '90: proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic,* held in Helsinki, Finland, July, 15-22, 1990, p. 259–265.

4 Yeshkeyev A.R. *Bulletin KazNPU,* 4(20), 2007, p. 113–117.

5 Yeshkeev A.R., Kasymetova M.T. *Jonsson theory and its classes of models,* Karaganda: Published of KSU, 2016, p. 346.

6 Yeshkeyev A.R. *Bulletin of Symbolic Logic,* 2016, 22, 3, p. 429, 430.

UDC 510.67

A.R. Yeshkeyev

Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan
(E-mail: modth1705@mail.ru)

Companions of the fragments in the Jonsson enrichment

In this article we consider the properties of central types for the existentially prime strongly convex Jonsson theories in some extension. This class of theories is a subclass of a broad class of Jonsson theories. In particular, the Jonsson theories include the class of all fields of a fixed characteristic. In the given work, problems related to the classical problems of the general Model Theory concerning the following topics were considered. First of all, we note the values of enrichment. Using the one-place predicate, the Jonsson subset is singled out and the concepts of P -stability and various kinds of similarities are considered for the Jonsson completion. The following results were obtained:Coincidence of P - stability for a prototype of the central type and its center. Equivalence of syntactic similarity of companions of fragments of Jonsson enrichment and syntactic similarity of their centers.The above notion of stability has an applied value for studying the properties of the central types in this enrichment. In the second place, it is necessary to note the significance of the concept of the central type in this enrichment.The very idea of a central type presupposes an additional description of the properties of incomplete Jonsson theories by means of central completion. The Jonsson subsets of the semantic model of the existentially prime convex Jonsson theory have good theoretic-model properties. This concerns the Morley rank and it is preserved in the syntactic and semantic similarity of the above theories.

Keywords: Jonsson theory, Jonsson set, fragment of Jonsson sets, Existentially Prime Strongy Convex Jonsson theories.

One of the classic problem science is the study of the problems of classification of objects for some the general featured. In the math role performing such objects play sets with determined on them relationships. With using mathematical logic, these objects have been associated with some sets formula language calculus of predicate. This relationship between the syntax and semantics of the fixing language itself is the essence of model theory. Therefore, it is clear that finding syntax and semantics similarity signs can be useful in classification of the object model theory. Our research related to the concepts of convexity of the theory in the class of existential prime Jonsson theories. The main results obtained for the central types of fragments Jonsson subsets of semantic models of some fixed Jonsson theory. Next, we enrich the signature of this Jonsson set in a single predicate.We give the necessary definitions associated with new subclasses Jonsson theories and enriched signatures.

Let L be a countable first-order language.

Definition 1. The inductive theory T called existential-prime, if:

1. It has a prime algebraic model and the class of all algebraically prime models it is denoted by AP.

2. The class (E_T) of model theory T has nonempty intersection with an AP class, ie, $T_{AP} \cap E_T \neq \emptyset$.

Definition 2. The theory T is called convex if for any model $\mathfrak{U}$ and any family $\{\mathfrak{B}_i | i \in I\}$ of its substructures, which are models of the theory T, the intersection $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ is a model theory T. It is assumed that this intersection is not empty. If this intersection is never empty, then the theory is called the strongly convex.

We give the necessary definitions related to Jonsson theories and enriched signatures.

Definition 3. We say that a set $X - \Sigma$-definable, if it is definable some existential formula.

Definition 4. The set X is said Jonsson in theory T if it satisfies the following properties:

1) X is a Σ-definable subset of C;

2) $dsl(X)$ is the carrier some existentially closed submodel C.

For more information on Jonsson sets can obtain in the works [1–3].

Let T is an arbitrary Jonsson theory in the language of the first order signature σ. Let C is a semantic model of theory T. Let $A \subseteq C$ is a Jonsson set of theory T. Let $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a | a \in A\} \cup \Gamma$, $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$.

Let $T_A^C = T \cup Th_{\forall\exists}(C, a)_{a \in A} \cup \{P(c_a) | a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{''P \subseteq''\}$ where $\{''P \subseteq''\}$ is an infinite set of sentences expressing the fact that the interpretation of symbol P is existentially closed submodel in the language of the signatures $\sigma_\Gamma(A)$ and this model is a definable closure of the set A. It is understood that the consideration the set of sentences is Jonsson theory and this theory generally is not complete.

Let T^* is the center of the Jonsson theory T_A^C and $T^* = Th(C')$ where C' is a semantic model of the theory T_A^C. By restriction theory T_A^C to signatures $\sigma_\Gamma(A)\backslash\{c\}$ the theory T_A^C becomes a complete type. This type we call a central type of the theory T relatively the Jonsson set A and denoted by P_A^C.

We say that all $\forall\exists$ - corollary of the arbitrary theory form a Jonsson fragment of this theory, if the deductive closure of these $\forall\exists$ - corollary is Jonsson Theories. Obtained in this case Jonsson theories will be called Jonsson fragment (further fragment). Accordingly, it is determined by the fragment of Jonsson set. In both cases, we can carry out research Jonsson fragments on the connection with an initial theory that the new formulation of the problem research is Jonsson's theory.

Let X Jonsson set in the theory T and M is existentially closed submodel semantic model C, considered Jonsson theory T where $dcl(X) = M$. Then let $Th_{\forall\exists} = Fr(X)$, $Fr(X)$ is Jonsson fragment of Johnson sets X.

On similarity in Jonsson theoties

T.G. Mustafin in his work [4] define a precise notion of syntactic [4; Def. 1] and semantic similarity [4; Def. 4] complete theory That in the language this determination and the respective regulations of concepts (for example, shell of theory [4; Def. 12], semantic property (theory, model, element) [4; Def. 8]), he proved that for an arbitrary complete there is syntax similary for it some theory of polygons [4, Th. 4, Th. 5]. In the class Jonsson theory this approach to classification the respective regulations of the objects correctly but requires certain changes in the definition relevant similarity theory. This is connected, firstly, so that, in generally speaking, Jonsson Theory is not complete, and, secondly, that in the class of models Jonsson theory is uniform and universal models, generally speaking not saturated. This paragraph is connected with differences concepts similarity between Jonsson theories. Through generalizations some definitions in the work [4] and the technique of work with Jonsson theories received, that in the class of ideal $\exists$-complete Jonsson theory the concepts entered similarities Jonsson theories match with relevant completes in total theory of the meaning.

To give the following definition.

Let T is complete theory, then $F(T) = \bigcup_{n<\omega} F_n(T)$, where $F_n(T)$ is Boolean algebra of formula with n free variables.

Definition 5. [4; Def. 1]. Let T_1 and T_2 are complete theory.

We will say, that T_1 and T_2 are syntax similarity, if there is bijection $f : F(T_1) \to F(T_2)$ such that

1) restriction f to $F_n(T_1)$ is isomorphism Boolean algebra F_nT_1 and F_nT_2, $n < \omega$;

2) $f(\exists v_{n+1}\varphi) = \exists\varphi_{n+1}f(\varphi), \varphi \in F_{n+1}(T)$, $n < \omega$;

3) $f(v_1 = v_2) = (v_1 = v_2)$.

Definition 6 [4; Def. 2].

1) Pure triple is called $\langle A, \Gamma, M\rangle$ where A is nonempty, Γ is group permutations A and M is family subset A, such that $M \in \mathbb{M} \Rightarrow g(M) \in \mathbb{M}$ for every $g \in \Gamma$;

2) If $\langle A_1, \Gamma_1, M_1\rangle$ and $\langle A_2, \Gamma_2, M_2\rangle$ are pure triple and $\psi : A_1 \to A_2$ is bijection, then ψ is isomorphism, if:

(i) $\Gamma_2 = \{\psi g\psi^{-1} : g \in \Gamma_1\}$;

(ii) $M_2 = \{\psi(E) : E \in \mathbb{M}_1\}$.

Definition 7 [4; Def. 3]. Pure triple $\langle |C|, G, \mathbb{N}\rangle$ is called semantic triple of complete theory T , where $|C|$ is carrier monster-model C of theory T, $G = Aut(C)$, N is class all subset $|C|$, every of which carrier corresponding elementary of submodel C.

Definition 8 [4; Def. 4]. The complete theory T_1 and T_2 are called semantic similarity, if their semantic triple are isomorphic between itself.

The following definitions will be generalizations previous definitions.

Let T is an arbitrary Jonsson theory, then $E(T) = \bigcup_{n<\omega} E_n(T)$ where $E_n(T)$ is lattice $\exists$–formula with n free variables, T^* is center of Jonsson theory T, i.e. $T^* = Th(C)$, where C is semantic model of Jonsson theory T in [5].

Definition 9. Let T_1 and T_2 are Jonsson theory.

We will say, that T_1 and $T_2 - J$ is syntactically similar, if there is bijection $f : E(T_1) \to E(T_2)$ such that:

1) restriction f to $E_n(T_1)$ is isomorphism lattice $E_n(T_1)$ and $E_n(T_2)$, $n < \omega$;

2) $f(\exists v_{n+1}\varphi) = \exists\varphi_{n+1}f(\varphi)$, $\varphi \in E_{n+1}(T)$, $n < \omega$;

3) $f(v_1 = v_2) = (v_1 = v_2)$.

Definition 10. Pure triple $\langle C, AutC, SubC\rangle$ is called J is semantical triple, where C is semantical model T, $AutC$ is group of automorphism C, $SubC$ is class all subset of carrier C, which there are carrier relevant submodel C.

Definition 11. Two Jonsson theories T_1 and T_2 are called J is semantical similar, if their J is semantical triple similar how pure triple.

It is clear that the definition 11 is a generalization [4; Def. 1], and definition 11 is a generalization of [4; Def. 4] in the following sense:

a) in the definition 9 for each $n < \omega$ instead of Boolean algebra $F_n(T)$ considered lattice $\exists$-formula of $E_n(T)$;

b) in the definition of 10 instead of the monster model complete theory T, considered semantic model of Jonsson theory T and as N of the definition [4; Def. 3] considered $SubC_i$ is the class of all subsets of the carrier C_i, which are carriers of the relevant submodels $SubC_i$, which the satisfies M of [4; Def. 2].

B due to the new definition of the semantic model of [1], we introduce the following definition.

Definition 12. Jonsson theory T is called perfect if each semantic model T is the saturated model of T^*.

The main results of of the work is the following result is associated with the above definitions.

Let A_1 and A_2 are Jonsson subset of the semantic model the some of $EPPCJ$ – theory. Where $Fr(A_1)$ and $Fr(A_2)$ are Jonsson sets of fragments A_1 and A_2. Then let $T_1 = Fr(A_1)$, $T_2 = Fr(A_2)$. Respectively $T^C_{A_1}$ and $T^C_{A_2}$ are the enrichment of Jonsson sets A_1 and A_2 the corresponding fragments T_1 and T_2.

We have the following results.

Theorem. Let T_1 and T_2 are $\exists$ – complete perfect Jonsson theory. Then following conditions are equivalent:

1) T_1 and T_2 are J – syntactically similar;

2) T_1^* and T_2^* are syntactically similar, T_1^* and T_2^* respectively centers enrichment of fragments consideration sets A_1 and A_2.

Proof. For the proof should be necessary in the following two facts.

Fact 1. For any Jonsson theory T the following conditions are equivalent:

1) T is perfect;

2) T^* is model complete.

Proof follows from the fact that perfect Jonsson theory T the equivalent, that T^* is a model companion of theory T [6].

Fact 2. For any complete for $\exists$ – sentences Jonsson theory T the following conditions are equivalent:

1) T^* is model complete;

2) for each $n < \omega$, $E_n(T)$ is Boolean algebra, where $E_n(T)$ is a lattice $\exists$ – formula with n free variables.

Proof. 1)$\Rightarrow$2) Let T^* is the model complete $\Rightarrow E_n(T^*)$ is Boolean algebra, because T^* is complete theory (the elementary theory of the semantic model), but $E_n(T) \subseteq E_n(T^*)$, because $T \subseteq T^*$.

We have 2 cases:

1) T is complete, then $T = T^* \Rightarrow T$ is model complete, $\Rightarrow E_n(T)$ is Boolean algebra;

2) If $T \subset T^* \Leftrightarrow T^* = Th(C)$, where C is semantic model of T, then $\forall\varphi \in T \Rightarrow \varphi \in T^*$; If T is complete for $\exists$ – sentences, then all $\exists$ - sentences output from T belongs to T^*. The others in T^* is not $\exists$ - sentences, because $E_n(T^*)$ is Boolean algebra, then it is additions for any φ – $\exists$ – sentences. In generality case, this φ will be not $\exists$ – sentences, because if $\varphi \in \Sigma$, then $\neg\varphi \in \Pi$ (Σ is a set of $\exists$ – sentences, Π is a set of $\forall$ – sentences), but T^* is model complete $\Leftrightarrow \forall\psi \in T, \exists\theta \in T^* : \psi \equiv \theta, \theta \in \Sigma$. But we known that $\theta \in T^* \Leftrightarrow \theta \in T$ $\Rightarrow$ 1) $1{,}0 \in E_n(T)$; 2) $\varphi \in E_n(T) \Rightarrow \neg\varphi \in E_n(T)$; 3) $\forall\varphi \in E_n(T)\ \neg\neg\varphi = \varphi \Rightarrow E_n(T)$ is Boolean algebra.

2)$\Rightarrow$1) $E_n(T)$ is Boolean algebra $\Rightarrow T$ is model complete,but $T \subset T^* = Th(C)$. Let $A \in ModT \Rightarrow A$ is isomorphic introduce to C, because C is semantical model. Due to the fact, that T is model complete $\Rightarrow$ is embedding elementary.

Let C is not saturated, then $\exists X \subset C, |X| < |C|, \exists p \in S_1(X)$: is not true, that $(C, x)_{x\in X} \models p$, but $p \cup T$ is jointly, so $\exists m \notin C$: m realize in p, then $\exists M \models T^*$, that $m \in M$, M is the elementary extension of C that power $\Rightarrow \exists$ semantical model C', which $|M|^+$ is saturated and the elementary extension of M power 2^M. But any two semantical models are elementary equivalent between itself, in particular $C \equiv C'$. We give a contradiction, because C' realize in p. Consequently, that C is not saturated, is not true, $\Rightarrow T$ is perfect, $\Rightarrow T^*$ is model complete.

Now show directly to proof statement of the theorem.

We show 1)$\Rightarrow$2). We have that for each $n < \omega$ $E_n(T_1)$ is isomorphic $E_n(T_2)$. Let this isomorphism carried out by f_{1n}. By condition theorem and facts 1 and 2 for each $n < \omega$ $E_n(T_1)$ and $E_n(T_2)$ are Boolean algebra. But by condition perfectness T_1 and $T_2 \Rightarrow T_1^*$ and T_2^* are model complete due to the fact 1, because for each $n < \omega$, for any formulae $\varphi(\overline{x})$ from $F_n(T_1^*)$ there is a formula $\psi(\overline{x})$ from $E_n(T_1^*)$ so that $T_1^* \models \varphi \leftrightarrow \psi$. Due to the that the theory T_2 is $\exists$ - complete and $E_n(T_2) \subseteq E_n(T_2^*)$ (as $T_2 \subseteq T_2^*$), follows that $E_n(T_2) = E_n(T_2^*)$. For each $n < \omega$, for each $\varphi_1(\overline{x})$ from $F_n(T_1^*)$ we ask the following maps between $F_n(T_1^*)$ and $F_n(T_2^*)$: $f_{2n}(\varphi_1(\overline{x})) = f_{1n}(\varphi_1(\overline{x}))$, where in $T_1^* \models \psi_1 \leftrightarrow \varphi_1$, $\varphi_1 \in E_n(T_1)$. Easily understood that by virtue if the properties f_{1n} and the above f_{2n} is bijection specifying isomorphism between $F_n(T_1^*)$ and $F_n(T_2^*)$. Consequently, T_1^* and T_2^* are syntactically similar. We show 2)⇒1) is trivial, because $F_n(T_1^*)$ isomorphic $F_n(T_2^*)$ for each $n < \omega$, and by condition theorem and facts 1 and 2 this isomorphism extends to all subalgebras.

From we known the following results.

Proposition. If theory T_1 and T_2 are syntactically similar, then T_1 and T_2 T_1 and T_2 are semantically similar, the reverse is not true.

In this regard can be formulated as follows:

Lemma 1. Any two cosemantic fragments J is semantically similar.

Proof follows from the definition.

Lemma 2. If two perfect $\exists$ – complete Jonsson theories J syntactically similar, then they J semantically similar.

Proof follows from the theorem 1 and proposition 1.

All are uncertain definitions and concepts related with Jonsson theories can be found in [5].

References

1 *Yeshkeyev A.R.* Jonsson sets and some of their model-theoretic properties: Abstracts Book // International Congress of Mathematicians, August, 13-21. — 2014. Seoul, Korea. — P. 8.

2 *Yeshkeyev A.R.* On Jonsson sets and some their properties // Bull. of Symbolic Logic. — 2015. — Vol. 21. – No. 1. — P. 99, 100.

3 *Yeshkeyev A.R.* Properties of central type for fragments of Jonsson sets // Bull. of Symbolic Logic. — 2016. — Vol. 22. — No. 3. — P. 429, 430.

4 *Mustafin T.G.* On similarities of complete theories // Logic Colloquium '90: proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic. — held in Helsinki, Finland. — July, 15-22. — 1990. — P. 259–265.

5 *Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т.* Йонсоновские теории и их классы моделей. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2016. — С. 346.

6 *Мустафин Т.Г.* Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно-йонсоновских теорий булевых алгебр // Математические труды. — 1998. — Т. 1. — № 2. — С. 135–197.

