

ISSN 2518-7929

Индексі 74618

Индекс 74618

ҚАРАҒАНДЫ
УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ

ВЕСТНИК
КАРАГАНДИНСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN
OF THE KARAGANDA
UNIVERSITY

МАТЕМАТИКА сериясы

Серия МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS Series

№ 4(84)/2016

Қазан–қараша–желтоқсан
30 желтоқсан 2016 ж.

Октябрь–ноябрь–декабрь
30 декабря 2016 г.

October–November–December
December, 30, 2016

1996 жылдан бастап шығады
Издается с 1996 года
Founded in 1996

Жылына 4 рет шығады
Выходит 4 раза в год
Published 4 times a year

Қарағанды, 2016
Караганда, 2016
Karaganda, 2016

Бас редакторы

ЖМ ХҒА академигі, заң ғыл. д-ры, профессор

Е.Қ.Көбеев

Бас редактордың орынбасары
Жауапты хатшы

Х.Б.Омаров, техн. ғыл. д-ры

Г.Ю.Аманбаева, филол. ғыл. д-ры

Редакция алқасы

А.Р.Ешкеев ,	ғылыми редактор физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
М.Отелбаев ,	ҚР ҰҒА акад., физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
Б.Р.Ракишев ,	ҚР ҰҒА акад., техн. ғыл. д-ры (Қазақстан);
Т.Бекжан ,	профессор (Қытай);
Б.Пуаза ,	профессор (Франция);
А.А.Шкалик ов,	физ.-мат. ғыл. д-ры (Ресей);
А.С.Морозов ,	физ.-мат. ғыл. д-ры (Ресей);
Г.Акишев ,	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
Н.А.Боқаев ,	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
М.Т.Дженалиев ,	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
К.Т.Искаков ,	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
Л.К.Кусаинова ,	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
Е.Д.Нурсултанов ,	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
М.И.Рамазанов ,	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
Е.С.Смаилов ,	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
У.У.Умербаев ,	физ.-мат. ғыл. д-ры (Қазақстан);
Н.Т.Орумбаева ,	жауапты хатшы физ.-мат. ғыл. канд. (Қазақстан)

Редакцияның мекенжайы: 100028, Қазақстан, Қарағанды қ., Университет к-сі, 28
Тел.: (7212) 77-03-69 (ішкі 1026); факс: (7212) 77-03-84.
E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Сайт: vestnik.ksu.kz

Редакторы

Ж.Т.Нурмуханова

Компьютерде беттеген

Г.Қ.Қалел

Қарағанды университетінің хабаршысы. «Математика» сериясы.
ISSN 2518-7929.

Меншік иесі: «Академик Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті» РММ.
Қазақстан Республикасының Мәдениет және ақпарат министрлігімен тіркелген. 23.10.2012 ж.
№ 13104–Ж тіркеу қуәлігі.

Басуға 29.12.2016 ж. қол қойылды Пішімі 60×84 1/8. Қағазы офсеттік. Көлемі 20,87 б.т. Таралымы
300 дана. Бағасы келісім бойынша. Тапсырыс № 469.

Е.А.Бөкетов атындағы ҚарМУ баспасының баспаханасында басылып шықты.

100012, Қазақстан, Қарағанды қ., Гоголь к-сі, 38. Тел. 51-38-20. E-mail: izd_kargu@mail.ru

© Қарағанды мемлекеттік университеті, 2016

Главный редактор
академик МАН ВШ, д-р юрид. наук, профессор
Е.К.Кубеев

Зам. главного редактора **Х.Б.Омаров**, д-р техн. наук
Ответственный секретарь **Г.Ю.Аманбаева**, д-р филол. наук

Редакционная коллегия

А.Р.Ешкеев,	научный редактор д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
М.Отелбаев,	акад. НАН РК, д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
Б.Р.Ракишев,	акад. НАН РК, д-р техн. наук (Казахстан);
Т.Бекжан,	профессор (Китай);
Б.Пуаза,	профессор (Франция);
А.А.Шкаликов,	д-р физ.-мат. наук (Россия);
А.С.Морозов,	д-р физ.-мат. наук (Россия);
Г.Акишев,	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
Н.А.Бокаев,	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
М.Т.Дженалиев,	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
К.Т.Искаков,	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
Л.К.Кусаинова,	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
Е.Д.Нурсултанов,	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
М.И.Рамазанов,	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
Е.С.Смаилов,	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
У.У.Умербаев,	д-р физ.-мат. наук (Казахстан);
Н.Т.Орумбаева,	ответственный секретарь канд. физ.-мат. наук (Казахстан)

Адрес редакции: 100028, Казахстан, г. Караганда, ул. Университетская, 28
Тел.: (7212) 77-03-69 (внутр. 1026); факс: (7212) 77-03-84.
E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Сайт: vestnik.ksu.kz

Редактор
Ж.Т.Нурмуханова
Компьютерная верстка
Г.К.Қалел

Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика».
ISSN 2518-7929.

Собственник: РГП «Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова».
Зарегистрирован Министерством культуры и информации Республики Казахстан. Регистрационное
свидетельство № 13104–Ж от 23.10.2012 г.

Подписано в печать 29.12.2016 г. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная. Объем 20,87 п.л. Тираж 300 экз.
Цена договорная. Заказ № 469.

Отпечатано в типографии издательства КарГУ им. Е.А.Букетова
100012, Казахстан, г. Караганда, ул. Гоголя, 38, тел.: (7212) 51-38-20. E-mail: izd_kargu@mail.ru

© Карагандинский государственный университет, 2016

Main Editor
Academician of IHEAS, Doctor of Law, Professor
Ye.K.Kubeyev

Deputy main Editor
Responsible secretary

Kh.B.Omarov, Dr. of Techn. Sci.
G.Yu.Amanbayeva, Dr. of Philol. Sci.

Editorial board

A.R.Yeshkeyev ,	Science Editor Dr. of Phys.–Math. Sci. (Kazakhstan);
M.Otelbayev ,	Acad. NAS RK, Dr. of Phys.–Math. Sci. (Kazakhstan);
B.R.Rakishev ,	Acad. NAS RK, Dr. of Techn. Sci. (Kazakhstan);
T.Bekjan ,	Professor (China);
B.Poizat ,	Professor (France);
A.A.Shkalikov ,	Dr. of Phys.–Math. Sci. (Russia);
A.S.Morozov ,	Dr. of Phys.–Math. Sci. (Russia);
G.Akishev ,	Dr. of Phys.–Math. Sci. (Kazakhstan);
N.A.Bokaev ,	Dr. of Phys.–Math. Sci. (Kazakhstan);
M.T.Jenaliyev ,	Dr. of Phys.–Math. Sci. (Kazakhstan);
K.T.Iskakov ,	Dr. of Phys.–Math. Sci. (Kazakhstan);
L.K.Kusainova ,	Dr. of Phys.–Math. Sci. (Kazakhstan);
E.D.Nursultanov ,	Dr. of Phys.–Math. Sci. (Kazakhstan);
M.I.Ramazanov ,	Dr. of Phys.–Math. Sci. (Kazakhstan);
E.S.Smailov ,	Dr. of Phys.–Math. Sci. (Kazakhstan);
U.U.Umerbaev ,	Dr. of Phys.–Math. Sci. (Kazakhstan);
N.T.Orumbayeva ,	Secretary Cand. of Phys.–Math. Sci. (Kazakhstan)

Postal address: 28, University Str., 100028, Kazakhstan, Karaganda
Tel.: (7212) 77-03-69 (add. 1026); fax: (7212) 77-03-84.
E-mail: vestnick_kargu@ksu.kz. Web-site: vestnik.ksu.kz

Editor
Zh.T.Nurmukhanova

Computer layout
G.K.Kalel

Bulletin of the Karaganda University. «Mathematics» series.
ISSN 2518-7929.

Proprietary: RSE «Academician Ye.A.Buketov Karaganda State University».

Registered by the Ministry of Culture and Information of the Republic of Kazakhstan. Registration certificate No. 13104–Zh from 23.10.2012.

Signed in print 29.12.2016. Format 60×84 1/8. Offset paper. Volume 20,87 p.sh. Circulation 300 copies.
Price upon request. Order № 469.

Printed in the Ye.A.Buketov Karaganda State University Publishing house.

38, Gogol Str., 100012, Kazakhstan, Karaganda, Tel.: (7212) 51-38-20. E-mail: izd_kargu@mail.ru

© Karaganda State University, 2016

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА

<i>Бакирова Э.А., Исакова Н.Б.</i> Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты емес шеттік есептің шешімінің бастапқы жуықтауын таңдаудың бір тәсілі туралы	8
<i>Бокаев Н.А., Буренков В.И., Матин Д.Т.</i> Жалпыланған Морри кеңістігіндегі жиындардың жинақы болуының жеткілікті шарты туралы	18
<i>Бужетов А.В., Кравцова Л.В., Богдан А.П.</i> Қайта-ауыспалы жүктеме әсерінен композиттік материалдар үлгілерінің қирауын болжау	27
<i>Джумабаев Д. С., Темешева С.М.</i> Сызықтық емес аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесінің жолақта шенелген шешімі	35
<i>Ескермесұлы Ә.</i> Регулярлық емес коэффициенттері бар төртінші ретті екі мүшелі минималды дифференциалдық оператордың ақау индексіні зерттеу	46
<i>Ешкеев А.Р.</i> Йонсондық жиындар үшін тәуелсіздік қасиеті	52
<i>Ешкеев А.Р.</i> Йонсондық жиындардың ішіндегі Морли рангінің кейбір қасиеттері.	57
<i>Зенков А.В.</i> М-группа өрімдері мен берілуі	63
<i>Кабенов Д., Муратхан Р., Голенков В.</i> Білім алушылардың білімін табиғи тілде бағалаудың зерделі жүйесін жасау әдістері	70
<i>Космакова М.Т., Рамазанов М.И., Токешева А.С., Хайржүлова А.А.</i> Бұрыштық облыста жылуөткізгіштік теңдеуі үшін біртекті шеттік есептің жалғыз емес шешімі туралы	80
<i>Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А.</i> Жоғарғы ретті бір теңдеуге эквиваленттілігі жағдайында жордан матрицалы D_e -жүйесіне диагоналда тұрақты коэффициенттер мен сызықты D_e -жүйені келтіру туралы	88
<i>Минглибаев М.Д., Маемерова Г.М., Иманова Ж.У.</i> Массалары әр түрлі қарқында изотропсыз өзгеретін үш дене есебіндегі ғасырлық ұйытқулар	94
<i>Мирзакулова А.Е., Атахан Н.</i> Жоғарғы туындыларының алдында кіші параметрі бар интегралдық дифференциалдық теңдеулер үшін шекаралық есеп шешімінің аналитикалық формуласы	99
<i>Мусин А.Т.</i> Үш өлшемді жалаулы кеңістігіндегі түзулер кешенінің канондық реперін салу	104
<i>Романьков В.А.</i> Өрімге негізделген ашық кілті бар қос панельдік шифрлау жүйесі үшін полиномиалды алгоритм	110
<i>Сұлтанов М.А., Кошанова М.Д., Устемирова Б.Б.</i> Бірөлшемді үйірткіні терістеу кері есебінің қисынсыздығы жайлы	116
<i>Сұлтанов М.А., Баканов Г.Б., Светов И.Е., Устемирова Б.Б.</i> Кішіөткізгіштік аймағын анықтау кері есебін шешудің сандық алгоритмі	124
<i>Тұрысбекова У.К., Азиева Г.Т.</i> $k[x, y, z]$ көпмүшеліктер алгебрасындағы квадраттық Пуассон алгебралары және олардың автоморфизмдері	131
<i>Турметов Б.Х., Усманов К.Ы.</i> Бөлшек ретті операторлы шеттік шартты бір сыртқы есептің бірмәнді шешімділігі туралы	139
<i>Төлеуғазы Е.Т.</i> Анизотропты $B_{\text{pr}}^{\alpha, \beta}(\mathbb{T}^d)$ Никольский-Бесов кеңістіктері үшін ену теоремалары, іздер және жалғасу туралы теоремалары	146
АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР	155
2016 жылғы «Қарағанды университетінің хабаршысында» жарияланған мақалалардың көрсеткіші. «Математика» сериясы	157

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Бакирова Э.А., Искакова Н.Б.</i> Об одном подходе к выбору начального приближения решения нелинейной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений	8
<i>Бокаев Н.А., Буренков В.И., Матин Д.Т.</i> О достаточном условии предкомпактности множеств в обобщенных пространствах Морри	18
<i>Бужетов А.В., Кравцова Л.В., Богдан А.П.</i> Прогнозирование разрушения образцов композитных материалов под действием повторно-переменных нагрузжений	27
<i>Джумабаев Д.С., Темешева С.М.</i> Ограниченное на полосе решение системы нелинейных гиперболических уравнений со смешанными производными	35
<i>Ескермесулы А.</i> Исследование индексов дефекта двучленного минимального дифференциального оператора четвертого порядка с нерегулярными коэффициентами	46
<i>Ешкеев А.Р.</i> Свойство независимости для йонсоновских множеств	52
<i>Ешкеев А.Р.</i> Некоторые свойства ранга Морли над йонсоновскими множествами	57
<i>Зенков А.В.</i> Представления и сплетения t -группы	63
<i>Кабенов Д., Муратхан Р., Голенков В.</i> Методы создания интеллектуальной системы оценки знаний обучающихся на естественном языке	70
<i>Космакова М.Т., М.И. Рамазанов, Токешева А.С., Хайркулова А.А.</i> О неединственности решения однородной краевой задачи для уравнения теплопроводности в угловой области	80
<i>Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А.</i> О приводимости линейной D_e -системы с постоянными на диагонали коэффициентами к D_e -системе с жордановой матрицей в случае эквивалентности ее одному уравнению высшего порядка	88
<i>Минглибаев М.Д., Маемерова Г.М., Иманова Ж.У.</i> Вековые возмущения в задаче трех тел с массами, изменяющимися неизотропно в различных темпах	94
<i>Мирзакулова А.Е., Атахан Н.</i> Построение решения краевой задачи для интегродифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных	99
<i>Мусин А.Т.</i> Канонизация репера комплекса прямых трехмерного флагового пространства	104
<i>Романьков В.А.</i> Полиномиальный алгоритм для основанной на косах системы шифрования с открытым ключом двойного щита	110
<i>Султанов М.А., Кошанова М.Д., Устемирова Б.Б.</i> О некорректности обратной задачи численного обращения одномерной свертки	116
<i>Султанов М.А., Баканов Г.Б., Светов И.Е., Устемирова Б.Б.</i> Численный алгоритм решения обратной задачи определения зоны малой проницаемости	124
<i>Турусбекова У.К., Азиева Г.Т.</i> Квадратичные алгебры Пуассона на $k[x, y, z]$ и их автоморфизмы	131
<i>Турметов Б.Х., Усманов К.И.</i> О разрешимости одной внешней краевой задачи с граничным оператором дробного порядка	139
<i>Төлеуказы Е.</i> Теоремы вложения, теоремы о следах и продолжении для анизотропных пространств Никольского-Бесова $B_{p,q}^{\alpha}(\mathbb{T}^d)$	146
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	155
Указатель статей, опубликованных в «Вестнике Карагандинского университета» в 2016 году. Серия «Математика»	161

CONTENTS

MATHEMATICS

<i>Bakirova E.A., Iskakova N.B.</i> An approach to the choice of the initial approximation of the solution of nonlinear boundary value problem for loaded differential equations	8
<i>Bokayev N.A., Burenkov V.I., Matin D.T.</i> Sufficient conditions for pre-compactness of sets in the generalized Morrey spaces	18
<i>Buketov A.V., Kravtsova L.V., Bogdan A.P.</i> Prediction of fracture samples of composite materials under the influence of cyclic loading	27
<i>Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M.</i> Bounded solution on the strip to a system of nonlinear hyperbolic equations with mixed derivatives	35
<i>Yeskermessuly A.</i> Investigation of the deficiency indices of the minimum two-term fourth-order differential operator with irregular coefficients	46
<i>Yeshkeyev A.R.</i> The property of independence for Jonsson sets	52
<i>Yeshkeyev A.R.</i> Some properties of Morly rank over Jonsson sets	57
<i>Zenkov A.V.</i> Views and plexus m -group	63
<i>Kabenov D., Muratkhan R., Golenkov V.</i> Methods of creation of intellectual knowledge evaluation system, students in natural language	70
<i>Kosmakova M.T., M.I. Ramazanov, Tokesheva A.S., Khairkulova A.A.</i> On the non-uniqueness of solution to the homogeneous boundary value problem for the heat conduction equation in an angular domain ..	80
<i>Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A.</i> On reducibility of linear D_e -system with constant coefficients on the diagonal to D_e -system with Jordan matrix in the case of equivalence of its higher order one equation	88
<i>Minglibayev M.Zh., Mayemerova G.M., Imanova Zh.U.</i> Secular perturbations in the three-body problem with masses changing non-isotropically at the different rates	94
<i>Mirzakulova A.E., Atakhan N.</i> Construction of the solution of the boundary value problem for integro differential equation with a small parameter in the highest derivatives	99
<i>Musin A.T.</i> Canonisation reper of complex of lines of three-dimensional flag space	104
<i>Roman'kov V.A.</i> A polynomial algorithm for the braid double shielded public key	110
<i>Sultanov M.A., Koshanova M.D., Ustemirova B.B.</i> On ill-posedness of the numerical inversion inverse problem of one-dimensional convolution	116
<i>Sultanov M.A., Bakanov G.B., Svetov I.E., Ustemirova B.B.</i> A numerical algorithm for solving the inverse problem of determining the low permeability zone	124
<i>Turusbekova U.K., Azieva G.T.</i> Quadratic poisson algebras on $k[x, y, z]$ and their automorphisms	131
<i>Turmetov B.Kh., Usmanov K.I.</i> On solvability of exterior boundary value problem with boundary operators of fractional order	139
<i>Toleugazy Ye.</i> Embedding theorems, theorems of a trace and approach for anisotropic $B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)$ Nikol'skii-Besov spaces	146
INFORMATION ABOUT AUTHORS	155
Index of articles published in the «Bulletin of the Karaganda University» in 2016. «Mathematics» Series	165

УДК 517.75, 517.927, 517.956.3

Э.А. Бакирова¹, Н.Б. Искакова²

¹Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы;

²Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы
(E-mail: bakirova1974@mail.ru)

Об одном подходе к выбору начального приближения решения нелинейной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений

На основе метода параметризации исследуется нелинейная двухточечная краевая задача для систем нагруженных дифференциальных уравнений. Суть метода параметризации заключается в том, что рассматриваемая задача разбиением заданного интервала точками нагружения и введением дополнительных параметров сводится к эквивалентной нелинейной двухточечной краевой задаче с параметрами. Введение дополнительных параметров позволяет получить начальные условия для неизвестных функций на подынтервалах. При фиксированных значениях параметров решается задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Подставляя представление решения задачи Коши в краевые условия и условия непрерывности решения во внутренних точках разбиения интервала, построена система нелинейных алгебраических уравнений относительно введенных параметров. Построенные системы нелинейных алгебраических уравнений являются основой алгоритмов метода параметризации и позволяют найти «хорошие» начальные приближения к решению нелинейной двухточечной краевой задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений. Предложен один из способов к выбору «хорошего» начального приближения для нахождения решения нелинейной краевой задачи. Получены условия существования изолированного решения нелинейной двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений при достаточно малых шагах разбиения.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, нагруженное дифференциальное уравнение, численный метод, алгоритм.

Нагруженные дифференциальные уравнения часто возникают в приложениях как математическая модель процессов, где состояния в определенные моменты времени оказывают существенное влияние на свойства описываемого процесса в целом.

Вопросы разрешимости и построения приближенного решения краевых задач для этих уравнений различными методами исследованы многими авторами [1–3].

В работах [4–6] предложен численный метод решения систем линейных неавтономных обыкновенных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными интегральными условиями.

В работе [7] на основе метода параметризации [8] получены коэффициентные признаки однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений и построены алгоритмы нахождения решения этой задачи.

В настоящей работе рассматривается нелинейная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, x(\theta_0), x(\theta_1), \dots, x(\theta_m)), \quad t \in (0, T), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$g[x(0), x(T)] = 0, \quad (2)$$

где $f : [0, T] \times R^n \rightarrow R^n, g : R^n \times R^n \rightarrow R^n$ — непрерывные функции.

Через $C([0, T], R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x : [0, T] \rightarrow R^n$ с нормой

$$\|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|.$$

Задача (1), (2) исследуется методом параметризации [5].

Возьмем точки $\theta_0 = 0 < \theta_1 < \dots < \theta_m < \theta_{m+1} = T$, и разбиение интервала $[0, T]$ на $m + 1$ подынтервалов $[0, T] = \bigcup_{r=1}^{m+1} [\theta_{r-1}, \theta_r)$ обозначим через Δ_{m+1} . Сужение функции $x(t)$ на r -ый интервал $[\theta_{r-1}, \theta_r)$ обозначим через $x_r(t)$. Задача (1), (2) эквивалентна нелинейной многоточечной краевой задаче $\frac{dx_r}{dt} = f(t, x_r, x_1(\theta_0), x_2(\theta_1), \dots, x_{m+1}(\theta_m)), t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), r = \overline{1, m+1}, g[x_1(0), \lim_{t \rightarrow T-0} x_{m+1}(t)] = 0,$

$\lim_{t \rightarrow \theta_s-0} x_s(t) = x_{s+1}(\theta_s), s = \overline{1, m}$, где последнее равенство является условием склеивания решения в точках нагружения.

Введя параметры $\lambda_r = x_r(\theta_{r-1})$ и на каждом r -ом интервале произведя замену функции $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, получим нелинейную краевую задачу с параметрами:

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, u_r + \lambda_r, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r); \quad (3)$$

$$u_r(\theta_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, m+1}; \quad (4)$$

$$g[\lambda_1, \lambda_{m+1} + \lim_{t \rightarrow T-0} u_{m+1}(t)] = 0; \quad (5)$$

$$\lambda_s + \lim_{t \rightarrow \theta_s-0} u_s(t) - \lambda_{s+1} = 0, \quad s = \overline{1, m}. \quad (6)$$

Задачи (1), (2) и (3)–(6) эквивалентны. Если $x(t)$ — решение краевой задачи (1), (2), то пара $(\lambda, u[t])$, где $\lambda = (x_1(0), x_2(\theta_1), \dots, x_{m+1}(\theta_m))$, $u[t] = (x_1(t) - x_1(0), x_2(t) - x_2(\theta_1), \dots, x_{m+1}(t) - x_{m+1}(\theta_m))$, является решением задачи (3)–(6). И наоборот, если $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ — решение задачи (3)–(6), то функция $\tilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t), t \in (\theta_{r-1}, \theta_r), r = \overline{1, m+1}, \tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_{m+1} + \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{u}_{m+1}(t)$, будет решением задачи (1), (2).

При фиксированных значениях параметров λ_r задача Коши (3), (4) эквивалентна нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int_{\theta_{r-1}}^t f(\tau, \lambda_r + u_r(\tau), \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}) d\tau, \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1}. \quad (7)$$

В уравнении (7) подставляя вместо $u_r(\tau)$ соответствующую правую часть и повторив этот процесс ν ($\nu = 1, 2, \dots$) раз, получим представление функций $u_r(t)$:

$$\begin{aligned} u_r(t) = & \int_{\theta_{r-1}}^t f(\tau_1, \lambda_r + \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_r + \dots + \\ & + \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_r + u_r(\tau_\nu), \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}) d\tau_\nu, \dots) d\tau_2; \\ & \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}) d\tau_1; \\ & t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1}. \end{aligned}$$

Отсюда, определив $\lim_{t \rightarrow \theta_r-0} u_r(t), r = \overline{1, m+1}$, и подставив их в (5), (6), получим систему нелинейных уравнений относительно $\lambda_r \in R^n$:

$$g[\lambda_1, \lambda_{m+1} + \int_{\theta_m}^T f(\tau_1, \lambda_{m+1} + \int_{\theta_m}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_{m+1} + \dots + \int_{\theta_m}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_{m+1} + u_{m+1}(\tau_\nu), \lambda_1, \dots, \lambda_{m+1})d\tau_\nu, \dots)d\tau_2, \lambda_1, \dots, \lambda_{m+1})d\tau_1] = 0; \quad (8)$$

$$\lambda_s + \int_{\theta_{s-1}}^{\theta_s} f(\tau_1, \lambda_s + \int_{\theta_{s-1}}^{\tau_1} f(\tau_2, \lambda_s + \dots + \int_{\theta_{s-1}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \lambda_s + u_s(\tau_\nu), \lambda_1, \dots, \lambda_{m+1})d\tau_\nu, \dots)d\tau_2, \lambda_1, \dots, \lambda_{m+1})d\tau_1 - \lambda_{s+1} = 0, \quad s = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Систему (8), (9) запишем в виде

$$Q_\nu(\Delta_{m+1}; \lambda, u) = 0, \quad \lambda \in R^{n(m+1)}. \quad (10)$$

Таким образом, для нахождения решения $(\lambda, u[t])$ имеем замкнутую систему уравнений (8), (9).

Через $C([0, T], \Delta_{m+1}, R^{n(m+1)})$ обозначим пространство систем функций $u[t] = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_{m+1}(t))$, где функции $u_r : [\theta_{r-1}, \theta_r) \rightarrow R^n$ непрерывны и имеют конечные левосторонние пределы $\lim_{t \rightarrow \theta_r - 0} u_r(t)$ при всех $r = \overline{1, m+1}$ с нормой

$$\|u[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1, m+1}} \sup_{t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)} \|u_r(t)\|.$$

Условие А. Существует разбиение Δ_{m+1} такое, что система нелинейных уравнений $Q_\nu(\Delta_{m+1}; \lambda, 0) = 0$ имеет решение $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_{m+1}^0) \in R^{n(m+1)}$, задача Коши (3), (4) при $\lambda_r = \lambda_r^0, r = \overline{1, m+1}$, имеет решение $u_r^0(t)$, и система функций

$$u^0[t] = (u_1^0(t), u_2^0(t), \dots, u_{m+1}^0(t)) \in C([0, T], \Delta_{m+1}, R^{n(m+1)}).$$

По паре $(\lambda^0, u^0[t])$ определим кусочно-непрерывную на $(0, T)$ функцию $x^0(t)$ равенствами

$$t \in (\theta_{r-1}, \theta_r); \quad x^0(t) = \lambda_r^0 + u_r^0(t);$$

$$r = \overline{1, m+1}; \quad x^0(T) = \lambda_{m+1}^0 + \lim_{t \rightarrow T-0} u_{m+1}^0(t).$$

Выберем числа $\rho_\lambda > 0, \rho_u > 0, \rho_x > 0$ и составим множества:

$$S(\lambda^0, \rho_\lambda) = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}) \in R^{n(m+1)} : \|\lambda - \lambda^0\| < \rho_\lambda \right\};$$

$$S(u^0[t], \rho_u) = \left\{ u[t] \in C([0, T], \Delta_{m+1}, R^{n(m+1)}) : \|u - u^0\|_1 < \rho_u \right\};$$

$$S(x^0(t), \rho_x) = \left\{ x(t) \in C([0, T], R^n) : \|x - x^0\| < \rho_x \right\};$$

$$G_1^0(\rho_x) = \left\{ (t, x, v_1, v_2, \dots, v_{m+1}) : t \in [0, T], \|x - \lambda_r^0 - u_r^0(t)\| < \rho_x, t \in [\theta_{r-1}, \theta_r); \right.$$

$$r = \overline{1, m+1}, \left\| x - \lambda_{m+1}^0 - \lim_{t \rightarrow T-0} u_{m+1}^0(t) \right\| < \rho_x, t = T, \|v_1 - \lambda_1^0\| < \rho_x, \|v_2 - \lambda_2^0\| < \rho_x, \dots, \|v_{m+1} - \lambda_{m+1}^0\| < \rho_x \left. \right\};$$

$$G_2^0(\rho_\lambda, \rho_x) = \left\{ (v, w) \in R^{2n} : \|v - \lambda_1^0\| < \rho_\lambda, \left\| w - \lambda_{m+1}^0 - \lim_{t \rightarrow T-0} u_{m+1}^0(t) \right\| < \rho_x \right\}.$$

Условие В. Функции $f(t, x, v_1, v_2, \dots, v_{m+1}), g(v, w)$ соответственно $G_1^0(\rho_x), G_2^0(\rho_\lambda, \rho_x)$ непрерывны, имеют непрерывные частные производные:

$$f'_x(t, x, v_1, v_2, \dots, v_{m+1}), f'_{v_i}(t, x, v_1, v_2, \dots, v_{m+1}), i = \overline{1, m+1}, g'_v(v, w), g'_w(v, w)$$

и выполняются неравенства

$$\|f'_x(t, x, v_1, v_2, \dots, v_{m+1})\| \leq L(t), \|f'_{v_i}(t, x, v_1, v_2, \dots, v_{m+1})\| \leq L(t), i = \overline{1, m+1},$$

$$\|g'_v(v, w)\| \leq L_1, \|g'_w(v, w)\| \leq L_2,$$

где $L(t) \in C([0, T], R^n)$, $L_1, L_2 - const$.