А.Р. Ешкеев

Йонсондық байытылу фрагменттерінің компаньондары

Мақалада кейбір байытудағы экзистенционалды жай йонсондық дөңес теориялар үшін орталық типтердің қасиеттері қарастырылған. Бұл теория класы кең йонсондық теориялардың кластарының ішкі класы болып табылады. Дербес жағдайда йонсондық теорияларға барлық бекітілген сипаттама мен өрістер класын жатқызуға болады. Автор келесі тақырыпқа қатысты жалпы модельдер теориясының классикалық проблемаларымен байланысты есептерді қарастырды. Ең бірінші кезекте байытудың мағынасы көрсетілді. Бір орынды предикаттың көмегімен йонсондық ішкі жиындар және йонсондық толықтырулар үшін p-стабильділік ұғымы және ұқсастықтың әр түрлі түрлері қарастырылды, яғни, орталық тип және оның центрінің прототипі үшін p-стабильділіктің сәйкестігі. Сонымен қатар йонсондық байытулардың фрагменттерінің компаньондарының синтаксистік ұқсастығы және олардың центрлерінің синтаксистік ұқсастығы эквиваленттілігі көрсетілген. Берілген байытылуда центральдік типтердің қасиеттерін оқу үшін берілген стабильділік ұғымы қолданбалы мағына береді. Екіншіден, берілген байытылуда центральдік типтің ұғымының мағынасын атап өткен жөн. Орталық типтің өзіндік идеясы толық емес орталық толықтырылудың көмегімен алынған йонсондық теориялардың қасиеттерін қосымша сипаттауын ұсынады. Қарастырып отырған экзистенционалды тұйық қатты дөңес йонсондық теориялардың йонсондық ішкі жиындарының семантикалық модельдері модельдітеоретикалық сипаттамадағы жақсы қасиеттерге ие. Бұл Морли рангіне қатысты және ол жоғарыда көрсетілген теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастықтарында сақталады.

Кілт сөздер: йонсондық теория, байытылудың фрагменттері, ұқсастықтың қасиеттері, компаньондардың синтаксистік ұқсастығы, инвариантты қасиет.

А.Р. Ешкеев

Компаньоны фрагментов йонсоновского обогащения

В статье рассмотрены свойства центральных типов для экзистенциально простых сильно йонсоновских выпуклых теорий в некотором расширении. Этот класс теорий является подклассом широкого класса йонсоновских теорий. В частности, к йонсоновским теориям можно отнести класс всех полей фиксированной характеристики. Автором решены задачи, связанные с классическими проблемами общей теории моделей, касающихся следующей тематики. В первую очередь, отметим значения обогащения. С помощью одноместного предиката выделяется йонсоновское подмножество и для йонсоновских пополнений рассмотрены понятия p-стабильности и различные виды подобий. Получены следующие результаты: совпадение p-стабильности для прототипа центрального типа и его центра; эквивалентность синтаксического подобия компаньонов фрагментов йонсоновского обогащения и синтаксического подобия их центров. Понятие стабильности имеет прикладное значение для изучения свойств центральных типов в данном обогащении. Во вторую очередь нужно отметить значение понятия центрального типа в данном обогащении. Сама идея центрального типа предполагает дополнительное описание свойств неполных йонсоновских теорий с помощью центрального пополнения. Йонсоновские подмножества семантической модели рассматриваемой экзистенционально простой сильно выпуклой йонсоновской теории обладают хорошими свойствами теоретико-модельного характера. Это касается ранга Морли и он сохраняется при синтаксическом и семантическом подобиях указанных выше теорий.

Ключевые слова: йонсоновская теория, фрагменты обогащения, свойства подобия, синтаксическое подобие компаньонов, свойство инвариантности.

References

1 Yeshkeyev A.R. *Jonsson sets and some of their model-theoretic properties:* Abstracts Book, International Congress of Mathematicians, August, 13-21, 2014, Seoul, Korea, p. 8.

2 Yeshkeyev A.R. *Bulletin of Symbolic Logic,* 2015, 21, 1, p. 99, 100.

3 Yeshkeyev A.R. *Bulletin of Symbolic Logic,* 2016, 22, 3, p. 429, 430.

4 Mustafin T.G. *Logic Colloquium '90: proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, held in Helsinki,* Finland, July, 15-22, 1990, p. 259–265.

5 Yeshkeev A.R., Kasymetova M.T. *Jonsson theory and its classes of models,* Karaganda: Published of KSU, 2016, p. 346.

6 Mustafin T. G. *Mathematical works*, 1998, 1, 2, p. 135–197.

UDC 51

B.H. Zhanbusinova[1], G.Sh. Iskakova[1], K.S. Shaukenova[1],
B.K. Shayakhmetova[1], A.K. Mukasheva[2]

[1] *Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan;*
[2] *A.Bokeikhanov school-lyceum, Shahtinsk, Karaganda region, Kazakhstan*
(E-mail: bagdat.60@mail.ru)

Virtual University modules

In the article the questions of filling the modules of the virtual university with teaching methods are considered. The main educational tools used in the content, as well as the types computer training programs.The work with such programs is aimed at mental actions of the student, formation and consolidation of professional skills. In the conditions of modern technologies, creative approach of teaching in professional activity is necessary. The authors show how the functions of teachers, in comparison with the traditional training system, are diversified.

Keywords: supertyutor, proftyutor, training, certification, module, unit, integration, telecommunications, infrastructure, configuration, portal, environment.

In conditions of impetuous development of modern world topical meaning have application and introduction of new information and pedagogic technologies to the education process. One of sucg forms of education is virtual education. The definition «virtual education» fully considered in works of A.V. Hutorskiy. The virtual education is a creation of virtual space where take place the process and interaction of subjects and objects of education, specific of which these objects and subjects define. The modern distant technologies allow expanding opportunities of full-time and part-time education. With using of such form of education there is an opportunity of increase mutual availability of removed students, teachers, specialists, and also information massives and virtual education objects what is important and specific.

Let's consider the issues of filling by Virtual University program modules with teaching tools. Here are the main teaching tools used in the content and also the types of computer training programs:

Work module tutorial (unit). Units are designed on each module, the average during one academic period. Each student receives 25–27 unit and methodical recommendations on work with working modular textbook.

All units have the same structure, which allows to student to orient quickly in a new academic material passing to the next module. Working modular textbook includes the course program, the didactic course plan, the list of basic and additional literature, scientific or thematic review of training material, a glossary, tasks for independent work, skills training, information to the test tasks.

The feature of the unit is the review nature of the presentation, which allows you to navigate in the basic concepts and issues, to get the basic tendencies of science development.

Training didactic or methodical tools logically complement each other and enhance didactic functions of the discipline. General view of the virtual university materials must be more than 2000 items of educational products. Among them - the simulated movies, music videos, video lectures (review and modular), satellite TV lectures, author's lecture courses, slide lectures. The best doctors and professors from different cities, different countries, professional directors should be invited to the reading and writing lectures. The Fund must be replenished regularly. All these training products are in the same and digital records and promotr to increase the visibility of the educational material content of the module or a specific part of it.

Computer training programs. The university (virtual) should have more than 300 computer-based training programs for all academic disciplines. Work with such programs aimed at enhancing the student's mental activities, the formation and consolidation of professional skills. Types of computer training programs [1]:

- Supertutor (ST) – contains all the necessary information on the topics of the course, glossary, training, testing;
- Proftutor (PT) – trains to work with professional small programs by methodological manuals;
- I-tutor (IT, imitation) – simulates a work with lengthy professional computer programs;
- G-tutor (RT, research) is a research program for the development of research skills on a specific issue;
- COMPLAY (computer game) is a game or role-playing program, immersion into the business atmosphere and performance in some role;

• Reward is a Digital linguistic program for non-linguists;

Using of computer-based training programs is based on clear algorithms, necessarily involving feedback. Analyzing the training program A.T. Edrisov and M.A. Antonov classify them as follows [1]:

• a computer textbook is a program-methodical complex that combines the properties of usual textbooks, reference books, book of problems and laboratory practical;

• object-oriented environment (microcosms, simulation programs, training packages) is a training program package that allows you to operate with objects of a certain class, guiding by the methodological guidelines or produces research; such simulation programs give the opportunity to «stay» the head of the company, a bank, offices;

• laboratory practice serving to conduct surveillance over objects, the study of various aspects of the use of these objects in practice;

• a simulator is used for processing and securing the technical skills of problem solving;

• control programs are designed to certify the quality of knowledge;

• reference data base for educational purposes, for the storage and presentation of a variety of information; they are characterized by a hierarchical organization of the material and a quick search of information on different grounds or by the context.

Training programs represent one of the types of independent work of students on the stage when a certain knowledge is already formed.

Collective training is a classroom group session aimed to updating and processing of professional skills and allows students unleash his creativity in an interactive way. These classes are organized and conducted in accordance with the designed scenarios. Development of the script is approved by the Scientific and Methodological Council and recommended for publication and implementation in the learning process.

Guidelines for conducting collective training include the goals and objectives of the lesson, handouts, guidelines for organizing and conducting. Depending on the specifics of a particular discipline and type of lesson various types of collective training are used.

Student Appraisal System. Continuous control and assessment of assimilation quality of each module in accordance with standard criteria is also the original difference of this technology. Certification system is divided into a learning module, current and complete. Student is allowed to the current appraisal of the subject matter only after included in complex of norms stages and learning outcomes (homework, tests on modules, coursework, etc.) will be offset. Control over the passage of every student at all educational procedures is carried out by a special computer program. The student is admitted to the final certification after full current certification of all subjects in the curriculum is held. At the end of each module unit test is carried out.

Academic mobility of students is carried out through a variety of links between domestic and foreign universities and educational centers. Under the contract, even students can present their thesis and receive personal certificates and diplomas not only in the fixed educational structures, but also in other universities.

The high technology of the educational process dictates strict compliance with all of its elements, each of which is well matched with the whole chain of educational process. In the context of continuous improvement of learning technologies special measures for accelerating the teachers to adapt to the specifics of virtual learning are required. Functions of teachers in comparison with the traditional system of education is diversified in terms of modern technology a creative approach to teaching professional activity is required [2].

Summarizing the above, we note the characteristic features of virtual education.

Flexibility: students, listener receiving virtual education mostly do not attend regular classes and study at a convenient time and in a convenient location [3].

Modularity: principle is laid in the basis of virtual education programs modular: every single course creates a holistic view about a single subject area, which allows to form from the set of independent modules a curriculum that meets the needs of the individual or group.

Parallelism: training is carried out simultaneously with the professional activities (or learning in a different direction), i. e. on the job or other activity.

Large audience: the simultaneous appeal to many sources of training information, large number of students, listeners, communication with the help of telecommunication relation of students between themselves and trainees.

Effectiveness: the effective use of educational spaces and facilities, concentrated and unified view of information, the use of computer simulation and development should lead to a reduction in training costs.

Workability: the use of new advances in information technologies that assist human entry into the global information space.

Social equality: equal access to education regardless of their place of residence, health status, social status.

Internationalization: opportunities to get education in educational institutions of foreign countries without leaving the country, and to provide educational services for foreign citizens and compatriots living abroad.

The new role of the teacher: virtual education expands and updates the role of the teacher, makes him a mentor and consultant, who must coordinate the learning process, to continually improve the courses he teaches, enhance creativity and skills in line with the innovations and innovation. Positive impact on student (listener): increasing of creative and intellectual potential of the person, who receives virtual education, at the expense of self , the pursuit of knowledge, the use of modern information and telecommunication technologies, the ability to make their own responsible decisions.

Quality: the quality of virtual education is not inferior to other forms of education because preparation for teaching resources attract the best faculty and use of the most modern teaching materials; it provided the use of a dedicated quality control of virtual education for its compliance with educational standards. The main tasks of virtual education:

• Formation of legal, organizational , educational and methodical, information and telecommunication, personnel, economic and financial security, the implementation and the development as virtual education as distance learning for individual courses or course units;

• Organization and development of virtual education in any area of training specialists; humanitarian, economic, legal, natural, military, agricultural etc;

• The introduction of virtual learning technologies at all levels (the higher, postgraduate)as well as training for individual courses or course units;

• Provide training and psychological support with the help of virtual learning socially disadvantaged groups, unemployed persons, persons with disabilities, prisoners, conscripts etc;

• Providing vocational guidance and self-determination for the future specialists;

• The use of virtual learning technologies for retraining and advanced training people in the field of business, state and municipal management, customs and tax services, financial and banking system, academics etc;

• Creation of the state electronic library of virtual courses (normative disciplines);

• Integration of virtual education system into the world of modern education.

• The organizational structure brings together all the components of the virtual education and based on the following components:

• Organizational and management;

• Normative-legal;

• Educational and methodical;

• Information and telecommunications;

• Economic and financial.

It provides:

•preparation of legal documents of the virtual education projects;

• coordinate of development and implementation of virtual learning technology and curricula;

• development of virtual courses with international standards of virtual education;

• coordination of virtual education centers on the interaction with regional and regional telecommunications centers;

• the development and implementation of the most effective information and educational software;

• creation of a distributed information structure of virtual education as well as administration system and control of knowledge;

• the development of programs, providing training and retraining personnel for the virtual education;

• the development of a system of information and analytical support for virtual education, including market research and promotional activities.

Regional centers of virtual education. They are created on the basis of the higher educational institutions, which are the regional centers of the telecommunications network of science and education. Provide the ability to use the telecommunications network. Take part in:

• In the improvement and development of telecommunications infrastructure for the implementation of virtual education;

• In the preparation of legal documents of virtual education projects;

• In the development and implementation of virtual learning technology and curricula;

• In the development and implementation of the most effective information and educational software;

• In the creation of distributed information structure of the virtual education;
• In the preparation of virtual education staff;
• In the establishment of the state library of virtual courses.

Regional centers may be basic centers in areas of vocational training.

Basic centers in areas of vocational training. They are created on the basis of higher educational institutions with outstanding educational-methodical and scientific developments in one or more areas of professional training; have a significant contribution to the development and implementation of the virtual learning technologies and accordingly prepared cadre. They provide:

– The development of virtual courses on specific areas of the Coordination Council of vocational training;
– The introduction of virtual education in the relevant areas of vocational training.
– Participants:
– In the preparation of legal documents virtual education projects;
– In the development in areas of training specialists teaching methods;
– In making recommendations on the introduction of information technologies and virtual courses in the various forms of education;

• The establishment of administration system and control of knowledge;
• The establishment of the state library of virtual courses.

Local centers of virtual learning. They are created on the basis of higher educational institutions with access to telecommunications networks, modern computer facilities and trained personnel structure. Stages of creation and development of virtual education. Creation of the basic foundations of virtual education system may be implemented in the following stages.

First step:

• Establishment of the organizational structure of virtual education;
• The development of regulatory frameworks and virtual education standards;
• Monitoring study of the implementation conditions of virtual education and optimization of the process;
• Creation of the material - technical base of the regional local centers of virtual learning;
• Creation of a primary fund of virtual courses and ensure their experimental implementation;
• Development of Financing bases of virtual learning;
• The implementation of pilot implementation projects of virtual education.

Second step:

• Full-scale deployment and implementation of virtual education as a form of learning;
• The introduction of multi-channel system of financing businesses and individuals of virtual education;
• The introduction of a licensing system, certification and accreditation of virtual education institutions.

Consider approaches to the development of information and telecommunication resources and the results of their implementation ensured the successful task solution of creating the foundations of a common information space. Telecommunications basis providing interaction and remote access to information resources can be a segment of the scientific and educational RunNet computer network having a gateway to all the commercial networks and managed with the use of specially developed integrated network management system. This system may include five interrelated subsystems to solve individual problems, which include:

– Configuration Management;
– Security management;
– Management failures;
– Accounting of the resources use;
– Performance Management.

The backbone core is a database complex containing complete information about all aspects of the network functioning. It allows the administrator to obtain the necessary information at any time.

Within this network segment you can create information portal and web portal providing a total access to the main information resources.

At the same time one of the most representative scientific and educational information resources available online can be e-library (Automated Library Information System - ALIS), the Bible - graphic description of the library collection?s documents and their full-text electronic copies can be accumulated in its databases.

The library is considered as one of the main elements of the virtual learning system providing it quick access from remote locations to the necessary teaching materials. Overall ALIS provides with managing formation of the library collection through the creation and use of images of the search documents: an analysis of the composition of the fund; determining the presence of teaching materials necessary for the successful conduct of training activities; implementation of selection of documents in accordance with the permanent and one-time requests of the users in the modes of selective distribution of information and retrospective search; preparation of various lists and literature indexes, the necessary forms of report documents: easy and convenient access to information for different categories of users including from remote locations; interaction with other similar systems by the Internet; the creation on its base of corporate ALIS city.

This system bases on the complex of automated workplaces (AWP) and electronic catalogs containing bibliographic, factual and full-text databases formed on the basis of new acquisitions and the existing stock; AWP for acquisition fund; AWP of the bibliographer; AWP of the reader; AWP of the librarian; AWP for the interlibrary loan; System Administrator workstation.

Created within IntraNet ALIS bases on the use of opportunities database management system (DBMS) Oracle8. Documents introduced in the system immediately after the entry is made available to users through a Web-based workstations with a data-processing network and from remote workstations with access to telecommunications networks.

The choice of methods and tools of information systems development is carried out with the following requirements to them:

- Multiplatform support;
- Regardless of the manufacturer;
- Commonality;
- Ability to create a reliable and quality software;
- The ability to support software developed during the entire lifetime;
- Ability to design using modern methods and approaches;
- The possibility of development and a simple modification of the developed system; A simple and effective support for Web-technologies.

Creating information systems focuses on the complex means of interaction with the end user who performances a «smart interface» role on modern level and enables interactive solution of information problems on a computer. Note that for this purpose capabilities of the Web environment are widely used; this capabilities ensure the provision of a user interface for working with one or more databases. Thus, it can be seen that the known three-tier client-server architecture of the database is displayed naturally on the Web environment, where the Web - browser plays a role of a «thin» client, a Web-server - the role of the application server. In such manner, forming of virtual education space with all its flowing peculiarities, modules and means on the base of the modern information achievements is one of the important tasks of education system of XXI century [3].

References

1 *Едрисов А.Т., Антонов М.А.* Технология компьютерного программированного обучения // Состояние и стратегия развития дистанционного образования в условиях глобализации: материалы Междунар. науч.-практ. конф. — Караганда: КРУ, 2003. — С. 129–133.

2 *Морозов В.А.* Креативность преподавателя высшей школы // Высшее образование сегодня. — 2004. — № 3. — С. 64–72.

3 Методологические вопросы наполнения программных модулей виртуального университета // Университет ШОС – новые горизонты дистанционного образования: опыт, практика, перспетивы развития: материалы науч.-практ. конф. — Караганда: КЭУК, 2013. — С. 86–92.