Теорема 1. Пусть при заданных Δ_{m+1} , $\nu (\nu = 1, 2, \dots)$, $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$, $\rho_x > 0$ выполняются условия $A, B, (n(m+1) \times n(m+1))$ — матрица Якоби $\frac{\partial Q_\nu(\Delta_{m+1}, \lambda, u)}{\partial \lambda}$ обратима для всех

$$(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S_h(u^{(0)}[t], \rho_u)$$

и имеют место неравенства

$$\left\| \left(\frac{\partial Q_\nu(\Delta_{m+1}, \lambda, u)}{\partial \lambda} \right)^{-1} \right\| \leq \gamma_\nu(\Delta_{m+1});$$

$$\begin{aligned} q_\nu(\Delta_{m+1}) &= \gamma_\nu(\Delta_{m+1}) \max(L_2 h_{m+1}, 1) \max_{r=1, m+1} \left\{ \exp \left(\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} L(\tau) d\tau \right) - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{i!} \left(\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} L(\tau) d\tau \right)^i + \right. \\ &+ \left. \left(\exp \left(\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} L(\tau) d\tau \right) - \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{1}{i!} \left(\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} L(\tau) d\tau \right)^i \right) \sum_{j=1}^{m+1} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \beta_j(t) dt < 1; \right. \\ &\frac{\gamma_\nu(\Delta_{m+1})}{1 - q_\nu(\Delta_{m+1})} \|Q_\nu(\Delta_{m+1}, \lambda^{(0)}, u^{(0)})\| < \rho_\lambda; \\ &\frac{\gamma_\nu(\Delta_{m+1})}{1 - q_\nu(\Delta_{m+1})} \|Q_\nu(\Delta_{m+1}, \lambda^{(0)}, u^{(0)})\|; \\ &\max_{r=1, m+1} \left\{ \exp \left(\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} L(\tau) d\tau \right) - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{i!} \left(\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} L(\tau) d\tau \right)^i + \right. \\ &+ \left. \left(\exp \left(\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} L(\tau) d\tau \right) - \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{1}{i!} \left(\int_{\theta_{r-1}}^{\theta_r} L(\tau) d\tau \right)^i \right) \sum_{j=1}^{m+1} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \beta_j(t) dt \right\} < \rho_u. \end{aligned}$$

Тогда задача (3)–(6) в $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S_h(u^{(0)}[t], \rho_u)$ имеет изолированное решение и справедлива оценка:

$$\|\lambda^* - \lambda^{(0)}\| \leq \frac{\gamma_\nu(\Delta_{m+1})}{1 - q_\nu(\Delta_{m+1})} \|Q_\nu(\Delta_{m+1}, \lambda^{(0)}, u^{(0)})\|.$$

Одной из основных проблем при решении нелинейных краевых задач является выбор начального приближения. В данной работе предлагается один из подходов к выбору начального приближения решения задачи (1), (2), основанный на решении системы нелинейных алгебраических уравнений (10) при $u = 0$, т.е. системы уравнений

$$Q_\nu(\Delta_{m+1}; \lambda, 0) = 0, \quad \lambda \in R^{n(m+1)}. \tag{11}$$

Предположим, что при заданных Δ_{m+1} и $\nu (\nu = 1, 2, \dots)$ система $Q_\nu(\Delta_{m+1}; \lambda, 0) = 0$ имеет решение $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{m+1}) \in R^{n(m+1)}$.

Взяв точки $\theta_0 = 0 < \frac{\theta_1}{2} < \theta_1 < \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} < \dots < \theta_m < \frac{\theta_{m+1} + \theta_m}{2} < \theta_{m+1} = T$ и обозначив полученное разбиение через Δ_{2m+2} , рассмотрим уравнение

$$Q_\nu(\Delta_{2m+2}; \lambda, 0) = 0, \quad \lambda \in R^{2n(m+1)}. \quad (12)$$

Чтобы решить уравнение (12), воспользуемся теоремой 1 из [9]. За начальное приближение решения уравнения (12) возьмем вектор $\hat{\lambda}^0 = (\hat{\lambda}_1^{(0)}, \hat{\lambda}_2^{(0)}, \dots, \hat{\lambda}_{2m+2}^{(0)}) \in R^{2n(m+1)}$, где

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1^{(0)} &= \tilde{\lambda}_1, \quad \hat{\lambda}_2^{(0)} = \tilde{\lambda}_1 + \int_0^{\frac{\theta_1}{2}} f(\tau_1, \tilde{\lambda}_1 + \int_0^{\tau_1} f(\tau_2, \tilde{\lambda}_1 + \dots + \\ &+ \int_0^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{m+1}) d\tau_\nu, \dots) d\tau_2, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{m+1}) d\tau_1, \hat{\lambda}_3^{(0)} = \tilde{\lambda}_2, \\ \hat{\lambda}_4^{(0)} &= \tilde{\lambda}_2 + \int_{\frac{\theta_1}{2}}^{\theta_1} f(\tau_1, \tilde{\lambda}_2 + \int_{\frac{\theta_1}{2}}^{\tau_1} f(\tau_2, \tilde{\lambda}_2 + \dots + \\ &+ \int_{\frac{\theta_1}{2}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{m+1}) d\tau_\nu, \dots) d\tau_2, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{m+1}) d\tau_1, \\ \hat{\lambda}_5^{(0)} &= \tilde{\lambda}_3, \quad \hat{\lambda}_4^{(0)} = \tilde{\lambda}_3 + \int_{\theta_1}^{\frac{\theta_2+\theta_1}{2}} f(\tau_1, \tilde{\lambda}_3 + \int_{\theta_1}^{\tau_1} f(\tau_2, \tilde{\lambda}_3 + \dots + \\ &+ \int_{\theta_1}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{m+1}) d\tau_\nu, \dots) d\tau_2, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{m+1}) d\tau_1, \\ &\dots, \\ \hat{\lambda}_{2m+1}^{(0)} &= \tilde{\lambda}_{m+1}, \quad \hat{\lambda}_{2m+2}^{(0)} = \tilde{\lambda}_{m+1} + \int_{\frac{\theta_{m+1}+\theta_m}{2}}^T f(\tau_1, \tilde{\lambda}_{m+1} + \\ &+ \int_{\frac{\theta_{m+1}+\theta_m}{2}}^{\tau_1} f(\tau_2, \tilde{\lambda}_{m+1} + \dots + \\ &+ \int_{\frac{\theta_{m+1}+\theta_m}{2}}^{\tau_{\nu-1}} f(\tau_\nu, \tilde{\lambda}_{m+1}, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{m+1}) d\tau_\nu, \dots) d\tau_2, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{m+1}) d\tau_1. \end{aligned}$$

В качестве иллюстрации приведем пример. На отрезке $[0, 1]$ рассмотрим нелинейную краевую задачу для нагруженных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} x_1^2 + t \cdot x_1(\theta) + t^2 \cdot x_2^2(0) + f_1(t), \\ x_2^2 + (t-1) \cdot x_2(t) + t^2 \cdot x_1^2(0) + f_2(t), \end{cases} \quad (13)$$

$$x(0) = x(1), \quad (14)$$

где

$$f_1(t) = t^3(t-2) + 2.25t - 1, \quad f_2(t) = -t, \quad \theta = 0.5.$$

Точным решением задачи (13), (14) является $x(t) = \begin{pmatrix} t \cdot (t-1) \\ 1 \end{pmatrix}$.

Точкой нагружения $\theta = 0.5$ произведем разбиение интервала $[0, 1)$. Введя параметры $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = x(0)$, $\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = x(\theta)$ и произведя замену функции:

$$u_{11}(t) = x_1(t) - \lambda_1, \quad u_{12}(t) = x_2(t) - \mu_1, \quad t \in [0, 0.5),$$

$$u_{21}(t) = x_1(t) - \lambda_2, \quad u_{22}(t) = x_2(t) - \mu_2, \quad t \in [0.5, 1),$$

получим нелинейную краевую задачу с параметрами:

$$\frac{du_{11}}{dt} = (u_{11} + \lambda_1)^2 + t \cdot \lambda_2 + t^2 \cdot \mu_1^2 + f_1(t), \quad u_{11}(0) = 0, \quad t \in [0, 0.5); \quad (15)$$

$$\frac{du_{12}}{dt} = (u_{12} + \mu_1)^2 + (t - 1)(u_{12} + \mu_1) + t^2 \cdot \lambda_1^2 + f_2(t), u_{12}(0) = 0, t \in [0, 0.5]; \quad (16)$$

$$\frac{du_{21}}{dt} = (u_{21} + \lambda_2)^2 + t \cdot \lambda_2 + t^2 \cdot \mu_1^2 + f_1(t), u_{21}(\theta) = 0, t \in [0.5, 1]; \quad (17)$$

$$\frac{du_{22}}{dt} = (u_{22} + \mu_2)^2 + (t - 1)(u_{22} + \mu_2) + t^2 \cdot \lambda_1^2 + f_2(t), u_{22}(\theta) = 0, t \in [0.5, 1]; \quad (18)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 + \lim_{t \rightarrow 1-0} u_{21}(t); \quad (19)$$

$$\mu_1 = \mu_2 + \lim_{t \rightarrow 1-0} u_{22}(t); \quad (20)$$

$$\lambda_1 + \lim_{t \rightarrow 0.5-0} u_{11}(t) = \lambda_2; \quad (21)$$

$$\mu_1 + \lim_{t \rightarrow 0.5-0} u_{12}(t) = \mu_2. \quad (22)$$

Задачи Коши (15)–(18) эквивалентны соответственно нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра второго рода:

$$u_{11}(t) = \int_0^t [(u_{11}(\tau) + \lambda_1)^2 + \tau \cdot \lambda_2 + \tau^2 \cdot \mu_1^2 + f_1(\tau)] d\tau, \quad t \in [0, 0.5];$$

$$u_{12}(t) = \int_0^t [(u_{12}(\tau) + \mu_1)^2 + (\tau - 1)(u_{12}(\tau) + \mu_1) + \tau^2 \cdot \lambda_1^2 + f_2(\tau)] d\tau, \quad t \in [0, 0.5];$$

$$u_{21}(t) = \int_{0.5}^t [(u_{21}(\tau) + \lambda_2)^2 + \tau \cdot \lambda_2 + \tau^2 \cdot \mu_1^2 + f_1(\tau)] d\tau, \quad t \in [0.5, 1];$$

$$u_{22}(t) = \int_{0.5}^t [(u_{22}(\tau) + \mu_2)^2 + (\tau - 1)(u_{22}(\tau) + \mu_2) + \tau^2 \cdot \lambda_1^2 + f_2(\tau)] d\tau, \quad t \in [0.5, 1].$$

В интегральных уравнениях вместо $u_{11}(\tau)$, $u_{12}(\tau)$, $u_{21}(\tau)$, $u_{22}(\tau)$ подставляя соответствующие правые части и повторив этот процесс ν ($\nu = 1, 2, \dots$) раз, имеем представления функций $u_{11}(t)$, $u_{12}(t)$, $u_{21}(t)$, $u_{22}(t)$. Определив $\lim_{t \rightarrow 0.5-0} u_{11}(t)$, $\lim_{t \rightarrow 0.5-0} u_{12}(t)$, $\lim_{t \rightarrow 1-0} u_{21}(t)$, $\lim_{t \rightarrow 1-0} u_{22}(t)$ и подставив их в (19)–(22), получим систему нелинейных уравнений относительно введенных параметров:

$$Q_\nu(\Delta_2; \lambda, u) = 0, \lambda = (\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2). \quad (23)$$

Выбор начального приближения решения задачи (15)–(22) основывается на решении системы (23) при $u = 0$, т. е. системы

$$\begin{cases} 480\lambda_1 - 660\lambda_2 - 240\lambda_2^2 - 140\mu_1^2 - 17 = 0; \\ 24\mu_1 - 21\mu_2 - 12\mu_2^2 - 7\lambda_1^2 - 9 = 0; \\ 480\lambda_1 - 420\lambda_2 + 240\lambda_1^2 + 20\mu_1^2 - 133 = 0; \\ 15\mu_1 - 24\mu_2 + 12\mu_1^2 + \lambda_1^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

Пусть при заданных Δ_2 и $\nu = 1$ система $Q_1(\Delta_2; \lambda, 0) = 0$ имеет решение $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\mu}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\mu}_2) \in R^4$. Возьмем точку

$$t_0 = 0 < t_1 = \frac{\theta}{2} < t_2 = \theta < t_3 = \frac{1+\theta}{2} < t_4 = 1.$$

Разбиение $[0, 1) = \bigcup_{r=1}^4 [t_{r-1}, t_r)$ обозначим через Δ_4 . По схеме метода параметризации система нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров имеет вид

$$Q_1(\Delta_4; \lambda, u) = 0, \lambda = (\lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_4, \mu_4) \in R^8. \quad (24)$$

Для нахождения решения системы (24) используется теорема 1 из [6], где за начальное приближение решения берется вектор $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \mu_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}, \mu_3^{(0)}, \lambda_4^{(0)}, \mu_4^{(0)}) \in R^8$. Здесь

$$\lambda_1^{(0)} = \tilde{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2^{(0)} = \tilde{\lambda}_1 + \int_{t_0}^{t_1} [\tilde{\lambda}_1^2 + \tau \cdot \tilde{\lambda}_2 + \tau^2 \cdot \tilde{\mu}_1^2 + f_1(\tau)] d\tau;$$

$$\hat{\mu}_1^{(0)} = \tilde{\mu}_1, \hat{\mu}_2^{(0)} = \tilde{\mu}_1 + \int_{t_0}^{t_1} [\tilde{\mu}_1^2 + (\tau - 1)\tilde{\mu}_1 + \tau^2 \cdot \tilde{\lambda}_1^2 + f_2(\tau)]d\tau;$$

$$\hat{\lambda}_3^{(0)} = \tilde{\lambda}_2, \hat{\lambda}_4^{(0)} = \tilde{\lambda}_2 + \int_{t_2}^{t_3} [\tilde{\lambda}_2^2 + \tau \cdot \tilde{\lambda}_2 + \tau^2 \cdot \tilde{\mu}_1^2 + f_1(\tau)]d\tau;$$

$$\hat{\mu}_3^{(0)} = \tilde{\mu}_2, \hat{\mu}_4^{(0)} = \tilde{\mu}_2 + \int_{t_2}^{t_3} [\tilde{\mu}_2^2 + (\tau - 1)\tilde{\mu}_2 + \tau^2 \cdot \tilde{\lambda}_1^2 + f_2(\tau)]d\tau.$$

Таким образом, предложенный в настоящей работе подход к выбору начального приближения решения задачи (15)–(22) основан на решении системы нелинейных алгебраических уравнений при соответствующем разбиении и при $u = 0$, т.е. системы уравнений

$$Q_\nu(\Delta_{2^k}; \lambda, 0) = 0, \lambda = (\lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_{2^k}, \mu_{2^k}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (25)$$

В таблицах 1 и 2 приведены вычисления значений введенных дополнительных параметров и точного решения нелинейной краевой задачи (13), (14) при $\nu=1$ и $\nu=2$ соответственно.

Таблица 1

Значения дополнительных параметров и точного решения нелинейной краевой задачи при $\nu = 1$

Число разбиений, $\Delta_{2^k}, k \in \mathbb{N}$	t	λ	$x_1^*(t)$	μ	$x_2^*(t)$
Δ_2	0.0	0.0229099	0	0.9999052	1
	0.5	- 0.242574	-0.25	0.9998678	1
Δ_4	0.00	0.0122464	0	0.9999749	1
	0.25	-0.1785389	-0.1875	0.9999686	1
	0.50	-0.2459039	-0.25	0.9999633	1
	0.75	-0.1808678	-0.1875	0.9999632	1
Δ_8	0.000	0.0065145	0	0.9999931	1
	0.125	-0.1033719	-0.109375	0.9999922	1
	0.250	-0.1830214	-0.1875	0.9999913	1
	0.375	-0.2313403	-0.234375	0.9999903	1
	0.500	-0.2476398	-0.25	0.9999896	1
	0.625	-0.2316768	-0.234375	0.9999893	1
	0.750	-0.1836136	-0.1875	0.9999895	1
	0.875	-0.1039513	-0.109375	0.9999907	1
Δ_{16}	0.0000	0.0033501	0	0.9999982	1
	0.0625	-0.0553144	-0.0585938	0.9999981	1
	0.1250	-0.1063583	-0.109375	0.999998	1
	0.1875	-0.1496983	-0.1523438	0.9999978	1
	0.2500	-0.1852618	-0.1875	0.9999977	1
	0.3125	-0.2129881	-0.2148438	0.9999976	1
	0.3750	-0.2328306	-0.234375	0.9999974	1
	0.4375	-0.2447568	-0.2460938	0.9999973	1
	0.5000	-0.2487481	-0.25	0.9999973	1
	0.5625	-0.2447988	-0.2460938	0.9999972	1
	0.6250	-0.2329156	-0.234375	0.9999972	1
	0.6875	-0.2131159	-0.2148438	0.9999972	1
	0.7500	-0.1854271	-0.1875	0.9999972	1
	0.8125	-0.1498858	-0.1523438	0.9999973	1
	0.8750	-0.1065376	-0.109375	0.9999975	1
	0.9375	-0.0554374	-0.0585938	0.9999978	1

Таблица 2

**Значения дополнительных параметров и точного решения
нелинейной краевой задачи при $\nu = 2$**

Число разбиений, $\Delta_{2^k}, k \in \mathbb{N}$	t	λ	$x_1^*(t)$	μ	$x_2^*(t)$
Δ_2	0.0	-0.010804	0	0.999981	1
	0.5	-0.258672	-0.25	0.999971	1
Δ_4	0.00	-0.001675	0	0.9999996	1
	0.25	-0.189051	-0.1875	0.9999994	1
Δ_8	0.50	-0.251296	-0.25	0.9999993	1
	0.75	-0.188913	-0.1875	0.9999993	1
Δ_{16}	0.000	-0.0000265	0	1	1
	0.125	-0.109635	-0.109375	1	1
	0.250	-0.187735	-0.1875	1	1
	0.375	-0.234579	-0.234375	1	1
	0.500	-0.250187	-0.25	1	1
	0.625	-0.234569	-0.234375	1	1
	0.750	-0.187717	-0.1875	1	1
	0.875	-0.109619	-0.109375	1	1
	0.0000	-0.000053	0	1	1
	0.0625	-0.058646	-0.0585938	1	1
	0.1250	-0.109425	-0.109375	1	1
	0.1875	-0.152392	-0.1523438	1	1
	0.2500	-0.187544	-0.1875	1	1
	0.3125	-0.214885	-0.2148438	1	1
	0.3750	-0.234413	-0.234375	1	1
	0.4375	-0.246129	-0.2460938	1	1
0.5000	-0.250034	-0.25	1	1	
0.5625	-0.246129	-0.2460938	1	1	
0.6250	-0.234412	-0.234375	1	1	
0.6875	-0.214883	-0.2148438	1	1	
0.7500	-0.187543	-0.1875	1	1	
0.8125	-0.152389	-0.1523438	1	1	
0.8750	-0.109424	-0.109375	1	1	
0.9375	-0.058645	-0.0585938	1	1	

При вычислении значений параметров использовали математический пакет Mathcad (табл. 3).

Таблица 3

**Оценка разности точного решения нелинейной
краевой задачи и начального приближения**

	$\nu=1$		$\nu=2$	
	$\ x_1^*(t) - \lambda^0\ $	$\ x_2^*(t) - \mu^0\ $	$\ x_1^*(t) - \lambda^0\ $	$\ x_2^*(t) - \mu^0\ $
Δ_2	$3 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-5}$
Δ_4	$1 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-7}$
Δ_8	$6 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-8}$
Δ_{16}	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-10}$

Таким образом, в работе предложен один из способов выбора начального приближения для нахождения нелинейной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений.

Список литературы

- 1 *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — С. 205.
- 2 *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. — М.: Наука, 1990. — С. 232.
- 3 *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение // Диф. уравнения. — 1983. — Т. 19. — № 1. — С. 86–94.
- 4 *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* О численном решении нагруженных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 2004. — Т. 44. — № 9. — С. 1585–1595.
- 5 *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 2014. — Т. 54. — № 7. — С. 1096–1109.
- 6 *Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* On Numerical Solution to Loaded Systems of Ordinary Differential Equations with Non-separated Multipoint and Integral Conditions // Numerical Analysis and Applications. — 2014. — Vol. 17. — No. 1. — P. 1–16.
- 7 *Бакирова Э.А.* О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. — 2005. — № 1. — С. 95–102.
- 8 *Джумабаев Д.С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1989. — Т. 29. — № 1. — С. 50–66.

Э.А. Бакирова, Н.Б. Исакова

Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты емес шеттік есептің шешімінің бастапқы жуықтауын таңдаудың бір тәсілі туралы

Мақалада параметрлеу әдісі негізінде жіктелген дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты емес екі нүктелі шеттік есеп зерттелді. Параметрлеу әдісінің мәні, берілген аралықты жүктелу нүктелерімен бөлу және қосымша параметрлер енгізу арқылы қарастырылып отырған есеп пара-пар параметрлері бар сызықты емес екі нүктелі шеттік есепке келтірілді. Қосымша параметрлер енгізу ішкі аралықтарда белгісіз функциялар үшін бастапқы шарттарды алуға мүмкіндік берді. Параметрлердің бекітілген мәндерінде жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебі шешілді. Коши есебінің шешімінің кейіптемелерін шеттік шарттарға және аралықты бөлетін ішкі нүктелеріндегі шешімнің үзіліссіздік шарттарына қоя отырып, енгізілген параметрлерге қарасты сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесі құрылды. Құрылған сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесі параметрлеу әдісінің алгоритмдерінің негізі болып табылады және жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін сызықты емес екі нүктелі шеттік есептің шешіміне «жақсы» алғашқы жуықтауларды табуға мүмкіндік береді. Сызықты емес шеттік есептің шешімін табуға арналған «жақсы» алғашқы жуықтауды таңдап алудың бір тәсілі ұсынылған. Бұл қадамдар жеткілікті түрде аз болғанда жіктелген дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты емес екі нүктелі шеттік есептің оқшауланған шешімінің бар болуының шарттары алынған.

E.A. Bakirova, N.B. Iskakova

An approach to the choice of the initial approximation of the solution of nonlinear boundary value problem for loaded differential equations

On the basis of the parameterization method is investigated nonlinear two-point boundary value problem for systems loaded differential equations. The essence of the parameterization is that the problem of the partition of the interval specified points of loading and introduction of additional parameters is reduced to the equivalent nonlinear two-point boundary value problem with parameter. The introduction of additional parameters allows to get the initial conditions for the unknown functions in the sub-intervals. For fixed values of the parameters solved the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations. Substituting the representation of the solution of the Cauchy problem in the boundary condition and the conditions of continuity of the solution was built for the entered parameters. Built a system of nonlinear algebraic equations are the basis of the method of parameterization algorithms and allow us to find a good initial approximation to the solution of a nonlinear two-point boundary value problem for loaded differential equations. A one way to choosing a good initial approximation was offered for finding solutions of nonlinear boundary problem. The conditions of existence of isolated solution of the nonlinear two-point boundary value problem for loaded differential equations for sufficiently small steps partition.

References

- 1 Nahushev A.M. *Equations of Mathematical Biology*, Moscow: Vysshaya shkola, 1995, p. 205.
- 2 Nahushev A.M. *Loaded equations and their applications*, Moscow: Nauka, 2012, p. 232.
- 3 Nahushev A.M. *Differential equations*, 1983, 19, 1, p. 86–94.
- 4 Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. *Computational Mathematics and Mathematical Physics Journal*, 2004, 44, 9, p. 1585–1595.
- 5 Abdullayev V.M., Aida-zadeh K.R. *Computational Mathematics and Mathematical Physics Journal*, 2014, 54, 7, p. 1096–1109.
- 6 Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. *Numerical Analysis and Applications*, 2014, 17, 1, p. 1–16.
- 7 Bakirova E.A. *News of the National Academy of Sciences of RK*, Ser. of Physical and Mathemayical, 2005, 1, p. 95–102.
- 8 Dzhumabaev D.S. *Computational Mathematics and Mathematical Physics Journal*, 1989, 29, 1, p. 50–66.

УДК 517.51

Н.А. Бокаев¹, В.И. Буренков^{2,3}, Д.Т. Матин¹

¹Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана;

²Кардиффский университет, Великобритания;

³Российский университет дружбы народов, Москва
(E-mail: bokayev2011@yandex.ru)

О достаточном условии предкомпактности множеств в обобщенных пространствах Морри

В статье приведены достаточные условия предкомпактности множеств в обобщенных пространствах Морри $M_p^{w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Из доказанной теоремы в случае $w(r) = r^{-\lambda}, 0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, вытекает известный результат для пространства Морри $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, а в случае $\lambda = 0$ — хорошо известная теорема Фреше-Колмогорова. Предварительно доказаны несколько лемм об оценке средних функций в обобщенном пространстве Морри. Эти леммы представляют самостоятельный интерес. Обсуждается необходимость полученных условий.

Ключевые слова: пространства Морри, обобщенные пространства Морри, предкомпактность.

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, w — измеримая неотрицательная функция на $(0, \infty)$, не эквивалентная нулю. Обобщенное пространство Морри $M_p^{w(\cdot)} \equiv M_p^{w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех функций $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{M_p^{w(\cdot)}} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \left(w(r) \|f\|_{L_p(B(x,r))} \right),$$

где $B(x, r)$ — открытый шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$.

Пространство $M_p^{w(\cdot)}$ совпадает с классическим пространством Морри M_p^λ при $w(r) = r^{-\lambda}$, где $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, которое, в свою очередь, при $\lambda = 0$ совпадает с пространством $L_p(\mathbb{R}^n)$, а при $\lambda = \frac{n}{p}$ — с пространством $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

В соответствии с [1, 2] обозначим через $\Omega_{p\infty}$ множество всех функций, которые являются неотрицательными, измеримыми на $(0, \infty)$, не эквивалентными 0 и такими, что для некоторого $t > 0$ (а значит, и для любых $t > 0$)

$$\|w(r)r^{\frac{n}{p}}\|_{L_\infty(0,t)} < \infty, \quad \|w(r)\|_{L_\infty(t,\infty)} < \infty.$$

Пространство $M_p^{w(\cdot)}$ нетривиально, т.е. состоит не только из функций, эквивалентных 0 на \mathbb{R}^n , тогда и только тогда, когда $w \in \Omega_{p\infty}$ (см. [3, 4]).

Пусть $\chi(A)$ — характеристическая функция множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и cA — дополнение A .

Теорема. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $w \in \Omega_{p\infty}$. Предположим, что множество $S \subset M_p^{w(\cdot)}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\sup_{f \in S} \|f\|_{M_p^{w(\cdot)}} < \infty; \tag{1}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sup_{f \in S} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}} = 0; \tag{2}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{f \in S} \|f\chi_{{}^cB(0,r)}\|_{M_p^{w(\cdot)}} = 0. \tag{3}$$

Тогда S является предкомпактным множеством в $M_p^{w(\cdot)}$. В случае пространства Морри $M_p^\lambda (0 < \lambda < \frac{n}{p})$ эта теорема была доказана в работе [5], а в случае $\lambda = 0$ — это хорошо известная теорема Фреше-Колмогорова [6].