Б.Х. Жанбусинова, Г.Ш. Искакова, К.С. Шаукенова,
Б.К. Шаяхметова, А.К. Мукашева

Виртуалды университеттің модульдері

Мақалада виртуалды университеттің модульдары мазмұны оқу-әдістемелік әдістермен толтырылу мәселелері қарастырылған. Контентте пайдаланатын негізгі оқу әдістері, сондай-ақ компьютерлік оқу бағдарламалары түрлері көрсетілген. Осындай бағдарламалар студенттің зерделі әрекетін белсендіруге, кәсіби дағдыларын бекітуге бағытталған. Қазіргі технологияларының сабақ берудің креативті тәсілі бірінші кезекте екендігі белгіленіп, авторлармен дәл осылай үйретудің, дәстүрлі жүйесімен салыстырғанда, оқытушылардың қызметін жандандырады деген қорытынды жасалған.

Кілт сөздер: виртуалды университет, контент, кәсіби дағды, заманауи технологиялар, зерделі әрекет.

Б.Х. Жанбусинова, Г.Ш. Искакова, К.С. Шаукенова,
Б.К. Шаяхметова, А.К. Мукашева

Модули виртуального университета

В статье рассмотрены вопросы наполнения учебно-методическими средствами модулей виртуального университета. Приведены основные учебные средства, используемые в контенте, а также виды компьютерных обучающих программ. Работа с такими программами направлена на активизацию умственных действий студента, формирование и закрепление профессиональных навыков. В условиях современных технологий необходим креативный подход преподавания в профессиональной деятельности. Авторами показано, как функции преподавателей, в сравнении с традиционной системой обучения, диверсифицируются.

Ключевые слова: виртуальный университет, контент, профессиональные навыки, современные технологии, умственные способности.

References

1 Edrisov A.T., Antonov M.A. *Status and Strategy of development of distance education in the context of globalization, Materials of the International scientific and practical conference*, Karaganda: Kazakh-Russian University, 2003, p. 129–133.

2 Morozov V.A. *Higher education today*, 2004, 3, p. 64–72.

3 *Methodological issues of filling of program modules of the university, Materials of scientific and practical conference of the University SCO – new horizons of distant education: experience, practice, development perspectives*, Karaganda: Karaganda economic University, 2013, p. 86–92.

УДК 512.815.6

Ш.Ш. Ибраев

Университет «Болашак», Кызылорда, Казахстан
(E-mail: ibrayevsh@mail.ru)

О когомологии простых ограниченных модулей для алгебраических групп

Исследованы первые и вторые группы когомологии простых ограниченных модулей для алгебраических групп с неприводимой системой корней над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики. Доказано, что группа когомологии простого ограниченного модуля для алгебраической группы изоморфна пространству морфизмов между тривиальным одномерным модулем и соответствующей группой когомологии ядра Фробениуса данной алгебраической группы. В случае второй когомологии на характеристику p основного поля накладывается ограничение $p \geq 3h - 3$, где h – число Кокстера.

Ключевые слова: алгебраическая группа, простой ограниченный модуль, когомология, алгебраически замкнутое поле, пространство морфизмов.

1 Введение

1.1. В положительной характеристике для данной алгебраической группы с неприводимой системой корней существуют семейства бесконечных простых конечномерных модулей с нетривиальной когомологией. Полные описания таких семейств получены только для малых алгебраических групп ранга 1, 2 и когомологических групп степеней 1, 2 и 3 [1–12]. Некоторые примеры семейств бесконечных простых конечномерных модулей с нетривиальной когомологией получены в работах [13, 14]. Конечные примеры простых конечномерных модулей малых размерностей с нетривиальной когомологией описаны в работах [15–19]. В категории ограниченных модулей (модули с ограниченным старшим весом) существует только конечное число простых конечномерных модулей с нетривиальной когомологией. Поэтому их изучение намного проще, чем в общем случае. В [20] они рассмотрены в связи с изучением необходимых и достаточных условий изоморфности первой группы когомологии алгебраической группы с неприводимой системой корней над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$ и соответствующей первой группы когомологии ее алгебры Ли с коэффициентами в простых модулях. Аналогичное исследование проводится автором для случая второй когомологии.

В данной статье рассмотрены свойства первых и вторых групп когомологии алгебраических групп с неприводимой системой корней над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$ с коэффициентами в простых ограниченных модулях. Основная цель – получить наиболее простую формулу вычисления когомологии простых ограниченных модулей для алгебраических групп с неприводимой системой корней в положительной характеристике. Согласно [21, A.10], полученный результат для категории всех простых ограниченных модулей будет справедливым и в категории всех простых конечномерных модулей.

1.2. Пусть G – алгебраическая группа с неприводимой системой корней над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$; T – максимальный тор в G; $B \supset T$ – подгруппа Бореля группы G, соответствующая отрицательным корням. Ядро морфизма Фробениуса, рассматриваемое как ядро морфизма групповых схем, обозначается через G^1.

Обозначим через R систему корней группы G относительно (G, T). Множество положительных и отрицательных корней соответственно обозначим через R^+ и R^-, и пусть S – множество простых корней, h – число Кокстера. Для системы корней ранга l пусть $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ – простые корни и $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ – фундаментальные веса. Обозначим целочисленную решетку весов, порожденную фундаментальными весами, через $X(T)$ (аддитивная группа характеров максимального тора T), и пусть $X_+(T)$ – множество доминантных весов; $X_1(T)$ – множество ограниченных весов.

Пусть V – рациональный G-модуль. Обозначим через $V^{(r)}$ скручивание Фробениуса V степени r. Более того, существует единственный $r \geq 1$, такой что $V^{(-r)}$ есть G-модуль, на котором G_1 действует нетривиально.

1.3. Основным результатом данной работы является следующая

Теорема. Пусть G – алгебраическая группа с неприводимой системой корней над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$ и V – простой ограниченный G-модуль. Тогда:
(a) $H^1(G, V) \cong \mathrm{Hom}_G(k, H^1(G^1, V)^{(-1)})$;
(b) если $p \geq 3h - 3$, то $H^2(G, V) \cong \mathrm{Hom}_G(k, H^2(G^1, V)^{(-1)})$.

Замечание. В достаточно больших характеристиках поля для $H^n(G, V)$ теорема верна и при $n > 2$. Однако для них нижняя граница значений характеристики p еще не установлена.

Доказательство теоремы основано на изучении свойства спектральной последовательности Линдона-Хохшильда-Серра [21, I.6.6.(3)]:

$$E_2^{nm} = H^n(G/G^1, H^m(G^1, V)) \Rightarrow H^{n+m}(G, V), \tag{1}$$

для короткой точной последовательности групповых схем

$$1 \to G^1 \to G \to G/G^1 \to 1$$

и G-модуля V.

2 Доказательство теоремы

2.1. В данном подпункте устанавливаются необходимые для доказательства основных результатов свойства спектральной последовательности (1). Пусть V – простой G-модуль с ограниченным старшим весом. Согласно [13, п.1, с. 768]

$$H^n(G/G^1, H^m(G^1, V)) \cong H^n(G, H^m(G^1, V)^{(-1)}).$$

Следовательно,

$$E_2^{nm} \cong H^n(G, H^m(G^1, V)^{(-1)}). \tag{2}$$

Если E_∞^{nm} – стабильное значение точки (n, m) спектральной последовательности (1), то

$$H^j(G, V) = \bigoplus_{n+m=j} E_\infty^{nm}. \tag{3}$$

Лемма 1. Пусть $p > 2$ и V — простой G-модуль со старшим весом из области ограниченных весов. Тогда $E_2^{2,0} = 0$.

Доказательство. По формуле (2), $E_2^{2,0} \cong H^2(G, H^0(G^1, V)^{(-1)})$. Так как V – ограниченный простой $\mathfrak{g}$-модуль, то $H^0(G^1, V)^{(-1)} = 0$. Следовательно, $E_2^{2,0} = 0$.

Лемма 2. Пусть $p \geq 3h - 3$ и V – простой G-модуль со старшим весом из области ограниченных весов. Тогда $E_2^{1,1} = 0$ и $E_2^{2,1} = 0$.

Доказательство. Согласно [1; 502], если $p \geq 3h - 3$, то $H^1(G^1, V)^{(-1)}$ — вполне приводимый G-модуль и любой ее доминантный вес лежит в нижнем фундаментальном альковe. Следовательно, $H^n(G, H^1\ (G^1, V)^{(-1)}) = 0$ для всех $n > 0$. Тогда по формуле (2) $E_2^{1,1} = 0$ и $E_2^{2,1} = 0$.

Лемма 3. Пусть $p \geq 3h - 3$ и V — простой G-модуль со старшим весом из области ограниченных весов. Тогда:
(a) $E_2^{2,0} = E_\infty^{2,0}$;
(b) $E_2^{1,1} = E_\infty^{1,1}$;
(c) $E_2^{0,2} = E_\infty^{0,2}$;
(d) $H^2(G, V) = E_2^{20} \oplus E_2^{11} \oplus E_2^{02}$.

Доказательство. По определению $E_{i+1}^{n,m}$ является когомологией последовательности $E_i^{n-i,m+i-1} \to E_i^{n,m} \to E_i^{n+i,m-i+1}$. Тогда очевидно, что $E_3^{2,0} = E_\infty^{2,0}$, $E_3^{1,1} = E_\infty^{1,1}$, $E_4^{0,2} = E_\infty^{0,2}$. Следовательно,

$$E_2^{2,0} = E_\infty^{2,0},\ \text{если}\ E_2^{2,0} = E_3^{2,0}; \tag{4}$$

$$E_2^{1,1} = E_\infty^{1,1},\ \text{если}\ E_2^{1,1} = E_3^{1,1}; \tag{5}$$

$$E_2^{0,2} = E_\infty^{0,2},\ \text{если}\ E_2^{0,2} = E_3^{0,2} = E_4^{0,2}. \tag{6}$$

Так как $E_3^{n,m}$ является когомологией последовательности

$$E_2^{n-2,m+1} \to E_2^{n,m} \to E_2^{n+2,m-1},$$

то $E_2^{n,m} = E_3^{n,m}$, если

$$E_2^{n-2,m+1} = E_2^{n+2,m-1} = 0 \text{ каждый раз, когда } E_2^{n,m} \neq 0. \tag{7}$$

Согласно леммам 1 и 2, условие (7) выполняется для всех целочисленных точек $(n,m) = (2,0), (1,1), (0,2)$. Тогда утверждения (a) и (b) следуют соответственно из (4) и (5).

Аналогично, $E_3^{n,m} = E_4^{n,m}$, если

$$E_2^{n-3,m+2} = E_2^{n+3,m-2} = 0 \text{ каждый раз, когда } E_2^{n,m} \neq 0. \tag{8}$$

Пусть $(n,m) = (0,2)$. Тогда по формуле (2) $E_2^{3,0} \cong H^3(G, H^0(G^1, V)^{(-1)}) = 0$. Поэтому, согласно условию (8), $E_3^{0,2} = E_4^{0,2}$. Таким образом, утверждение (c) следует из (6).

Наконец, утверждение (d) следует из утверждений (a) – (c) и формулы (3).

2.2. Доказательство теоремы. (a) Если $n+m=1$, то для всех целочисленных точек первого квадранта $E_2^{n,m} = E_\infty^{1,0}$, $E_2^{n-2,m+1} = E_2^{n+2,m-1} = 0$. Тогда, используя формулу (3), получим

$$H^1(G,V) = E_2^{1,0} \oplus E_2^{0,1}.$$

Согласно (2), $E_2^{1,0} \cong H^1(G, H^0(G^1, V)^{(-1)})$. Легко показать, что $E_2^{1,0} = 0$. Действительно, если $V \neq k$, то это очевидно. Если $V = k$, то $H^0(G^1,V)^{(-1)} = k$, тогда $E_2^{1,0} \cong H^1(G,k) = 0$. Следовательно, $H^1(G,V) = E_2^{0,1}$. Наконец, используя (3), получим

$$H^1(G,V) \cong H^0(G, H^1(G^1,V)^{(-1)}) \cong Hom_G(k, H^1(G^1,V)^{(-1)}).$$

(b) Согласно леммам 1 и 2, $E_2^{2,0} = E_2^{1,1} = 0$. Тогда по лемме 3 (d)

$$H^2(G,V) = E_2^{02}. \tag{9}$$

Далее, согласно (2), $E_2^{02} \cong H^0(G, H^2(G^1,V)^{(-1)}) \cong \mathrm{Hom}_G(k, H^2(G^1,V)^{(-1)})$. Тогда, используя (9), получим

$$H^2(G,V) \cong \mathrm{Hom}_G(k, H^2(G^1,V)^{(-1)}).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 0828/ГФ4 (рук. А.С. Джумадильдаев) МОН РК по теме «Алгебры, близкие к Лиевым: когомологии, тождества и деформации».

Список литературы

1. *Andersen H.H.* Extensions of modules for algebraic groups // Amer. Journal Math. — 1984. — Vol. 106. — P. 489–504.
2. *Cline E.* Ext^1 for SL_2 // Commun. Algebra. — 1979. — Vol. 7. — P. 107–111.
3. *Yehia S.El.* Extensions of simple modules for the universal Chevalley group and parabolic subgroup. PhD thesis. — Warwik. — 1982.
4. *Ye Jia-chen.* Extensions of simple modules for the group $Sp(4,K)$ // Journal London Math. Soc. — 1990. — Vol. 2(41). — P. 51–62.
5. *Liu Jia-chun, Ye Jia-chen.* Extensions of simple modules for the algebraic group of type G_2 // Commun. Algebra. — 1993. — Vol. 21(6). — P. 1909–1946.
6. *Ибраев Ш.Ш.* Первые группы когомологии простых модулей над алгебраической группой типа B_3 в положительной характеристике // Молодой ученый. — 2011. — Т. 2. — № 2(25). — С. 6–10.
7. *Stewart D.I.* The second cohomology of simple SL_2-modules // Proc. Amer. Math. Soc. — 2010. — Vol. 138. — P. 427–434.

8 *Stewart D.I.* The second cohomology of simple SL_3-modules // Commun. Algebra. — 2012. — Vol. 40. — No. 12. — P. 4702–4716.

9 *Ibraev Sh.Sh.* The second cohomology groups of simple modules over $Sp_4(k)$ // Commun. Algebra. — 2012. — Vol. 40. — No. 3. — P. 1122–1130.

10 *Ibraev Sh.Sh.* The second cohomology groups of simple modules for G_2 // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2011. — Vol. 8. — P. 381–396.

11 *Ибраев Ш.Ш.* Вторые группы когомологии простых модулей над $SO_7(k)$ в положительной характеристике // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2011. — № 2(63). — С. 16–21.

12 *Ибраев Ш.Ш.* О третьих когомологиях простых SL_2-модулей // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2015. — № 1(77). — С. 41–47.

13 *Sullivan J.B.* Frobenius operations on Hochschild cohomology // Amer. Journal Math. — 1980. — Vol. 102. — No. 4. — P. 765–780.

14 *McNinch G.J.* The second cohomology of small irredusible modules for simple algebraic groups // Pacific J. Math. — 2002. — Vol. 204. — No. 2. — P. 459–472.

15 *O'Halloran J.* Weyl modules and the cohomology of Chevalley groups // Amer. Journal Math. — 1981. — Vol. 103. — No. 2. — P. 399–410.

16 *Cline E., Parshall B., Scott L.* Cohomology of finite groups of Lie type. I // IHES Publ. Math. — 1975. — Vol. 45. — P. 169–191.

17 *Cline E., Parshall B., Scott L.* Cohomology of finite groups of Lie type. II // Journal Algebra. — 1977. — Vol. 45. — P. 182–198.

18 University of Georgia VIGRE Algebra Group. First cohomology for finite groups of Lie type: Simple modules with small dominant weights // Trans. Amer. Math. Soc. — 2013. — Vol. 365. — P. 1025–1050.

19 University of Georgia VIGRE Algebra Group. Second cohomology for finite groups of Lie type // Journal Algebra. — 2012. — Vol. 360. — P. 21–52.

20 *Ибраев Ш.Ш.* О первой когомологии алгебраической группы и ее алгебры Ли в положительной характеристике // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96. — № 4. — С. 512–521.

21 *Jantzen J.C.* Representations of algebraic groups. Second edition. American Math. Soc. in Mathematical Surveys and Monographs. — Vol. 107. — 2003.

Ш.Ш. Ыбыраев

Алгебралық группалар үшін жай шектелген модульдердің когомологиялары туралы

Сипаттамасы оң алгебралық тұйық өрістегі түбірлер жүйесі келтірілмеген алгебралық группалар үшін жай шектелген модульдер когомологияларының бірінші және екінші группалары зерттелді. Алгебралық группа үшін жай шектелген модульдің когомология группасы бір өлшемді модуль мен берілген алгебралық группа үшін Фробениус морфизмі ядросының сәйкесті когомология группасының арасындағы морфизмдер кеңістігіне изоморфты екені дәлелденді. Екінші когомология жағдайында негізгі өрістің p сипаттамасына $p \geq 3h - 3$ шектемесі қойылды, бұл жерде h – Кокстер саны.

Кілт создер: алгебралық группа, шектелген жай модуль, когомология, алгебралық тұйық өріс, морфизмдер кеңістігі.

Sh.Sh. Ibraev

On the cohomology of simple restricted modules for algebraic groups

First and second cohomology groups of simple restricted modules for algebraic groups with irreducible root system over an algebraically closed field of positive characteristic are investigated. We show that the cohomology group of simple restricted module for algebraic group is isomorphic to the space of morphisms between the trivial one-dimensional module and the corresponding cohomology group for the Frobenius kernel of this algebraic group. In the second cohomology case assumed that $p \geq 3h - 3$, where h is the Coxeter number.

Keywords: algebraic group, restricted simple module, cohomology, algebraically closed field, space of morphisms.

References

1 Andersen H.H. *American Journal of Mathematics,* 1984, 106, p. 489–504.

2 Cline E. *Commun. Algebra,* 1979, 7, p. 107–111.

3 Yehia S.El. *Extensions of simple modules for the universal Chevalley group and parabolic subgroup. PhD thesis,* Warwik, 1982.

4 Ye Jia-chen. *Journal London Math. Soc.*, 1990, 2(41), p. 51–62.

5 Liu Jia-chun, Ye Jia-chen. *Commun. Algebra*, 1993, 21(6), p. 1909–1946.

6 Ibraev Sh.Sh. *Young scientist,* 2011, 2, 2(25), p. 6–10.

7 Stewart D.I. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2010, 138, p. 427–434.

8 Stewart D.I. *Commun. Algebra*, 2012, 40, 12, p. 4702–4716.

9 Ibraev Sh.Sh. *Commun. Algebra*, 2012, 40, 3, p. 1122–1130.

10 Ibraev Sh.Sh. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2011, 8, p. 381–396.

11 Ibraev Sh.Sh. *Bulletin of Karaganda University, Ser. Mathematics,* 2011, 2(63), p. 16–21.

12 Ibraev Sh.Sh. *Bulletin of Karaganda University, Ser. Mathematics,* 2015, 1(77), p. 41–47.

13 Sullivan J.B. *American Journal of Mathematics*, 1980, 102, 4, p. 765–780.

14 McNinch G.J. *Pacific Journal of Mathematics*, 2002, 204, 2, p. 459–472.

15 O'Halloran J. *Amer. J. Math.*, 1981, 103, 2, p. 399–410.

16 Cline E., Parshall B., Scott L. *IHES Publ. Math.,* 1975, 45, p. 169–191.

17 Cline E., Parshall B., Scott L. *Journal Algebra.*, 1977, 45, p. 182–198.

18 *Transactions of the American Mathematical Society*, 2013, 365, p. 1025–1050.

19 *Journal Algebra,* 2012, 360, p. 21–52.

20 Ibraev Sh.Sh. *Mathematics notes*, 2014, 96, 4, p. 512–521.

21 Jantzen J.C. *Representations of algebraic groups, Second edition, American Math. Soc. in Mathematical Surveys and Monographs,* 107, 2003.

УДК 512.55

А.А. Конырханова[1], В.А. Романьков[2]

[1] *Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск, Казахстан;*
[2] *Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Россия*
(E-mail: ErkeshanK@mail.ru)

О разрешимости коммутаторных уравнений в алгебрах Ли

Доказано, что любое коммутаторное уравнение разрешимо над алгеброй Ли Гейзенберга над произвольным полем в большей алгебре Ли верхних нильтреугольных матриц над этим же полем. Показано, что любой член нижнего центрального ряда кольца (алгебры) Ли верхних нильтреугольных матриц является образом коммутаторной функции от одной переменной, определенной на этом кольце (алгебре).

Ключевые слова: кольцо (алгебра) Ли, нильтреугольные матрицы, уравнение, расщепимое уравнение, коммутатор, простой коммутатор.

Введение

Пусть L – кольцо (алгебра) Ли над произвольным кольцом (полем) коэффициентов K. Уравнением относительно L называется выражение вида

$$f(x_1, ..., x_n, L) = 0, \tag{1}$$

где левая часть получена из переменных $x_1, ..., x_n$ и констант (элементов L) с помощью лиевых операций сложения, умножения (коммутирования) и умножений на элементы из F. Уравнение (1) называется расщепимым, если $f(x_1, ..., x_n, L) = g(x_1, ..., x_n) - a, a \in L$, где $g(x_1, ..., x_n)$ не содержит констант. В этом случае оно записывается в виде

$$g(x_1, ..., x_n) = a. \tag{2}$$

Говорят, что уравнение (1) (или (2)) разрешимо в L, если для некоторых элементов $b_1, ..., b_n \in L$ выполнено равенство $f(b_1, ..., b_n, L) = 0$ в случае (1)(или $g(b_1, ..., b_n) = a$ в случае (2)). Набор элементов $b_1, ..., b_n$ называется решением соответствующего уравнения. Говорят, что уравнение (1) (или (2)) разрешимо над L (в классе колец (алгебр) Ли $\mathbf{A}$), если существует кольцо (алгебра) M над K (из класса $\mathbf{A}$), содержащее в качестве подкольца (подалгебры) L, в котором соответствующее уравнение имеет решение $b_1, ..., b_n \in M$.

О разрешимости уравнений для различных классов колец (алгебр) Ли известно сравнительно мало. Установлена алгоритмическая неразрешимость расщепимых уравнений в свободных и свободных нильпотентных ступени не меньше девяти кольцах Ли ранга не меньше двух над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ [1]. Вычислена коммутаторная ширина ряда свободных и относительно свободных, в том числе свободных нильпотентных, алгебр Ли конечного ранга [2], т.е. для соответствующей алгебры L определено наименьшее число k такое, что для любого элемента a из квадрата L^2 алгебры L уравнение (2) с левой частью вида $[x_1, x_2] + ... + [x_{2k-1}, x_{2k}]$ имеет решение в L.

Простой коммутатор веса $k \geq 3$ от неизвестных и (или) элементов алгебры Ли L определяется индуктивно: $[z_1, z_2, ..., z_k] = [[z_1, z_2, ..., z_{k-1}], z_k]$. Выражение $[x, y; k] = [x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}]$ означает простой коммутатор с k вхождениями y. Уравнение (2) называется коммутаторным, если его левая часть имеет вид $[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}], i_1, i_2, ..., i_k \in \{x_1, ..., x_n\}$. Здесь $\{x_1, ..., x_n\}$ – множество всех неизвестных, участвующих в записи уравнения.

В данной работе рассматривается разрешимость коммутаторных уравнений (2) относительно (кольца) алгебры Ли $\mathbb{N}_n(K)$ верхних нильтреугольных матриц размера $n \times n$ над произвольным ассоциативным кольцом с единицей (полем) K.

Доказаны аналоги теорем Н.С. Бахта [3, 4], уточненных первым автором в [5, 6]. Эти теоремы относятся к разрешимости коммутаторных уравнений вида (2) в группах верхних унитреугольных матриц

$\mathrm{UT}_n(K)$ размера $n \times n$ над ассоциативным кольцом с единицей (полем) K. При этом, конечно, простой коммутатор левой части (2) понимается в теоретико-групповом смысле.

Предложение 1. Коммутаторное уравнение (2) вида

$$[x, y] = a$$

имеет решение в $\mathbb{N}_n(F)$ тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{N}_n(F)^2$. При этом значение y можно выбрать фиксированным: $y = g, g \in \mathbb{N}_n(F)$, не зависящим от a.

Следствие 1. Коммутант (квадрат) $\mathbb{N}_n(F)^2$ кольца (алгебры) $\mathbb{N}_n(F)$ является образом функции одной переменной $\mathbb{N}_n(F) \to \mathbb{N}_n(F)^2, x \mapsto [x, g]$ при некотором фиксированном элементе $g \in \mathbb{N}_n(F)$.

Элемент g с указанным свойством называется *универсальным.* В [3, 4] приведено описание универсальных элементов в групповом случае.

Предложение 2. Коммутаторное уравнение (2) вида

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}] = a$$

имеет решение в $\mathbb{N}_n(F)$ тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{N}_n(F)^{k+1}$. При этом значение y можно выбрать фиксированным: $y = g, g \in \mathbb{N}_n(F)$, не зависящим от a.

Следствие 2. Степень $\mathbb{N}_n(F)^{k+1}$ кольца (алгебры) Ли $\mathbb{N}_n(F)$ является образом функции одной переменной $\mathbb{N}_n(F) \to \mathbb{N}_n(F)^{k+1}, x \mapsto [x, g; k]$ при некотором фиксированном элементе $g \in \mathbb{N}_n(F)$.

Элемент g с указанным свойством называется *универсальным*, что соответствует частному случаю следствия 2 следствию 1. Такие элементы в групповом случае также описаны в [3, 4]. Доказательства приведенных предложений 1 и 2 содержатся в разделе 2.

Отметим работы А. Бира [7, 8], в которых установлено, что вербальные подгруппы групп унитреугольных матриц над полем исчерпываются членами нижнего центрального ряда, и доказано, что каждая такая вербальная подгруппа совпадает с множеством значений простого коммутатора от различных переменных соответствующей длины. В работе Ю.В. Сосновского [9] (анонс в [10]) доказано, что члены нижнего центрального ряда группы треугольных матриц над произвольным полем являются множествами значений любого внешнекоммутаторного слова соответствующей длины. Напомним, что внешнекоммутаторным словом длины l называется любое слово, полученное из l различных переменных с помощью операций коммутирования.

Раздел 3 посвящен доказательству основного результата статьи о разрешимости произвольного коммутаторного уравнения (2) над алгеброй Ли $\mathbb{N}_3(F)$ нильтреугольных матриц, которое называется *алгеброй Гейзенберга.* Здесь F обозначает произвольное поле.

Теорема 1. Любое коммутаторное уравнение (2) вида

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}] = a, a \in \mathbb{N}_3(F), i_1, i_2, ..., i_k \in \{x_1, ..., x_n\}, i_1 \neq i_2, \tag{3}$$

имеет решение в алгебре $\mathbb{N}_m(F)$ при достаточно большом m и естественном вложении $\mathbb{N}_3(F)$ в $\mathbb{N}_m(F)$.

Детали, касающиеся фигурирующего в формулировке теоремы 1 вложения, смотрите в разделе 3.

2 Представимость коммутанта и членов нижнего центрального ряда кольца (алгебры) $\mathbb{N}_n(K)$ как образа коммутаторной функции одной переменной

Рассмотрим множество $\mathbb{N}_n(F)$ верхних нильтреугольных матриц размера $n \times n$ над полем F, т.е. множество всех матриц $x = (x_{i,j})$ размера $n \times n$, в которых $x_{ij} = 0$ при $i \geq j$. Легко проверяется, что для всех $x \in \mathbb{N}_n(F)$ выполняется равенство $x^n = 0$. Более того, для любых элементов $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{N}_n(F)$ выполнено равенство $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 0$. В то же время произведение $e1, 2 \cdot e_{2,3} \cdot ... \cdot e_{n-1,n} = e_{1,n}$ не равно 0. Таким образом, множество $\mathbb{N}_n(F)$ с обычными матричными операциями сложения, умножения и умножения на элементы из F является нильпотентной ассоциативной алгеброй ступени нильпотентности n. При замене поля F на коммутативное ассоциативное кольцо K получаем ассоциативное кольцо $\mathbb{N}_n(K)$, которое является нильпотентным ступени не больше, чем n.

Далее рассматриваем алгебры Ли $\mathbb{N}_n(F)$ над произвольным полем F.

Определим на $\mathbb{N}_n(F)$ операцию коммутирования, полагая $[x, y] = xy - yx$ для любой пары элементов $x, y \in \mathbb{N}_n(F)$. Хорошо известно, что $(\mathbb{N}_n(F), +, [\ ])$ является алгеброй Ли, для которой мы сохраняем обозначение $\mathbb{N}_n(F)$. Алгебра Ли $\mathbb{N}_n(F)$ нильпотентна ступени n. Действительно, тождество $[x_1, x_2, ..., x_n] = 0$

следует из соответствующего тождества ассоциативной алгебры, а непосредственно проверяемое равенство $[e_{1,2}, e_{2,3}, ..., e_{n-1,n}] = e_{1,n}$ показывает, что ступень нильпотентности при этом не меньше, чем n. Любая подалгебра алгебры $\mathbb{N}_n(F)$ также является нильпотентной алгеброй Ли степени нильпотентности не больше, чем n.

Алгебры Ли составляют один из основных классов алгебр. Важность алгебр Ли объясняется тем, что они тесно связаны с группами Ли, т.е. важнейшим классом непрерывных групп.

Матричные единицы $e_{i,j}$ при $i < j$ образуют базу линейного пространства $V_n(F)$ алгебры $\mathbb{N}_n(F)$. Тогда $dim(V_n(F)) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Таблица умножения для матричных единиц обычная: $e_{i,j} \cdot e_{j,k} = e_{i,k}, e_{i,j} \cdot e_{l,k} = 0$ при $j \neq l$.

Заметим, что для алгебры Ли $\mathbb{N}_n(F)$ и любых $\alpha, \beta \in F$ верны соотношения

$$[\alpha e_{i,j}, \beta e_{k,l}] = \begin{cases} \alpha\beta e_{i,l}, \text{если } j = k; \\ -\alpha\beta e_{k,j}, \text{если } i = l; \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определим для $m = 1, 2, ..., n-1$ множество матриц $\mathbb{N}_n(F)^m$, состоящее из всех матриц с $m-1$ нулевой диагональю выше главной. Известно, что $\mathbb{N}_n(F)^m$ совпадает с m-й степенью алгебры $\mathbb{N}_n(F)$.

Предложение 1. Коммутаторное уравнение (2) вида

$$[x, y] = a \tag{4}$$

имеет решение в $\mathbb{N}_n(F)$ тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{N}_n(F)^2$.

Доказательство. Случаи $n = 1, 2$, когда $[x, y] = 0$, тривиальны. В дальнейшем считаем, что $n \geq 3$.

Пусть для некоторого $a \in \mathbb{N}_n(F)$ уравнение (4) имеет решение в $\mathbb{N}_n(F)$, тогда докажем, что $a \in \mathbb{N}_n(F)^2$. Матрицы $x, y \in \mathbb{N}_n(F)$ однозначно записываются в виде

$$x = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{i,j} e_{i,j}, \;\; y = \sum_{1 \leq i < j \leq n} y_{i,j} e_{i,j}; \;\; x_{i,j}, y_{i,j} \in F.$$

Непосредственным вычислением получаем, что

$$x \cdot y = \sum_{i<j<k} x_{i,j} y_{j,k} e_{i,k}.$$

Заметим, что $k - i \geq 2$, т.е. при умножении любых двух матриц из $\mathbb{N}_n(F)$ получим матрицу с нулями на первой побочной диагонали. Тогда $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x \in \mathbb{N}_n(F)^2$. Таким образом, $a \in \mathbb{N}_n(F)^2$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $a = \sum_{j-i \geq 2} a_{i,j} e_{i,j}, \; a_{i,j} \in F$. Покажем разрешимость уравнения (4).

Пусть x – матрица, у которой на первой побочной диагонали стоят единицы, а остальные элементы нули, т.е. $x = \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1}$. Тогда уравнение (4) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} y_{i,j} e_{i,j} - \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} y_{i,j} e_{i,j} = \sum_{j-i \geq 2} a_{i,j} e_{i,j}. \tag{5}$$

Легко проверяется, что значение второй побочной диагонали $(a_{1,3}, a_{2,4}, ..., a_{n-2,n})$ (первая нулевая) матрицы a полностью определяется значениями первой побочной диагонали матрицы y, а именно:

$$a_{1,3} = y_{2,3} - y_{1,2}, a_{2,4} = y_{3,4} - y_{2,3};$$
$$a_{3,5} = y_{4,5} - y_{3,4}, a_{4,6} = y_{5,6} - y_{4,5}, ...;$$
$$a_{n-2,n} = y_{n-1,n} - y_{n-2,n-1}.$$

Полагаем, что

$$y_{1,2} = a_{1,3}, y_{2,3} = 0, y_{3,4} = a_{2,4};$$
$$y_{4,5} = a_{2,4} + a_{3,5}, y_{5,6} = a_{2,4} + a_{3,5} + a_{4,6}, ...;$$
$$y_{n-1,n} = a_{2,4} + a_{3,5} + a_{4,6} + ... + a_{n-2,n}.$$

Продолжаем решать уравнение (5) относительно неизвестных $y_{1,3}, y_{2,4}, ..., y_{n-2,n}$:

$$\begin{gathered} a_{1,4} = y_{2,4} - y_{1,3}; \\ a_{2,5} = y_{3,5} - y_{2,4}; \\ a_{3,6} = y_{4,6} - y_{3,5}; \\ ... \\ a_{n-3,n} = y_{n-2,n} - y_{n-3,n-1}. \end{gathered}$$

Полагая $y_{2,4} = 0$, определяем значения переменных $y_{1,3}, y_{3,5}, y_{4,6}, ..., y_{n-2,n}$, т.е. все значения второй побочной диагонали матрицы y, и т.д. Значения предпоследней диагонали матрицы y определяется из уравнения

$$a_{1,n} = y_{2,n} - y_{1,n-1}.$$

Полагая $y_{1,n-1} = 0$, определяем значение $y_{2,n}$. Таким образом, мы получили все значения матрицы y. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. Коммутаторное уравнение (2) вида

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}] = a \tag{6}$$

имеет решение в $\mathbb{N}_n(F)$ тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{N}_n(F)^{k+1}$, где $n > k+1$.

Доказательство. Пусть для некоторого $a \in \mathbb{N}_n(F)$ уравнение (6) имеет решение в $\mathbb{N}_n(F)$, тогда докажем, что $a \in \mathbb{N}_n(F)^{k+1}$. Используем индукцию по k. При $k = 1$ утверждение предложений доказано в предложении 1. Допустим, что предложение 2 справедливо при $k-1$, где $k \geq 2$, т.е. известно, что если $[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k-1}] = a$ имеет решение в $\mathbb{N}_n(F)$, то $a \in \mathbb{N}_n(F)^k$. Подалгебра Ли $\mathbb{N}_n(F)^k$ состоит из всех матриц, имеющих $k-1$ нулевую побочную диагональ. Возьмем произвольную матрицу $z \in [x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k-1}]$, тогда по предположению $z \in \mathbb{N}_n(F)^k$, т.е.

$$z = \sum_{j-i \geq k} z_{i,j} e_{i,j}, \ z_{i,j} \in F. \tag{7}$$

Непосредственным вычислением для любого $z \in \mathbb{N}_n(F)^k$ и $y \in \mathbb{N}_n(F)$ получим, что $z \cdot y \in \mathbb{N}_n(F)^{k+1}$. Тогда $[z, y] = z \cdot y - y \cdot z \in \mathbb{N}_n(F)^{k+1}$. Таким образом, $a \in \mathbb{N}_n(F)^{k+1}$.

Докажем обратное утверждение. Возьмем произвольную матрицу $a \in \mathbb{N}_n(F)^{k+1}$, покажем разрешимость уравнения (6). Используем индукцию по k. При $k-1$ утверждение теоремы доказано в предложении 1. При этом в качестве y можно выбрать матрицу, в которой на первой побочной диагонали стоят единицы, а остальные элементы — нули. Допустим, что предложение 2 справедливо для этой матрицы при $k-1$, где $k \geq 2$. Теперь докажем, что матрица a представима в виде $a = [x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}]$. По индуктивному предположению для этого достаточно найти матрицу $z \in \mathbb{N}_n(F)^k$ такую, что $a = [z, y]$.