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Для $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ и $r > 0$ обозначим

$$(M_r f)(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy,$$

где $|A|$ обозначает меру Лебега множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

Лемма 1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$. Тогда для всех $f \in M_p^{w(\cdot)}$ и $r > 0$ имеет место оценка

$$\|M_r f - f\|_{M_p^{w(\cdot)}} \leq \sup_{u \in B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}}. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{R}^n$ и $\rho > 0$. Тогда, согласно неравенству Гельдера,

$$\begin{aligned} \|M_r f - f\|_{L_p(B(z,\rho))} &= \left(\int_{B(z,\rho)} \left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy - f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\int_{B(z,\rho)} \left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} (f(y) - f(x)) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\int_{B(z,\rho)} \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p dy \right) dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Далее, используя замену переменных $y = x + u$ и меняя местами порядок интегрирования, получаем:

$$\begin{aligned} \|M_r f - f\|_{L_p(B(z,\rho))} &\leq \left(\int_{B(z,\rho)} \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} |f(x+u) - f(x)|^p du \right) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \left(\int_{B(z,\rho)} |f(x+u) - f(x)|^p dx \right) du \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{L_p(B(z,\rho))}^p du \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|M_r f - f\|_{M_p^{w(\cdot)}} &= \sup_{z \in \mathbb{R}^n, \rho > 0} w(\rho) \|M_r f - f\|_{L_p(B(z,\rho))} \leq \\ &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n, \rho > 0} w(\rho) \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{L_p(B(z,\rho))}^p du \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \sup_{z \in \mathbb{R}^n, \rho > 0} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{L_p(B(z,\rho))}^p du \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}}^p du \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{u \in B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}}. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$. Тогда для всех $f \in M_p^{w(\cdot)}$ и $r > 0$ имеет место неравенство

$$\|M_r f\|_{M_p^{w(\cdot)}} \leq \|f\|_{M_p^{w(\cdot)}}. \quad (5)$$

Доказательство. Согласно неравенству Гельдера

$$\begin{aligned}
 \|M_r f\|_{L_p(B(z,\rho))} &= \left(\int_{B(z,\rho)} \left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\
 &\leq \left(\int_{B(z,\rho)} \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\
 &= \left(\int_{B(z,\rho)} \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} |f(x+u)|^p du \right) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\
 &= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \left(\int_{B(z,\rho)} |f(x+u)|^p dx \right) du \right)^{\frac{1}{p}} = \\
 &= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \left(\int_{B(z+u,\rho)} |f(v)|^p dv \right) du \right)^{\frac{1}{p}} = \\
 &= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \|f\|_{L_p(B(z+u,\rho))}^p du \right)^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 \|M_r f\|_{M_p^{w(\cdot)}} &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n, \rho > 0} \left(w(\rho) \|M_r f\|_{L_p(B(z,\rho))} \right) \leq \\
 &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n, \rho > 0} \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \left(w(\rho) \|f\|_{L_p(B(z+u,\rho))} \right)^p du \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\
 &\leq \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \left(\sup_{z \in \mathbb{R}^n, \rho > 0} w(\rho) \|f\|_{L_p(B(z+u,\rho))} \right)^p du \right)^{\frac{1}{p}} = \\
 &= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n, \rho > 0} w(\rho) \|f\|_{L_p(B(x,\rho))} \right)^p du \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{M_p^{w(\cdot)}}.
 \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$. Тогда существует $r_0 > 0$ и для любых $0 < r \leq r_0$ существует $C_r > 0$, зависящее только от r, n, p, w , такое, что:

1) для любых $f \in M_p^{w(\cdot)}$

$$\|M_r f\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leq C_r \|f\|_{M_p^{w(\cdot)}}; \quad (6)$$

2) для любых $\delta > 0$

$$\sup_{u \in B(0,\delta)} \|M_r f(\cdot + u) - M_r f\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leq C_r \sup_{u \in B(0,\delta)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}}. \quad (7)$$

Доказательство 1. Так как функция $w \in \Omega_{p\infty}$ не эквивалентна 0, то существует $r_0 > 0$ такое, что $\sup_{r_0 < \rho < \infty} w(\rho) > 0$. Пусть $0 < r \leq r_0$. Согласно неравенству Гельдера для любых $x \in \mathbb{R}^n$

$$|M_r f(x)| \leq \frac{1}{|B(x, r)|^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{L_p(B(x, r))}.$$

Следовательно,

$$|M_r f(x)| w(\rho) \leq \frac{1}{(v_n r^n)^{\frac{1}{p}}} \left(w(\rho) \|f\|_{L_p(B(x, r))} \right),$$

где v_n — объем единичного шара в \mathbb{R}^n и

$$\begin{aligned} |M_r f(x)| \sup_{r < \rho < \infty} w(\rho) &\leq \frac{1}{(v_n r^n)^{\frac{1}{p}}} \left(\sup_{r < \rho < \infty} w(\rho) \|f\|_{L_p(B(x, r))} \right) \leq \frac{1}{(v_n r^n)^{\frac{1}{p}}} \left(\sup_{r < \rho < \infty} w(\rho) \|f\|_{L_p(B(x, \rho))} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{(v_n r^n)^{\frac{1}{p}}} \left(\sup_{\rho > 0} w(\rho) \|f\|_{L_p(B(x, \rho))} \right). \end{aligned}$$

Поэтому для любых $x \in \mathbb{R}^n$

$$|M_r f(x)| \leq C_r \|f\|_{M_p^{w(\cdot)}}, \quad (8)$$

где $C_r = \left(\left(\sup_{r < \rho < \infty} w(\rho) \right) (v_n r^n)^{\frac{1}{p}} \right)^{-1}$.

2. Далее, для любых $x_1, x_2 \in B(0, r)$

$$\begin{aligned} |(M_r f)(x_1) - (M_r f)(x_2)| &= \frac{1}{v_n r^n} \left| \int_{B(x_1, r)} f(y) dy - \int_{B(x_2, r)} f(y) dy \right| = \\ &= (v_n r^n)^{-1} \left| \int_{B(0, r)} f(z + x_1) dz - \int_{B(0, r)} f(z + x_2) dz \right| \leq \\ &\leq (v_n r^n)^{-1} \int_{B(0, r)} |f(z + x_1) - f(z + x_2)| dz = \\ &= (v_n r^n)^{-1} \int_{B(x_2, r)} |f(s + x_1 - x_2) - f(s)| ds \leq \\ &\leq (v_n r^n)^{-\frac{1}{p}} \|f(\cdot + x_1 - x_2) - f(\cdot)\|_{L_p(B(x_2, r))}. \end{aligned}$$

Поэтому, аналогично первому шагу доказательства, получим вместо (8) неравенство

$$|(M_r f)(x_1) - (M_r f)(x_2)| \leq C_r \|f(\cdot + x_1 - x_2) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, |x_1 - x_2| \leq \delta} |(M_r f)(x_1) - (M_r f)(x_2)| &\leq C_r \sup_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, |x_1 - x_2| \leq \delta} \|f(\cdot + x_1 - x_2) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}} = \\ &= C_r \sup_{u \in B(0, \delta)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}}. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$. Тогда существует $C > 0$, зависящее только от n, p, w , такое, что для любых $r, R > 0$ и любых $f, g \in M_p^{w(\cdot)}$ имеет место оценка

$$\|M_r f - M_r g\|_{M_p^{w(\cdot)}} \leq C \left(1 + R^{\frac{n}{p}} \right) \|M_r f - M_r g\|_{C(\overline{B(0, R)})} +$$

$$+ \sup_{u \in B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}} + \sup_{u \in B(0,r)} \|g(\cdot + u) - g(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}} + \\ + \left\| f \chi_{c_{B(0,R)}} \right\|_{M_p^{w(\cdot)}} + \left\| g \chi_{c_{B(0,R)}} \right\|_{M_p^{w(\cdot)}}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\|M_r f - M_r g\|_{M_p^{w(\cdot)}} \leq \left\| (M_r f - M_r g) \chi_{B(0,R)} \right\|_{M_p^{w(\cdot)}} + \left\| (M_r f - M_r g) \chi_{c_{B(0,R)}} \right\|_{M_p^{w(\cdot)}} = I_1 + I_2.$$

Далее,

$$I_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \rho > 0} \left(w(\rho) \|M_r f - M_r g\|_{L_p(B(x,\rho) \cap B(0,R))} \right) \leq \\ \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n, 0 < \rho < 1} \left(w(\rho) \|M_r f - M_r g\|_{L_p(B(x,\rho) \cap B(0,R))} \right) + \\ + \sup_{x \in \mathbb{R}^n, 1 \leq \rho < \infty} \left(w(\rho) \|M_r f - M_r g\|_{L_p(B(x,\rho) \cap B(0,R))} \right) \leq \\ \leq \|M_r f - M_r g\|_{C(\overline{B(0,R)})} \cdot \left(\sup_{0 < \rho < 1} w(\rho) (v_n \rho^n)^{\frac{1}{p}} + \sup_{1 \leq \rho < \infty} w(\rho) (v_n R^n)^{\frac{1}{p}} \right) \leq \\ \leq C \left(1 + R^{\frac{n}{p}} \right) \|M_r f - M_r g\|_{C(\overline{B(0,R)})},$$

где

$$C = v_n^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{0 < \rho < 1} w(\rho) \rho^{\frac{n}{p}} + \sup_{1 \leq \rho < \infty} w(\rho) \right) < \infty,$$

так как $w \in \Omega_{p\infty}$.

Кроме того, согласно лемме 1

$$I_2 \leq \|M_r f - f\|_{M_p^{w(\cdot)}} + \left\| (f - g) \chi_{c_{B(0,R)}} \right\|_{M_p^{w(\cdot)}} + \|M_r g - g\|_{M_p^{w(\cdot)}} \leq \\ \leq \sup_{u \in B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}} + \sup_{u \in B(0,r)} \|g(\cdot + u) - g(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}} + \\ + \left\| f \chi_{c_{B(0,R)}} \right\|_{M_p^{w(\cdot)}} + \left\| g \chi_{c_{B(0,R)}} \right\|_{M_p^{w(\cdot)}},$$

откуда и следует искомое неравенство.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $w \in \Omega_{p\infty}$. Тогда для любых $r, R > 0$ и $f, g \in M_p^{w(\cdot)}$

$$\|f - g\|_{M_p^{w(\cdot)}} \leq C \left(1 + R^{\frac{n}{p}} \right) \|M_r f - M_r g\|_{C(\overline{B(0,R)})} + \\ + 2 \sup_{u \in B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{M_p^w} + 2 \sup_{u \in B(0,r)} \|g(\cdot + u) - g(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}} + \\ + \left\| f \chi_{c_{B(0,R)}} \right\|_{M_p^w} + \left\| g \chi_{c_{B(0,R)}} \right\|_{M_p^w}, \quad (9)$$

где $C > 0$ такое же, как и в лемме 4.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\|f - g\|_{M_p^{w(\cdot)}} \leq \|M_r f - f\|_{M_p^{w(\cdot)}} + \|M_r f - M_r g\|_{M_p^{w(\cdot)}} + \|M_r g - g\|_{M_p^{w(\cdot)}},$$

и воспользоваться леммами 1 и 4.

Доказательство теоремы. Пусть $S \subset M_p^{w(\cdot)}$ и выполнены условия (1)–(3).

Шаг 1. Пусть $0 < r < r_0$, где r_0 определено в лемме 3, и $R > 0$ фиксированы. В силу неравенства (6) и условия (1) следует, что $\sup_{f \in S} \|M_r f\|_{C(\overline{B(0,R)})} < \infty$.

Кроме того, в силу неравенства (7) и условия (2), следует, что

$$\limsup_{u \rightarrow 0} \sup_{f \in S} \|M_r f(\cdot + u) - M_r f(\cdot)\|_{C(\overline{B(0,R)})} = 0.$$

Следовательно, по теореме Асколи-Арцела множество $S_r = \{M_r f : f \in S\}$ предкомпактно в $C(\overline{B(0,R)})$, или, что то же самое, множество S_r вполне ограничено, т.е. для любых $\varepsilon > 0$ существуют $m \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_m \in S$ (зависящие от ε, r и R) такие, что для любых $f \in S$

$$\min_{j=1, \dots, m} \|M_r f - M_r f_j\|_{C(\overline{B(0,R)})} < \varepsilon.$$

Шаг 2. Пусть $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ – произвольное конечное подмножество S . В силу неравенства (9) для любых $f \in S$ и любых $j = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} \|f - \varphi_j\|_{M_p^w} &\leq C(1 + R^{\frac{n}{p}}) \|M_r f - M_r \varphi_j\|_{C(\overline{B(0,R)})} + \\ &+ 2 \sup_{u \in B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}} + 2 \sup_{u \in B(0,r)} \|\varphi_j(\cdot + u) - \varphi_j(\cdot)\|_{M_p^{w(\cdot)}} + \\ &+ \|f \chi_{c_{B(0,R)}}\|_{M_p^{w(\cdot)}} + \|\varphi_j \chi_{c_{B(0,R)}}\|_{M_p^{w(\cdot)}} \leq \\ &\leq C(1 + R^{\frac{n}{p}}) \|M_r f - M_r \varphi_j\|_{C(\overline{B(0,R)})} + 4 \sup_{u \in B(0,r)} \sup_{g \in S} \|g(\cdot + u) - g(\cdot)\|_{M_p^w} + 2 \sup_{g \in S} \|g \chi_{c_{B(0,R)}}\|_{M_p^w}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \min_{j=1, \dots, m} \|f - \varphi_j\|_{M_p^w} &\leq C(1 + R^{\frac{n}{p}}) \min_{j=1, \dots, m} \|M_r f - M_r \varphi_j\|_{C(\overline{B(0,R)})} + \\ &+ 4 \sup_{u \in B(0,r)} \sup_{g \in S} \|g(\cdot + u) - g(\cdot)\|_{M_p^w} + 2 \sup_{g \in S} \|g \chi_{c_{B(0,R)}}\|_{M_p^w}. \end{aligned} \quad (10)$$

Шаг 3. Пусть $\varepsilon > 0$. Во-первых, используя условие (3), мы находим такое $R(\varepsilon) > 0$, что

$$\sup_{g \in S} \|g \chi_{c_{B(0,R(\varepsilon))}}\|_{M_p^w} < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Далее, используя условие (2), мы находим такое $r(\varepsilon)$, что

$$\sup_{u \in B(0,r(\varepsilon))} \sup_{g \in S} \|g(\cdot + u) - g(\cdot)\|_{M_p^w} < \frac{\varepsilon}{12}.$$

И, наконец, в силу предкомпактности множества $S_{r(\varepsilon)}$ в $C(\overline{B(0,R(\varepsilon))})$ существуют такие $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ и $f_{1,\varepsilon}, \dots, f_{m(\varepsilon),\varepsilon} \in S$, что для любых $f \in S$

$$\min_{j=1, \dots, m(\varepsilon)} \|M_{r(\varepsilon)} f - M_{r(\varepsilon)} f_{j,\varepsilon}\|_{C(\overline{B(0,R(\varepsilon))})} < \frac{\varepsilon}{3C(1 + R(\varepsilon)^{\frac{n}{p}})}.$$

Следовательно, в силу неравенства (10) с $\varphi_j = f_{j,\varepsilon}, j = 1, \dots, m(\varepsilon)$, для любых $f \in S$

$$\min_{j=1, \dots, m(\varepsilon)} \|f - f_{j,\varepsilon}\|_{M_p^w} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Это означает, что множество S вполне ограничено в M_p^w , или, что то же самое, множество S предкомпактно в M_p^w ; что и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Условие (1) в теореме является необходимым, так как любое предкомпактное множество в нормированном пространстве является ограниченным.

Что касается условий (2) и (3), то они не являются необходимыми, во всяком случае при $n = 1$ и $w(r) = r^{-\lambda}$, $0 < \lambda < \frac{1}{p}$, так как множество S , состоящее только из одной функции $|x|^{\lambda - \frac{1}{p}} \in M_p^\lambda$, предкомпактно, но условия (2) и (3) не выполняются. Это следует из приводимого ниже примера.

Таким образом, вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий предкомпактности множества $S \subset M_p^{w(\cdot)}$ остается открытым.

Пример. При $n = 1$ и $w(r) = r^{-\lambda}$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \lambda < \frac{1}{p}$,

$$\left(M_r(|\cdot|^{\lambda-\frac{1}{p}}) \right) (x) \rightarrow |x|^{\lambda-\frac{1}{p}} \quad (11)$$

в M_p^λ при $r \rightarrow 0^+$;

$$|x+u|^{\lambda-\frac{1}{p}} \rightarrow |x|^{\lambda-\frac{1}{p}} \quad (12)$$

в M_p^λ при $u \rightarrow 0$;

$$|x|^{\lambda-\frac{1}{p}} \chi_{B(0,r)}(x) \rightarrow 0 \quad (13)$$

в M_p^λ при $r \rightarrow +\infty$.

Действительно, для $x > 0$ и $0 < r < x$

$$\begin{aligned} M_r(|\cdot|^{\lambda-\frac{1}{p}})(x) &= \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} y^{\lambda-\frac{1}{p}} dy = \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{p} + 1 \right)^{-1} \frac{1}{2r} \left((x+r)^{\lambda-\frac{1}{p}+1} - (x-r)^{\lambda-\frac{1}{p}+1} \right) = \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{p} + 1 \right)^{-1} \frac{x^{\lambda-\frac{1}{p}+1}}{2r} \left[\left(1 + \frac{r}{x} \right)^{\lambda-\frac{1}{p}+1} - \left(1 - \frac{r}{x} \right)^{\lambda-\frac{1}{p}+1} \right]; \\ M_r(|\cdot|^{\lambda-\frac{1}{p}})(x) - x^{\lambda-\frac{1}{p}} &= \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{p} + 1 \right)^{-1} \frac{x^{\lambda-\frac{1}{p}+1}}{2r} \left[\left(1 + \frac{r}{x} \right)^{\lambda-\frac{1}{p}+1} - \left(1 - \frac{r}{x} \right)^{\lambda-\frac{1}{p}+1} - 2 \left(\lambda - \frac{1}{p} + 1 \right) \frac{r}{x} \right]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством*

$$(1+y)^\mu - (1-y)^\mu - 2\mu y \geq \frac{\mu(1-\mu)(2-\mu)}{3} y^3,$$

справедливым для любых $0 < \mu < 1$ и $0 < y < 1$, получим, полагая $\mu = \lambda - \frac{1}{p} + 1$ и $y = \frac{r}{x}$, что для некоторого $c > 0$, зависящего только от λ и p , для любых $0 < r < x$

$$M_r(|\cdot|^{\lambda-\frac{1}{p}})(x) - x^{\lambda-\frac{1}{p}} \geq cx^{\lambda-\frac{1}{p}} \left(\frac{r}{x} \right)^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| M_r(|\cdot|^{\lambda-\frac{1}{p}})(x) - |x|^{\lambda-\frac{1}{p}} \right\|_{M_p^\lambda} &= \sup_{z \in \mathbb{R}, r > 0} r^{-\lambda} \left\| M_r(|\cdot|^{\lambda-\frac{1}{p}})(x) - |x|^{\lambda-\frac{1}{p}} \right\|_{L_p(z-r, z+r)} \geq \\ &\geq r^{-\lambda} \left\| M_r(|\cdot|^{\lambda-\frac{1}{p}})(x) - |x|^{\lambda-\frac{1}{p}} \right\|_{L_p(2r, 4r)} \geq cr^{-\lambda} \left\| x^{\lambda-\frac{1}{p}} \left(\frac{r}{x} \right)^2 \right\|_{L_p(2r, 4r)} \geq \end{aligned}$$

* Действительно, согласно формуле Тейлора, существуют такие ξ, η , что $1-x < \eta < 1 < \xi < 1+x$ и

$$\begin{aligned} (1+y)^\mu - (1-y)^\mu - 2\mu y &= 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2} x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{6} x^3 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{24} \xi^{\mu-4} x^4 - \\ &- \left(1 - \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2} x^2 - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{6} x^3 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{24} \eta^{\mu-4} x^4 \right) - 2\mu x = \\ &= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3} x^3 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{24} (\xi^{\mu-4} - \eta^{\mu-4}) x^4 \geq \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3} x^3. \end{aligned}$$

$$\geq c r^{-\lambda} (4r)^{\lambda - \frac{1}{p}} \left(\frac{1}{4}\right)^2 (2r)^{\frac{1}{p}} = c 4^{\lambda - \frac{1}{p} - 2} 2^{\frac{1}{p}} > 0,$$

откуда следует (11). Из (11), согласно лемме 1, следует (12). Наконец,

$$\begin{aligned} \left\| |x|^{\lambda - \frac{1}{p}} \chi_{B(0,r)}(x) \right\|_{M_p^\lambda} &= \sup_{z \in \mathbb{R}^n, \rho > 0} \left\| |x|^{\lambda - \frac{1}{p}} \chi_{B(z,\rho)}(x) \right\|_{L_p(x-\rho, x+\rho)} \geq \\ &\geq \sup_{\rho > r} \rho^{-\lambda} \left\| |x|^{\lambda - \frac{1}{p}} \right\|_{L_p((0,\rho) \cap (r,\infty))} = \sup_{\rho > r} \rho^{-\lambda} \left(n v_n \int_r^\rho x^{\lambda p - 1} dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \\ &\geq \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho^{-\lambda} \left(\frac{n v_n}{\lambda p} (\rho^{\lambda p - 1} - r^{\lambda p - 1}) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{n v_n}{\lambda p} \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

откуда следует (13).

Данная работа выполнена при поддержке Государственного проекта 0085/PTSF-14, гранта Министерства образования и науки (проект 2709/ГФ4) и Российского научного фонда (проект 14-11-00443). Отметим, что результаты этой работы ранее без доказательства были опубликованы в [7].

Список литературы

- 1 *Burenkov V. I.* Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. I. // Eurasian Mathematical Journal. — 2012. — Vol. 3. — No. 3. — P. 11–32.
- 2 *Burenkov V.I.* Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. II. // Eurasian Mathematical Journal. — 2013. — Vol. 4. — No. 1. — P. 21–45.
- 3 *Burenkov V.I., Guliyev H.V.* Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces // Studia Mathematica. — 2004. — Vol. 163. — No. 2. — P. 157–176.
- 4 *Burenkov V.I., Jain P., Tararykova T.V.* On boundedness of the Hardy operator in local Morrey-type spaces // Eurasian Mathematical Journal. — 2011. — Vol. 2. — No. 1. — P. 52–80.
- 5 *Chen Y., Ding Y., Wang X.* Compactness of Commutators for singular integrals on Morrey spaces // Canad. J. Math. — 2012. — Vol. 64(2). — P. 257–281.
- 6 *Yosida K.* Functional Analysis. Springer-Verlag. — Berlin, 1978.
- 7 *Bokayev N.A., Burenkov V.I., Matin D.T.* On the pre-compactness of a set in the generalized Morrey spaces // AIP Conference Proceedings. — 2016. — Vol. 1759. — P. 020108-01–03. doi: 10.1063/1.4959722. — [ER]. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4959722>

Н.А. Бокаев, В.И. Буренков, Д.Т. Матин

Жалпыланған Морри кеңістігіндегі жиындардың жинақы болуының жеткілікті шарты туралы

Мақалада $M_p^{w(\cdot)}$ жалпыланған Морри кеңістігіндегі жиындардың жинақы болуының жеткілікті шарттары келтірілді. Дәлелденген теоремадан $w(r) = r^{-\lambda}$ болған жағдайда M_p^λ Морри кеңістігіне белгілі нәтиже шығады, ал $\lambda = 0$ жағдайда бұл жақсы белгілі Фреше-Колмогоров теоремасы. Алдымен, орталанған функциялардың жалпыланған Морри кеңістігінде бағалануы туралы бірнеше лемма дәлелденген. Бұл леммалардың өзіндік маңызы бар. Алынған шарттардың қажеттілігі талқыланды.

N.A. Bokayev, V.I. Burenkov, D.T. Matin

Sufficient conditions for pre-compactness of sets in the generalized Morrey spaces

In this paper, we present sufficient conditions for pre-compactness of sets in the generalized Morrey spaces $M_p^{w(\cdot)}$. From this theorem for the case of $w(r) = r^{-\lambda}$ follows the well-known result for the Morrey space M_p^λ and in the case of $\lambda = 0$ this is the well-known Frechet-Kolmogorov theorem. Pre proved some lemmas on the estimation of the average in the generalized Morrey space. These lemmas gives independent interest. It is discussed the necessity of the obtained conditions.

УДК 681.5

А.В. Букетов, Л.В. Кравцова, А.П. Богдан

*Херсонская государственная морская академия, Украина
(E-mail: arundo.p@mail.ru)*

Прогнозирование разрушения образцов композитных материалов под действием повторно-переменных нагрузжений

В статье представлены результаты экспериментального исследования полимерных композитных материалов при воздействии повторно-переменных нагрузжений. На основе экспериментальных данных получены параметры аналитической взаимосвязи силы повторно-переменных нагрузжений и соответствующей деформации образцов, а также дан прогноз их разрушения с учетом остаточной деформации.

Ключевые слова: прогнозирование свойств, повторно-переменные нагрузжения, деформация, композитные материалы.

Композитные материалы (КМ), как правило, используют в агрессивных средах или при изготовлении конструкций, которые подвергаются повышенным механическим воздействиям [1]. Многие детали машин во время эксплуатации многократно подвергаются действию периодически изменяющихся во времени нагрузок. В общем случае нагрузки (напряжения) могут изменяться во времени по законам, аналитическое описание которых представляет определенные трудности. Переменные напряжения могут иметь установившийся и неустановившийся режимы. Однако при проведении исследований по воздействию нагрузки на материал можно установить закономерности изменения деформации материала в зависимости от силы нагрузжения. Следовательно, изучая поведение образцов под действием повторно-переменных нагрузок исследуемых материалов, можно обобщить результаты на случай поведения деталей из этих материалов в реальных конструкциях.

Как известно [2], одной из главных особенностей деформирования композитов является то, что уже на ранних этапах процесса нагрузжения (квазистатического или циклического) свойства композиционного материала существенно зависят от накопления повреждений в структуре композита. Одним из основных факторов, влияющих на долговечность полимерных композитов и конструкций из них, являются эксплуатационные нагрузки. Под действием этих нагрузок материал в течение времени получает так называемые усталостные микротрещины, которые могут быть причиной его разрушения. Образованию микротрещин способствует разрыв связей, вызванный одновременным развитием деформаций сжатия и растяжения полимерного композита. Если локальные напряжения в области скопления дислокаций превысят предел текучести композита, то возникают микроскопические трещины. Поэтому необходимы простые и надежные методы определения текущего состояния КМ как исходного материала для деталей конструкционного назначения.

Анализ последних исследований публикаций

Как показывает практика, повторно-переменные нагрузки, циклически изменяющиеся во времени величине или по величине и знаку, могут привести к разрушению конструкции при напряжениях, существенно меньших, чем предел текучести (или предел прочности). Чем глубже изучены закономерности, описывающие процессы изменения свойств и состояние материалов, тем достовернее можно предсказать поведение изделия в условиях эксплуатации и обеспечить сохранение показателей надежности в требуемых пределах. В работах [3–6] авторами проанализированы и исследованы вопросы зависимости абсолютной деформации образца КМ от продолжительности воздействия статической нагрузки, предложен метод определения вероятности восстановления образца после снятия статической нагрузки, что, в свою очередь, обеспечит надежность эксплуатации технологического оборудования в различных отраслях промышленности. Данная работа является логическим продолжением исследований. Цель работы — прогнозирование разрушения образцов КМ, подверженных действию повторно-переменных нагрузок с учетом остаточной деформации.

Результаты исследования

Определение реальных физических соотношений между напряжениями и деформациями КМ в зависимости от возможного их изменения в напряженно-деформированном состоянии в процессе эксплуатации, числа циклов нагружения, условий работы конструкции в высшей степени важно, чтобы достоверно прогнозировать работоспособность, надежность и долговечность конструкции, изготовленной с использованием КМ.

Для экспериментальных исследований были изготовлены две серии образцов КМ. Первая серия образцов хранилась в течение трех месяцев в нормальных температурно-влажностных условиях, образцы второй серии были выдержаны в пресной воде также в течение трех месяцев. Далее образцы обеих серий испытывали на четырёхточечный изгиб по ГОСТу 9550-81 многократно приложенной повторно-переменной нагрузкой. Параметры образцов: длина $l = 120 \pm 2$ мм, ширина $b = 15 \pm 0,5$ мм, высота $h = 10 \pm 0,5$ мм.

Измеряли силу воздействия на образец в моменты деформации от 0 до 3,00 мм с шагом 0,05 мм. При этом для образцов, выдержанных в течение длительного времени в нормальных температурно-влажностных условиях, наблюдали в среднем девять этапов последовательного нагружения с последующим снятием нагрузки, а для образцов, выдержанных в воде, — 16 этапов.