Действительно, если мы найдем такую матрицу z, то её можно представить как $z = [x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k-1}]$, и тогда $a = [x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}]$.

Будем решать уравнение

$$a = [z, y],$$

где неизвестной является матрица $z \in \mathbb{N}_n(F)^k$, тогда эту матрицу можем записать в виде (7).

Легко проверяется, что значение $(k+1)$–й побочной диагонали $(a_{1,k+2}, a_{2,k+3}, ..., a_{n-k-1,n})$ (все предыдущие нулевые) матрицы a полностью определяется значениями $(z_{1,k+1}, z_{2,k+2}, ..., z_{n-k,n})$ k-й побочной диагонали матрицы z. А именно:

$$\begin{gathered} a_{1,k+2} = z_{1,k+1} - z_{2,k+2}, \ a_{2,k+3} = z_{2,k+2} - z_{3,k+3}; \\ a_{3,k+4} = z_{3,k+3} - z_{4,k+4} \ , ..., \ a_{n-k-1,n} = z_{n-k-1,n-1} - z_{n-k,n}. \end{gathered}$$

Полагая $z_{2,k+2} = 0$, получим все значения $(k+1)$-й побочной диагонали матрицы z, а именно:

$$z_{1,k+1} = a_{1,k+2}, z_{3,k+3} = -a_{2,k+3}, z_{4,k+4} = -a_{2,k+3} - a_{3,k+4},$$
$$z_{5,k+5} = -a_{2,k+3} - a_{3,k+4} - a_{4,k+5}, ..., \; z_{n-k,n} = -a_{2,k+3} - a_{3,k+4} - a_{4,k+5} - ... - a_{n-k-1,n}.$$

Элементы матрицы z выше этой диагонали считаются произвольными. По индуктивному предположению матрица z представима в виде $z = [x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k-1}]$. В дальнейшем мы определяем значения матрицы z, стоящие выше $(k+1)$–й побочной диагонали. Значение $(k+2)$–й диагонали определяется из системы уравнений вида

$$\begin{aligned} a_{1,k+3} = z_{1,k+2} - z_{2,k+3}, a_{2,k+4} = z_{2,k+3} - z_{3,k+4}; \\ a_{3,k+5} = z_{3,k+4} - z_{4,k+5}, ..., a_{n-k-2,n} = z_{n-k-2,n-1} - z_{n-k-1,n}. \end{aligned} \tag{8}$$

Полагая $z_{2,k+3} = 0$, определим все значения $(k+2)$-й побочной диагонали $z_{1,k+2}, \; z_{2,k+3}, ..., z_{n-k-1,n}$ матрицы z. Вычислим $[z, y]$ и получим систему уравнений, аналогичных (8). Продолжая указанный процесс, мы получим все значения матрицы z. Предложение доказано.

Замечание. Аналоги предложений 1 и 2 справедливы также в случае, если рассматривается кольцо Ли $\mathbb{N}_n(K)$, где K – произвольное коммутативное ассоциативное кольцо с 1. Доказательства аналогичны приведенным выше.

3 Разрешимость коммутаторных уравнений над алгеброй Ли $\mathbb{N}_3(K)$

Пусть F – произвольное поле. Алгебра Ли $\mathbb{N}_3(F)$ называется *алгеброй Гейзенберга.* Она имеет различные приложения как в математике, так и в теоретической физике. Вначале установим вложимость алгебры Ли $\mathbb{N}_3(F)$ в достаточно высокую степень $s-1$ алгебры Ли $\mathbb{N}_{2s-1}(F)$.

Рассмотрим линейное отображение $\varphi : \mathbb{N}_3(F) \to \mathbb{N}_t(F), t = 2s-1$, по правилу

$$x = x_{1,2}e_{1,2} + x_{1,3}e_{1,3} + x_{2,3}e_{2,3} \longmapsto x_{1,2}e_{1,s} + x_{1,3}e_{1,t} + x_{2,3}e_{s,t},$$

где $x_{i,j} \in F$. Это отображение будет изоморфизмом алгебры Ли $\mathbb{N}_3(F)$ и подалгебры алгебры Ли $\mathbb{N}_t(F)$, порожденной элементами $e_{1,s}, e_{1,t}, e_{s,t}$. Другими словами, указанное отображение является изоморфным вложением алгебры Ли $\mathbb{N}_3(F)$ в алгебру Ли $\mathbb{N}_t(F)$. При этом образ $\varphi(N_3(\mathbb{F}))$ лежит в $\mathbb{N}_t(F)^{s-1}$.

Докажем, что отображение φ — действительно указанный изоморфизм. Очевидно, что для любых $a, b \in \mathbb{F}$ и $x, y \in \mathbb{F}$ выполнено равенство $\varphi(ax + by) = a\varphi(x) + b\varphi(y)$. По определению отображения φ прообразом нулевого элемента является только нулевой элемент. Остается доказать свойство гомоморфности для умножения.

Пусть

$$x = x_{1,2}e_{1,2} + x_{1,3}e_{1,3} + x_{2,3}e_{2,3}, y = y_{1,2}e_{1,2} + y_{1,3}e_{1,3} + y_{2,3}e_{2,3}.$$

Тогда

$$\varphi(x) = x_{1,2}e_{1,s} + x_{1,3}e_{1,3+t} + x_{2,3}e_{s,3+t}, \varphi(y) = y_{1,2}e_{1,s} + y_{1,3}e_{1,3+t} + y_{2,3}e_{s,3+t}.$$

Непосредственным вычислением находим

$$[\varphi(x), \; \varphi(y)] = (x_{1,2}y_{2,3} - y_{1,2}x_{2,3})e_{1,3+t}.$$

С другой стороны, $\varphi([x, y]) = \varphi((x_{1,2}y_{2,3} - y_{1,2}x_{2,3})e_{1,3}) = ((x_{1,2}y_{2,3} - y_{1,2}x_{2,3})e_{1,3+t}$. Значит, φ является изоморфным вложением.

Таким образом, для любого числа $s \geq 3$ алгебра $\mathbb{N}_3(F)$ вложима в степень $s-1$ алгебры $\mathbb{N}_t(F)$ при $t = 2s-1$. Указанное вложение будем называть *естественным.* Именно такое отображение фигурирует в формулировке теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим уравнение (3). Обозначим: $x = x_{i_1}, y = x_{i_2}$. Если в записи уравнения (3) имеются переменные, отличные от x, y, заменим их на y. Получим коммутаторное уравнение от двух переменных. Его разрешимость над алгеброй $\mathbb{N}_3(F)$ в алгебре Ли вида $\mathbb{N}_t(F)$ влечет разрешимость исходного уравнения (3) в этой алгебре. Поэтому далее предполагаем, что уравнение (3) зависит только от двух неизвестных x и y.

Для упрощения вычислений рассмотрим уравнение вида

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}, \underbrace{x, ..., x}_{l}] = a. \tag{9}$$

Докажем, что для любого $a \in \mathbb{N}_3(F)$ уравнение (9) разрешимо над $\mathbb{N}_3(F)$ в алгебре Ли $\mathbb{N}_m(F)$ при достаточно большом m. Точное значение m будет приведено по окончании доказательства. Считаем, что образ $\mathbb{N}_3(F)$ при естественном вложении лежит в $\mathbb{N}_m(F)^{k+l+1}$.

При $k = 1$ или $l = 0$ получим уравнение вида (6), разрешимость которого установлена в предложении 2. Рассмотрим случаи, когда $k > 1, l > 0$. Алгебру $\mathbb{N}_3(F)$ вложим в алгебру $\mathbb{N}_m(F)^{k+l+1}$ по правилу

$$a = a_{1,2}e_{1,2} + a_{1,3}e_{1,3} + a_{2,3}e_{2,3} \longmapsto a_{1,2}e_{1,s} + a_{1,3}e_{1,m} + a_{2,3}e_{s,m},$$

где $a_{i,j} \in F$ и $k + l + 1 < s < m - k - l$.

Тогда решением уравнения (9) является выражение вида

$$x = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}, \ y = \overline{y_1} + \overline{y_2} + \overline{y_3}, \tag{10}$$

где

$$\overline{x_1} = (-1)^l a_{1,2}e_{1,\alpha_1} + e_{\alpha_1,\alpha_2} + ... + e_{\alpha_l,\alpha_{l+1}};$$

$$\overline{y_1} = e_{\alpha_{l+1},\alpha_{l+2}} + e_{\alpha_{l+2},\alpha_{l+3}} + ... + e_{\alpha_{l+k},s};$$

$$\overline{x_2} = (-1)^l a_{1,3}e_{1,\beta_1} + e_{\beta_1,\beta_2} + ... + e_{\beta_l,\beta_{l+1}};$$

$$\overline{y_2} = e_{\beta_{l+1},\beta_{l+2}} + e_{\beta_{l+2},\beta_{l+3}} + ... + e_{\beta_{l+k},m};$$

$$\overline{x_3} = e_{\gamma_k,\gamma_{k+1}} + e_{\gamma_{k+1},\gamma_{k+2}} + ... + e_{\gamma_{k+l},m};$$

$$\overline{y_3} = (-1)^k a_{2,3}e_{s,\gamma_1} + e_{\gamma_1,\gamma_2} + ... + e_{\gamma_{k-1},\gamma_k}.$$

При этом выполнены следующие неравенства:

$$1 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_{l+k} < \beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_{l+k} < \gamma_1\gamma_2 < ... < \gamma_{k+l+1}$$

и

$$\beta_i, \gamma_j \neq s \text{ при } i = \overline{1, k+l}, \ j = \overline{1, k+l}.$$

Докажем, что (10) является решением уравнения (9). Для этого подставим значения (10) в (9) и произведем вычисления:

$$[x, y] = e_{\alpha_l,\alpha_{l+2}} + e_{\beta_l,\beta_{l+2}} - e_{\gamma_{k-1},\gamma_{k+1}};$$

$$[x, y, y] = e_{\alpha_l,\alpha_{l+3}} + e_{\beta_l,\beta_{l+3}} + e_{\gamma_{k-2},\gamma_{k+1}};$$

$$[x, y, y, y] = e_{\alpha_l,\alpha_{l+4}} + e_{\beta_l,\beta_{l+4}} - e_{\gamma_{k-3},\gamma_{k+1}};$$

$$\cdots$$

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k-1}] = e_{\alpha_l,\alpha_{l+k}} + e_{\beta_l,\beta_{l+k}} + (-1)^{k-1}e_{\gamma_1,\gamma_{k+1}};$$

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}] = e_{\alpha_l,s} + e_{\beta_l,m} + a_{2,3}e_{s,\gamma_{k+1}};$$

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}, x] = a_{2,3}e_{s,\gamma_{k+2}} - e_{\alpha_{l-1},s} - e_{\beta_{l-1},m};$$

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}, x, x] = a_{2,3}e_{s,\gamma_{k+3}} + e_{\alpha_{l-2},s} - e_{\beta_{l-2},m};$$

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}, \underbrace{x, x, ..., x}_{l-1}] = a_{2,3}e_{s,\gamma_{k+l}} + (-1)^{l-1}e_{\alpha_1,s} + (-1)^{l-1}e_{\beta_1,m};$$

$$[x, \underbrace{y, y, ..., y}_{k}, \underbrace{x, x, ..., x}_{l}] = a_{2,3}e_{s,m} + a_{1,2}e_{1,s} + a_{1,3}e_{1,m}.$$

В общем случае мы рассмотрим уравнение вида

$$[x, y, z_1, ..., z_{k+l-1}] = a, \qquad (11)$$

где неизвестные z_i совпадают либо с x, либо с y. Пусть неизвестная x встречается в записи коммутатора ровно $(l+1)$ раз, а y – ровно k раз. Непосредственно проверяется, что полученные выше решения уравнения (9) также будут решениями уравнения (11).

Остается оценить минимальное при данном методе значение m. Используемых индексов вида $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$ и $\gamma_{i,j}$ ровно $3(k+l)$. Есть еще индексы $1, s$. Все они меньше, чем m. Значит, минимально возможное значение m равно $3(k+l)+3 = 3(k+l+1)$. Оно равно утроенной длине коммутатора из левой части рассматриваемого уравнения.

Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства видно, что аналогичные рассуждения проходят, если вместо алгебры Ли Гейзенберга рассматривать кольцо Ли Гейзенберга $\mathbb{N}_3(K)$ над произвольным ассоциативным кольцом с единицей K.

4 О разрешимости коммутаторных уравнений над произвольной нильпотентной алгеброй Ли

Пусть $\mathbb{N}$ – произвольная нильпотентная алгебра Ли конечной размерности над полем F. Известно, что при достаточно большом n алгебра $\mathbb{N}$ вложима в алгебру Ли $\mathbb{N}_n(F)$.

Гипотеза. Любое коммутаторное уравнение (2) разрешимо в классе нильпотентных алгебр Ли над произвольной нильпотентной алгеброй Ли $\mathbb{N}$.

В свете приведенного выше вложения достаточно подтвердить данную гипотезу для случая $\mathbb{N} = \mathbb{N}_n(F)$, причем алгебру M, в которой находится решение рассматриваемого уравнения, можно также искать в виде $\mathbb{N}_m(F)$. При $n = 3$ утверждение гипотезы дано теоремой 1.

Исследование второго автора выполнено за счет Российского научного фонда (проект №16-11-10002).

Список литературы

1 *Романьков В.А.* О неразрешимости проблемы эндоморфной сводимости в свободных нильпотентных группах и в свободных кольцах // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16. — № 4. — С. 457–471.

2 *Романьков В.А.* Коммутаторная ширина некоторых относительно свободных алгебр Ли и нильпотентных групп // Сиб. мат. журн. — 2016. — Т. 57. — № 4. — С. 866–888.

3 *Бахта Н.С.* О представимости коммутанта группы $UT(n, K)$ множеством значений функции одной переменной // Вестн. Омского ун-та. — 2012. — № 2. — С. 44–46.

4 *Бахта Н.С.* О представимости членов нижнего центрального ряда группы $UT(n, K)$ множеством значений функции одной переменной // Вестн. Омского ун-та. — 2013. — № 4. — С. 13–15.

5 *Конырханова А.А.* Универсальные элементы групп унитреугольных матриц над полем // Вестн. Омского ун-та. — 2015. — № 4(78). — С. 18–20.

6 *Конырханова А.А.* Универсальные элементы групп унитреугольных матриц над кольцом целых чисел // Вестн. Омского ун-та. — 2016. — № 2. — С. 11–13.

7 *Bier A.* Verbal subgroups in the group of triangular matrices over field of characteristic 0 // Journal Algebra. — 2009. — Vol. 321. — No. 2. — P. 483–494.

8 *Bier A.* The width of verbal subgroups in the group of unitriangular matrices over a field // International Journal of Algebra and Computation. — 2012. — Vol. 22. — No. 3. — P. 1250019.

9 *Sosnovskiy Yu.V.* On the width of verbal subgroups of the groups of triangular matrices over a field of arbitrary characteristic // International Journal of Algebra and Computation. — 2016. — Vol. 26. — No. 2. — P. 217–222.

10 *Сосновский Ю.В.* Вербальные подгруппы групп треугольных и унитреугольных матриц над полем произвольной характеристики // Мальцевские чтения: сб. тезисов докл. междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения Анатолия Ивановича Мальцева, 24–28 августа, Новосибирск, 2009. — С. 85, 86.

Ә.Ә. Қоңырханова, В.А. Романьков

Ли алгебрасында коммутаторлық теңдеулердің шешімділігі туралы

Кез келген коммутаторлық теңдеу Гейзенберг Ли сақинасының (алгебрасының) сыртындағы үлкен жоғарғы нильүшбұрышты матрицалар сақинасында (алгебрасында) шешімді екендігі дәлелденген. Жоғарғы нильүшбұрышты матрицалардың Ли сақинасының (алгебрасының) төменгі орталық қатарының кез келген мүшесі осы сақинада (алгебрада) анықталған бір айнымалы коммутаторлық функцияның бейнесі болатындығы көрсетілген.

Кілт сөздер: Ли сақинасы (алгебрасы), нильүшбұрышты матрицалар, теңдеу, теңдеу шешімділігі, коммутатор, жай коммутатор.

A.A. Konyrkhanova, V.A. Roman'kov

On solvability of commutator equations in Lie algebras

We prove that every commutator equation is solvable over the Heisenberg Lie algebra in the case of arbitrary field in a bigger Lie algebra of upper niltriangular matrices over the same field. It is shown that every member of the descending central series of the Lie ring (algebra) of the upper niltriangular matrices is the image of a commutator one-variable function defined on this Lie ring (algebra).

Keywords: Lie ring (algebra), niltriangular matrices, equation, split equation, commutator, simple commutator.

References

1 Roman'kov V.A. *Algebra and logic,* 1977, 16, 4, p. 457–471.
2 Roman'kov V.A. *Siberian Mathematical Journal,* 2016, 57, 4, p. 866–888.
3 Bahta N.S. *Bull. of Omsk University,* 2012, 2, p. 44–46.
4 Bahta N.S. *Bull. of Omsk University,* 2013, 4, p. 13–15.
5 Konyrkhanova A.A. *Bull. of Omsk University,* 2015, 4(78), p. 18–20.
6 Konyrkhanova A.A. *Bull. of Omsk University,* 2016, 2, p. 11–13.
7 Bier A. *Journal Algebra,* 2009, 321, 2, p. 483–494.
8 Bier A. *International Journal of Algebra and Computation,* 2012, 22, 3, p. 1250019.
9 Sosnovskiy Yu.V. *International Journal of Algebra and Computation,* 2016, 26, 2, p. 217–222.
10 Sosnovskiy Yu.V. *In International Conference «Mal'tsev Meeting», dedicated to the 100th anniversary of Anatoliǐ Ivanovich Mal'tsev,* August, 24–28, Novosibirsk, 2009, p. 85, 86.

УДК 512.56, 512.57

С.М. Луцак

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
(E-mail: sveta_lutsak@mail.ru)

Сложность решеток квазимногообразий унарных алгебр

Вопрос о том, что считать сложностью решетки квазимногообразий и какие решетки квазимногообразий являются сложными согласно той или иной мере сложности, а какие — нет, изучался многими авторами. В статье рассмотрены две меры сложности решеток квазимногообразий. Проведено исследование сложности строения решеток квазимногообразий унарных алгебр. Изучена взаимосвязь между двумя мерами сложности решеток квазимногообразий. М.В. Швидефски и А. Замойска-Дженио была поставлена следующая проблема: существует ли не Q-универсальный класс, для которого множество всех конечных подрешеток решетки квазимногообразий невычислимо? Автором доказана выполнимость нетривиального тождества на решетках квазимногообразий унарных алгебр, вследствие чего получен определенный результат относительно данной проблемы.

Ключевые слова: невычислимое множество, решетки квазимногообразий, Q-универсальность, унарный функциональный символ, нижняя полурешетка, унарная алгебра, сложность решетки.

1 Введение

В работе проводится исследование сложности решеток квазимногообразий унарных алгебр. Рассматриваются две хорошо известные меры сложности: *невычислимость* множества всех конечных подрешеток решеток квазимногообразий и *Q-универсальность*. Напомним, что *унарной алгеброй* называется алгебра, сигнатура которой состоит только из одного унарного функционального символа. Квазимногообразия унарных алгебр изучались А.М. Нуракуновым в [1], см. также работы В.К. Карташова [2–4]. А.М. Нуракунов построил квазимногообразие K унарных алгебр, такое что множество всех конечных подрешеток решетки квазимногообразий $\mathrm{Lq}(K)$ является *невычислимым* [1], т. е. не существует алгоритма, позволяющего для данной конечной решетки определить, является ли она подрешеткой решетки $\mathrm{Lq}(K)$ или нет. Существование квазимногообразий с таким свойством свидетельствует об исключительной сложности строения решеток квазимногообразий, в связи с чем известная проблема Биркгофа-Мальцева [5–7] может оказаться сложнее, чем ожидалось: нахождение описания решеток, изоморфных решеткам квазимногообразий, даже для определенных классов алгебраических систем, может быть весьма сложным. Другой мерой сложности строения решеток квазимногообразий является *Q-универсальность*. Согласно М.В. Сапиру [8], квазимногообразие K будет *Q-универсальным*, если для любого квазимногообразия R конечной сигнатуры решетка $\mathrm{Lq}(R)$ является гомоморфным образом некоторой подрешетки в решетке $\mathrm{Lq}(K)$. В настоящее время известно много различных Q-универсальных квазимногообразий (см. [5, 8, 9]). Q-универсальность квазимногообразия унарных алгебр была доказана В.А. Горбуновым в работе [10], см. также работу А.В. Кравченко [11]. В [12] была установлена связь между двумя мерами сложности, а именно было доказано, что класс K *всех* систем сигнатуры σ является Q-универсальным тогда и только тогда, когда он содержит подкласс R, такой что множество всех конечных подрешеток решетки $\mathrm{Lq}(R)$ невычислимо. В этой связи возникла следующая проблема [9, 12]: верно ли, что любой Q-универсальный класс систем K фиксированной сигнатуры содержит подкласс R, такой что множество всех конечных подрешеток решетки $\mathrm{Lq}(R)$ невычислимо? И существует ли класс K, не являющийся Q-универсальным, но, тем не менее, обладающий указанным выше свойством? Автором показано, что решетки квазимногообразий унарных алгебр удовлетворяют нетривиальному тождеству. Вследствие чего установлено существование континуума квазимногообразий K унарных алгебр, таких что множества всех конечных подрешеток решеток квазимногообразий $\mathrm{Lq}(K)$ невычислимы, но, тем не менее, не являются Q-универсальными, см. теоремы 2 и 3.

2 Основные понятия

Частично упорядоченное множество $\mathcal{S}$ называется *нижней полурешеткой*, если любые два элемента $x, y \in S$ имеют точную нижнюю грань $x \wedge y$ [5; 9]. Двойственным образом определяется верхняя полурешетка. Частично упорядоченное множество $\mathcal{S}$ называется *решеткой*, если оно одновременно является верхней и нижней полурешетками [5; 10]. Решетка $\mathcal{S}$ называется *полной*, если любое подмножество $A \subseteq S$ имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани [5; 11]. Для нижней полурешетки $\mathcal{S} = \langle S; \wedge \rangle$ обозначим через $\mathrm{Sub}(\mathcal{S})$ решетку всех нижних подполурешеток в $\mathcal{S}$. Для любых двух подполурешеток S_0, $S_1 \in \mathrm{Sub}(\mathcal{S})$ множество

$$S_0 + S_1 = \{s_0 \wedge s_1 \mid s_0 \in S_0,\ s_1 \in S_1\}$$

является наименьшей нижней подполурешеткой в $\mathcal{S}$, содержащей $S_0 \cup S_1$, т. е. решеточным объединением S_0 и S_1 в $\mathrm{Sub}(\mathcal{S})$ [9].

Все рассматриваемые классы алгебраических систем являются *абстрактными*, т. е. замкнутыми, относительно изоморфизмов [13; 207]. Обозначим через $K(\sigma)$ класс всех систем сигнатуры σ, через $S(K)$ — класс всех систем из $K(\sigma)$, изоморфных подсистемам систем из K [5; 24]. Пусть $R \subseteq K \subseteq K(\sigma)$. Тогда R называется *K-квазиэквациональным*, если

$$R = K \cap \mathrm{Mod}(\Sigma)$$

для некоторого множества Σ квазитождеств сигнатуры σ [5; 117].

Множество всех K-квазиэквациональных подклассов в K, упорядоченное по включению, образует полную решетку, которая называется *решеткой K-квазимногообразий*, или *решеткой относительных квазимногообразий*, когда K легко восстанавливается из контекста и обозначается $\mathrm{Lq}(K)$ [9]. Если класс K является квазимногообразием, т. е. классом, определенным некоторым множеством квазитождеств сигнатуры σ, то K-квазиэквациональный подкласс называют подквазимногообразием K. Множество всех подквазимногообразий K, упорядоченное по включению, образует полную решетку, которая называется *решеткой квазимногообразий* K и обозначается $\mathrm{Lq}(K)$ [1]. Отметим, что понятия здесь неопределенные, см. в [5; 13]. Также нам потребуются следующие утверждения. Пусть 2 обозначает двухэлементную решетку, а запись

$$\mathcal{A} \leq_s \prod\{\mathcal{A}_n \mid n \in N\}$$

означает, что система $\mathcal{A}$ является *подпрямым произведением* семейства систем $\mathcal{A}_n$, $n \in N$.

Теорема 1 [1, теорема 2]. Пусть M — бесконечное множество конечных нижних полурешеток. Тогда существует квазимногообразие K унарных алгебр, такое что

$$\mathrm{Lq}(K) \leq_s \prod\{\mathrm{Sub}(\mathcal{L}) \mid \mathcal{L} \in M\} \times 2.$$

Лемма 1 [14, утверждение 5.2]. Пусть L и F — множества, первое из которых вычислимо. Если множество $L \cap F$ невычислимо, то множество F также невычислимо.

3 Основной результат

Теорема 2. Существует квазимногообразие K унарных алгебр, такое что множество всех конечных подрешеток решетки квазимногообразий $\mathrm{Lq}(K)$ невычислимо, но не Q-универсальное.

Схема доказательства теоремы 2. Сначала, используя теорему 1 и лемму 1, покажем, что существует квазимногообразие K унарных алгебр такое, что множество всех конечных подрешеток решетки $\mathrm{Lq}(K)$ невычислимо. Это означает, что нет алгоритма, который для данной конечной решетки определял бы, вложима ли эта решетка в рассматриваемую решетку квазимногообразий $\mathrm{Lq}(K)$ унарных алгебр или нет. Затем, используя лемму 2, покажем, что это квазимногообразие K не является Q-универсальным, поскольку Q-универсальные решетки квазимногообразий не удовлетворяют никакому нетривиальному решеточному тождеству [5; 273].

Доказательство теоремы 2. Пусть множество $N \subseteq \omega \setminus \{0, 1, 2\}$ невычислимое и $\{\mathcal{K}_n \mid n \in N\}$ — класс конечных нижних полурешеток типа «корона» (см. рис.).

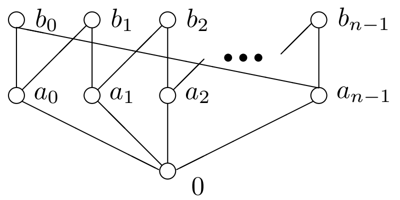

Рисунок. Нижняя полурешетка $\mathcal{K}_n$ типа «корона»

Согласно теореме 1, примененной к классу $\{\mathcal{K}_n \mid n \in N\}$, существует квазимногообразие K унарных алгебр, такое что

$$\mathrm{Lq}(\mathbf{K}) \leq_s \prod_{n \in N} \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n) \times 2.$$

Согласно [1, лемма 17], решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ подпрямо неразложима для любого $n > 2$. Согласно [1, лемма 18], решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ вложима в $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_m)$ тогда и только тогда, когда $n = m$ (для любых $n, m > 2$). Пусть

$$L = \{\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n) \mid n > 2\} \quad \text{и} \quad \mathbf{M} = \{\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n) \mid n \in N\}.$$

Тогда $M = L \cap S(\mathrm{Lq}(K))$, поскольку решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_m)$ вложима $\prod_{n \in N} \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ в точности тогда, когда $m \in N$, и, следовательно, решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_m)$ вложима в $\mathrm{Lq}(K)$ тогда и только тогда, когда $m \in N$, т. е. $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_m) \in M$. Таким образом, решетка $\mathrm{Lq}(K)$ такова, что множество всех ее конечных подрешеток невычислимо, согласно лемме 1.

Прежде чем показать, что построенное квазимногообразие K унарных алгебр не является Q-универсальным, докажем лемму 2. Тождество H_n было рассмотрено в [15] и имеет вид

$$U_n = \bigvee_{0 \leq i \leq n-1} V_{i,n} \vee \bigvee_{0 \leq i \leq n-2} W_{i,n},$$

где решеточные термы от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$ определены следующим образом:

$U_n = U_{0,n}$

$U_{n,n} = x_n$

$U_{i,n} = x_i \wedge (U_{i+1,n} \vee x'_{i+1}), \qquad 0 \leq i \leq n-1,$

$V_{i,n} = V_{i,0,n}, \qquad 0 \leq i \leq n-1,$

$V_{i,i,n} = (x_i \wedge U_{i+1,n}) \vee (x_i \wedge x'_{i+1}), \qquad 0 \leq i \leq n-1,$

$V_{i,j,n} = x_j \wedge (V_{i,j+1,n} \vee x'_{j+1}), \qquad 0 \leq j < i \leq n-1,$

$W_{i,n} = W_{i,0,n}, \qquad 0 \leq i \leq n-2,$

$W_{i,i,n} = x_i \wedge (x'_{i+1} \vee x'_{i+2}) \wedge ((U_{i+1,n} \wedge (x_i \vee x'_{i+2})) \vee x'_{i+1}), \qquad 0 \leq i \leq n-2,$

$W_{i,j,n} = x_j \wedge (W_{i,j+1,n} \vee x'_{j+1}), \qquad 0 \leq j < i \leq n-2.$

Тогда H_3

$$U_3 = \bigvee_{0 \leq i \leq 2} V_{i,3} \vee \bigvee_{0 \leq i \leq 1} W_{i,3},$$

или

$$U_3 = (V_{0,3} \vee V_{1,3} \vee V_{2,3}) \vee (W_{0,3} \vee W_{1,3}).$$

Обозначим $V_3 = (V_{0,3} \vee V_{1,3} \vee V_{2,3}) \vee (W_{0,3} \vee W_{1,3})$. Тогда H_3 примет вид $U_3 = V_3$.

Лемма 2. Решетка $\prod_{n \in N} \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ для любого множества $N \subseteq \omega \setminus \{0, 1, 2\}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству H_3.

Доказательство леммы 2. Сначала покажем, что решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ для любого $n \in N$ удовлетворяет тождеству H_3. Согласно [15, лемма 5.2], следующие неравенства выполняются в каждой решетке ($n \in Z^+$):

$$V_{i,n} \leq U_n, \quad 0 \leq i \leq n-1;$$

$$W_{i,n} \leq U_n, \quad 0 \leq i \leq n-2.$$

Если $n = 3$, то

$$V_{i,3} \leq U_3, 0 \leq i \leq 2 \quad \text{и} \quad W_{i,3} \leq U_3, 0 \leq i \leq 1.$$

Тогда $V_3 \leq U_3$. Осталось доказать, что $U_3 \leq V_3$. Все термы $x_0, x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3'$ интерпретируем как подполурешетки «короны» $\mathcal{K}_n$, соответственно, $X_0, X_1, X_2, X_3, X_1', X_2', X_3'$.

Пусть произвольно взятый элемент $a_0 \in K_n$ лежит в U_3. Тогда a_0, с одной стороны, лежит в X_0, которая является подполурешёткой в $\mathcal{K}_n$, а с другой — в $U_{1,3} + X_1'$. Если элемент $a_0 \in K_n$ лежит в $U_{1,3} + X_1'$, то найдутся элементы $a_1 \in U_{1,3}$ и $b_1 \in X_1'$, такие что $a_0 = a_1 \wedge b_1$. Если $a_0 = a_1$ или $a_0 = b_1$, то

$$a_0 \in (X_0 \cap U_{1,3}) \cup (X_0 \cap X_1').$$

Таким образом, $a_0 \in K_n$ лежит в $V_{0,3}$ и, следовательно, принадлежит V_3.

Если пересечение строгое: $a_0 = a_1 \wedge b_1$, $a_0 < a_1$, $a_0 < b_1$, то из условия $a_1 \in U_{1,3}$ следует, что элемент a_1, с одной стороны, лежит в X_1, которая является подполурешёткой в $\mathcal{K}_n$, а с другой — в $U_{2,3} + X_2'$. Если элемент a_1 лежит в $U_{2,3} + X_2'$, то найдутся элементы $a_2 \in U_{2,3}$ и $b_2 \in X_2'$, такие что $a_1 = a_2 \wedge b_2$. Если $a_1 = a_2$ или $a_1 = b_2$, то

$$a_1 \in (X_1 \cap U_{2,3}) \cup (X_1 \cap X_2').$$

Тогда если $a_0 \in X_0$ и $a_0 = a_1 \wedge b_1$, где $a_1 \in (X_1 \cap U_{2,3}) \cup (X_1 \cap X_2')$ и $b_1 \in X_1'$, то элемент $a_0 \in K_n$ лежит в $V_{1,3}$ и, следовательно, принадлежит V_3.

Если пересечение вновь строгое: $a_1 = a_2 \wedge b_2$, $a_1 < a_2$, $a_1 < b_2$, то из условия $a_2 \in U_{2,3}$ следует, что элемент a_2, с одной стороны, лежит в X_2, которая является подполурешёткой в $\mathcal{K}_n$, а с другой — в $X_3 + X_3'$. Если элемент a_2 лежит в $X_3 + X_3'$, то найдутся элементы $a_3 \in X_3$ и $b_3 \in X_3'$, такие что $a_2 = a_3 \wedge b_3$. Если $a_2 = a_3$ или $a_2 = b_3$, то

$$a_2 \in (X_2 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X_3').$$

Тогда если $a_0 \in X_0$ и $a_0 = a_1 \wedge b_1$, где $b_1 \in X_1'$, а $a_1 \in X_1$ и $a_1 = a_2 \wedge b_2$, где $a_2 \in (X_2 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X_3')$, $b_2 \in X_2'$, то элемент $a_0 \in K_n$ лежит в $V_{2,3}$ и, следовательно, принадлежит V_3.

Когда пересечение строгое: $a_2 = a_3 \wedge b_3$, $a_2 < a_3$, $a_2 < b_3$, получим, что $a_0 \in X_0$ и $a_0 = a_1 \wedge b_1$, где $b_1 \in X_1'$, а $a_1 \in X_1$ и $a_1 = a_2 \wedge b_2$, где $b_2 \in X_2'$, $a_2 \in X_2$ и $a_2 = a_3 \wedge b_3$, где $a_3 \in X_3$ и $b_3 \in X_3'$. Имеем цепь

$$a_0 - a_1 - a_2 - a_3 \quad (a_0 < a_1, a_1 < a_2, a_2 < a_3)$$

длины 3, чего не может быть, поскольку в «короне» $\mathcal{K}_n$ длина максимальной цепи равна 2. Полученное противоречие завершает доказательство того факта, что $\mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ для любого $n \in N$ удовлетворяет тождеству H_3. Тогда, поскольку тождества мультипликативно устойчивы [13; 189], решетка $\prod_{n\in N} \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ тоже будет удовлетворять H_3.

Лемма 2 доказана.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы. Поскольку $\prod_{n\in N} \mathrm{Sub}(\mathcal{K}_n)$ удовлетворяет H_3, согласно доказанной выше лемме 2, то H_3 будет выполняться и на $\mathrm{Lq}(K)$, так как известно, что тождества устойчивы относительно перехода к подсистемам [13; 189]. Q-универсальные решетки квазимногообразий не удовлетворяют никакому нетривиальному решеточному тождеству [5; 273], вследствие чего построенное квазимногообразие K унаров не будет Q-универсальным.

Теорема 2 доказана.

Поскольку число невычислимых подмножеств счетного множества континуально, будет справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Существует континуум квазимногообразий K унарных алгебр, таких что множества всех конечных подрешеток их решеток квазимногообразий $\mathrm{Lq}(K)$ невычислимы, но, тем не менее, не Q-универсальны.