Для определения взаимосвязи между силой воздействия на образец и его деформацией аппроксимировали зависимость, полученную в результате эксперимента в табличной форме, следующей функцией:

$$y_t = f(x_t, b) + \varepsilon_t, \quad (1)$$

где y_t — значение деформации; x_t — средняя сила воздействия на каждом этапе деформации образца; ε_t — случайные ошибки модели; b — параметры, подлежащие определению и минимизирующие случайные ошибки модели ε_t . В качестве метода аппроксимации использовали метод наименьших квадратов, сущность которого может быть выражена следующим образом:

$$\sum_i \varepsilon_i^2 = \sum_i (y_i - f_i(x_i, b))^2 \rightarrow \min_x \quad (2)$$

(сумма квадратов отклонений табличных и аппроксимирующих значений функции должна быть минимальной). Количество подлежащих определению параметров b зависит от вида аппроксимирующей функции.

Как известно, экстремум функции нескольких переменных определяют из условия равенства нулю частных производных по каждому из параметров. Это приводит к системе уравнений

$$\sum_{t=1}^n (y_t - f(x_t, b)) \frac{\partial f(x_t, b)}{\partial b} = 0, \quad (3)$$

решив которую, находим значения параметров аппроксимации (n — количество узлов (точек измерения)).

По исходным данным, представляющим таблицы соответствия деформации образца силе нагружения (воздействия на образец), было рассчитано приращение нагрузки на каждые 0,05 мм деформации. Для начальных замеров от 0,15 мм приращение составило 10 ... 12 Н. Для начальных замеров от 0,6 мм приращение составило 14 ... 15 Н на каждые 0,05 мм деформации. Для каждого этапа нагружения рассчитана средняя нагрузка на 1 мм деформации с учетом остаточной деформации при полном снятии нагрузки с образца.

Исследования проводили для образцов, выдержанных в течение трех месяцев как в нормальных температурно-влажностных условиях, так и в воде. В каждой серии (содержание в нормальных условиях и в воде) испытывали по девять образцов. Обработка сгруппированных результатов испытаний показала, что достаточно рассмотреть по два образца, имеющих типовые показатели, каждой серии.

Сначала рассмотрим результаты расчетов для двух образцов, выдержанных в нормальных температурно-влажностных условиях (табл. 1).

Таблица 1

Значения средней нагрузки при деформации на 1 мм для серии нагружений на образцы, выдержанные в лабораторных условиях

Деформация, мм	0,20	0,35	0,50	0,70	0,80	1,00	1,10	1,25	1,40	1,55	1,70	1,85
Средняя нагрузка при деформации $\Delta l = 1$ мм, первый образец	300	276	265	241	238	221	236	223	При последующем нагружении образец разрушился			
Средняя нагрузка при деформации $\Delta l = 1$ мм, второй образец	Первоначальное нагружение до деформации 0,70			318	290	283	279	265	256	221	244	237

Анализ среднеквадратической погрешности для определения вида зависимости, минимизирующей случайные ошибки модели, показал, что оптимальной является полиномиальная зависимость четвертого порядка

$$y = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0. \tag{4}$$

Таким образом, определению подлежат параметры b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 . Подставим (4) в (2) и приравняем частные производные в системе уравнений (3) к нулю (условие минимизации ошибки модели). Полученную линейную систему пяти уравнений с пятью неизвестными решаем любым удобным методом. В нашем случае использовали матричный метод решения систем, в результате чего нашли оптимальные значения параметров аналитической зависимости.

Для образцов, выдержанных в нормальных температурно-влажностных условиях, получены следующие зависимости (см. рис. 1)

$$y = 415,29x^4 - 1989,6x^3 + 3459,5x^2 - 2660,1x + 1056,1 \text{ (первый образец);}$$

$$y = -432,1x^4 - 1203x^3 + 1042,4x^2 - 215,1x + 288,44 \text{ (второй образец).}$$

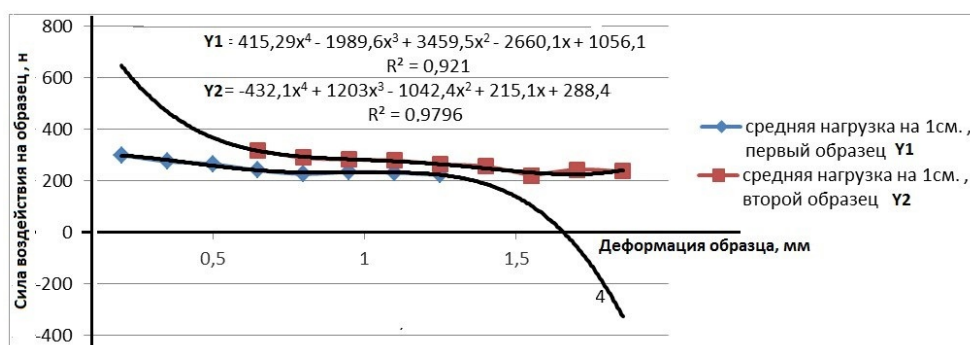


Рисунок 1. Графики зависимости деформации образца от нагружения для образцов, выдержанных в нормальных температурно-влажностных условиях

Средневзвешенные значения коэффициентов аналитической зависимости приводят к уравнению (см. рис. 2)

$$y = -8,5x^4 - 393x^3 + 1208,5x^2 - 1222,5x + 672. \tag{5}$$

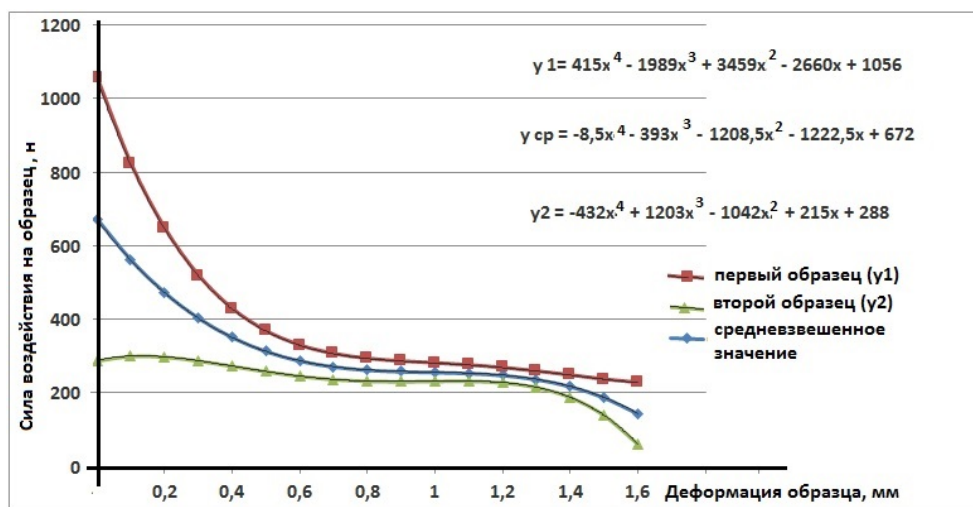


Рисунок 2. Графики аналитической и табличных зависимостей деформации от нагружения первого и второго образца для образцов, выдержанных в нормальных температурно-влажностных условиях

Получение параметров аналитической зависимости позволяет оценивать зависимость деформации образца от нагружения как в межузловых точках внутри таблицы, так и вне таблицы (прогнозирование поведения образца).

Таблица 2

Зависимость деформации образца от нагружения

Деформация, мм	Среднее нагружение на первый образец, Н	Среднее нагружение на второй образец, Н	Прогнозирование значения нагружения на единицу деформации, Н
0	1056	88	672
0,1	822,6425	300,2398	561,442
0,2	647,112	298,2598	472,6824
0,3	518,9685	287,7018	403,3352
0,4	428,768	273,2128	350,9904
0,5	368,0625	258,375	313,2188
0,6	329,4	245,7408	287,5704
0,7	306,3245	236,8258	271,5752
0,8	293,376	232,1088	262,7424
0,9	286,0905	231,0318	258,5612
1,0	281	232	256,5
1,1	275,6325	232,3818	254,0072
1,2	268,512	228,5088	248,5104
1,3	259,1585	215,6758	237,4172
1,4	248,088	188,1408	218,1144
1,5	236,8125	139,125	187,9688
1,6	227,84	60,8128	144,3264
1,7	224,6745	-55,6482	84,51315
1,8	231,816	-220,147	5,8344

Прогноз разрушения образца с учетом остаточной деформации показывает, что максимальная деформация для образца, выдержанного в нормальных температурно-влажностных условиях, составляет 1,6 мм, при этом средняя сила воздействия на единицу деформации образца при последнем нагружении

составляет 144 Н. Из таблицы 2 также видно, что деформацию 1,7 мм выдерживают не все образцы (образец №2 разрушен).

Для образцов, выдержанных в воде, получены следующие аналитические зависимости (см. рис. 3)

$$y = 6,435x^4 - 54,115x^3 + 155,63x^2 - 218,16x + 375,97 \text{ (первый образец);}$$

$$y = -29,26x^4 + 203,63x^3 - 517,79x^2 + 540,14x + 48,074 \text{ (второй образец).}$$

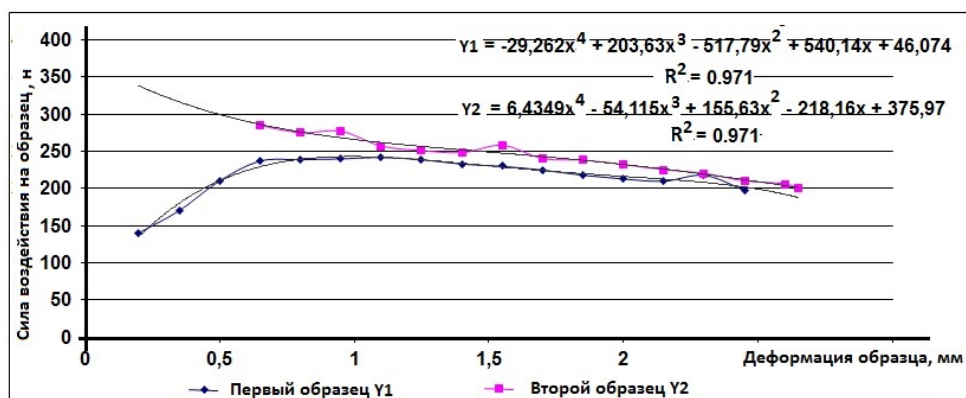


Рисунок 3. Графики зависимости деформации образца от нагружения для образцов, выдержанных в воде

Средневзвешенные значения коэффициентов аналитической зависимости в этом случае приводят к уравнению (см. рис. 4)

$$y = -11,43x^4 + 74,76x^3 - 181,1x^2 + 161x + 211,1. \tag{6}$$

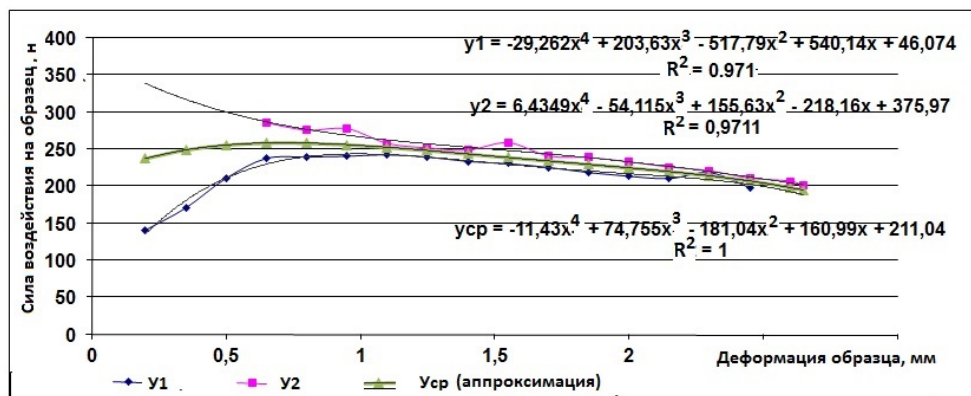


Рисунок 4. Графики аналитической и табличных зависимостей деформации от нагружения первого и второго образца для образцов, выдержанных в воде

Соответственно, прогноз разрушения образца представлен в таблице 3.

Прогноз разрушения образца с учетом остаточной деформации

Деформация, см	Среднее нагружение на первый образец, Н	Среднее нагружение на второй образец, Н	Прогнозирование значения нагружения на единицу деформации, Н
0	356	47	201,5
0,2	327,7155	134,6994	231,2074
0,4	305,8894	192,4618	249,1756
0,6	289,1689	227,2242	258,1965
0,8	276,3425	245,0442	260,6933
1	266,34	251,1	258,72
1,2	258,2324	249,6906	253,9615
1,4	251,2323	244,2354	247,7338
1,6	244,6932	237,2746	240,9839
1,8	238,1104	230,469	234,2897
2	231,12	224,6	227,86
2,2	223,4998	219,5698	221,5348
2,4	215,1688	214,401	214,7849
2,6	206,1872	207,237	206,7121
2,8	196,7566	195,3418	196,0492
3	187,22	175,1	181,16
3,2	178,0616	142,017	160,0393
3,4	169,9068	90,71856	130,3127
3,6	163,5227	14,95136	89,23702
3,7	161,2728	-34,3027	63,48508

Прогноз разрушения образца с учетом остаточной деформации показывает, что максимальная деформация для образца, выдержанного в воде, составляет 3,6 мм, при этом средняя сила воздействия на единицу деформации образца при последнем нагружении составляет 90 Н. Из таблицы 3 видно, что образец №2 разрушается при деформации 3,7 мм.

Коэффициент корреляции деформации образца и средней нагрузки на 1 мм для первого образца, выдержанного в нормальных температурно-влажностных условиях, вычисленный по формуле

$$\rho(\Delta, f) = \frac{cov(\Delta, f)}{\sqrt{D[\Delta] \cdot D[f]}} = \frac{E[\Delta f] - E\Delta \cdot Ef}{\sqrt{(E[\Delta^2] - (E\Delta)^2) \cdot (E[f^2] - (Ef)^2)}}, \quad (7)$$

где cov обозначает ковариацию; D — дисперсия; E — математическое ожидание; Δ — деформация; f — действующая на образец нагрузка.

Для первого образца $\rho(\Delta, f) = 0,916$; для второго образца $\rho(\Delta, f) = 0,912$. Это свидетельствует о сильной зависимости деформации от нагрузки. Особое внимание стоит обратить на коэффициент корреляции $\rho(f1, f2)$ между образцами, который составил $\rho(f1, f2) = 0,822$, что говорит об устойчивой тенденции разрушения, т.е. максимальное количество этапов нагружения равно 9.

Аналогичные расчеты проведены для образцов, выдержанных в воде. Коэффициент корреляции деформации образца и средней нагрузки на 1 мм для первого образца, выдержанного в воде, составил $\rho(\Delta, f) = 0,981$, для второго — $\rho(\Delta, f) = 0,979$. Коэффициент корреляции $\rho(f1, f2)$ между образцами, выдержанными в воде, составил $\rho(f1, f2) = 0,983$, что говорит об устойчивой тенденции разрушения, т.е. максимальное количество этапов нагружения до момента разрушения равно 17.

С целью проверки правильности выбранного подхода к построению аналитической взаимосвязи нагружения и деформации образца полученные результаты были проверены на всех девяти образцах каждой серии.

Выводы

На основе экспериментальных данных установлены параметры аналитической взаимосвязи силы повторно-переменных нагружений и соответствующей деформации образцов. Снижение прочности образцов КМ при повторно-переменном воздействии нагрузок происходит гораздо интенсивнее, чем под воздействием статической нагрузки. Это объясняется тем, что при таком силовом воздействии происходит накопление остаточных деформаций и микроразрушений, вызванных естественной неоднородностью материала, что приводит к снижению прочности наиболее слабых частиц, а значит, к разрушению всего образца. Результаты расчетов показали, что образцы композитных материалов, выдержанные в течение продолжительного времени в воде, более устойчивы к деформации, чем аналогичные по структуре образцы, выдержанные в нормальных условиях.

Список литературы

- 1 Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология: учеб. пособие / М.Л. Кербер, В.М. Виноградов, Г.С. Головкин и др.; под ред. А.А. Берлина. — СПб.: Профессия, 2008. — С. 560.
- 2 Макаров А.Г., Ростовцева Н.Г. Моделирование деформационных свойств полимерных материалов // Дизайн. Материалы. Технология. — 2008. — № 1(4). — С. 140–145.
- 3 Букетов А.В. Ідентифікація і моделювання технологічних об'єктів та систем: посібник. Тернопіль: СМП «Тайп», 2009. — С. 260.
- 4 Кравцова Л.В., Букетов А.В., Пирог А.П. Определение вероятностей напряженного состояния эпоксидных композитных материалов под воздействием статической нагрузки // Искусственный интеллект. — 2013. — № 3 (61). — С. 355–363.
- 5 Кравцова Л.В., Букетов А.В., Пирог А.П. Определение вероятностей восстановления и разрушения полимерных композитных материалов под действием статической нагрузки // Наукові нотатки. — 2013. — № 43. — С. 126–133.
- 6 Кравцова Л.В., Букетов А.В., Пирог А.П. Прогнозування деформаційних властивостей епоксидних композитних матеріалів // А.В. Букетов, Л.В. Кравцова, А.П. Пірог // Вісн. Житомир. державного техн. ун-ту. — 2013. — № 4(67). — С. 7–11.

А.В. Букетов, Л.В. Кравцова, А.П. Богдан

Қайта-ауыспалы жүктеме әсерінен композиттік материалдар үлгілерінің қирауын болжау

Мақалада қайта айнымалы жүктеменің әсерінен полимерлік композициялық материалдардың тәжірибелік зерттеу нәтижелері көрсетілген. Тәжірибедегі негізгі деректерді ескере отырып, қайта айнымалы жүктеменің кіші және сәйкес келетін деформацияның үлгісінің аналитикалық параметрмен өзара байланысы, сондай-ақ олардың сынған қалдық деформациясының болжамы алынды.

A. V. Buketov, L.V. Kravtsova, A.P. Bogdan

Prediction of fracture samples of composite materials under the influence of cyclic loading

The article presents the results of an experimental study of polymer composite materials when exposed to cyclic loading. On the basis of experimental data obtained by the analytical parameters of the relationship strength cyclic loading and corresponding deformation of the samples, as well as forecast their destruction taking into account the residual strain.

References

- 1 *Polymer composite materials: structure, properties, technology: tutorial*/M.L. Kerber, V.M. Vinogradov, G.S. Golovkin and other; edit. by A.A. Berlin, Saint Petersburg: Professia, 2008, p. 560.
- 2 Makarov A.G., Rostovtseva N.G. *Design. Materials. Technology*, 2008, 1(4), p. 140–145.
- 3 Buketov A.V. *Identification and modeling of technological objects and systems: manual / Ternopil: SMP «Тіар»*, 2009, p. 260.
- 4 Kravtsova L.V., Buketov A.V., Pirog A.P. *Artificial Intelligence*, 2013, 3(61), p. 355–363.
- 5 Kravtsova L.V., Buketov A.V., Pirog A.P. *Interuniversity collection «Research notes»*, 2013, 43, p. 126–133.
- 6 Kravtsova L.V., Buketov A.V., Pirog A.P. *Journal of Zhytomyr State Technical University*, 2013, 4(67), p. 7–11.

UDC 519.633.6

D.S. Dzhumabaev^{1,2}, S.M. Temesheva^{1,3}¹*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling SC MES RK, Almaty;*²*International University of Information Technologies, Almaty;*³*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty**(E-mail: dzhumabaev@list.ru)*

Bounded solution on a strip to a system of nonlinear hyperbolic equations with mixed derivatives

The system of nonlinear hyperbolic equations with mixed derivatives is considered on the strip. Time variable of the unknown function changes on the whole axis, and the spatial variable belongs to a finite interval. A function, the partial derivative with respect to the spatial variable, is denoted as unknown function, and problem of finding a bounded on the strip solution to the origin system is reduced to the problem of finding a bounded on the strip solution to a system of integro - partial differential equations. The whole axes is divided into parts, and additional functional parameters are introduced as the values of unknown function on the initial lines of sub-domains. For the fixed values of functional parameters, the new unknown functions in the sub-domains are defined as the solutions to the Cauchy problems for integro-partial differential equations of the first order. Using the continuity conditions of the solution on the partition lines, the two-sided infinite system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind with respect to introduced functional parameters is obtained. Algorithms for finding solutions of problem with functional parameters are proposed. Conditions for the convergence of algorithms, and existence of bounded on the strip solution of the system of nonlinear hyperbolic equations with mixed derivatives are obtained.

Key words: bounded on the strip solution, the system of nonlinear hyperbolic equations, functional parameters, algorithm.

We consider the system of nonlinear hyperbolic equations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (x, t) \in \Omega = [0, \omega] \times \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}^n; \quad (1)$$

where $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a bounded function, continuous by $x \in [0, \omega]$ uniformly with respect to $t \in \mathbb{R}$ and continuous by $t \in \mathbb{R}$ at the fixed $x \in [0, \omega]$, $\|u\| = \max_{i=1:n} |u_i|$.

Denote by $C^*(\Omega, \mathbb{R}^n)$ is a space of bounded functions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, continuous by $x \in [0, \omega]$ uniformly with respect to $t \in \mathbb{R}$ and continuous by $t \in \mathbb{R}$ at the fixed $x \in [0, \omega]$ with the norm $\|u\|_* = \sup_{(x,t) \in \Omega} \|u(x, t)\|$.

Bounded on the strip solutions to the system of hyperbolic equations with mixed derivatives are considered in [1–5].

The paper is devoted to the solutions of system (1) satisfying the conditions

$$u(0, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \in C^*(\Omega, \mathbb{R}^n). \quad (3)$$

A solution to problem (1)-(3) is a function $u^*(x, t) \in C^*(\Omega, \mathbb{R}^n)$, which has the partial derivatives $\frac{\partial}{\partial x} u^*(x, t) \in C^*(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} u^*(x, t) \in C^*(\Omega, \mathbb{R}^n)$, satisfying the system of differential equations (1) for all $(x, t) \in \Omega$ and condition (2).

We set $v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, $(x, t) \in \Omega$ and reduce the problem (1)-(3) to the following problem for the system of integro-partial differential equations

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f\left(x, t, \int_0^x v(\xi, t) d\xi, v\right), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (4)$$

$$v(x, t) \in C^*(\Omega, \mathbb{R}^n). \quad (5)$$

If a function $u^*(x, t)$ is a solution to problem (1)-(3), then the function $v^*(x, t) = \frac{\partial u^*(x, t)}{\partial t}$ is a solution to problem (4), (5). Conversely, if $\tilde{v}(x, t)$ is a solution to problem (4), (5), then the function

$$\tilde{u}(x, t) = \int_0^x \tilde{v}(\xi, t) d\xi, \quad (x, t) \in \Omega$$

is a solution to problem (1)-(3).

Take $h > 0$ and divide Ω on sub-domains

$$\Omega = \bigcup_{r=-\infty}^{\infty} \Omega_r, \quad \Omega_r = [0, \omega] \times [(r-1)h, rh], \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Let $v_r(x, t)$ be the restriction of function $v(x, t)$ on sub-domain Ω_r , $r \in \mathbb{Z}$.

Introduced the following spaces:

m_n is a space of bounded two sided infinite sequences $\mu = (\dots, \mu_r, \mu_{r+1}, \dots)$ of vectors $\mu_r \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{Z}$, with the norm

$$\|\mu\|_{m_n} = \|(\dots, \mu_r, \mu_{r+1}, \dots)\|_{m_n} = \sup_{r \in \mathbb{Z}} \|\mu_r\|;$$

$C^*([0, \omega], m_n)$ is a space of uniforml; bounded and equicontinuous two sided infinite sequences $\lambda(x) = (\dots, \lambda_r(x), \lambda_{r+1}(x), \dots)$ of continuous functions $\lambda_r : [0, \omega] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{Z}$, with the norm

$$\|\lambda\|_1 = \max_{x \in [0, \omega]} \|\lambda(x)\|_{m_n} = \max_{x \in [0, \omega]} \|(\dots, \lambda_r(x), \lambda_{r+1}(x), \dots)\|_{m_n} = \max_{x \in [0, \omega]} \sup_{r \in \mathbb{Z}} \|\lambda_r(x)\|;$$

$C^*(\mathbb{R}, h, \mathbb{R}^n)$ is a space of uniformly bounded two sided infinite sequences $u[t] = (\dots, u_r(t), u_{r+1}(t), \dots)$ of continuous functions $u_r : [(r-1)h, rh] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{Z}$, with the norm

$$\|u\|_2 = \sup_{r \in \mathbb{Z}} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|u_r(t)\|;$$

$L(X)$ is a space of linear bounded operators $\Lambda : X \rightarrow X$ with induced norm, where X is a Banach space; $C^*([0, \omega], C^*(\mathbb{R}, h, \mathbb{R}^n))$ is a space of bounded two sided infinite sequences of functions $v(x, [t]) = s(\dots, v_r(x, t), v_{r+1}(x, t), \dots)$ with the norm

$$\|v\|_3 = \max_{x \in [0, \omega]} \sup_{r \in \mathbb{Z}} \sup_{t \in [(r-1)h, rh]} \|v_r(x, t)\|,$$

where $v_r : \Omega_r \rightarrow \mathbb{R}^n$ is continuous and has finite limit as $t \rightarrow rh - 0$, $r \in \mathbb{Z}$, uniform on $x \in [0, \omega]$.

All spaces are complete.

Introduce functional parameters

$$\lambda_r(x) := v_r(x, (r-1)h), \quad x \in [0, \omega], \quad r \in \mathbb{Z}$$

and functions

$$z_r(x, t) := v_r(x, t) - \lambda_r(x), \quad (x, t) \in \Omega_r, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Now, problem (4), (5) converts to the problem with functional parameters

$$\frac{\partial z_r}{\partial t} = f\left(x, t, \int_0^x \lambda_r(\xi) d\xi + \int_0^x z_r(\xi, t) d\xi, \lambda_r(x) + z_r\right), \quad (x, t) \in \Omega_r, \quad r \in \mathbb{Z}; \quad (6)$$

$$z_r(x, (r-1)h) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad r \in \mathbb{Z}; \quad (7)$$

$$\lambda_r(x) + \lim_{t \rightarrow rh-0} z_r(x, t) - \lambda_{r+1}(x) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad r \in \mathbb{Z}; \quad (8)$$

$$(\lambda(x), z(x, [t])) \in C^*([0, \omega], m_n) \times C^*([0, \omega], C^*(\mathbb{R}, h, \mathbb{R}^n)). \quad (9)$$

Here (8) are the continuity conditions on the lines $t = (r-1)h$, $r \in \mathbb{Z}$.

A solution to problem (6)-(9) is a pair $(\lambda^*(x), z^*(x, [t]))$ with elements

$$\lambda^*(x) = (\dots, \lambda_r^*(x), \lambda_{r+1}^*(x), \dots) \in C^*([0, \omega], m_n),$$

and

$$z^*(x, [t]) = (\dots, z_r^*(x, t), z_{r+1}^*(x, t), \dots) \in C^*([0, \omega], C^*(\mathbb{R}, h, \mathbb{R}^n)).$$

If a function $v^*(x, t)$ is a solution to problem (4), (5), then the pair $(\lambda^*(x), z^*(x, [t]))$ with elements

$$\lambda^*(x) = (\dots, \lambda_r^*(x), \lambda_{r+1}^*(x), \dots), \quad z^*(x, [t]) = (\dots, z_r^*(x, t), z_{r+1}^*(x, t), \dots),$$

where $\lambda_r^*(x) = v^*(x, (r-1)h)$, $z_r^*(x, t) = v^*(x, t) - v^*(x, (r-1)h)$, $(x, t) \in \Omega_r$, $r \in \mathbb{Z}$, is a solution to problem (6)-(9).

And, vice versa, if a pair $(\lambda^*(x), z^*(x, [t]))$ with elements

$$\lambda^*(x) = (\dots, \lambda_r^*(x), \lambda_{r+1}^*(x), \dots) \in C^*([0, \omega], m_n);$$

$$z^*(x, [t]) = (\dots, z_r^*(x, t), z_{r+1}^*(x, t), \dots) \in C^*([0, \omega], C^*(\mathbb{R}, h, \mathbb{R}^n)),$$

is a solution to problem (7)-(10), then the function $v^*(x, t)$ defined on Ω by the equalities

$$v^*(x, t) = \lambda_r^*(x) + z_r^*(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_r, \quad r \in \mathbb{Z},$$

is a solution to problem (4), (5).

At the given $\lambda_r(x)$, $x \in [0, \omega]$, the Cauchy problem for integro-partial differential equation (6), (7) is equivalent to the system of integral equations

$$z_r(x, t) = \int_{(r-1)h}^t f\left(x, \tau, \int_0^x \lambda_r(\xi) d\xi + \int_0^x z_r(\xi, \tau) d\xi, \lambda_r(x) + z_r(x, \tau)\right) d\tau, \quad (10)$$

$(x, t) \in \Omega_r$, $r \in \mathbb{Z}$. Substituting the corresponding expressions from (10) into (8), we obtain the two-sided infinite system of nonlinear integral equations with respect to functional parameters

$$\lambda_r(x) + \int_{(r-1)h}^{rh} f\left(x, \tau, \int_0^x \lambda_r(\xi) d\xi + \int_0^x z_r(\xi, \tau) d\xi, \lambda_r(x) + z_r(x, \tau)\right) d\tau - \lambda_{r+1}(x) = 0, \quad (11)$$

$$x \in [0, \omega], \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Write down system (11) in the form

$$Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda(\xi) d\xi, \lambda(x), z\right) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad \lambda(x) \in C^*([0, \omega], m_n).$$

Condition A. There exists $h > 0$ such that the implicit system of nonlinear Volterra integral equations

$$Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda(\xi) d\xi, \lambda(x), 0\right) = 0, \quad x \in [0, \omega],$$

has a solution $\lambda^{(0)}(x) = (\dots, \lambda_r^{(0)}(x), \lambda_{r+1}^{(0)}(x), \dots) \in C^*([0, \omega], m_n)$, and the Cauchy problems for integro-partial differential equations

$$\frac{\partial z_r}{\partial t} = f\left(x, t, \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi + \int_0^x z_r(\xi, t) d\xi, \lambda_r^{(0)}(x) + z_r\right), \quad (x, t) \in \Omega_r, \quad r \in \mathbb{Z},$$

$$z_r(x, (r-1)h) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad r \in \mathbb{Z},$$

has a solution $z^{(0)}(x, [t]) \in C^*([0, \omega], C^*(\mathbb{R}, h, \mathbb{R}^n))$.

Under condition A, we define the functions

$$v^{(0)}(x, t) = \lambda_r^{(0)}(x) + z_r^{(0)}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_r, \quad r \in \mathbb{Z}$$

and

$$u^{(0)}(x, t) = \int_0^x v^{(0)}(\xi, t) d\xi, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}.$$

Take numbers $\rho_\lambda > 0, \rho_z > 0, \rho_v > 0, \rho_u > 0$ and determine the sets:

$$S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda) = \{\lambda(x) \in C^*([0, \omega], m_n) : \|\lambda - \lambda^{(0)}\|_1 < \rho_\lambda\};$$

$$S_h(z^{(0)}(x, [t]), \rho_z) = \{z(x, [t]) \in C^*([0, \omega], C^*(\mathbb{R}, h, \mathbb{R}^n)) : \|z - z^{(0)}\|_3 < \rho_z\};$$

$$S(v^{(0)}(x, t), \rho_v) = \{v(x, t) \in C^*(\Omega, \mathbb{R}^n) : \|v - v^{(0)}\|_* < \rho_v\};$$

$$S(u^{(0)}(x, t), \rho_u) = \{u(x, t) \in C^*(\Omega, \mathbb{R}^n) : \|u - u^{(0)}\|_* < \rho_u\};$$

$$G^0(x, t, \rho_u, \rho_v) = \{(x, t, u, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^{2n} : (x, t) \in \Omega, \|u - u^{(0)}(x, t)\| < \rho_u, \|v - v^{(0)}(x, t)\| < \rho_v\}.$$

Condition B. The function $f(x, t, u, v)$ has uniformly continuous partial derivatives $\frac{\partial f(x, t, u, v)}{\partial u}; \frac{\partial f(x, t, u, v)}{\partial v}$ on $G^0(x, t, \rho_u, \rho_v)$ and the inequalities

$$\left\| \frac{\partial f(x, t, u, v)}{\partial u} \right\| \leq L_1, \quad \left\| \frac{\partial f(x, t, u, v)}{\partial v} \right\| \leq L_2,$$

where L_1, L_2 are constants, hold.

Take the pair $(\lambda^{(0)}(x), z^{(0)}(x, [t]))$, and construct the sequence of pairs $(\lambda^{(k)}(x), z^{(k)}(x, [t]))$, $k \in \mathbb{N}$, by the following algorithm.

Step 1. a) Solving the implicit system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind

$$Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda(\xi) d\xi, \lambda(x), z^{(0)}\right) = 0, \quad x \in [0, \omega],$$

we find $\lambda^{(1)}(x) = (\dots, \lambda_r^{(1)}(x), \lambda_{r+1}^{(1)}(x), \dots) \in C^*([0, \omega], m_n)$.

b) Solving the Cauchy problems for integro-partial differential equation (6), (7) with $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(1)}(x)$, $x \in [0, \omega]$, $r \in \mathbb{Z}$, we find the function system $z^{(1)}(x, [t]) = (\dots, z_r^{(1)}(x, t), z_{r+1}^{(1)}(x, t), \dots) \in C^*([0, \omega], C^*(\mathbb{R}, h, \mathbb{R}^n))$.

Step 2. a) Solving the implicit system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind

$$Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda(\xi) d\xi, \lambda(x), z^{(1)}\right) = 0, \quad x \in [0, \omega],$$

we find $\lambda^{(2)}(x) = (\dots, \lambda_r^{(2)}(x), \lambda_{r+1}^{(2)}(x), \dots) \in C^*([0, \omega], m_n)$.

b) Solving the Cauchy problems for integro-partial differential equation (6), (7) with $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(2)}(x)$, $x \in [0, \omega]$, $r \in \mathbb{Z}$, we find the function system $z^{(2)}(x, [t]) = (\dots, z_r^{(2)}(x, t), z_{r+1}^{(2)}(x, t), \dots) \in C^*([0, \omega], C^*(\mathbb{R}, h, \mathbb{R}^n))$. And so on.

Sufficient conditions of feasibility and convergence of the algorithm are established by the next statement.

Theorem. Suppose there are $h > 0, \rho_\lambda > 0, \rho_z > 0, \rho_v > 0, \rho_u > 0$, such that conditions *A, B* are valid, the two-sided infinite Jacob matrix $\frac{\partial}{\partial w_2} Q_{1,h}(x, w_1, w_2, z) : C^*([0, \omega], m_n) \rightarrow C^*([0, \omega], m_n)$, is invertible for all $(x, w_1, w_2, z) \in [0, \omega] \times S(\int_0^x \lambda^{(0)}(\xi) d\xi, \omega \rho_\lambda) \times S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda) \times S_h(z^{(0)}(x, [t]), \rho_z)$ and the following inequalities are true:

- 1) $\left\| \left(\frac{\partial}{\partial w_2} Q_{1,h}(x, w_1, w_2, z) \right)^{-1} \right\|_{L(m_n)} \leq \gamma_1(h, x) \leq \gamma_{1,0}(h)$;
- 2) $q_{1,0}(h) = \gamma_{1,0}(h) e^{\gamma_{1,0}(h) h L_1 \omega} \left(e^{(L_1 \omega + L_2) h} - 1 - (L_1 \omega + L_2) h \right) < 1$;
- 3) $\frac{\gamma_{1,0}(h)}{1 - q_{1,0}(h)} e^{\gamma_{1,0}(h) h L_1 \omega} \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi) d\xi, \lambda^{(0)}(x), z^{(0)}\right)\|_{m_n} < \rho_\lambda$;

$$4) \left(e^{(L_1\omega+L_2)h} - 1 \right) \cdot \frac{\gamma_{1,0}(h)}{1 - q_{1,0}(h)} e^{\gamma_{1,0}(h)hL_1\omega} \times \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_{1,h} \left(x, \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi) d\xi, \lambda^{(0)}(x), z^{(0)} \right)\|_{m_n} < \rho_z;$$

$$5) \rho_\lambda + \rho_z < \rho_v, \quad \omega(\rho_\lambda + \rho_z) < \rho_u.$$

Then the sequence of pairs $(\lambda^{(k)}(x), z^{(k)}(x, [t]))$, $k \in \mathbb{N}$, belongs to $S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda) \times S_h(z^{(0)}(x, [t]), \rho_z)$, converges to $(\lambda^*(x), z^*(x, [t]))$, the solution to the problem with functional parameters (6)-(9), and the estimates

$$\|\lambda^* - \lambda^{(0)}\|_1 \leq \frac{\gamma_{1,0}(h)h}{1 - q_{1,0}(h)} e^{\gamma_{1,0}(h)hL_1\omega} e^{h(L_1\omega+L_2)} \sup_{r \in \mathbb{Z}} \sup_{(x,t) \in \Omega_r} \|f \left(x, t, \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi, \lambda_r^{(0)}(x) \right)\|, \quad (12)$$

$$\|z^* - z^{(0)}\|_3 \leq \left(e^{(L_1\omega+L_2)h} - 1 \right) \|\lambda^* - \lambda^{(0)}\|_1 \quad (13)$$

hold.

Proof. For any pair $(\lambda(x), z(x, [t])) \in S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda) \times S_h(z^{(0)}(x, [t]), \rho_z)$, the inequalities

$$\begin{aligned} \|\lambda_r(x) - \lambda_r^{(0)}(x) + z_r(x, t) - z_r^{(0)}(x, t)\| &\leq \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\|_1 + \|z - z^{(0)}\|_3 < \rho_\lambda + \rho_z < \rho_v, \\ (x, t) &\in \Omega_r, \quad r \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^x \lambda_r(\xi) d\xi - \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi + \int_0^x z_r(\xi, t) d\xi - \int_0^x z_r^{(0)}(\xi, t) d\xi \right\| \leq \\ &\leq \int_0^x \|\lambda - \lambda^{(0)}\|_1 d\xi + \int_0^x \|z - z^{(0)}\|_3 d\xi < \omega(\rho_\lambda + \rho_z) < \rho_u, \quad (x, t) \in \Omega_r, \quad r \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (15)$$

are true.

In view of (14), (15) and inequality 5) of Theorem the fours

$$\left(x, t, \int_0^x \lambda_r(\xi) d\xi + \int_0^x z_r(\xi, t) d\xi, \lambda_r + z_r(x, t) \right), \quad (x, t) \in \Omega_r, \quad r \in \mathbb{Z},$$

belong to the set $G_1^0(x, \rho_u, \rho_v)$. Take the pair $(\lambda^{(0)}(x), z^{(0)}(x, [t]))$ from Condition A.

Since the components of two-sided infinite sequences of functions $z^{(0)}(x, [t])$ are the solutions of Cauchy problem for integro-partial differential equations (6), (7) with $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(0)}(x)$, the estimate

$$\begin{aligned} \|z_r^{(0)}(x, t)\| &\leq \left\| \int_{(r-1)h}^t f \left(x, \tau, \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi + \int_0^x z_r^{(0)}(\xi, \tau) d\xi, \lambda_r^{(0)}(x) + z_r^{(0)}(x, \tau) \right) d\tau - \right. \\ &\left. - \int_{(r-1)h}^t f \left(x, \tau, \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi, \lambda_r^{(0)}(x) \right) d\tau \right\| + \left\| \int_{(r-1)h}^t f \left(x, \tau, \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi, \lambda_r^{(0)}(x) \right) d\tau \right\| \end{aligned} \quad (16)$$

holds. Condition B and inequality (16) imply

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0, \omega]} \|z_r^{(0)}(x, t)\| &\leq \max_{x \in [0, \omega]} \int_{(r-1)h}^t \|f \left(x, \tau, \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi, \lambda_r^{(0)}(x) \right)\| d\tau e^{(L_1\omega+L_2)(t-(r-1)h)}, \\ (x, t) &\in \Omega_r, \quad r \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (17)$$

Find the solution $\lambda^{(1)}(x) = (\dots, \lambda_r^{(1)}(x), \lambda_{r+1}^{(1)}(x), \dots)$ of the equation

$$Q_{1,h} \left(x, \int_0^x \lambda(\xi) d\xi, \lambda(x), z^{(0)} \right) = 0, \quad \lambda(x) \in C^*([0, \omega], m_n).$$

Consider the system of equations

$$Q_{1,h} \left(x, \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi) d\xi, \lambda(x), z^{(0)} \right) = 0, \quad \lambda(x) \in C^*([0, \omega], m_n). \quad (18)$$

In accordance with the conditions of Theorem, operator $Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda(\xi)d\xi, \lambda(x), z^{(0)}\right)$ at the fixed $x \in [0, \omega]$ satisfies the conditions of Theorem 1 [6; 39] in $S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda)$. Take a number $\varepsilon_0 > 0$, satisfying the inequalities

$$\varepsilon_0 \gamma_{1,0}(h) e^{\gamma_{1,0}(h)hL_1\omega} \leq \frac{1}{2};$$

$$\frac{\gamma_{1,0}(h) e^{\gamma_{1,0}(h)hL_1\omega}}{1 - \varepsilon_0 \gamma_{1,0}(h) e^{\gamma_{1,0}(h)hL_1\omega}} \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi, \lambda^{(0)}(x), z^{(0)}\right)\|_{m_n} < \rho_\lambda.$$

Using uniform continuity of Jacobi's matrix

$$\frac{\partial}{\partial w_2} Q_{1,h}(x, w_1, w_2, z)$$

we find $\delta_0 \in (0, 0.5\rho_\lambda]$ such that

$$\left\| \frac{\partial}{\partial w_2} Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi, \lambda(x), z\right) - \frac{\partial}{\partial w_2} Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi, \bar{\lambda}(x), z\right) \right\|_{L(m_n)} < \varepsilon_0$$

for all $\lambda(x), \bar{\lambda}(x) \in S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda)$ satisfying $\|\lambda - \bar{\lambda}\|_1 < \delta_0$.

Choose

$$\alpha \geq \alpha_0 = \max \left\{ 1, \frac{\gamma_{1,0}(h)}{\delta_0} e^{\gamma_{1,0}(h)hL_1\omega} \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi, \lambda^{(0)}(x), z^{(0)}\right)\|_{m_n} \right\}$$

and construct iterative processes: $\lambda^{(1,1,0)}(x) = \lambda^{(0)}(x)$;

$$\begin{aligned} \lambda^{(1,1,m+1)}(x) &= \lambda^{(1,1,m)}(x) - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial w_2} Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda^{(1,1,m)}(\xi)d\xi, \lambda^{(1,1,m)}(x), z^{(0)}\right) \right)^{-1} \times \\ &\quad \times Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda^{(1,1,m)}(\xi)d\xi, \lambda^{(1,1,m)}(x), z^{(0)}\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

By Theorem 1 [6; 39] the iterative processes (19) converges to $\lambda^{(1,1)}(x)$, isolated solution of equation (18) at each $x \in [0, \omega]$, and the inequality

$$\|\lambda^{(1,1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_{m_n} \leq \gamma_1(h, x) \|Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi, \lambda^{(0)}(x), z^{(0)}\right)\|_{m_n} < \rho_\lambda \quad (20)$$

holds.

Taking into account that $Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi, \lambda^{(0)}(x), 0\right) = 0$, we have

$$\begin{aligned} &\|Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi, \lambda^{(0)}(x), z^{(0)}\right)\|_{m_n} = \\ &= \|Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi, \lambda^{(0)}(x), z^{(0)}\right) - Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi, \lambda^{(0)}(x), 0\right)\|_{m_n} \leq \\ &\leq h(L_1x + L_2) \|z^{(0)}\|_3. \end{aligned} \quad (21)$$

Inequalities (20) and (21) imply the estimate

$$\|\lambda^{(1,1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_{m_n} \leq \gamma_1(h, x) h(L_1x + L_2) \|z^{(0)}\|_3.$$

Find the solution of system

$$Q_{1,h}\left(x, \int_0^x \lambda^{(1,1)}(\xi)d\xi, \lambda(x), z^{(0)}\right) = 0, \quad \lambda(x) \in C^*([0, \omega], m_n), \quad (22)$$

by the iterative processes $\lambda^{(1,2,0)}(x) = \lambda^{(1,1)}(x)$,

$$\begin{aligned} \lambda^{(1,2,m+1)}(x) &= \lambda^{(1,2,m)}(x) - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial w_2} Q_{1,h} \left(x, \int_0^x \lambda^{(1,2,m)}(\xi) d\xi, \lambda^{(1,2,m)}(x), z^{(0)} \right) \right)^{-1} \times \\ &\quad \times Q_{1,h} \left(x, \int_0^x \lambda^{(1,2,m)}(\xi) d\xi, \lambda^{(1,2,m)}(x), z^{(0)} \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (23)$$

The iterative processes (23) converges to $\lambda^{(1,2)}(\bar{x}) \in S(\lambda^{(0)}(\bar{x}), \rho_\lambda)$, isolated solution of equation (22) at $x = \bar{x}$, $\bar{x} \in [0, \omega]$ and the estimate

$$\|\lambda^{(1,2)}(\bar{x}) - \lambda^{(1,1)}(\bar{x})\|_{m_n} \leq \gamma_1(h, \bar{x}) \|Q_{1,h}(\bar{x}, \int_0^{\bar{x}} \lambda^{(1,1)}(\xi) d\xi, \lambda^{(1,1)}(\bar{x}), z^{(0)})\|_{m_n}$$

is valid. It easily seen

$$\begin{aligned} \|Q_{1,h}(\bar{x}, \int_0^{\bar{x}} \lambda^{(1,1)}(\xi) d\xi, \lambda^{(1,1)}(\bar{x}), z^{(0)}) - Q_{1,h}(\bar{x}, \int_0^{\bar{x}} \lambda^{(0)}(\xi) d\xi, \lambda^{(1,1)}(\bar{x}), z^{(0)})\|_{m_n} &\leq \\ &\leq hL_1\bar{x} \sup_{\eta \in [0, \bar{x}]} \|\lambda^{(1,1)}(\eta) - \lambda^{(0)}(\eta)\|_{m_n}. \end{aligned}$$

Therefore, the following inequality is true

$$\sup_{\eta \in [0, \bar{x}]} \|\lambda^{(1,2)}(\eta) - \lambda^{(1,1)}(\eta)\|_{m_n} \leq \gamma_1(h, \bar{x}) hL_1\bar{x} \sup_{\eta \in [0, \bar{x}]} \|\lambda^{(1,1)}(\eta) - \lambda^{(0)}(\eta)\|_{m_n}.$$

Find the solution $\lambda^{(1,3)}(x)$ of the system of equations

$$Q_{1,h} \left(x, \int_0^x \lambda^{(1,2)}(\xi) d\xi, \lambda(x), z^{(0)} \right) = 0, \quad \lambda(x) \in C^*([0, \omega], m_n). \quad (24)$$

For this construct the iterative processes $\lambda^{(1,3,0)}(x) = \lambda^{(1,2)}(x)$;

$$\begin{aligned} \lambda^{(1,3,m+1)}(x) &= \lambda^{(1,3,m)}(x) - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial w_2} Q_{1,h} \left(x, \int_0^x \lambda^{(1,3,m)}(\xi) d\xi, \lambda^{(1,3,m)}(x), z^{(0)} \right) \right)^{-1} \times \\ &\quad \times Q_{1,h} \left(x, \int_0^x \lambda^{(1,3,m)}(\xi) d\xi, \lambda^{(1,3,m)}(x), z^{(0)} \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Iterative processes (25) converges to $\lambda^{(1,3)}(x) \in S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda)$, isolated solution of equation (24) at fixed $x \in [0, \omega]$ and the estimate

$$\|\lambda^{(1,3)}(x) - \lambda^{(1,2)}(x)\|_{m_n} \leq \gamma_{1,0}(h) \|Q_{1,h}(x, \int_0^x \lambda^{(1,2)}(\xi) d\xi, \lambda^{(1,2)}(x), z^{(0)})\|_{m_n}$$

holds. It easily seen

$$\begin{aligned} &\|Q_{1,h} \left(x, \int_0^x \lambda^{(1,2)}(\xi) d\xi, \lambda^{(1,2)}(x), z^{(0)} \right) - Q_{1,h} \left(x, \int_0^x \lambda^{(1,1)}(\xi) d\xi, \lambda^{(1,2)}(x), z^{(0)} \right)\|_{m_n} \leq \\ &\leq \sup_{r \in \mathbb{Z}} \left\| \int_{(r-1)h}^{rh} f \left(x, \tau, \int_0^x \lambda_r^{(1,2)}(\xi) d\xi + \int_0^x z_r^{(0)}(\xi, \tau) d\xi, \lambda_r^{(1,2)}(x) + z_r^{(0)}(x, \tau) \right) d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_{(r-1)h}^{rh} f \left(x, \tau, \int_0^x \lambda_r^{(1,1)}(\xi) d\xi + \int_0^x z_r^{(0)}(\xi, \tau) d\xi, \lambda_r^{(1,2)}(x) + z_r^{(0)}(x, \tau) \right) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \sup_{r \in \mathbb{Z}} \int_{(r-1)h}^{rh} L_1 \int_0^x \|\lambda^{(1,2)}(\xi) - \lambda^{(1,1)}(\xi)\|_{m_n} d\xi d\tau \leq \\ &\leq \sup_{r \in \mathbb{Z}} \int_{(r-1)h}^{rh} L_1 \int_0^x \sup_{\xi \in [0, x]} \|\lambda^{(1,2)}(\xi) - \lambda^{(1,1)}(\xi)\|_{m_n} d\xi d\tau \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{r \in \mathbb{Z}} \int_{(r-1)h}^{rh} L_1 \int_0^x \gamma_{1,0}(h) h L_1 \xi \sup_{\xi \in [0,x]} \|\lambda^{(1,1)}(\xi) - \lambda^{(0)}(\xi)\|_{m_n} d\xi d\tau \leq \\ &\leq \gamma_{1,0}(h) \frac{(hL_1x)^2}{2!} \sup_{\xi \in [0,x]} \|\lambda^{(1,1)}(\xi) - \lambda^{(0)}(\xi)\|_{m_n}. \end{aligned}$$

Therefore, the following inequalities are true

$$\begin{aligned} \|\lambda^{(1,3)}(x) - \lambda^{(1,2)}(x)\|_{m_n} &\leq \frac{(\gamma_{1,0}(h)hL_1x)^2}{2!} \sup_{x \in [0,\omega]} \|\lambda^{(1,1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_{m_n}; \\ \|\lambda^{(1,3)}(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_{m_n} &\leq \|\lambda^{(1,3)}(x) - \lambda^{(1,2)}(x)\|_{m_n} + \|\lambda^{(1,2)}(x) - \lambda^{(1,1)}(x)\|_{m_n} + \\ + \|\lambda^{(1,1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_{m_n} &\leq \left(\frac{(\gamma_{1,0}(h)hL_1x)^2}{2!} + \gamma_{1,0}(h)hL_1x + 1 \right) \|\lambda^{(1,1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_{m_n} < \\ &< e^{\gamma_{1,0}(h)hL_1x} \|\lambda^{(1,1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_{m_n}. \end{aligned}$$

Continuing the process, we find $\lambda^{(1,\ell+1)}(x)$, $x \in [0, \omega]$, and establish the inequalities:

$$\begin{aligned} \|\lambda^{(1,\ell+1)}(x) - \lambda^{(1,\ell)}(x)\|_{m_n} &\leq \frac{1}{\ell!} (\gamma_{1,0}(h)hL_1x)^\ell \|\lambda^{(1,1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_{m_n}; \\ \|\lambda^{(1,\ell+1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_{m_n} &\leq \sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{j!} (\gamma_{1,0}(h)hL_1x)^j \|\lambda^{(1,1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_{m_n} < \\ &< e^{\gamma_{1,0}(h)hL_1x} \|\lambda^{(1,1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_{m_n}. \end{aligned} \quad (26)$$

The sequence $\{\lambda^{(1,\ell)}(x)\}$ converges to the solution of equation (18). In (26) tending to the limit as $\ell \rightarrow \infty$, we establish the estimate

$$\|\lambda^{(1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_{m_n} \leq \gamma_{1,0}(h) e^{\gamma_{1,0}(h)hL_1x} \|Q_{1,h} \left(x, \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi) d\xi, \lambda^{(0)}(x), z^{(0)} \right)\|_{m_n}. \quad (27)$$

Hence, based on the inequalities (21), (17), we get

$$\begin{aligned} &\|\lambda^{(1)}(x) - \lambda^{(0)}(x)\|_{m_n} \leq \\ &\leq \gamma_{1,0}(h) h e^{\gamma_{1,0}(h)hL_1x} e^{h(L_1\omega + L_2)} \sup_{r \in \mathbb{Z}} \sup_{(x,t) \in \Omega_r} \|f \left(x, t, \int_0^x \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi, \lambda_r^{(0)}(x) \right)\|. \end{aligned}$$

In view of the Condition *B* and inequality 2) of Theorem the Cauchy problem for integro-partial differential equation (6), (7) with $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(1)}(x)$, $x \in [0, \omega]$, $r \in \mathbb{Z}$, has the unique solution $z_r^{(1)}(x, t)$, $(x, t) \in \Omega_r$, $r \in \mathbb{Z}$.

For any $\bar{x} \in [0, \omega]$, the inequality

$$\begin{aligned} &\|z_r^{(1)}(\bar{x}, t) - z_r^{(0)}(\bar{x}, t)\| = \\ &= \left\| \int_{(r-1)h}^t f \left(\bar{x}, \tau, \int_0^{\bar{x}} \lambda_r^{(1)}(\xi) d\xi + \int_0^{\bar{x}} z_r^{(1)}(\xi, \tau) d\xi, \lambda_r^{(1)}(\bar{x}) + z_r^{(1)}(\bar{x}, \tau) \right) d\tau - \right. \\ &\left. - \int_{(r-1)h}^t f \left(\bar{x}, \tau, \int_0^{\bar{x}} \lambda_r^{(0)}(\xi) d\xi + \int_0^{\bar{x}} z_r^{(0)}(\xi, \tau) d\xi, \lambda_r^{(0)}(\bar{x}) + z_r^{(0)}(\bar{x}, \tau) \right) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_{(r-1)h}^t \left(L_1 \int_0^{\bar{x}} \|\lambda_r^{(1)}(\xi) - \lambda_r^{(0)}(\xi)\| d\xi + L_1 \int_0^{\bar{x}} \|z_r^{(1)}(\xi, \tau) - z_r^{(0)}(\xi, \tau)\| d\xi + \right. \\ &\quad \left. + L_2 \|\lambda_r^{(1)}(\bar{x}) - \lambda_r^{(0)}(\bar{x})\| + L_2 \|z_r^{(1)}(\bar{x}, \tau) - z_r^{(0)}(\bar{x}, \tau)\| \right) d\tau \end{aligned}$$

holds, and for every $\eta \in [0, \bar{x}]$ it is valid the relation

$$\|z_r^{(1)}(\eta, t) - z_r^{(0)}(\eta, t)\| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{(r-1)h}^t \left(L_1 \int_0^{\bar{x}} \|\lambda_r^{(1)}(\xi) - \lambda_r^{(0)}(\xi)\| d\xi + L_1 \int_0^{\bar{x}} \|z_r^{(1)}(\xi, \tau) - z_r^{(0)}(\xi, \tau)\| d\xi + \right. \\ &\quad \left. + L_2 \sup_{\eta \in [0, \bar{x}]} \|\lambda_r^{(1)}(\eta) - \lambda_r^{(0)}(\eta)\| + L_2 \sup_{\eta \in [0, \bar{x}]} \|z_r^{(1)}(\eta, \tau) - z_r^{(0)}(\eta, \tau)\| \right) d\tau. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} &\sup_{\eta \in [0, \bar{x}]} \|z_r^{(1)}(\eta, t) - z_r^{(0)}(\eta, t)\| \leq \\ &\leq \int_{(r-1)h}^t (L_1 \bar{x} + L_2) \left(\sup_{\eta \in [0, \bar{x}]} \|\lambda_r^{(1)}(\eta) - \lambda_r^{(0)}(\eta)\| + \sup_{\eta \in [0, \bar{x}]} \|z_r^{(1)}(\eta, \tau) - z_r^{(0)}(\eta, \tau)\| \right) d\tau \end{aligned}$$

and using the Gronwall-Bellman inequality, we obtain

$$\sup_{\eta \in [0, \bar{x}]} \|z_r^{(1)}(\eta, t) - z_r^{(0)}(\eta, t)\| \leq \left(e^{(L_1 \bar{x} + L_2)(t - (r-1)h)} - 1 \right) \sup_{\eta \in [0, \bar{x}]} \|\lambda_r^{(1)}(\eta) - \lambda_r^{(0)}(\eta)\|.$$

For the components of system of functions $z^{(1)}(x, [t]) = (\dots, z_r^{(1)}(x, t), z_{r+1}^{(1)}(x, t), \dots)$ the inequality

$$\|z^{(1)} - z^{(0)}\|_3 \leq \left(e^{(L_1 \omega + L_2)h} - 1 \right) \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|_1$$

are valid. It easily established that

$$\begin{aligned} &\|Q_{1,h} \left(x, \int_0^x \lambda^{(1)}(\xi) d\xi, \lambda^{(1)}(x), z^{(1)} \right)\|_{m_n} = \\ &= \|Q_{1,h} \left(x, \lambda^{(1)}(x), \int_0^x \lambda^{(1)}(\xi) d\xi, z^{(1)} \right) - Q_{1,h} \left(x, \int_0^x \lambda^{(1)}(\xi) d\xi, \lambda^{(1)}(x), z^{(0)} \right)\|_{m_n} \leq \\ &\leq \sup_{r \in \mathbb{Z}} \left(e^{(L_1 x + L_2)h} - 1 - (L_1 x + L_2)h \right) \sup_{\eta \in [0, x]} \|\lambda_r^{(1)}(\eta) - \lambda_r^{(1)}(\eta)\|; \\ &\gamma_{1,0}(h) e^{\gamma_{1,0}(h)hL_1\omega} \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_{1,h} \left(x, \int_0^x \lambda^{(1)}(\xi) d\xi, \lambda^{(1)}(x), z^{(1)} \right)\|_{m_n} \leq q_{1,0}(h) \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|_1. \end{aligned} \quad (28)$$

If $\lambda(x) \in S(\lambda^{(1)}(x), \rho_1 + \tilde{\varepsilon})$, where

$$\rho_1 = \gamma_{1,0}(h) e^{\gamma_{1,0}(h)hL_1\omega} \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_{1,h} \left(x, \int_0^x \lambda^{(1)}(\xi) d\xi, \lambda^{(1)}(x), z^{(1)} \right)\|_{m_n},$$

then, in view of inequalities 3), 4) Theorem and inequalities (27), (28), the estimate

$$\begin{aligned} \|\lambda - \lambda^{(0)}\|_1 &\leq \|\lambda - \lambda^{(1)}\|_1 + \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|_1 < \rho_1 + \tilde{\varepsilon} + \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|_1 \leq \\ &\leq (q_{1,0}(h) + 1) \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|_1 < \frac{\gamma_{1,0}(h)}{1 - q_{1,0}(h)} e^{\gamma_{1,0}(h)hL_1\omega} \times \\ &\times \max_{x \in [0, \omega]} \|Q_{1,h} \left(x, \int_0^x \lambda^{(0)}(\xi) d\xi, \lambda^{(0)}(x), z^{(0)} \right)\|_{m_n} < \rho_\lambda \end{aligned}$$

holds, i.e. $S(\lambda^{(1)}(x), \rho_1) \subset S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda)$.