Заметим, что результат, аналогичный теоремам 2 и 3, справедлив и для классов унарных алгебр, не являющихся квазимногообразиями. Этот результат будет следовать из [9, теорема 3.4], [1, лемма 3] и леммы 2. Вопрос о сложности решеток квазимногообразий изучался многими авторами. В литературе есть примеры классов K, таких что множества всех конечных подрешеток решеток $\mathrm{Lq}(K)$ невычислимы [1, 9, 12, 14]. Также известно очень много различных Q-универсальных классов [5; 274]. Предполагалось, что имеется связь между этими мерами сложности [9, 12]. Однако автором показано, что класс K систем фиксированной сигнатуры, такой что множество всех конечных подрешеток решетки $\mathrm{Lq}(K)$ невычислимо, может быть и не Q-универсальным. Найден континуум классов (квазимногообразий) K унарных алгебр, для которых решетки квазимногообразий $\mathrm{Lq}(K)$ согласно одной мере являются сложными, а согласно другой — нет.

Список литературы

1 *Nurakunov A.M.* Unreasonable lattices of quasivarieties // Intern. Journal Algebra Comput. — 2012. — No. 22(3). — P. 1–17.

2 *Карташов В.К.* Квазимногообразия унаров // Мат. заметки. — 1980. — № 27. — С. 5–12.

3 *Карташов В.К.* Квазимногообразия унаров с конечным числом циклов // Алгебра и логика. — 1980. — № 19. — С. 106–120.

4 *Карташов В.К.* Решетки квазимногообразий унаров // Сиб. мат. журн. — 1980 — № 19. — С. 346–357.

5 *Горбунов В.А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. — Новосибирск: Науч. кн., 1999. — 368 с.

6 *Birkhoff G.* Universal algebra // Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress (Montreal, 1945). — Toronto: The University of Toronto Press, 1946. — P. 310–326.

7 *Мальцев А.И.* О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики // Тр. Междунар. мат. конгр. (Москва, 1966). — М.: Мир, 1968. — С. 217–231.

8 *Sapir M.V.* The lattice of quasivarieties of semigroups // Algebra Universalis. — 1985. — No. 21. — P. 172–180.

9 *Швидефски М.В.* О сложности решеток квазимногообразий // Алгебра и логика. — 2015. — № 3. — С. 381–398.

10 *Gorbunov V.A.* Structure of lattices of varieties and of lattices of quasivarieties: Similarity and difference. III // Algebra Logic. — 1995. — No. 34. — P. 359–370.

11 *Kravchenko A.V.* Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras // Siberian Adv. Math. — 2002. — No. 12. — P. 63–76.

12 *Schwidefsky M.V., Zamojska-Dzienio A.* Lattices of subclasses. II // Intern. Journal Algebra Comput. — 2014. — No. 24. — P. 1099–1126.

13 *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.

14 *Нуракунов А.М.* Решетки квазимногообразий точечных абелевых групп // Алгебра и логика. — 2014. — № 53. — С. 372–400.

15 *Semenova M.V., Wehrung F.* Sublattices of lattices of order-convex sets. II. Posets of finite height // Intern. Journal Algebra Comput. — 2003. — Vol. 13. — No. 5. — P. 543–564.

С.М. Луцак

Унарлық алгебра квазикөпбейне торларының күрделілігі

Мәселе квазикөпбейне торлардың күрделілігі деп нені санау керек және квазикөпбейне торлардың қайсысын күрделі немесе басқа өлшеміне сәйкес кашан күрделі болып табылады, ал қайсылары күрделі болмайды көптеген авторлар жұмыстарында зерттелген. Мақалада квазикөпбейне торлар күрделілігінің екі өлшемі қарастырылды. Унарлық алгебра квазикөпбейне торлар құрылысы күрделілігі жан-жақты талданды. Квазикөпбейне торлардың күрделілігінің екі өлшемі арасындағы байланыс зерттелді. Кезінде М.В. Швидефски және А. Замойска-Дженио де бұл мәселеге тоқталған. Q-әмбебап болып табылмайтын, бірақ иррационалды болып табылатын класс бар ма? Унарлық алгебралар квазикөпбейне торларында тривиалды емес тепе-теңдігінің орындалатынын дәлелдеді; сол әрекет арқылы белгілі бір нәтиже алынды.

Кілт сөздер: орындалмайтын жиын, квазикөпбейне, тор, Q-әмбебаптылық, унарлы функционалды символ, торлардың күрделілігі.

S.M. Lutsak

The complexity of quasivariety lattices of unary algebras

The question of what is considered as the complexity of the lattice of quasivarieties and what lattices of quasivarieties are complex according to some degree of complexity, and which are not, has been studied by many authors. The paper considers two measures of complexity of lattices of quasivarieties. A study is made of the complexity of the lattice structure of quasivarieties of unary algebras. The relationship between two measures of the complexity of lattices of quasivarieties is studied.M.V. Schwiedefsky and A. Zamoyska-Jenio, the following problem was posed: is there a non-Q-universal class for which the set of all finite sublattices of the lattice of quasivarieties is not computable? The author has proved the non-trivial identity satisfying on the lattices of quasivarieties of unary algebras, as a result of which a certain result is obtained with respect to this problem.

Keywords: noncomputable set, lattices of quasivarieties, Q-universality, unary function symbol, lower semi-lattice, unary algebra, the complexity of the lattice.

References

1 Nurakunov A.M. *Internat. Journal Algebra Comput.*, 2012, 22(3), p. 1–17.
2 Kartashov V.K. *Math. Notes*, 1980, 27, p. 5–12.
3 Kartashov V.K. *Algebra Logic*, 1980, 19, p. 106–120.
4 Kartashov V.K. *Siberian Math. Journal*, 1980, 19, p. 346–357.
5 Gorbunov V.A. *Algebraic Theory of Quasivarieties*, Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1999, 368 p.
6 Birkhoff G. *Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress*, Toronto: The University of Toronto Press, 1946, p. 310–326.
7 Maltsev A.I. *Proceedings of the Intern. Mathematical Congress*, Moscow: Mir, 1968, p. 217–231.
8 Sapir M.V. *Algebra Universalis*, 1985, 21, p. 172–180.
9 Schwidefsky M.V. *Algebra Logic*, 2015, 54, 3, p. 381–398.
10 Gorbunov V.A. *Algebra Logic*, 1995, 34, p. 359–370.
11 Kravchenko A.V. *Siberian Adv. Math.*, 2002, 12, p. 63–76.
12 Schwidefsky M.V., Zamojska-Dzienio A. *Intern. Journal Algebra Comput.*, 2014, 24, p. 1099–1126.
13 Maltsev A.I. *Algebraic Structures*, Moscow: Nauka, 1970, 392 p.
14 Nurakunov A.M. *Algebra Logic*, 2014, 53, p. 372–400.
15 Semenova M.V., Wehrung F. *Intern. Journal Algebra Comput.*, 2003, 13, 5, p. 543–564.

UDC 517.956

N. T. Orumbayeva[1,2], G. Sabitbekova[3]

[1] *Institute of Applied Mathematics, Karaganda, Kazakhstan;*
[2] *Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan;*
[3] *I.Altynsarin Arkalyk State Pedagogical Institute, Kazakhstan*
(E-mail: OrumbayevaN@mail.ru)

A boundary value problem for nonlinear differential equation with arbitrary functions

This article describes a semi-batch nonlinear boundary value problem for differential equations with partial derivatives. The equations containing arbitrary parameters were considered in Whitham G.B. Such equations are encountered in some problems of chemical technology and chromatography. Replacing $u = e^{kz}$ in a nonlinear problem with arbitrary functions leads to a semi-batch linear boundary value problem for hyperbolic equations. Introducing a new unknown function, semi-batch linear boundary value problem for hyperbolic equations with mixed derivative reduced to the family of boundary value problems for ordinary differential equations and functional relation. Using the method of parameterization to the family of boundary value problems for ordinary differential equations, We find approximate solutions of equations in this area. The proposed method is illustrated by an example.

Keywords: nonlinear equation, boundary value problem, differential equation in partial derivatives, hyperbolic equation.

On $\Omega = [0, X] \times [0, Y]$ is considered for periodic boundary value problem nonlinear differential equations with partial derivatives

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = k \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + a(x, y) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y); \tag{1}$$

$$z(0, y) = \psi(y); \tag{2}$$

$$z(x, 0) = z(x, T), \tag{3}$$

where $k = const$, $\varphi(y)$ — given function depending on y, $a(x, y), f(x, y)$ — arbitrary functions depending on x and y. The paper G.B.Whitham [1] were considered equations containing arbitrary parameters. Such equations are encountered in some problems of chemical technology and chromatography.

To solve the problem (1)–(3) $u = e^{kz}$ we make the change, then we obtain a linear periodic boundary value problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = a(x, y) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + k \cdot f(x, y) \cdot u; \tag{4}$$

$$u(0, y) = e^{k\psi(y)}; \tag{5}$$

$$u(x, 0) = z(x, Y); \tag{6}$$

$$z(x, y) = \frac{1}{k} lnu(x, y). \tag{7}$$

We make a partition by $\tau > 0, h > 0 : M\tau = X, Nh = Y$ step

$$[0, X) = \bigcup_{i=1}^{M} [(i-1)\tau, i\tau), \quad [0, Y) = \bigcup_{j=1}^{N} [(j-1)h, jh), \quad M \geq 2, \quad N \geq 2.$$

In this region Ω is divided into $M \times N$ parts. By $u_{ij}(x, t), z_{ij}(x, t)$ denote the restriction of $u(x, t), z(x, t)$ in area $\Omega_{ij} = [(i-1)\tau, i\tau) \times [(j-1)h, jh), \quad i = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, N}$ [2].

To find a solution we insert a new unknown function $v_{ij}(x, t) = \frac{\partial u_{ij}(x,t)}{\partial x}$, $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, N}$, we insert the notation $\lambda_{ij}(x) = v_{ij}(x, (j-1)h)$ and make the change $\widetilde{v}_{ij}(x, t) = v_{ij}(x, t) - \lambda_{ij}(x)$, $\quad i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, N}$. We obtain the equivalent boundary value problem with unknown functions $\lambda_{ij}(x)$:

$$\frac{\partial \widetilde{v}_{ij}}{\partial y} = a(x, y)\widetilde{v}_{ij} + a(x, y)\lambda_{ij}(x) + kf(x, y)u_{ij}(x, y), \quad (x, t) \in \Omega_{ij}, \quad i = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, N}, \tag{8}$$

$$\widetilde{v}_{ij}(x,(r-1)h)=0; \tag{9}$$

$$\lambda_{i1}(x)-\lambda_{iN}(x)-\lim_{y\to Y-0}\widetilde{v}_{iN}(x,y)=0; \tag{10}$$

$$\lambda_{is}(x)+\lim_{y\to sh-0}\widetilde{v}_{is}(x,y)-\lambda_{i,s+1}(x)=0, \quad s=\overline{1,N-1}; \tag{11}$$

$$u_{ij}(x,y)=e^{k\varphi(y)}+\int\limits_0^x[\widetilde{v}_{ij}(\xi,y)+\lambda_{ij}(\xi)]d\xi; \tag{12}$$

$$z_{ij}(x,y)=\frac{1}{k}ln u_{ij}(x,y). \tag{13}$$

Task (8), (9) with fixed $\lambda_{ij}(x), u_{ij}(x,y)$ is the solution of the Cauchy problem and is equivalent to the equation

$$\widetilde{v}_{ij}(x,y)=\int\limits_{(j-1)h}^{y}a(x,\eta)\widetilde{v}_{ij}(x,\eta)d\eta+\int\limits_{(j-1)h}^{y}a(x,\eta)d\eta\cdot\lambda_{ij}(x)+\int\limits_{(j-1)h}^{y}kf(x,\eta)u_{ij}(x,\eta)d\eta. \tag{14}$$

Passing on the right (14) to the limit $y\to Y-0$, $\quad y\to sh-0$ substituting them into equation (10), (11) for unknown functions $\lambda_{ij}(x)$, we obtain a system of functional equations:

$$\lambda_{i1}(x)-\lambda_{iN}(x)-\lambda_{iN}(x)\int\limits_{(N-1)h}^{Y}a(x,\eta)d\eta=\int\limits_{(N-1)h}^{Y}a(x,\eta)\widetilde{v}_{iN}(x,\eta)d\eta+k\int\limits_{(N-1)h}^{Y}f(x,\eta)u_{ij}(x,\eta)d\eta; \tag{15}$$

$$\lambda_{is}(x)+\lambda_{is}(x)\int\limits_{(s-1)h}^{sh}a(x,\eta)d\eta-\lambda_{i,s+1}(x)=$$

$$=-\int\limits_{(s-1)h}^{sh}a(x,\eta)\widetilde{v}_{is}(x,\eta)d\eta-k\int\limits_{(s-1)h}^{sh}f(x,\eta)u_{is}(x,\eta)d\eta, \quad s=\overline{1,N-1}. \tag{16}$$

To find the system of three functions $\{\lambda_{ij}(x),\widetilde{v}_{ij}(x,y),u_{ij}(x,y),z_{ij}(x,y)\}$, $\quad i=\overline{1,M}$, $\quad j=\overline{1,N}$, we have a closed system comprised of equations (15), (16), (14),(12),(13).

For an initial approximation of the problem (8)–(9) we take $\widetilde{v}_{1j}^{(0)}(x,t)=0, u_{1j}^{(0)}(x,t)=e^{k\psi(y)}$, $j=\overline{1,N}$, and successive approximations based on the following algorithm:

Step 1. For $\widetilde{v}_{1j}^{(0)}(x,t)=0$, $\quad u_{1j}^{(0)}(x,t)=e^{k\psi(y)}$ from the equations (15) and (16) we find the $\lambda_{1j}^{*}(x)$, $j=\overline{1,N}$. Using (14) and found $\lambda_{1j}^{*}(x)$, define $\widetilde{v}_{1j}^{*}(x,t)$. Then, from the equation (12) get $u_{1j}^{*}(x,y)$. Next, using (13) find $z_{2j}^{*}(x,y)$.

Step 2. For $\widetilde{v}_{2j}^{(0)}(x,t)=0$, $u_{2j}^{(0)}(x,t)=\lim\limits_{x\to\tau-0}u_{1j}^{*}(x,t)$ from the equation (15) and (16) get $\lambda_{2j}^{*}(x)$, $\ j=\overline{1,N}$. Using (14) and found $\lambda_{2j}^{*}(x)$, define $\widetilde{v}_{2j}^{*}(x,t)$. Then, from the equation (12), (13) get $u_{2j}^{*}(x,t)$, $z_{2j}^{*}(x,t)$, $j=\overline{1,N}$.

Step M. For $\widetilde{v}_{Mj}^{(0)}(x,t)=0$, $u_{Mj}^{(0)}(x,t)=\lim\limits_{x\to(M-1)\tau-0}u_{M-1,j}^{*}(x,t)$ from the equations (15) and (16) we find the $\lambda_{Mj}^{*}(x)$, $j=\overline{1,N}$. Using (14) and found $\lambda_{Mj}^{*}(x)$, define $\widetilde{v}_{Mj}^{*}(x,t)$. Then, from the equation (12), (13) get $u_{Mj}^{*}(x,t)$, $z_{Mj}^{*}(x,t)$, $j=\overline{1,N}$.

Example. On the $\Omega=[0,1]\times[0,1]$ is considered the boundary value problem $k=1$, $a(x,y)=-2xy$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-2xy\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+2y-1+xy^2-xy; \tag{17}$$

$$z(0,y)=0; \tag{18}$$

$$z(x,0)=z(x,1). \tag{19}$$

To solve the problem (17)–(19) $u = e^z$ we make the change, then we obtain a linear periodic boundary value problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2xy \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + (2y - 1 + xy^2 - xy) \cdot u; \tag{20}$$

$$u(0, y) = 1; \tag{21}$$

$$u(x, 0) = u(x, 1); \tag{22}$$

$$z(x, y) = lnu(x, y). \tag{23}$$

Let $\tau = \frac{1}{2}, h = \frac{1}{2}, N = 2$. To find a solution we insert a new unknown function $v_{ij}(x,t) = \frac{\partial u_{ij}(x,t)}{\partial x}$, $i, j = 1, 2$, we insert the notation $\lambda_{ij}(x) = v_{ij}(x, (j-1)h)$, $\Omega_{ij} = \left[\frac{i-1}{2}, \frac{i}{2}\right) \times \left[\frac{j-1}{2}, \frac{j}{2}\right)$ and make the change $\widetilde{v}_{ij}(x,t) = v_{ij}(x,t) - \lambda_{ij}(x), i, j = 1, 2$. We obtain the equivalent boundary value problem with unknown functions $\lambda_{ij}(x)$:

$$\frac{\partial \widetilde{v}_{ij}}{\partial y} = -2xy\widetilde{v}_{ij} - 2xy\lambda_{ij}(x) + (2y - 1 + xy^2 - xy)u_{ij}(x, y), \quad \widetilde{v}_{ij}(x, 0) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_{ij}, i, j = 1, 2; \tag{24}$$

$$\lambda_{i1}(x) - \lambda_{i2}(x) - \lim_{y \to 1-0} \widetilde{v}_{i2}(x, y) = 0; \tag{25}$$

$$\lambda_{i1}(x) + \lim_{y \to \frac{1}{2}-0} \widetilde{v}_{i1}(x, y) - \lambda_{i2}(x) = 0; \tag{26}$$

$$u_{1j}(x, y) = 1 + \int\limits_0^x [\widetilde{v}_{1j}(\xi, y) + \lambda_{1j}(\xi)]d\xi; \tag{27}$$

$$u_{2j}(x, y) = \lim_{x \to \frac{1}{2}-0} u_{1j}(x, y) + \int\limits_{\frac{1}{2}}^x [\widetilde{v}_{2j}(\xi, y) + \lambda_{2j}(\xi)]d\xi; \tag{28}$$

$$z_{ij}(x, y) = lnu_{ij}(x, y). \tag{29}$$

Task (24) with fixed $\lambda_{ij}(x), u_{ij}(x, y)$ is the solution of the Cauchy problem and is equivalent to the equation

$$\widetilde{v}_{ij}(x, y) = -2 \int\limits_{\frac{j-1}{2}}^y x\eta\widetilde{v}_{ij}(x, \eta)d\eta - 2 \int\limits_{\frac{j-1}{2}}^y x\eta d\eta \cdot \lambda_{ij}(x) + \int\limits_{\frac{j-1}{2}}^y (2\eta - 1 + x\eta^2 - x\eta)u_{ij}(x, \eta)d\eta, \quad i, j = 1, 2. \tag{30}$$