Continuing the process, in similar way, on k th step of algorithm, we find the pair $(\lambda^{(k)}(x), z^{(k)}(x, [t]))$ and establish the estimates

$$\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\|_1 \leq q_{1,0}(h) \|\lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)}\|_1; \quad (29)$$

$$\|z^{(k)} - z^{(k-1)}\|_3 \leq \left(e^{(L_1 \omega + L_2)h} - 1 \right) \|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\|_1. \quad (30)$$

Inequalities (29), (30) and condition 2) of Theorem imply that the sequence of pairs $(\lambda^{(k)}(x), z^{(k)}(x, [t]))$ converges to $(\lambda^*(x), z^*(x, [t]))$, the solution of problem (6)-(9), as $k \rightarrow \infty$. Based on inequalities 4) and 5)

of Theorem the pairs $(\lambda^{(k)}(x), z^{(k)}(x, [t]))$, $k \in \mathbb{N}$, and $(\lambda^*(x), z^*(x, [t]))$ belongs to $S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda) \times S_h(z^{(0)}(x, [t]), \rho_z)$. In the inequalities

$$\|\lambda^{(k+p)} - \lambda^{(0)}\|_1 < \frac{1}{1 - q_{1,0}(h)} \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|_1;$$

$$\|z^{(k+p)} - z^{(0)}\|_{m_n(x,h)} \leq \left(e^{(L_1\omega + L_2)h} - 1 \right) \|\lambda^{(k+p)} - \lambda^{(0)}\|_1,$$

passing to limit as $p \rightarrow \infty$, we obtain estimates (12), (13).

Theorem is proved.

References

- 1 Кигурадзе Т.И. Об ограниченных и периодических в полосе решениях квазилинейных гиперболических систем // Диф. уравнения. — 1994. — Т. 30. — № 10. — С. 1760–1773.
- 2 Кигурадзе Т.И. Об ограниченных в полосе решениях квазилинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа // Применяемый анализ. — 1995. — Т. 58. — № 3, 4. — С. 199–214.
- 3 Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Об ограниченных решениях системы гиперболических уравнений и их аппроксимация // Вычисл. математика и матем. физика. — 2003. — Т. 42. — № 8. — С. 1132–1148.
- 4 Кигурадзе Т., Кусано Т. Об ограниченных и периодических в полосе решениях нелинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными // Вычисл. математика и матем. физика. — 2005. — Т. 49. — № 2, 3. — С. 335–364.
- 5 Кигурадзе Т., Лакимиканхан В. О начально-краевой проблеме в ограниченных и неограниченных областях для одного класса нелинейных гиперболических уравнений третьего порядка // Журн. мат. анализа и приложения. — 2006. — Т. 324. — № 2. — С. 1242–1261.
- 6 Джумабаев Д.С., Темешева С.М. Метод параметризации для решения нелинейных двухточечных краевых задач // Вычисл. математика и матем. физика. — 2007. — Т. 47. — № 1. — С. 37–61.

Д.С. Жумабаев, С.М. Темешева

Сызықтық емес аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесінің жолақта шектелген шешімі

Мақалада сызықтық емес аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесінің жолақта шектелген шешімі қарастырылды. Белгісіз функцияның уақыт бойынша айналымы бүкіл осьте өзгереді, ал кеңістіктік айналымы ақырлы аралыққа тиесілі. Функция — кеңістіктік айналымы бойынша дербес туынды, белгісіз функция ретінде белгіленеді және бастапқы жүйенің жолақта шектелген шешімін табу есебі дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жолақта шектелген шешімін табу есебіне келтірілді. Бүкіл ось бөліктерге бөлінеді және қосымша функционалдық параметрлер белгісіз функцияның ішкі облыстардың бастапқы сызықтарындағы мәндері ретінде енгізілді. Функционалдық параметрлер бекітілген мәндерінде ішкі облыстардағы жаңа белгісіз функциялар бірінші ретті дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есептерінің шешімдері ретінде анықталды. Бөліктеудің ішкі сызықтарындағы шешімнің үзіліссіздік шарттарын пайдалана отырып енгізілген функционалдық параметрлерге қатысты сызықтық емес Вольтерра интегралдық теңдеулерінің екі жақты шексіз жүйесі алынған. Сондай-ақ функционалдық параметрлері бар есептің шешімдерін табу алгоритмдері ұсынылған. Алгоритмдердің жинақтылығы мен сызықтық емес аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесінің жолақта шектелген шешімінің бар болуының шарттары алынған.

Д.С. Джумабаев, С.М. Темешева

Ограниченное на полосе решение системы нелинейных гиперболических уравнений со смешанными производными

В статье рассмотрена система нелинейных гиперболических уравнений со смешанными производными на полосе. Временная переменная неизвестной функции меняется на всей оси, а пространственная переменная принадлежит конечному интервалу. Функция — частная производная относительно пространственной переменной — обозначается как неизвестная функция, и задача нахождения ограниченного на полосе решения исходной системы сводится к задаче нахождения ограниченного на полосе решения системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Вся ось делится на части, и дополнительные функциональные параметры вводятся как значения неизвестной функции на начальных линиях подобластей. Для фиксированных значений функциональных параметров новые неизвестные функции в подобластях определяются как решения задач Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Используя условия непрерывности решения на внутренних линиях разбиения, получена двусторонне-бесконечная система нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно введенных функциональных параметров. Предложены алгоритмы нахождения решений задачи с функциональными параметрами. Получены условия сходимости алгоритмов и существования ограниченного на полосе решения системы нелинейных гиперболических уравнений со смешанными производными.

References

- 1 Kiguradze T.I. *Differential Equations*, 1994, 30, 10, p. 1760–1773.
- 2 Kiguradze T. *Applicable Analysis*, 1995, 58, 3, 4, p. 199–214.
- 3 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, 42, 8, p. 1132–1148.
- 4 Kiguradze T., Kusano T. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2005, 49, 2, 3, p. 335–364.
- 5 Kiguradze T., Lakshmikanthan V. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2006, 324, 2, p. 1242–1261.
- 6 Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, 47, 1, p. 37–61.

А. Ескермесулы

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана
(E-mail: aleke1410@gmail.com)

Исследование индексов дефекта двучленного минимального дифференциального оператора четвертого порядка с нерегулярными коэффициентами

В статье исследованы индексы дефекта минимального полуограниченного сингулярного симметрического двучленного дифференциального оператора L_0 , порожденного в $L_2[x_0, \infty)$, $x_0 > 0$, дифференциальным выражением $ly = -y^{(4)} + (q(x) + h(x))y$, $x \in [x_0; \infty)$, где $q(x)$ удовлетворяет следующим условиям: функция $q(x)$ является дважды непрерывно-дифференцируемой, функции $q'(x)$ и $q''(x)$ не меняют знак при достаточно большом $R > 0$ для $x > R$, а также выполняется $|q(x)| \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$, $|q'(x)| = o(|q^\zeta(x)|)$ при $x \in [x_0, \infty)$, где $0 < \zeta < \frac{5}{4}$. В совокупности такие условия принято называть условиями Титчмарша-Левитана, а $h(x)$ – быстро осциллирующее возмущение. Хорошо известно, что если коэффициенты $q(x)$ и $h(x)$ имеют регулярное поведение при $x \rightarrow +\infty$, то уравнение $ly = \lambda y$ удается сводить к системе линейных дифференциальных уравнений с почти диагональной матрицей, а затем с помощью известной теоремы Левинсона строить асимптотику решений. В свою очередь, асимптотические формулы для фундаментальной системы решений уравнения $ly = \lambda y$ содержат важную информацию об индексах дефекта оператора L_0 , о качественных спектральных свойствах самосопряженных расширений оператора L_0 . В работе [1] были получены асимптотические формулы для фундаментальной системы решений уравнения $ly = \lambda y$ с коэффициентами, отличными от регулярных. В этой работе для исследования индексов дефекта оператора L_0 используются полученные в работе [1] асимптотические формулы.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, индексы дефекта, фундаментальная система решений.

Рассмотрим двучленный минимальный дифференциальный оператор L_0 , порожденный в $L_2[x_0, \infty)$ дифференциальным выражением

$$ly = -y^{(4)} + (q(x) + h(x))y, \quad x \in [x_0; \infty), \quad x_0 > 0, \quad (1)$$

где $q(x) \in C^{(2)}[x_0; +\infty)$ – функция, удовлетворяющая условиям Титчмарша-Левитана:

- а) $|q(x)| \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$;
- б) $q'(x)$, $q''(x)$ не меняют знак при достаточно большом $R > 0$ для $|x| \geq R$;
- в) $|q'(x)| = o(|q^\zeta(x)|)$ при $x \in [x_0; \infty)$, где $0 < \zeta < \frac{5}{4}$.

$h(x)$ – быстро осциллирующая вещественная функция.

В [1] были получены асимптотические формулы для фундаментальной системы решения уравнения $ly = \lambda y$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $Im \lambda \neq 0$, при $x \rightarrow \infty$

$$y_j = \frac{1}{(q(x) - \lambda)^{\frac{3}{8}}} e^{\varepsilon_j \eta} (1 + o(1)), \quad (2)$$

где

$$\eta = \int_{x_0}^x \mu(t, \lambda) dt, \quad (3)$$

$\mu(x, \lambda) = \sqrt[4]{q(x) - \lambda}$, $j = 1, 2, 3, 4$, а ε_j – корни четвертой степени из единицы.

При этом $\arg \mu$ выбирается так, чтобы он был непрерывной функцией от x и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arg \mu = \begin{cases} 0, & \text{если } q(x) > 0; \\ \frac{\pi}{4}, & \text{если } q(x) < 0. \end{cases}$$

В свою очередь, эти асимптотические формулы позволяют получить важные сведения об индексах дефекта минимального дифференциального оператора L_0 , порожденного дифференциальным выражением (1). Для исследования индексов дефекта минимального дифференциального оператора L_0 мы поступим так же, как и в [2; 336].

Далее будем считать выполненным условие

$$|q(x)| \geq cx^{\frac{4}{3}+\delta}, \quad c > 0, \quad \delta > 0, \quad x \in [x_0, \infty), \quad x_0 > 0. \quad (4)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $q(x) = |q(x)| > 0$ при достаточно большом x_0 . Положим $\lambda = i\tau$, где τ — вещественное число. Тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$\mu(x, \lambda) = \sqrt[4]{|q(x)|} \left(1 - \frac{i\tau}{4|q(x)|} + O\left(\frac{1}{q^2(x)}\right) \right) (1 + o_1(1)), \quad (5)$$

где $o_1(1)$ — вещественно.

При $\varepsilon_1 = 1$ из (3) следует, что $\varepsilon_1\mu(x, \lambda) = \sqrt[4]{|q(x)|}(1 + o(1))$ при $x \rightarrow +\infty$. Выберем x_0 в (3) настолько большим, чтобы при $x > x_0$ было $|o(1)| < \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда

$$\varepsilon_1\mu(x, \lambda) > \sqrt[4]{|q(x)|}(1 - \varepsilon),$$

и потому

$$Re(\varepsilon_1\eta) = Re \left(\int_{x_0}^x \mu(t, \lambda) dt \right) > (1 - \varepsilon) \int_{x_0}^x \sqrt[4]{|q(t)|} dt.$$

Отсюда при $x > x_0$

$$|y_1| > |q(x)|^{-\frac{3}{8}} \exp \left\{ (1 - \varepsilon) \int_{x_0}^x \sqrt[4]{|q(t)|} dt \right\} (1 - \varepsilon). \quad (6)$$

В силу условия с) Титчмарша-Левитана

$$\int_{x_0}^x |q(t)|^{\frac{1}{4}} dt > c \int_{x_0}^x |q(t)|^{\frac{1}{4}-\gamma} q'(t) dt = c \frac{|q(t)|^{\frac{5}{4}-\gamma}}{\frac{5}{4}-\gamma} \Big|_{x_0}^x = c_1 |q(x)|^{\frac{5}{4}-\gamma} + c_2,$$

где c, c_1, c_2 — некоторые постоянные и $c, c_1 > 0$. Поэтому из (6) заключаем, что

$$|y_1| > (1 - \varepsilon) |q(x)|^{-\frac{3}{8}} \exp \left\{ (1 - \varepsilon) \left[c_1 |q(x)|^{\frac{5}{4}-\gamma} + c_2 \right] \right\} \rightarrow +\infty$$

при $x \rightarrow +\infty$. Следовательно, функция y_1 не будет с интегрируемым квадратом в интервале $[x_0, +\infty)$.

Теперь рассмотрим случай при $\varepsilon_2 = i$. Применяя снова формулу (5), находим

$$Re(\varepsilon_2\mu) = Re(i\mu) = \frac{\tau}{4|q(x)|} \sqrt[4]{|q(x)|} (1 + o(1)) = c |q(x)|^{-\frac{3}{4}} (1 + o(1)),$$

где $c = \frac{\tau}{4}$.

Пусть $\tau > 0$, следовательно, $c > 0$. Выберем x_0 в (3) настолько большим, чтобы при $x > x_0$ было $|o(1)| < \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда из (2), (5) и из условия (4) получаем

$$\begin{aligned} |y_2|^2 &< |q(x)|^{-\frac{3}{4}} \exp \left\{ 2 \int_{x_0}^x Re(\varepsilon_2\mu(t, \lambda)) dt \right\} (1 + \varepsilon) < \\ &< |q(x)|^{-\frac{3}{4}} \exp \left\{ 2c(1 + \varepsilon) \int_{x_0}^x |q(t)|^{-\frac{3}{4}} dt \right\} (1 + \varepsilon) < \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &< cx^{-1-\frac{3\delta}{4}} \exp \left\{ 2c(1+\varepsilon) \int_{x_0}^x t^{-1-\frac{3\delta}{4}} dt \right\} (1+\varepsilon) = \\ &= cx^{-1-\frac{3\delta}{4}} \exp \left\{ 2c(1+\varepsilon)t^{-\frac{3\delta}{4}} \Big|_{x_0}^x \right\} (1+\varepsilon) \leq c_1x^{-1-\frac{3\delta}{4}}, \quad x \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

где $c > 0$, $c_1 > 0$ – некоторые постоянные. Поэтому интеграл

$$\int_{x_0}^{\infty} |y_2|^2 dx$$

сходится. При $\varepsilon_4 = -i$

$$|y_4|^2 < |q(x)|^{-\frac{3}{4}} e^{-2c(1-\varepsilon) \int_{x_0}^x |q(t)|^{-\frac{3}{4}} dt} \leq cx^{-1-\frac{3\delta}{4}},$$

так что и в этом случае $y_4 \in L_2[x_0, \infty)$. Итак, при $Re(\varepsilon_2) = Re(\varepsilon_4) = 0$ обе функции y_2, y_4 будут с суммируемыми квадратами согласно условию (4).

Проверим случай при $\varepsilon_3 = -1$, т.е. $Re(\varepsilon_3) < 0$. Повторяя те же рассуждения, что и при выводе неравенства (6), найдем, что в этом случае

$$\begin{aligned} |y_3|^2 &< (1+\varepsilon)|q(x)|^{-\frac{3}{4}} \exp \left\{ -2(1-\varepsilon) \int_{x_0}^x |q(t)|^{\frac{1}{4}} dt \right\} < \\ &< (1+\varepsilon)|q(t)|^{-\frac{3}{4}} \exp \left\{ -2(1-\varepsilon) \int_{x_0}^x |q(t)|^{-\frac{3}{4}} dt \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{x_0}^x |y_3|^2 dt < \frac{1+\varepsilon}{-2(1-\varepsilon)} \exp \left\{ -2(1-\varepsilon) \int_{x_0}^x |q(t)|^{-\frac{3}{4}} dt \right\} \Big|_{x_0}^x.$$

Это выражение в любом случае имеет конечный предел при $x \rightarrow +\infty$. Таким образом, при $Re(\varepsilon_3) < 0$ функция y_3 принадлежит $L_2[x_0, \infty)$.

Таким образом, мы получили три линейно независимых решения уравнения $ly = \lambda y$, принадлежащие $L_2[x_0, \infty)$. Отсюда делаем вывод, что индексы дефекта оператора L_0 есть (3, 3) в случае, когда $q(x) = |q(x)| > 0$ при достаточно большом x_0 .

Теперь рассмотрим случай, когда $q(x) = -|q(x)| < 0$ при достаточно большом x . Тогда, полагая, что

$$\lambda = -i\tau, \quad \nu = e^{i\frac{\pi}{4}},$$

найдем

$$\mu(x, \lambda) = \sqrt[4]{|q(x)|} \cdot \nu \left[1 + \frac{i\tau}{8|q(x)|} + O\left(\frac{1}{q^2(x)}\right) \right] (1 + o_1(1)).$$

Положим $\varepsilon'_j = \nu \varepsilon_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, и обозначим числа ε'_j , $j = \overline{1, 4}$, таким образом, что

$$Re(\varepsilon'_1) = Re(\varepsilon'_2) > Re(\varepsilon'_3) = Re(\varepsilon'_4),$$

тогда получим

$$\varepsilon'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varepsilon'_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varepsilon'_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varepsilon'_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Рассмотрим случай, когда $Re \varepsilon'_1 = Re \varepsilon'_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$. При $j = 1, 2$

$$Re(\varepsilon'_j \mu(x, \lambda)) = Re \left(\varepsilon'_j \sqrt[4]{|q(x)|} \cdot \nu \left[1 + \frac{i\tau}{8|q(x)|} + O\left(\frac{1}{q^2(x)}\right) \right] (1 + o_1(1)) \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{|q(x)|} \pm \frac{\tau\sqrt{2}}{2} |q(x)|^{-\frac{3}{4}} \right) (1 + o(1)) = \\
 &= \left(c_1 \sqrt[4]{|q(x)|} + c_2 |q(x)|^{-\frac{3}{4}} \right) (1 + o(1)),
 \end{aligned}$$

где $c_1 > 0$, c_2 — постоянные.

Выберем x_0 в (3) настолько большим, чтобы при $x > x_0$ было $|o(1)| < \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда из (2), (5) и из условия (4) получаем

$$\begin{aligned}
 |y_j|^2 &> |q(x)|^{-\frac{3}{4}} \exp \left\{ 2 \int_{x_0}^x \operatorname{Re}(\varepsilon'_j \mu(t, \lambda)) dt \right\} (1 - \varepsilon) > \\
 &> |q(x)|^{-\frac{3}{4}} \exp \left\{ 2(1 - \varepsilon) \int_{x_0}^x \left(c_1 \sqrt[4]{|q(t)|} + c_2 |q(t)|^{-\frac{3}{4}} \right) dt \right\} (1 - \varepsilon) > \\
 &> cx^{-1-\frac{3\delta}{4}} \exp \left\{ 2(1 - \varepsilon) \int_{x_0}^x \left(c_1 t^{\frac{1}{3}+\frac{\delta}{4}} + c_2 t^{-1-\frac{3\delta}{4}} \right) dt \right\} (1 - \varepsilon) = \\
 &= cx^{-1-\frac{3\delta}{4}} \exp \left\{ 2(1 - \varepsilon) \left(c_1 t^{\frac{4}{3}+\frac{\delta}{4}} \Big|_{x_0}^x + c_2 t^{-\frac{3\delta}{4}} \Big|_{x_0}^x \right) \right\} (1 - \varepsilon), \quad x \rightarrow +\infty,
 \end{aligned}$$

где $c > 0$, $c_1 > 0$, c_2 — некоторые постоянные. В последнем выражении показатель экспоненты стремится к плюс бесконечности при $x \rightarrow \infty$. Поэтому интеграл

$$\int_{x_0}^{\infty} |y_j|^2 dx$$

расходится. Следовательно, при $\operatorname{Re} \varepsilon'_1 = \operatorname{Re} \varepsilon'_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ функция y_j ($j = 1, 2$) не принадлежит $L_2[x_0, \infty)$.

Проверим случай, когда $\operatorname{Re} \varepsilon'_3 = \operatorname{Re} \varepsilon'_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$. При $j = 3, 4$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(\varepsilon'_j \mu(x, \lambda)) &= \operatorname{Re} \left(\varepsilon'_j \sqrt[4]{|q(x)|} \cdot \nu \left[1 + \frac{i\tau}{8|q(x)|} + O\left(\frac{1}{q^2(x)}\right) \right] \right) (1 + o_1(1)) = \\
 &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{|q(x)|} \pm \frac{\tau\sqrt{2}}{2} |q(x)|^{-\frac{3}{4}} \right) (1 + o(1)) = \\
 &= \left(-c_1 \sqrt[4]{|q(x)|} + c_2 |q(x)|^{-\frac{3}{4}} \right) (1 + o(1)),
 \end{aligned}$$

где $c_1 > 0$, c_2 — постоянные.

Выберем x_0 в (3) настолько большим, чтобы при $x > x_0$ было $|o(1)| < \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда из (2), (5) и из условия (4) получаем

$$\begin{aligned}
 |y_j|^2 &< |q(x)|^{-\frac{3}{4}} \exp \left\{ 2 \int_{x_0}^x \operatorname{Re}(\varepsilon'_j \mu(t, \lambda)) dt \right\} (1 + \varepsilon) < \\
 &< |q(x)|^{-\frac{3}{4}} \exp \left\{ 2(1 + \varepsilon) \int_{x_0}^x \left(-c_1 \sqrt[4]{|q(t)|} + c_2 |q(t)|^{-\frac{3}{4}} \right) dt \right\} (1 + \varepsilon) < \\
 &> cx^{-1-\frac{3\delta}{4}} \exp \left\{ 2(1 + \varepsilon) \int_{x_0}^x \left(-c_1 t^{\frac{1}{3}+\frac{\delta}{4}} + c_2 t^{-1-\frac{3\delta}{4}} \right) dt \right\} (1 + \varepsilon) =
 \end{aligned}$$

$$= cx^{-1-\frac{3\delta}{4}} \exp \left\{ 2(1+\varepsilon) \left(-c_1 t^{\frac{4}{3}+\frac{\varepsilon}{4}} \Big|_{x_0}^x + c_2 t^{-\frac{3\delta}{4}} \Big|_{x_0}^x \right) \right\} (1+\varepsilon), \quad x \rightarrow +\infty,$$

где $c > 0$, $c_1 > 0$, c_2 — некоторые постоянные. В последнем выражении первое слагаемое степени экспоненты стремится к минус бесконечности, а второе слагаемое — к нулю при $x \rightarrow \infty$. Поэтому интеграл

$$\int_{x_0}^{\infty} |y_j|^2 dx$$

сходится. Следовательно, при $Re \varepsilon'_3 = Re \varepsilon'_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ функция y_j ($j = 3, 4$) принадлежит $L_2[x_0, \infty)$.

Таким образом, мы получили следующий результат: индексы дефекта оператора L_0 , порожденного дифференциальным выражением (1), есть:

- а) (3,3), если $q(x) > 0$ при $x \rightarrow +\infty$;
- б) (2,2), если $q(x) < 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Автор выражает признательность профессору Я.Т. Султанаеву за ценные замечания при обсуждении работы, учет которых способствовал улучшению данной статьи.

Список литературы

- 1 *Валеев Н.Ф., Ескермесулы А., Назирова Э.А.* Об асимптотике решений сингулярных дифференциальных уравнений четвертого порядка с нерегулярными коэффициентами // Мат. журн. ИМММ КН МОН РК. — Т. 16. — № 1. — С. 58–76.
- 2 *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — С. 526.

Ә. Ескермесулы

Регулярлық емес коэффициенттері бар төртінші ретті екі мүшелі минималды дифференциалдық оператордың ақау индексіні зерттеу

Мақалада $L_2[x_0, \infty)$ -де, $x_0 > 0$ $ly = -y^{(4)} + (q(x) + h(x))y$, $x \in [x_0; \infty)$, дифференциалдық өрнегімен туындаған минималды жартылай шенелмеген сингулярлық симметриялық екімүшелі L_0 дифференциалдық операторының ақау индекстері зерттелді, мұндағы $-q(x)$ келесі шарттарды қанағаттандырады: $q(x)$ екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функция; $q'(x)$ және $q''(x)$ функциялары мейлінше үлкен $R > 0$ үшін $x > R$ болғанда таңбаларын өзгертпейді, сонымен қатар $|q(x)| \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$, $|q'(x)| = o(|q^\zeta(x)|)$, $x \in [x_0, \infty)$, мұндағы $0 < \zeta < \frac{5}{4}$. шарттары орындалады. Бұл шарттарды біртұтас күйінде Титчмарш-Левитан шарттары деп атау қабылданған, ал $h(x)$ — жылдам тербелетін қоздырғыш. Егер $x \rightarrow +\infty$ болғанда $q(x)$ және $h(x)$ функциялары қалыпты өзгерісте болса, онда $ly = \lambda y$ теңдеуін дерлік диагональді матрицалы дифференциалдық теңдеулер жүйесіне келтіріп, сонан соң белгілі Левинсон теоремасының көмегімен шешімдерінің асимптотикасын құруға болатыны бұрыннан жақсы таныс. Өз кезегінде, $ly = \lambda y$ теңдеуінің фундаменталдық шешімдер жүйесі үшін құрылған асимптотикалық формулалар операторының ақау индекстері туралы, L_0 операторының өзіне түйіндес кеңейтулерінің сапалы спектралдық қасиеттері туралы маңызды ақпарат жинайды. Дегенмен осы уақытқа дейін регулярлықтан өзгеше коэффициенттері бар, асимптотикалық формулалары алынған дифференциалдық операторлардың кең тараған кластары анықталмаған еді. [1] жұмысында регулярлықтан өзгеше коэффициенттері бар $ly = \lambda y$ теңдеуінің фундаменталдық шешімдер жүйесі үшін асимптотикалық формулалар алынды. Біздің бұл жұмысымызда ақау индекстерін зерттеу үшін [1] жұмыста алынған асимптотикалық формулалар қолданылады.