Passing on the right (30) to the limit $\lim\limits_{y \to 1-0} \widetilde{v}_{i2}(x, y)$, $\lim\limits_{y \to \frac{1}{2}-0} \widetilde{v}_{i1}(x, y), i = 1, 2$, substituting them into equation (25), (26), for unknown functions $\lambda_{ij}(x), i, j = 1, 2$, we obtain a system of functional equations:

$$\lambda_{i1}(x) - \lambda_{i2}(x) + 2 \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x\eta\widetilde{v}_{i2}(x, \eta)d\eta + 2 \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x\eta d\eta \cdot \lambda_{i2}(x) - \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 (2\eta - 1 + x\eta^2 - x\eta)u_{i2}(x, \eta)d\eta = 0; \tag{31}$$

$$\lambda_{i1}(x) - 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x\eta\widetilde{v}_{i1}(x, \eta)d\eta - 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x\eta d\eta \cdot \lambda_{i1}(x) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (2\eta - 1 + x\eta^2 - x\eta)u_{i1}(x, \eta)d\eta - \lambda_{i2}(x) = 0. \tag{32}$$

For an initial approximation of the problem (24)–(29) we take $\widetilde{v}_{1j}^{(0)}(x, y) = 0$, $u_{1j}^{(0)}(x, y) = 1, j = 1, 2$, and successive approximations based on the following algorithm:

Step 1. For $\widetilde{v}_{1j}^{(0)}(x, y) = 0$, $u_{1j}^{(0)}(x, y) = 1, j = 1, 2$, from the equations (31) and (32) we find the $\lambda_{11}^*(x)$, $\lambda_{12}^*(x)$. Then

$$\lambda_{11}(x) = \frac{12 + 4x - 6x^2}{48 - 12x + 9x^2}, \quad \lambda_{12}(x) = \frac{11x - x^2}{48 - 12x + 9x^2};$$

$$\max_{x\in[0,\frac{1}{2})}\lambda_{11}(x)=0.2834,\qquad \max_{x\in[0,\frac{1}{2})}\lambda_{12}(x)=0.1186.$$

Using (30) and results $\lambda^*_{11}(x)$, $\lambda^*_{12}(x)$, define $\widetilde{v}^*_{11}(x,y),\widetilde{v}^*_{12}(x,y)$:

$$\widetilde{v}^*_{11}(x,y)=-2\cdot\lambda^*_{11}(x)\int_0^y x\eta d\eta+\int_0^y(2\eta-1+x\eta^2-x\eta)d\eta=$$

$$=0.3333y(xy^2+(3-2.3502x)y-3);$$

$$\widetilde{v}^*_{12}(x,y)=-2\cdot\lambda_{12}(x)\int_{\frac{1}{2}}^y x\eta d\eta+\int_{\frac{1}{2}}^y(2\eta-1+x\eta^2-x\eta)d\eta=$$

$$=0.3333xy^3-0.6186xy^2+0.1130x+y^2-y+0.25;$$

$$\max_{x\in[0,\frac{1}{2})}\widetilde{v}^*_{11}(x,y)=y^2-y,\qquad \max_{x\in[0,\frac{1}{2})}\widetilde{v}^*_{12}(x,y)=y^2-y+0.25.$$

Further, from the equations (27) get $u^*_{11}(x,y),u^*_{12}(x,y)$:

$$u^*_{11}(x,y)=1+xy^2-xy+0.2834x,\quad u^*_{12}(x,y)=1+xy^2-xy+0.3686x.$$

Next, using (29) find $z^*_{11}(x,y),z^*_{12}(x,y)$.

Step 2. For $\widetilde{v}^{(0)}_{21}(x,y)=0$, $\widetilde{v}^{(0)}_{22}(x,y)=0$,

$$u^{(0)}_{21}(x,y)=\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}u^*_{11}(x,y)=0.5y^2-0.5y+1.1417;$$

$$u^{(0)}_{22}(x,y)=\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}u^*_{12}(x,y)=0.5y^2-0.5y+1.1843$$

from the equations (31) and (32) we find the $\lambda^*_{21}(x)$, $\lambda^*_{22}(x)$.

Then

$$\lambda^*_{21}(x)=\frac{0.3708(x^2+0.4146x-0.069)}{5.3333-x^2},\quad \lambda^*_{22}(x)=\frac{0.1195(x^2-11.2266x-0.2143)}{5.3333-x^2};$$

$$\max_{x\in[\frac{1}{2},1)}\lambda_{21}(x)=0.1151,\qquad \max_{x\in[\frac{1}{2},1)}\lambda_{22}(x)=-0.1405.$$

Using (30) and results $\lambda^*_{21}(x)$, $\lambda^*_{22}(x)$, define $\widetilde{v}^*_{21}(x,y),\widetilde{v}^*_{22}(x,y)$:

$$\widetilde{v}^*_{21}(x,y)=y(y^3(0.25-0.25x)+y(1.3917-0.6859x)+0.1xy^4+(0.5472x-0.5)y^2-1.1417);$$

$$\widetilde{v}^*_{22}(x,y)=0.1xy^5-0.25xy^4+0.5614xy^3-0.4516xy^2+0.0552x+$$
$$+0.25y^4-0.5y^3+1.4343y^2-1.1843y+0.2804;$$

$$\max_{x\in[\frac{1}{2},1)}\widetilde{v}^*_{21}(x,y)=0.1y^5+0.0472y^3+0.7058y^2-1.1417y;$$

$$\max_{x\in[\frac{1}{2},1)}\widetilde{v}^*_{22}(x,y)=0.1y^5+0.0614y^3+0.9827y^2-1.1843y+0.3356.$$

Further, from the equation (28) get $u^*_{21}(x,y),u^*_{22}(x,y)$. Thus, to solve this problem

$$z^*_{11}(x,y)=ln(1+xy^2-xy+0.2834x),\quad x\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\quad y\in\left[0,\frac{1}{2}\right);$$

$$z^*_{12}(x,y)=ln(1+xy^2-xy+0.3686x),\quad x\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\quad y\in\left[\frac{1}{2},1\right);$$

$$z_{21}^{*}(x,y) = ln(0.1471y^2 + 0.0708y + 1.0842 + 0.1xy^5 + 0.0472xy^3 +$$
$$+0.7058xy^2 - 1.1417xy + 0.1151x), \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), y \in \left[0, \frac{1}{2}\right);$$
$$z_{22}^{*}(x,y) = ln(1.0165 + 0.3356x + 0.0126y - 1.1843xy + 0.0086y^2 +$$
$$+0.9827xy^2 - 0.0307y^3 + 0.0614xy^3 - 0.05y^5 + 0.1xy^5), \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \quad y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right).$$

Thus, a nonlinear semi-periodic boundary-value problem for hyperbolic equations with two independent variables is solved.The solution method proposed by the authors can be used quite widely.

This publication is supported by the grant project 1164 / GF 4 from the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

References

1 *Whitham G.B.* Linear and Nonlinear Waves // John Wiley and Sons. — 1999. — 562 p.

2 *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. — 1989. — Т. 29. — № 1. — С. 50–66.

Н.Т. Орумбаева, Г. Сабитбекова

Еркін функциялары бар сызықты емес дифференциалдық теңдеу үшін қойылған бір шеттік есеп туралы

Мақалада дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін жартылай периодты шеттік есеп қарастырылды. Еркін параметрлері бар теңдеулер G.B. Whitham жұмыстарында қарастырылған болатын. Мұндай теңдеулер химиялық технологиялардың және хроматографияның кейбір есептерінде кездеседі. Еркін функциялары бар сызықты емес есепте $u = e^{kz}$ ауыстыруын енгізіп, гиперболалық теңдеулер үшін жартылай периодты сызықты есепті алатын боламыз. Жаңа белгісіз функцияны енгізіп, аралас туынды гиперболалық теңдеулер үшін жартылай периодты сызықты есепті қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер үйіріне және функционалдық теңдеуге көшеміз. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер үйіріне параметрлеу әдісін қолданып, қарастырып отырған облыста берілген есептің жуық шешімін аламыз. Ұсынылып отырған әдіс мысалмен толықтырылған.

Кілт сөздер: сызықты емес теңдеу, шеттік есеп, дербес туындылы дифференциалдық теңдеу, гиперболалық теңдеу.

Н.Т. Орумбаева, Г. Сабитбекова

О краевой задаче для нелинейного дифференциального уравнения с произвольными функциями

В статье рассмотрена нелинейная полупериодическая краевая задача для дифференциальных уравнений с частными производными. Уравнения, содержащие произвольные параметры, были изучены в работах G.B. Whithama. Такой вид уравнений встречается в некоторых задачах по химической технологии и хроматографии. Замена $u = e^{kz}$ в нелинейной задаче с произвольными функциями приводит к линейной полупериодической краевой задаче для гиперболических уравнений. Вводя новую неизвестную функцию, линейную полупериодическую краевую задачу для гиперболических уравнений со смешанной производной сведем к семейству краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и функциональному соотношению. Используя метод параметризации к семейству краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, находим приближенные решения данного уравнения в рассматриваемой области. Предложенный метод проиллюстрирован примером.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, краевая задача, дифференциальное уравнение в частных производных, гиперболическое уравнение.

References

1 Whitham G.B. *John Wiley and Sons,* 1999, 562 p.

2 Dzhumabaev D.S. *Computational Mathematics and Mathematical Physics Journal,* 1989, 29, 1, p. 50–66.

МЕРЕЙТОЙ ИЕЛЕРІ
НАШИ ЮБИЛЯРЫ
OUR ANNIVERSARIES

Доктору физико-математических наук, профессору М.Т.Дженалиеву — 70 лет

25 января 2017 г. известному специалисту в области теории дифференциальных уравнений в частных производных и ее приложений главному научному сотруднику Института математики и математического моделирования Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан доктору физико-математических наук, профессору Мувашархану Танабаевичу Дженалиеву исполнилось 70 лет.

М.Т.Дженалиев родился в семье сельских тружеников в Актобе (ныне хозяйство Толе-би) Шуского района Жамбылской области. Отец, Жиеналиев Танабай, работал многие годы чабаном, мать, Жиеналиева Тенге, помогала мужу в этом нелегком чабанском деле, вплоть до его смерти. До ухода на пенсию она работала на различных рабочих должностях. Тяжелый труд чабана не являлся чуждым и для Мувашархана — во время летних каникул он помогал своим родителям.

В 1953 г. Мувашархан Дженалиев поступает в семилетнюю казахскую школу участка Актобе, где заканчивает первый класс с похвальной грамотой. В связи с переездом родителей в пос. Михайловка (в последующем пос.Чатыркуль) в 1954 г. он снова поступает в первый класс теперь семилетней русской школы, так как не владел русским языком. За год он успевает освоить русский язык и первый класс заканчивает также с похвальной грамотой. Дальше он продолжает обучение на русском языке и в 1965 г. заканчивает 10-й класс средней школы им.М.Горького в селе Новотроицкое (ныне Толе-би). Еще в 9-м классе Мувашархан увлекся математикой благодоря своему учителю Кутузову Александр Яковлевичу. В 1964–1965 гг. участвует в республиканских олимпиадах школьников в Алматы. На 3-й Казахстанской математической олимпиаде он удостаивается специального приза и диплома второй степени.

В 1965 г. М.Дженалиев поступает в Казахский политехнический институт им. В.И.Ленина на факультет автоматики и вычислительной техники и в 1971 г. заканчивает его по специальности «Автоматика и телемеханика» с квалификацией «Инженер-электрик». В 1971–1976 гг. работает инженером, старшим инженером и руководителем группы проектирования в Казахском отделении ГПИ «Проектмонтажавтоматика» (Алматы), занимается вопросами проектирования систем диспетчеризации для объектов энергоснабжения с использованием телемеханических устройств.

В 1976–1980 гг. — учеба в очной аспирантуре в КазГУ под научным руководством профессора С.А.Айсагалиева. В 1982 г. М.Т.Дженалиев защищает кандидатскую, а в 1994-м — докторскую диссертации, в 1996 г. ему присвоено ученое звание профессора.

С 1980 г. М.Т.Дженалиев работает в Институте математики и механики АН КазССР (ныне Институт математики и математического моделирования КН МОН РК). Мувашархан Танабаевич проходит все ступени должностей академического учреждения: мнс, снс, внс, гнс, заведующий лабораторией уравнений математической физики, заместитель директора по научной работе, с 1 января 2007 г. — исполняющий обязанности, а с августа 2008 по 2011 гг. — директор Института математики.

Научные достижения М.Т.Дженалиева опубликованы в журналах «Дифференциальные уравнения», «Сибирский математический журнал», «Boundary value problems», «Advances in difference equations», «Математический журнал» (Алматы), «Труды Института математики НАН Беларусь», «Доклады НАН РК», «Неклассические уравнения математической физики» (Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН), «Доклады АМАН», «Известия НАН РК. Серия физико-математическая» и др. Перечислим результаты его научных исследований:

– М.Т.Дженалиевым доказана теорема о достаточных условиях оптимальности и на ее основе разработан алгоритм приближенного решения задачи оптимального управления параболическим уравнением. Этот результат является развитием принципа оптимальности В.Ф.Кротова для уравнений с частными производными, учитывающего их разрешимость в соответствующих соболевских классах (в смысле интегрального тождества). Новым здесь явилось введение вспомогательного функционала и специальных конструкций, позволивших снять ограничение о приведении дифференциальных уравнений в частных производных к нормальной форме, что позволило свести исходную задачу на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум в функциональных пространствах Соболева. Результаты данных исследований составили основу кандидатской диссертации М.Т.Дженалиева.

– Для краевых задач с производными по времени на границе для параболического и гиперболического уравнений М.Т.Дженалиевым обнаружен эффект «переопределенности» при задании начальных условий в области и на ее границе из класса квадратично суммируемых функций (которые не согласованы по теореме о следах). Установлена разрешимость краевых задач для линейно-нагруженных уравнений с нерегулярными коэффициентами. Построены симметризующий оператор для нагруженного параболического уравнения, гильбертово пространство типа пространства К.Фридрихса и квадратичный функционал, уравнение Эйлера, для которого им дана обобщенная постановка исходной граничной задачи. По этим результатам М.Т.Дженалиевым защищена докторская диссертация.

– В терминах (комплексного) спектрального параметра, являющегося коэффициентом нагруженного слагаемого, найдено описание резольвентного множества и спектра для спектрально-нагруженного параболического оператора, дана характеристика кратности собственных функций в пространстве ограниченных и непрерывных функций в зависимости от значения спектрального параметра (совместно с М.И.Рамазановым).

В последние годы М.Т.Дженалиев вместе с сотрудниками ведет исследования по однородным краевым задачам теплопроводности в вырождающихся нецилиндрических областях. Установлено, что здесь, наряду с тривиальным решением, существуют и нетривиальные.

М.Т.Дженалиев активно занимается подготовкой научных кадров. Под его научным руководством защищены 3 докторские, 11 кандидатских диссертаций и 2 диссертации по PhD. С 1980 г. ученый также читает спецкурсы на механико-математическом факультете КазНУ им.аль-Фараби.

Мувашархана Танабаевича Дженалиева отличают деловое, принципиальное и творческое отношение, трудолюбие, профессионализм и высокое чувство ответственности. Он пользуется заслуженным уважением в коллективе Института математики и математического моделирования.

Редколлегия научного журнала сердечно поздравляет Мувашархана Танабаевича с 70-летним юбилеем и желает ему крепкого здоровья и творческого долголетия.

АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
INFORMATION ABOUT AUTHORS

Akimov, A.V. — PhD, Assistant Professor, Kherson State Maritime Academy, Subdepartment of Mechanical Engineering and general training, Ukraine.

Al-Dzhavakheri, Ali Andan Mansur — Postgraduate, Kherson State Maritime Academy, Subdepartment of Mechanical Engineering and general training, Ukraine.

Balkizov, Zh.A. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of equations of mixed type, Institute of Applied Mathematics and Automation - Branch of Federal State Budgetary Scientific Center «Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences», Nalchik, Russia.

Brailo, N.V. — PhD, elder, Kherson State Maritime Academy, Subdepartment of Mechanical Engineering and general training, Ukraine.

Buketov, A.V. — Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of subdepartment for Ship Propulsion Plant Operation and General Engineering, Kherson State Maritime Academy, Ukraine.

Ibraev, Sh.Sh. — Candidate of Physical and Mathematical Science, Head of the Department of Mathematics, Informatics, Information systems and desing, «Bolashak» University, Kyzylorda, Kazakhstan.

Iskakov, S.A. — PhD students of the 1 st year of study, Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Iskakova, G.Sh. — Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor of «Mathematical Analysis and Differential Equations», Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Jenaliyev, M.T. — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of SC MES RK, Almaty, Kazakhstan.

Konyrkhanova, A.A. — PhD student of 3 course speciality 6D060100 — «Mathematics», D.Serikbayev East Kazakhstan State Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan.

Lutsak, S.M. — Doctoral candidate of PhD, Faculty of Machanics and Mathematics, Department of «Algebra and geometry», PhD in the specialty 6D060100 — «Mathematics», L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Mukasheva, A.K. — Lecture, Master of Mathematics, A.Bokeihanov school-lyceum, Shahtinsk, Karaganda region, Kazakhstan.

Nigalatii, V.D. — Postgraduate, Kherson State Maritime Academy, Assistant, Subdepartment of Mechanical Engineering and general training, Ukraine.

Orumbayeva, N.T. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate professor, Institute of Applied Mathematics; Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Ramazanov, M.I. — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Roman'kov, V.A. — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Information systems chair in F.M. Dostoevsky Omsk State University, Russia.

Sabitbekova, G. — Master of Mathematics, I.Altynsarin Arkalyk State Pedagogical Institute, Kazakhstan.

Shaukenova, K.S. — Senior lecture of the Department «Mathematical Analysis and Differential Equations», Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Shayakhmetova, B.K. — Candidate of Pedagogical Sciences, Docent, Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Yeshkeyev, A.R. — Doctor of Physical and Mathematical Science, Ye.A. Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.

Zhanbusinova, B.H. — Candidate of Physical and Mathematical Science, Head of Department «Mathematical Analysis and Differential Equations», Ye.A.Buketov Karaganda State University, Kazakhstan.