A.Yeskermessuly

Investigation of the deficiency indices of the minimum two-term fourth-order differential operator with irregular coefficients

This paper investigates the deficiency indices of symmetric singular Nonsemibounded minimum two-term differential operator L_0 generated in $L_2[x_0, \infty)$, $x_0 > 0$, differential expression $ly = -y^{(4)} + (q(x) + h(x))y$, $x \in [x_0; \infty)$, which $q(x)$ is satisfies the following conditions: the function $q(x)$ is twice continuously differentiable function; $q'(x)$ and $q''(x)$ do not change the sign for $R > 0$ a sufficiently large $x > R$, as well as performed $|q(x)| \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$, $|q'(x)| = o(|q^\zeta(x)|)$ for $x \in [x_0, \infty$, where $0 < \zeta < \frac{5}{4}$. Taken together, these conditions are called the terms of the Titchmarsh-Levitan and $h(x)$ is a fast oscillatory perturbation. It is well known that if the coefficients $q(x)$ and $h(x)$ have a regular behavior when $x \rightarrow +\infty$ then the equation $ly = \lambda y$ can be reduced to a system of linear differential equations with almost a diagonal matrix, and then by using the well known Levinson theorem to construct the asymptotic behavior of solutions. In turn, the asymptotic formulas for the fundamental system of solutions of the equation $ly = \lambda y$ contain important information about the defect indices of the operator L_0 and on the quality of the spectral properties of self-adjoint extensions of the operator L_0 . In [1] we obtained the asymptotic formulas for fundamental system of solutions of equations $ly = \lambda y$ with coefficients different from regular ones. In this work we used the asymptotic formulas obtained in [1] for investigating defect indices of the operator L_0 .

References

- 1 Valeev N.F., Yeskermessuly A., Nazirova E.A. *Mathematical Journal* IMMM SC MES RK, 2016, 16, 1, p. 58–76.
- 2 Naymark M.A. *Linear differential operators*, Moscow: Nauka, 1969, p. 526.

A.R. Yeshkeyev

*Ye.A. Buketov Karaganda State University
(E-mail: modth1705@mail.ru)*

The property of independence for Jonsson sets

The studies carried out in this article are connected with the description of model-theoretic properties of some, generally speaking, incomplete classes of theories that make a subclass of inductive theories. These theories are well studied both in algebra and in the theory of models. They are called Jonsson's theories. To study these theories there is introduced a new research approach, namely: on the submultitudes of a semantic model of Jonsson's theory there are separated special multitudes that are, firstly, realizations of some existential formula, secondly, the closing of the set gives us the basic set of some existentially closed submodel of the semantic model. Besides, there is developed a technique of studying the central orbital types. It is well known that the perfect Jonsson theory enough comfortable for model-theoretic researches. Practically, in the perfect case, we can say that with the help of semantic method, we can give a specific description of these objects (Jonsson theory and class its existentially closed models). In this article we will give the notion of forking for fragment of fixing Jonsson theory. The nonforking extensions will be the «Mfree» ones. Also we considered for the notion of independence many desirable properties like monotonicity, transitivity, finite basis and symmetry.

Key words: Jonsson's set, forking, algebraic closure, definable closure, central type, orbital type, independence.

Our research interests are connected with the description of model-theoretic properties of some, generally speaking, incomplete classes of theories that make a subclass of inductive theories. These theories are well studied both in algebra and in the theory of models.

As well, we are always dealing with two objects:

- 1) Jonsson theory [1] and 2) class of its existentially closed models.

It is well known that the perfect Jonsson theory enough comfortable for model-theoretic researches. Practically, in the perfect case, we can say that with the help of semantic method, we can give a specific description of these objects (Jonsson theory and class its existentially closed models).

This allows us to assume that it would be interesting to learn how to allocate in an arbitrary theory its fragment which will Jonsson theory. This approach is not trivial, if only from the fact that any theory set its universal existential consequences, not necessarily Jonsson theories.

On the other hand, for any theory in some special enrichments can always be achieved firstly Jonsson and then its perfect. At least this holds for operations such as skolemization and morlization. In both cases, the class of existentially closed models received Jonsson theories coincides with the class of models of initial theories.

Morlization and skolemization action is applied to the theory under consideration.

This article is invited to the idea of considering a new approach to a subset of some model, which allows firstly to expand the semantic aspect, and secondly to try to transfer many of the ideas out of technique the of complete theories for Jonsson fragments, which in itself generalizes the considered problems.

We make the following agreements:

1. In this project, we consider only perfect Jonsson theory, complete of existential sentences.
2. In this project, we consider only classes existentially closed models of the theories.
3. In case of the structure, it is assumed that the model of some signature.

Naturally, when we speak of arbitrary signature (language) without the theory, item 1) of the above arrangements is not important.

Let T is Jonsson perfect theory of complete of existential sentences in the language L . We fix its semantic model C , saturated in a very high power κ (in particular κ is much greater than the power of language). We agree that in the future all the considered models M, N, \dots of theory T will be existentially closed substructures high model C power less than κ . All considered subsets A, B, C, \dots will be subsets of C power less than κ .

Note one more useful fact, if f is the automorphism of structure C , leaving in place all the elements of the set A , $f \in \text{Aut}_A(C)$, then f it obviously transfer to itself each A is definability subset and therefore transforms to itself and all complete types over A , due to saturation of the semantic model C . Conversely, if $\bar{c}, \bar{d} \in C^n$ then $tp(\bar{c}/A) = tp(\bar{d}/A)$ if and only if there exists $f \in \text{Aut}_A(C)$ such that $f(\bar{c}) = \bar{d}$.

The saturated model complete n -types over A exactly correspond to orbits n elements under automorphisms fixing A element by element. Since the theory is complete for the existential sentences of language L , it is true for existential types.

Let L is a language, which from that moment supposed countable. Next, let T is Jonsson perfect theory of complete of existential sentences in the language L and its semantic model C . There remains an agreement sets and model of theory T are strictly less power than C .

Let $A \subseteq C$. We fix some $n \geq 1$ and consider the family Def_A^n of all A – definable subsets power over C^n . We identify this definable subset of C^n and defining its formula $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$, where $\bar{x}, \bar{a}, \bar{a}$ – tuple elements of A (two different formulas may define a subset of, but we consider the formula with an accuracy to equivalence in C the obvious sense).

The following approach to the definition of a relational structure of some signature, is well known. It allows to consider only the predicate signatures. For example, in the case of moralization.

Let's start with a definition of the relational structure of the signature of a Jonsson theory. Defining family of definable subsets of the structure, we follow the terminology and notation of [2, 1], but in [1], all definitions are given for complete theories, we will to work with Jonsson theories and their positive generalizations.

The relational structure $M = \langle M, (B_i)_{i \in I} \rangle$ consists of a (non-empty) set M and subsets $(B_i)_{i \in I}$ of $\bigcup_{n > 1} M^n$ and each B_i is a subset of some M^{n_i} , $n_i \geq 1$. Add an additional condition that one of the sets B_i is the diagonal of the set M .

All B_i are called atomic subsets M .

Let $M = \langle M, (B_i)_{i \in I} \rangle$ – relational structure. We introduce the concept of a family of definable subsets of structures M , denoted $Def(M)$. It is the least of the family subsets of $\bigcup_{n > 1} M^n$ with the following properties.

For each $i \in I$ the inclusion $B_i \in Def(M)$.

The set $Def(M)$ is closed relatively to finite Boolean combinations, i.e. of inclusions $A, B \subseteq M^n$, $A, B \in Def(M) \subseteq M^n$, follow that $A \cup B \in Def(M)$, $A \cap B \in Def(M)$ and $M^n \setminus A \in Def(M)$. The set $Def(M)$ is closed relatively Cartesian product, i.e. of inclusions $A, B \in Def(M)$ follow that $A \times B \in Def(M)$. The set $Def(M)$ is closed relatively to the projection, i.e. if $A \subseteq M^{n+m}$, $A \in Def(M)$ $\pi_n(A) \in Def(M)$, π_n the projection of the set A on M^n , $\pi_n(A) \in Def(M)$. The set $Def(M)$ is closed relatively to specialization, i.e. if $A \in Def(M)$, $A \subseteq M^{n+k}$ and $\bar{m} \in M^n$ then $A(\bar{m}) = \{\bar{b} \in M^k(\bar{m}, \bar{b}) \in A\} \in Def(M)$. The set $Def(M)$ is closed relatively to permutation of coordinates, i.e. if $A \in Def(M)$, σ – a permutation of the set $1, \dots, n$ then $\sigma(A) = \{(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}) \mid (a_1, \dots, a_n) \in A\} \in Def(A)$. We now say that $S \subseteq M^n$ is the atomic subset if

$$S = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n \mid M \models \varphi(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)\}$$

for some atomic formula $\varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ and some $b \in M^m$. We say that a subset S defined with parameters \bar{b} or defined above \bar{b} .

We now say that $D \subseteq M^n$ is definable subset L -structure of M , where there are $b \in M^m$ (here \bar{b} may be empty) and a formula $\varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ such that

$$D = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n \mid M \models \varphi(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)\}.$$

If $\bar{b} \subseteq B$, then we say that D is definable with the parameters of B (or above B) or that D is defined formula with the parameters of B . Clearly definable sets in this sense – not that other, as $Def(M)$ a relational structure $\langle M, (A_i)_{i \in I} \rangle$, which A_i taken as a whole all nuclear definable set.

The family Def_A^n is a Boolean algebra with relative to the usual operations of intersection, union and complement. Full n -type over A the same ultrafilter in this Boolean algebra. The space above the full n -types, denoted $S_n(A)$ is the Stone space corresponding to the Boolean algebra Def_A^n . We introduce in $S_n(A)$ the (normal) topology in which the open base of the set $\langle \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \rangle = \{p \in S_n(A) \mid \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p\}$.

We say that the set X – Σ -defined, if it is definitely some existential formula.

a) The set X is called Jonsson in the theory T if it satisfies the following properties:

X is a – Σ definability subset of C ;

$dcl(X)$ is the universe of some existentially-closed submodels of C ;

b) The set X is called algebraic Jonsson in the theory T , if it satisfies the following properties:

X is a – definability subset of C ;

$acl(X)$ is the universe some existentially-closed submodels of C .

We consider countable language L and Jonsson perfect theory of complete of existential sentences in language L and their semantic models C , in this language and other models (classes existentially closed models of the theories).

If M is model theory of T and φ – a formula language L , then we will use the following notation:

$$\varphi(M) = \{m \in M^n \mid M \models \varphi(m)\}.$$

The set S will call 0–definability if it ϕ -definability (definable without parameters).

The set of all complete types over A the denoted by $S(A)$, i.e. $S(A) = \bigcup_{n \geq 1} S_n(A)$.

Saturated models of Jonsson theory (κ – saturation models power k) are uniquely determined by their power. But they can not exist without a certain set-theoretic assumptions, such as the generalized continuum hypothesis. On the other hand, there are different ways to avoid set-theoretic problems of this sort. For example, assume stable or weaken the concept of the semantic model as in [2]. Therefore, we assume that we got rid of all the issues of the existence of the semantic model.

Further, it is convenient to work within the semantic model C of Jonsson theory, containing all others.

In the future, any set of parameters A considered in the subset C . Model M is a subset of C which is the universe of existentially closed substructure. This means that any $L(M)$ – existential formula $\varphi(x)$, true in C and performed on some element of M . Formula parameters in the future always belongs to C and if we write $\models \varphi(c)$ if $C \models \varphi(c)$.

Lemma 1. Definable set of D is definable over set A , if and only if it is invariant relatively to all automorphisms of the model C , leaving in place each element of A . (Let's call them over automorphisms over A).

It follows that the definable closure $dcl(A)$ of the set A , e.a. the set of all elements of the definable over A , coincides with the set of elements that are invariant relatively to all automorphisms over A .

The element b contained in the finite A is definability set, called algebraic over A . It follows that the element b algebraic over A if and only if it has only a finite number of adjoint over A .

The set $acl(A)$ consisting of all elements algebraic over A , will be called the algebraic closure of the set A .

Forking. We give an axiomatic reference forking.

Let $M \exists$ – saturated existentially closed model power k (k enough big cardinal) of Jonsson theory T (\exists – saturation means the saturation relative to existential types). Let A – the class of all subsets M, P – the class of all \exists -types (not necessarily complete), let $JNF \subseteq P \times A$ – a binary relation. We impose JNF the following axiom:

Axiom 1. If $(p, A) \in JNF, f : A \rightarrow B$ – automorphism M , then $(f(p), f(A)) \in JNF$.

Axiom 2. If $(p, A) \in JNF, q \subseteq p$, then $(q, A) \in JNF$.

Axiom 3. If $A \subseteq B \subseteq C, p \in S^G(C)$, then $(p, A) \in JNF \Leftrightarrow (p, B) \in JNF$ and $(p \upharpoonright B, A) \in JNF$.

Axiom 4. If $A \subseteq B, dom(p) \subseteq B, (p, A) \in JNF$, then $\exists q \in S^J(B), p \subseteq q$ and $(q, a) \in JNF$

Axiom 5. There is a cardinal κ such that if $A \subseteq B \subseteq C, p \in S^G(C), (p, A) \in JNF$ then $|\{q \in S^J(C) : p \subseteq q \text{ and } (q, a) \in JNF\}| < \kappa$.

Axiom 6. There is a cardinal ρ such that if $\forall p \in P, \forall A \in A$, if $(p, A) \in JNF$, then $\exists A_1 \subseteq A$, $(|A_1| < \rho)$ and $p, A_1 \in JNF$.

Axiom 7. If $p \in S^J(A)$, then $(p, A) \in JNF$.

The classical notion of forking belongs Shelah.

A set of formulas $\{\varphi(\bar{x}, \bar{a}_i) : i < k\}$ are called k – inconsistent for some positive integer k , if every finite subset p of power k is inconsistent, i.e. $\models \neg \bar{x}(\varphi(\bar{x}, \bar{a}_{i_1}) \wedge \dots \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{a}_{i_k}))$ for each $i_1 < \dots < i_k < k$.

Partial type p divided over a set of relative to $k \in \omega$ if there is a formula $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ and a sequence $\langle \bar{a}_i : i \in \omega \rangle$ such that

- 1) $p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})$;
- 2) $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{a}_i/A)$ for all i ;
- 3) $\varphi\{\bar{x}, \bar{a} : i \in \omega\}$, k – not jointly.

It is also p divided over A if p divided over A relative to some k . In addition, p fork over A to T , if there are formulas $\phi_1(\bar{x}, \bar{a}_0), \dots, \phi_n(\bar{x}, \bar{a}_n)$ such that:

- (i) $p \models \bigvee_{0 \leq i \leq n} \varphi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)$;
- (ii) $\phi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)$ divided over A for any i .

The following result makes it possible to use all features of forking for complete theories in the class above in this report Jonsson theories.

Theorem 1. Let T perfect Jonsson theory of complete for \exists – sentences. Then the following conditions are equivalent:

- the relation JNF satisfies the axioms 1–7 relative to the theory T ;
- T^* stable and for all $p \in P$, $A \in A$ ($(p, A) \in JNF \Leftrightarrow p$ not fork over A).

Let T is Jonsson theory, $S^J(X)$ is the set of all full n -types over X , joint with T , for all finite n .

We say that Jonsson theory T is $J - \lambda$ - stable, if for any T existentially closed of model A , for any subset A of the set A , $|X| \geq \lambda \Rightarrow |S^J(X)| \leq \lambda$.

Theorem 2. Let T – complete for existential sentences is perfect Jonsson theory, $\lambda \geq \omega$. Then the following conditions are equivalent:

- $T - J - \lambda$ -stably;
- $T - J - \lambda$ -stably, where T^* is center of theory T .

Definition 1. Suppose that $A \subseteq B$, $p \in S_n(A)$, $q \in S_n(B)$, and $p \subseteq q$. If $\text{RM}(q) < \text{RM}(p)$, we say that q is a forking extension of p and that q forks over A . If $\text{RM}(q) = \text{RM}(p)$, we say that q is a nonforking extension of p .

Our first goal is to show that nonforking extensions exist.

Theorem 3. (Existence of nonforking extensions) Suppose that $p \in S_n(A)$ and $A \subseteq B$.

- There is $q \in S_n(B)$ a nonforking extension of p .
- There are at most $\text{deg}_M(p)$ nonforking extensions of p in $S_n(B)$ and if \mathcal{M} is an $\exists - \aleph_0$ – saturated model with $A \subseteq \mathcal{M}$, there are exactly $\text{deg}_M(p)$ nonforking extensions of p in $S_n(\mathcal{M})$.
- There is at most one $q \in S_n(B)$, a nonforking extension of p with $\text{deg}_M(p) = \text{deg}_M(q)$. In particular, if $\text{deg}_M(p)=1$, then p has a unique nonforking extension in $S_n(B)$.

Independence. The nonforking extensions will be the «free» ones.

Forking as in Theorem 1 can be used to give a notion of independence in $J - \omega$ -stable theories.

Definition 2. We say that \bar{a} is independent from B over A if $\text{tp}(\bar{a}/A)$ does not fork over $A \cup B$. We write a $\bar{a} \perp_A B$.

This notion of independence has many desirable properties.

Lemma 2 (Monotonicity). If a $\bar{a} \perp_A B$ and $C \subseteq B$, then a $\bar{a} \perp_A C$.

Lemma 3 (Transitivity). a $\bar{a} \perp_A \bar{b}, \bar{c}$ if and only if a $\bar{a} \perp_A \bar{b}$ and $\bar{a} \perp_{A, \bar{b}} \bar{c}$.

Lemma 4 (Finite Basis). a $\bar{a} \perp_A B$ if and only if a $\bar{a} \perp_A B_0$ for all finite $B \subseteq B_0$.

Lemma 5 (Symmetry). If a $\bar{a} \perp_A \bar{b}$, then $\bar{b} \perp_A \bar{a}$.

Corollary 1. $\bar{a}, \bar{b} \perp_A C$ if and only if $\bar{a} \perp_A C$ and $\bar{b} \perp_{A, \bar{a}} C$.

Symmetry also gives an easy proof that no type forks when it is extended to the algebraic closure.

Corollary 2. For any $\bar{a}, \bar{a} \perp_A \text{acl}(A)$.

References

- Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т. Йонсоновские теории и их классы моделей. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2016. — С. 346.
- Справочная книга по математической логике: В 4 ч. — Ч.1. Теория моделей / Под ред. Дж. Барвайса; пер. с англ. — М.: Наука; Гл. ред. физ-мат. лит., 1982. — С. 126.

А.Р. Ешкеев

Йонсондық жиындар үшін тәуелсіздік қасиеті

Мақалада жүргізілген зерттеулер индуктивті теорияның ішкі класы болатын, жалпы айтқанда, толық емес кластар теориясының модельді-теоретикалық қасиеттерін сипаттаумен байланысты. Бұл теориялар алгебрада және модельдер теориясында да кеңінен қарастырылған. Мұндай теориялар йонсондық деп аталады. Осы теорияларды зерттеу үшін жаңа әдіс-тәсілдер енгізілген. Йонсондық теорияның семантикалық модельдер жиынында айрықша жиындар қарастырылды, олар, біріншіден, кейбір экзистенциалдық формулаларды жүзеге асыру болып табылады, екіншіден, жиындардың тұйықталуы бізге семантикалық модельдің экзистенциалды тұйықталуының ішкі моделінің негізгі жиынын береді. Сонымен қатар орталық орбиталдық типтерді зерттеу үшін техника дамиды. Кемел йонсондық теориялар модельді-теоретикалық зерттеу үшін қолайлы екені жақсы белгілі. Практика жүзінде кемелділік жағдайында семантикалық тәсіл көмегімен жоғарыда айтылған нысандардың

анықтамаларын бере аламыз. Яғни, олар йонсондық теориялар және оның экзистенциалды-тұйық модельдер класы. Біздің ғылыми қызығушылығымыз, жалпы айтқанда, индуктивті теориялардың ішкі кластары болатын теориялардың толық емес кластарын кейбір модельді-теоретикалық қасиеттермен сипаттауға байланысты. Бұл теориялар алгебрада және модельдер теориясында кеңінен зерттелді. Мақалада йонсондық теорияның фрагменті үшін форкинг ұғымын келтірді. Форкинг болмаса, онда кеңейтулер бос болады. Сонымен қатар біз тәуелсіздік ұғымы үшін транзитивтілік, монотондылық, үзіліссіздік және симметрия сияқты көптеген маңызды қасиеттерді қарастырдық.

А.Р. Ешкеев

Свойство независимости для йонсоновских множеств

Исследования, проведенные в статье, связаны с описанием теоретико-модельных свойств некоторых, вообще говоря, неполных классов теорий, которые являются подклассом индуктивных теорий. Эти теории, хорошо изучаемые и в алгебре, и в теории моделей, называются йонсоновскими. Для изучения этих теорий вводится новый подход исследования. А именно, на подмножествах семантической модели йонсоновской теории выделяются особые множества, которые являются, во-первых, реализациями некоторой экзистенциальной формулы, во-вторых, замыкание этих множеств дает нам основное множество некоторой экзистенциально замкнутой подмодели семантической модели. Помимо этого развивается техника для изучения центральных орбитальных типов. Хорошо известно, что совершенные йонсоновские теории достаточно удобны для теоретико-модельных исследований. Практически, в случае совершенности, мы можем утверждать, что с помощью семантического метода дается определенное описание указанных выше объектов (йонсоновской теории и классом ее экзистенциально-замкнутых моделей). В этой статье рассмотрены понятия форкинга для фрагмента фиксируемой йонсоновской теории и независимости, а также многие полезные свойства, такие как транзитивность, монотонность, непрерывность и симметрия.

References

- 1 Yeshkeev A.R., Kasymetova M.T. *Jonsson theory and its classes of models*, Karaganda: KSU Publ., 2016, p. 346.
- 2 *Handbook of mathematical logic*: In 4 parts. — Ch.1. Teoriya models / ed. it Dzh. Barvays; per. from English, Moscow: Nauka; Home Editorial physical and mat. literature, 1982, p. 126.

A.R. Yeshkeyev

*Ye.A. Buketov Karaganda State University
(E-mail: modth1705@mail.ru)*

Some properties of Morley rank over Jonsson sets

This article introduced and discussed the concepts of minimal Jonsson sets and respectively strongly minimal Jonsson sets. On this basis, it introduces the concept of the independence of special subsets of existentially closed submodel of the semantic model. The notion of independence leads to the concept of basis and then we have an analogue of the Jonsson theorem on uncountable categorical. The concept of strongly minimal, as for sets and so for theories played a decisive role in obtaining results on the description of uncountable - categorical theories. It is well known that Jonsson Theories are a natural subclass of the broad class of theories, as a class of inductive theories. As is known, the basic examples theories of algebra are examples of inductive theories, and they tend to represent an example of incomplete theories. This modern apparatus of Model Theory developed mainly for complete theories, so nowadays technique studying incomplete theories noticeable poorer than for complete theories. Thus, all of the above says that the study of model-theoretic properties Jonsson theories is an actual problem. This article describes the basic properties of the Morley rank over Jonsson subsets of semantic model for some Jonsson theory.

Key words: Jonsson theory, Jonsson set, fragment of Jonsson sets, lattice existential formulas of Jonsson theory.

This article is devoted to the study of the concept Jonsson sets and its application. The concept of Jonsson sets defined in [1] and further results were obtained, which were presented in [2–4].

The concept of strongly minimal, as for sets and so for theories played a decisive role in obtaining results on the description of uncountable – categorical theories in [5].

It is well known that Jonsson Theories are a natural subclass of the broad class of theories, as a class of inductive theories. As is known, the basic examples theories of algebra are examples of inductive theories, and they tend to represent an example of incomplete theories. This modern apparatus of Model Theory developed mainly for complete theories, so nowadays technique studying incomplete theories noticeable poorer than for complete theories.

On the one hand Jonsson conditions – a natural algebraic demands that emerge in the study of a broad class of algebras.

On the other hand natural examples Jonsson theories enough, for example, the theory of Boolean algebras, Abelian groups, fields of fixed characteristics, polygons, and so on. These examples are important, as in algebra, and in different areas of mathematics. As can be seen from the following is a list of the scope of the technique developed for studying Jonsson theories can be quite broad.

Thus, all of the above says that the study of model-theoretic properties Jonsson theories is an actual problem.

From the experience of the study of inductive theory [6], it follows that Jonsson theory, as a subclass of inductive theories are such a part in which there are certain methods of investigation incomplete theories, namely the properties of the transfer method of the first order center of Jonsson theories itself Jonsson theories. This method, and on research in the study Jonsson theories and unrelated to the material in this article, we refer the reader to the following sources [7–10].

As noted above, the basic technique associated with more subtle methods of researches of behavior elements of the model, refers to the prerogative of technology study complete theories. Therefore, even just trying to find a generalization of the standard terms of arsenal full of theories, we may come across either a tautology or a concept, which is technically not justified. Therefore, it was proposed and Jonsson set. Recall the basic definitions of [1], which are connected with these sets.

Let there be given an arbitrary language L .

The theory T is called Jonsson if it satisfies the following conditions:

- 1) Theory T has an infinite models;
- 2) Theory T is inductive;
- 3) Theory T admits JEP ;

4) Theory T admits AP .

Jonsson theory T is called a perfect theory, if the semantic model is saturated.

Let T — Jonsson perfect theory is full for existential sentences in the language L and its semantic model is .

We say that the set X — Σ -defined, if it is definitely some existential formula.

a) The set X is called Jonsson in the theory T if it satisfies the following properties:

- X is a Σ definability subset of C ;
- $dcl(X)$ is the universe of some existentially-closed submodels of C ;

b) The set X is called algebraic Jonsson in the theory T , if it satisfies the following properties:

- X is a Σ definability subset of C ;
- $acl(X)$ is the universe of some existentially-closed submodels of C .

The definition sets Jonsson can see that they are arranged very simply in the sense of Morley rank [1].

It turns out that the elements of the set-theoretic difference (wells) closing and the set have rank 0; they are algebraic. So, this is a case where we can work with the elements even in the case of incomplete.

The second useful moment of this definition of Jonsson set is that we are closing this set just get some existentially closed model. This in turn gives us firstly to identify Jonsson fragment in the set under consideration and in principle any theory.

At the moment, well enough studied are the perfect Jonsson theories. For them, was proved the criterion of perfectly [7] that allowed to obtain many model-theoretic facts about Jonsson theory and its center. There is a full description of how these theories center and classes of models.

If the case study of complete theories we are mainly dealing with two objects, it herself theory of its models in the case study of Jonsson theory we as models consider the class of existentially closed models of the theory, as well as an additional condition is a certain completeness of this theory in a logical sense.

At least, this theory must be existentially complete.

We give a definition Jonsson fragment. We say that all the $\forall\exists$ — investigation of any theory create Jonsson fragment of this theory, if the deductive closure of these $\forall\exists$ — consequences are Jonsson theories.

Due to the fact that this is not always true, it would be interesting to be able to allocate in an arbitrary theory a part that will Jonsson theory. This problem takes place if only because of the fact that any theory morlization us it provides, moreover, the resulting theory is perfect [6].

Another way is the use of the fact that any countable model of inductive theory necessarily isomorphic to invest in some existentially closed model of the theory [6]. Then we consider all $\forall\exists$ — sentences true in this model.

Then in the case Jonsson theory is well known fact that $\forall\exists$ — sentences are true in the existentially closed model form the Jonsson theories. Otherwise, at the moment apart from enriching the signature (in case skolemization morlezation and [6]), we have no way to reach Jonsson theory.

To study the behavior of elements in case wells Jonsson sets, we can always see $\forall\exists$ - sentences is true in the above closures Jonsson set. In By the above, in this case, that consideration of the set of suggestions will Jonsson theory.

Obtained in this case will be called a theory Jonsson fragment corresponding Jonsson set. It is clear that we can carry out research Jonsson fragments about the connection to the original theory that the new formulation of the problem is the study of Jonsson's theory.

The main objective of this article is the following problem:

Recall that Jonsson theory T has a semantic model of high power enough. If this model is saturated, this Jonsson theory is called perfect. Semantic models of perfect Jonsson theory uniquely determined by their power.

Furthermore, since we are dealing with a perfect Jonsson theories, it is convenient for us to work within a large semantic existentially closed model containing all other existentially closed model considered perfect Jonsson theory. We call this model of universal existential area.

It can also be characterized by the following conditions.

1. Each model of this theory is isomorphic to put in \mathfrak{C} .
2. Every isomorphism between the two submodels extends to an automorphism of model \mathfrak{C} .

We will not consider all the subsets, and only a subset of the Jonsson.

For any Σ — definable subsets of semantic model we have, the following result.

Lemma 1. Σ — definable subset of the semantic model is definable over a set of parameters A semantic model if and only if it is invariant under all automorphisms of the model \mathfrak{C} , leaving in place each element of A .

It follows that the definable closure $dcl(A)$ of Jonsson sets A , i.e, the set of all elements, definable over A , coincide with the set elements that are invariant relatively all automorphisms over A .

From Lemma 1 it follows that the element b is algebraic over A if and only if it has only a finite number of conjugates over A .

We define the rank of Morley for existentially definable subsets of the semantic model.

We want to assign to each Σ -definable subset D of the semantic model ordinal number (or, perhaps, -1 or ∞) – its rank Morley, denoted by MR .

First, we define relation $MR(\mathbb{D}) \geq \alpha$ by recursion on the ordinal α .

Let T is perfect Jonsson theory, C -its semantic model. D is a definable subset of C .

Definition 1:

– $MR(\mathbb{D}) \geq 0$ if and only if \mathbb{D} is empty;

– $MR(\mathbb{D}) \geq \lambda$ if and only if $MR(\mathbb{D}) \geq \alpha$ for all $\alpha < \lambda$ (λ - the limiting ordinal);

– $MR(\mathbb{D}) \geq \lambda$ if and only if \mathbb{D} exists an infinite family (\mathbb{D}_i) disjoint Σ definable subsets, such that

$$MR[(\mathbb{D})_i] \geq \lambda \text{ for all } i.$$

Then Morley rank of class \mathbb{D} is $MR(\mathbb{D}) = \sup\{\alpha | MR(\mathbb{D}) \geq \alpha\}$.

Moreover, we assume that $MR(\emptyset) = -1$ and $MR(\mathbb{D}) = \infty$ if $\forall \alpha$ for all α (in the latter case we say that \mathbb{D} has not rank).

Note that Σ -definable class has rank -1 if it is empty; rank 0 if it is finite; rank 1 if it is infinite, but does not contain an infinite family of disjoint infinite Σ -definable classes.

Lemma 2. The relation $MR(\mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2) = \max(MR(\mathbb{D}_1), MR(\mathbb{D}_2))$ is true.

Definition 2. The degree of Morley $Md(\mathbb{D})$ Jonsson subset \mathbb{D} of semantic model having Morley rank α is the maximum length d of its decomposition $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1 \cup \dots \cup \mathbb{D}_d$ into disjoint existentially definable subsets of rank α .

In the case of rank 0 degree existentially definable subset \mathbb{D} is a simply a number of its elements. If existentially definable subset has not rank, it is not determined the degree of Morley.

Consider Jonsson minimal sets. Then under the structure of the model refers to the signature of model or of the language L under consideration Jonsson theory.

Let \mathcal{M} is the structure, and let $\mathbb{D} \subseteq M^n$ the infinite Σ -defining subset. We say that D is minimal in \mathcal{M} if any for the Σ -defining $Y \subseteq \mathbb{D}$ either Y is finite or \mathbb{D}/Y is finite. If $\phi(\bar{v}, \bar{a})$ is a formula that determines the \mathbb{D} , then we can also say that $\phi(\bar{v}, \bar{a})$ is minimal.

We say that \mathbb{D} and ϕ are Jonsson strongly minimal, if ϕ is minimal any existentially closed extensions \mathcal{N} of \mathcal{M} .

We say that theory T is Jonsson strongly minimal if $\forall \mathcal{M} \in E_T$, \mathcal{M} is Jonsson strongly minimal. Consider the example of the algebraic closure of a few Jonsson strongly minimal theories.

If K is an algebraically closed field and $A \subseteq K$, then $acl(A)$ is algebraically closed subfield generated.

The following properties of the algebraic closure true for any algebraically Jonsson set \mathbb{D}

If $A \subseteq B$, then $acl(A) \subseteq acl(B)$.

If $a \in acl(A)$ then $a \in acl(A_0)$ for some finite $A_0 \subseteq A$.

A more subtle property is true if \mathbb{D} is Jonsson strongly minimal.

Lemma about a replacement. Suppose that \mathbb{D} is a subset of the semantic model of the theory and it Jonsson strongly minimal $A \subseteq \mathbb{D}$ and $a, b \in \mathbb{D}$. If $a \in acl(A \cup \{b\}) \setminus acl(A)$, then $b \in acl(A \cup \{a\})$.

Remark. Jonsson strongly minimal set is existentially definable subset of the semantic model of the theory of rank 1 and degree 1 in the sense of Morley.

Definition 3:

1. Jonsson Theories T is Jonsson totally transcendence, if every existentially definable subset of its semantic model has Morley rank.

2. Theory T is Jonsson ω -stable if the number of existential types is countable for every countable subset A of semantic model.

Theorem. Jonsson theory T is Jonsson totally transcendence, if and only if it is Jonsson ω -stably.

Lemma 3. Let a and b are an arbitrary elements of the semantic model. If the element b algebraically over A and a , where A is existentially definable subset of the semantic model, then $MR(b/A) \leq MR(a/A)$.

Corollary 1. Let M – some ω -saturated existentially closed submodel semantic model, φ some $L(M)$ – formula rank α and degree d in Morley. Then we can expand φ on $L(M)$ – formulae $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ of rank α and degree 1 .

Anyway Jonsson strongly minimal set, we can define the concept of independence, which generalizes linear independence in vector spaces and algebraic independence of algebraically closed fields.

We fix \mathcal{M} and D is Jonsson strongly minimal set in \mathcal{M} existentially closed under the model semantic model of Jonsson theory T .

Definition 4. We say that $A \subseteq D$ independently if $\alpha \notin \text{acl}(A\{a\})$ for all $a \in A$. If $C \subset D$ we say that A independently over C , if $\alpha \notin \text{acl}(C \cup A\{a\})$ for all $a \in A$.

We show that the endless independent sets are sets of indistinguishable elements.

Lemma 4. Suppose T is Jonsson strongly minimal theory and $\phi(v)$ is Jonsson strongly minimal formula with parameters from A , where either $A \neq \emptyset$ or $A \subseteq M_0$ where $\mathcal{M}_0 \models E_T, \mathcal{M}_0 \prec_1 \mathcal{M}$ and $\mathcal{M}_0 \prec_1 \mathcal{N}$. If $a_1, \dots, a_n \in \phi(M)$ independent over A and $b_1, \dots, b_n \in \phi(N)$ are independent over A , then complete existential types $tp^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A), tp^{\mathcal{N}}(\bar{b}/A)$ are equal.

Corollary 2. If $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$, and $\phi(v)$ as indicated above, B is an infinite subset $\phi(\mathcal{M})$ independent over A and C is an infinite subset $\phi(\mathcal{N})$ independent over A , then B and C are indistinguishable infinite sets of the same type over A .

Therefore, power is the only way to distinguish independent subset \mathbb{D} .

Definition 5. We say that A is the basis for $Y \subseteq \mathbb{D}$ if $A \subseteq Y$ independent and when $\text{acl}(A) = \text{acl}(Y)$.

It is obvious that any maximal independent subset of Y is a basis for Y . Just as in the vector spaces and algebraically closed fields, any two bases have the same capacity.

References

- 1 *Ешкеев А.Р.* Йонсоновские множества и их некоторые теоретико-модельные свойства // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2014. — № 2(74). — С. 53–62.
- 2 *Yeshkeyev A.R.* The similarity of Jonsson sets. Abstracts. V congress of the Turckic World Mathematicians. Kyrgyzstan, Issyk-Kul, June, 5–7. — 2014. — P. 217.
- 3 *Yeshkeyev A.R.* Jonsson sets and some of their model-theoretic properties: Abstracts Book. International Congress of Mathematicians, August, 13–21, 2014, Seoul, Korea. — P. 8.
- 4 *Yeshkeyev A.R.* On Jonsson sets and some their properties // Bull. of Symbolic Logic. — 2015. — Vol. 21. — No. 1. — P. 99–100.
- 5 *Baldwin John T., Lachlan Alistair H.* On Strongly Minimal Sets. The Journal of Symbolic Logic // Journal of Symbolic Logic. — 1971. — Vol. 36. — No. 36(1). — P. 79–96.
- 6 Справочная книга по математической логике: В 4 ч. — Ч.1. Теория моделей / Под ред. Дж. Барвайса; пер. с англ. — М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — С. 126.
- 7 *Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т.* Йонсоновские теории и их классы моделей. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2016. — С. 346.
- 8 *Yeshkeyev A.R.* Properties of central type for fragments of Jonsson sets // Bull. of Symbolic Logic. — 2016. — Vol. 22. — No. 3. — P. 429, 430.
- 9 *Yeshkeyev A.R.* The Properties of Positive Jonsson's Theories and Their Models // International Journal of Mathematics and Computation. — 2014. — Vol. 22.1. — P. 161–171.
- 10 *Yeshkeyev A.R.* On Jonsson stability and some of its generalizations // Journal of Mathematical Sciences. — Springer, New-York, 2010. — Vol. 166. — No. 5. — P. 646–654.

А.Р. Ешкеев

Йонсондық жиындардың ішіндегі Морли рангінің кейбір қасиеттері

Мақалада йонсондық жиындар ұғымы енгізілген және қарастырылған. Осы негізде семантикалық модельдің экзистенциалды тұйық ішкі моделінің тәуелсіз арнайы ішкі жиындары ұғымы енгізілді. Тәуелсіздік ұғымы базис ұғымына алып келеді және әрі қарай біз саналымсыз үзілді-кесілгендігі туралы теореманың йонсондық аналогін қарастырдық. Қатты минималды ұғымы саналымсыз-үзілді-кесілгендігі теориялардың сипаттауының нәтижесін алу үшін теориялар сияқты жиындар үшін де үлкен рөл атқарады. Йонсондық теориялар индуктивті теориялар класы сияқты теорияның кең класы болатын кәдімгі ішкі класты көрсететіні белгілі. Бізге алгебра теориясының негізгі мысалдары белгілі. Олар индуктивті теориялардың мысалдары да бола алады және ереже бойынша олар толық емес теориялардың мысалдары. Сонымен қатар модельдер теориясының қазіргі зерттеу аппараты толық теориялар үшін дамыған, сондықтан бүгінгі таңда толық теорияларға қарағанда, толық емес теорияларды зерттеу техникасы анағұрлым кем дамыған. Яғни, жоғары айтқандардан йонсондық теорияның модельді-теоретикалық қасиеттерін оқу өзекті мәселе болып табылады. Мақалада кейбір йонсондық теориялар үшін йонсондық ішкі жиындардың семантикалық модельдері мен Морли рангінің негізгі қасиеттері сипатталды.

А.Р. Ешкеев

Некоторые свойства ранга Морли над йонсоновскими множествами

В статье введены и рассмотрены понятия «йонсоновские множества» и, соответственно «сильно минимальные йонсоновские множества». На этой основе введено понятие независимости специальных подмножеств экзистенциально замкнутой подмодели семантической модели. Понятие независимости приводит к понятию базиса, и далее мы имеем йонсоновский аналог теоремы о несчетной категоричности. Понятие сильной минимальности, как для множеств, так и для теорий, сыграло решающую роль при получении результата об описании несчетно-категоричных теорий. Хорошо известно, что йонсоновские теории представляют собой естественный подкласс такого широкого класса теорий, как класс индуктивных теорий. Как известно, основные примеры теорий алгебр являются примерами индуктивных теорий, и они, как правило, представляют пример неполных теорий. При этом современный аппарат теории моделей развивался в основном для полных теорий, поэтому на сегодняшний день техника изучения неполных теорий заметно беднее, чем для полных теорий. Таким образом, всё сказанное выше говорит о том, что изучение теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий является актуальной задачей. Эта статья описывает основные свойства ранга Морли над йонсоновскими подмножествами семантической модели для некоторых йонсоновских теорий.

References

- 1 Yeshkeyev A.R. *Bull. of Karaganda University, Ser. Mathematics*, 2014, 2(74), p. 53–62.
- 2 Yeshkeyev A.R. *The similarity of Jonsson sets: abstracts*. V congress of the Turkic World Mathematicians, Kyrgyzstan, Issyk-Kul, June, 5-7, 2014, p. 217.
- 3 Yeshkeyev A.R. *Jonsson sets and some of their model-theoretic properties. Abstracts Book*. International Congress of Mathematicians, August, 13-21, 2014, Seoul, Korea, p. 8.
- 4 Yeshkeyev A.R. *Bull. Symbolic Logic*, 2015, 21, 1, p. 99, 100.
- 5 Baldwin John T., Lachlan Alistair H. *Journal of Symbolic Logic*, 1971, 36, 36(1), p. 79–96.
- 6 *Handbook of mathematical logic*: In 4 parts / Ed. it Dzh. Barvaysa, Ch.1. Teoriya models: Per. from English, Moscow: Nauka; Home Editorial physical and mat. literature, 1982, p. 126.

- 7 Yeshkeev A.R., Kasymetova M.T. *Jonsson theory and its classes of models*, Karaganda: KSU Publ., 2016, p. 346.
- 8 Yeshkeyev A.R. *Bull. Symbolic Logic*, 2016, 22, 3, p. 429, 430.
- 9 Yeshkeyev A.R. *International Journal of Mathematics and Computation*, 2014, 22.1, p. 161–171.
- 10 Yeshkeyev A.R. *Journal of Mathematical Sciences*, Springer, New-York, 2010, 166, 5, p. 646–654.

УДК 512.54

А.В. Зенков

*Алтайский государственный аграрный университет, Барнаул, Россия
(E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com)*

Представления и сплетения m -группы

m -Группа есть пара $(G, *)$, где G — решеточно упорядоченная группа (ℓ -группа) и $*$ есть убывающий автоморфизм 2-го порядка G . В статье получено описание m -транзитивных представлений произвольной m -группы. Найдены необходимые и достаточные условия того, что m -группа допускает точное m -транзитивное представление. Изучено строение решетки конгруэнций произвольного m -транзитивного представления, введены понятия m -2-транзитивного и m -примитивного представлений. Получено описание m -транзитивных примитивных представлений в терминах стабилизаторов. Указаны необходимые и достаточные условия m -2-транзитивности и изучены некоторые свойства таких представлений. Кроме того, введено понятие сплетения m -групп подстановок и доказано, что m -транзитивная группа подстановок вложима в сплетение подходящих m -транзитивных m -групп подстановок. Как следствие, установлено, что произвольная m -транзитивная группа из произведения двух многообразий m -групп вложима в сплетение подходящих m -транзитивных групп из этих многообразий.

Ключевые слова: m -группа, представление, конгруэнция, сплетение.

Введение

Напомним основные понятия теории решеточно упорядоченных групп и групп монотонных подстановок. Решеточно упорядоченная группа (ℓ -группа) — это алгебраическая система G сигнатуры. Далее изучаются только (точные) m -транзитивные представления $l = \langle \cdot, \cdot^{-1}, e, \vee, \wedge \rangle$, совмещающие в себе структуры группы и решетки, связанные естественными соотношениями

$$x(u \vee v)y = xuy \vee xvy; \quad x(u \wedge v)y = xuy \wedge xvy.$$

Согласно [1] m -группой называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, \cdot^{-1}, e, \vee, \wedge, * \rangle$ такая, что $\langle G, \cdot, \cdot^{-1}, e, \vee, \wedge \rangle$ является ℓ -группой, а одноместная операция $*$ задает автоморфизм группы $\langle G, \cdot, \cdot^{-1}, e \rangle$ порядка 2 и антиавтоморфизм решетки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т.е. $*$ взаимно однозначно отображает G на себя, причем выполняются соотношения

$$(xy)_* = x_*y_*, \quad (x_*)_* = x, \quad (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, \quad (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*.$$

В дальнейшем $*$ называем реверсивным автоморфизмом ℓ -группы G второго порядка и m -группу G с фиксированным реверсивным автоморфизмом $*$ записываем как пару $(G, *)$. Класс \mathcal{M} всех m -групп образует многообразие сигнатуры m . Множество всех многообразий m -групп M является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения. Более того, M есть решетка относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий m -групп. Как и в случае решеточно упорядоченных групп, теория представлений и сплетений групп монотонных подстановок оказывается эффективным инструментом изучения решетки M .

Пусть Ω — некоторое линейно упорядоченное множество и a — реверсивный автоморфизм 2-го порядка Ω , т.е. для любых $\omega, \omega' \in \Omega$ верно $((\omega)a)a = \omega$ и $\omega < \omega' \Leftrightarrow (\omega)a > (\omega')a$. Через $Aut(\Omega)$ обозначим группу (относительно суперпозиции) всех порядковых подстановок Ω . Группа $Aut(\Omega)$ может быть превращена в m -группу, если операция $*$ задается при помощи равенства $g_* = aga$ для всякого $g \in Aut(\Omega)$. Стандартно, представлением m -группы $(G, *)$ порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Ω является m -гомоморфизм $\nu : G \rightarrow Aut(\Omega)$. Этот факт записываем в виде $((G)\nu, \Omega, a)$. Если ν есть изоморфизм, то представление называется *точным* и тогда пишем (G, Ω, a) . Отметим [2], что всякая m -группа допускает точное представление порядковыми подстановками подходящего линейно упорядоченного множества.

Представление $((G)\nu, \Omega, a)$ назовем *m-транзитивным*, если для всех $\omega, \omega' \in \Omega$, быть может за исключением точки o , существует такой $x \in G_* = gr.((G)\nu, a)$, что $(\omega)x = \omega'$ (здесь o – точка Ω , неподвижная относительно действия a). Фраза «быть может за исключением точки o » означает, что o исключается из рассмотрения, если ее стабилизатор $St_G(o) = G$.

Данная работа является обзором результатов, полученных при изучении *m-транзитивных* представлений и связанных с этим вопросом сплетений и многообразий *m-групп*.

Как обычно, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $|x| = x \vee x^{-1}$, $x \gg y$ означает, что элементы x, y архимедово неэквивалентны, т.е. $|x| > |y|^n$ для любого натурального числа n . Выражение $x \sim y$ используем, если элементы x, y архимедово эквивалентны. Всюду в работе \mathbb{N}, \mathbb{Z} обозначают множества натуральных и целых чисел соответственно; \mathbb{R} – естественно линейно упорядоченное множество действительных чисел. Через $var_m(\mathcal{K})$ обозначаем многообразие *m-групп*, порожденное классом *m-групп* \mathcal{K} .

Все необходимые сведения по теории групп и решеточно упорядоченных групп можно найти в книгах [3, 4] соответственно.

§1 Представления и конгруэнции

Пусть $(G, *)$ – произвольная *m-группа* и V – ее выпуклая ℓ -подгруппа. Как обычно, через $R(G : V)$ обозначим множество правых смежных классов ℓ -группы G по ее выпуклой ℓ -подгруппе V с порядком: $Vx \leq Vy$ тогда и только тогда, когда $vx \leq y$ для некоторого $v \in V$. Если данный порядок линейен, то V называется *спрямляющей*. Следующая теорема, доказанная в [5], дает необходимые и достаточные условия существования *m-транзитивного* представления в терминах спрямляющих подгрупп.

Теорема 1.1. Пусть $(G, *)$ – *m-группа* и V – ее спрямляющая ℓ -подгруппа. Тогда существует линейно упорядоченное множество, *определяемое* V , такое, что группа допускает *m-транзитивное* представление подстановками этого множества. Обратное: для всякого *m-транзитивного* представления $((G)\nu, \Omega, a)$ найдется спрямляющая ℓ -подгруппа V , определяющая Ω .

Отметим, что доказательство этой теоремы указывает способы построения *m-транзитивных* представлений. Рассмотрим теперь вопрос о существовании точных *m-транзитивных* представлений. Выпуклая ℓ -подгруппа V *m-группы* $(G, *)$ называется *представляющей*, если V – спрямляющая и не содержит неединичных *m-идеалов*.

Теорема 1.2. Произвольная *m-группа* $(G, *)$ допускает точное *m-транзитивное* представление тогда и только тогда, когда она содержит представляющую ℓ -подгруппу.

Как обычно, неединичная *m-группа* $(G, *)$ называется *подпрямо m-неразложимой*, если пересечение всех ее неединичных *m-идеалов* отлично от единицы.

Следствие 1.3. Подпрямо неразложимая *m-группа* $(G, *)$ допускает точное *m-транзитивное* представление.

Следствие 1.4. Всякое многообразие *m-групп* порождается *m-группами*, допускающими точное *m-транзитивное* представление.

Далее изучаются только (точные) *m-транзитивные* представления. Рассмотрим (G, Ω, a) . Пусть $L = \{w \in \Omega \mid (w)a > w\}$, $R = \{(\ell)a \mid \ell \in L\}$ и o – неподвижная, относительно a , точка Ω . Отметим, что существуют представления, как содержащие неподвижную точку, так и не содержащие таковой. Множество Ω представимо в виде $\Omega = L \bigcup_{\varepsilon} \{o\}^{\varepsilon} \bigcup R$, где $\varepsilon = 1$, если неподвижная точка существует, и $\varepsilon = 0$ в противном случае. Стандартно, отношение эквивалентности Θ , определенное на Ω , будем называть отношением *m-эквивалентности (m-конгруэнтности)*, если оно является выпуклым и $w\Theta w' \Leftrightarrow (w)x\Theta(w')x$ для любого $x \in G_*$. Множество \mathcal{K} всех *m-эквивалентностей*, определенных на Ω , очевидно, непусто, и более того, на \mathcal{K} можно ввести отношение частичного порядка \preceq , полагая $\Theta_1 \preceq \Theta_2 \Leftrightarrow w\Theta_1 w' \Rightarrow w\Theta_2 w'$.

Пусть $\Theta \in \mathcal{K}$ и $\Delta = \ell\Theta$ – класс эквивалентности, содержащий произвольную, но фиксированную точку $\ell \in L$. Множество Δ является *m-блоком*, т.е. $(\Delta)x \cap \Delta = \emptyset$, либо $(\Delta)x = \Delta$ для любого $x \in G_*$. Обратное: если Δ – *m-блок*, то отношение Θ , определенное на Ω по правилу $w = w'$ либо $w, w' \in (\Delta)x$ для подходящего $x \in G_*$, будет отношением *m-эквивалентности*.

Если $\Delta = \ell\Theta$, то $St_G(\Delta)$ – выпуклая ℓ -подгруппа, содержащая $St_G(\ell)$. Обратное, если H – выпуклая ℓ -подгруппа, содержащая $St_G(\ell)$, то выпуклое замыкание Δ в Ω орбиты $(\ell)H$ есть *m-блок* [6].

Таким образом, существует соответствие между \mathcal{K} и множеством \mathcal{H} всех выпуклых ℓ -подгрупп, содержащих $St_G(\ell)$. Следующий пример показывает, что оно не является взаимно однозначным.

Пример. Рассмотрим группу

$$S_2 = \langle a_1, a_2, b \mid [a_1, a_2] = e, a_1^b = a_2, a_2^b = a_1 \rangle.$$

Если $g \in S_2$, то g представим, причем единственным способом, в виде $g = a_1^m a_2^n b^k$, $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Относительно лексикографического порядка, т.е. $g \geq e \Leftrightarrow k > 0$ или $k = 0, m \geq 0, n \geq 0$, S_2 является ℓ -группой. Определим отображение $\varphi : S_2 \rightarrow S_2$ по правилу

$$(g)\varphi = a_1^{-m} a_2^{-n} b^{-k}.$$

Тогда (S_2, φ) будет m -группой. Пусть $A_1 = \langle a_1 \rangle, A_2 = \langle a_2 \rangle$. Эти выпуклые ℓ -подгруппы являются спрямляющими, т.е. множества правых смежных классов $X = R(S_2 : A_1), Y = R(S_2 : A_2)$ линейно упорядочены относительно естественно вводимого упорядочения множества правых смежных классов. Рассмотрим $\Delta_1 = \{A_1 a_2^n\}, \Delta_2 = \{A_2 a_1^m\}$. Тогда $X = \bigcup \Delta_1 b^k, Y = \bigcup \Delta_2 b^k$.

Построим новое линейно упорядоченное множество Ω , полагая $\Delta_1 b^k < \Delta_2 b^k < \Delta_1 b^{k+1}$. Очевидно, что множество Ω сохраняет линейные порядки исходных множеств. Определим отображение $a : \Omega \rightarrow \Omega$ по правилу $(A_1 a_2^n b^k)a = A_2 a_1^{-n} b^{1-k}$ и $(A_2 a_1^m b^k)a = A_1 a_2^{-m} b^{1-k}$. Из определения следует, что a – реверсивный автоморфизм 2-го порядка Ω . Правое регулярное представление (S_2, φ) порядковыми подстановками Ω является точным и m -транзитивным, но не транзитивным. Ясно, что оно не содержит неподвижной точки. Итак, можно рассмотреть представление (S_2, Ω, a) . Из сказанного выше следует, что $\nabla^- = \Delta_1 \overleftarrow{\cup} \Delta_2, \Delta_2, \nabla^+ = \Delta_2 \overleftarrow{\cup} \Delta_1, b - m$ -блоки и, более того, $St_{\Delta_2}(S_2) = St_{\nabla^+}(S_2) = St_{\nabla^-}(S_2) = A_1 \times A_2$. Поэтому данный стабилизатор определяет три конгруэнции.

Представление (G, Ω, a) будем называть собственным, если для любого $g \in G$ верно $(L)g = L$. Несложно доказать, что такие представления дают примеры, когда $H \in \mathcal{H}$ определяет две конгруэнции.

Итак, в случае m -групп возможны следующие ситуации: 1) соответствие между \mathcal{K} и \mathcal{H} взаимно однозначно; 2) существует $H \in \mathcal{H}$, определяющая две конгруэнции; 3) существует $H \in \mathcal{H}$, определяющая три конгруэнции. Множество \mathcal{H} является линейно упорядоченным относительно теоретико множественного включения, и все группы этого множества спрямляющие. Отметим, что ситуация 1) наблюдается в случае, когда представление транзитивно.

Для каждой $H_\gamma \in \mathcal{H}$ через $\Theta_\gamma, \Theta_\gamma^+, \Theta_\gamma^-$ обозначим конгруэнции, соответственно определяемые m -блоками: $\Delta_\gamma = conv_\Omega((\ell)H_\gamma), \nabla_\gamma^+ = \Delta_\gamma \overleftarrow{\cup} (\Delta_\gamma)at, \nabla_\gamma^- = (\Delta_\gamma)at \overleftarrow{\cup} \Delta_\gamma$. Очевидно, $\Theta_\gamma = \Theta_\gamma^+ \cap \Theta_\gamma^-$. Имеет место

Теорема 1.5. Пусть (G, Ω, a) – произвольное m -транзитивное представление и \mathcal{K} – множество всех m -эквивалентностей, определенных на Ω . Тогда \mathcal{K} есть линейно упорядоченное множество относительно ранее введенного порядка (ситуации 1), 2) либо существует и единственная $H_\alpha \in \mathcal{H}$ такая, что $\Theta_\alpha \preceq \Theta_\alpha^+, \Theta_\alpha^- \preceq \Theta_{\alpha+1}$ и \mathcal{K} линейно упорядочено при $H_\beta \subseteq H_\alpha$ и $H_{\alpha+1} \subseteq H_\beta$.

Следующие m эквивалентности назовем *тривиальными*: А) эквивалентность, когда все классы эквивалентности одноэлементны; В) эквивалентность, когда все классы эквивалентности двухэлементны; С) эквивалентность, имеющая три (либо два) класса эквивалентности $L, \{o\}, R(L, R)$; D) эквивалентность, имеющая единственный класс эквивалентности Ω . Представление (G, Ω, a) *m -примитивно*, если оно не допускает нетривиальной m -эквивалентности. Следующая теорема дает критерий m -примитивности в терминах стабилизаторов точек.

Теорема 1.6. Произвольное m -транзитивное представление (G, Ω, a) , где $\Omega = L \overleftarrow{\cup} \{o\}^\varepsilon \overleftarrow{\cup} R$, m -примитивно тогда и только тогда, когда для любой точки $w \in \Omega$, быть может за исключением точки o , стабилизатор $St_G(w)$ есть максимальная выпуклая ℓ -подгруппа G .

Следующее утверждение выясняет строение собственных представлений.

Предложение 1.7. Всякое m -транзитивное представление (G, Ω, a) собственно m -транзитивно тогда и только тогда, когда G изоморфна прямому произведению $G_L \times G_L^*$ для подходящей транзитивной ℓ -группы подстановок G_L подходящего линейно упорядоченного множества L и $\Omega = L \overleftarrow{\cup} \{o\}^\varepsilon \overleftarrow{\cup} L^*$.

Следствие 1.8. Всякая m -группа $(G, *)$, допускающая собственно m -транзитивное представление $(G_L \times G_L^*, \Omega, a)$, не является упорядоченной.

Следствие 1.9. Собственно m -транзитивное представление $(G_L \times G_L^*, \Omega, a)$ m -примитивно тогда и только тогда, когда транзитивное представление (G_L, L) примитивно.

Будем говорить, что представление (G, Ω, a) *m -2-транзитивно*, если для любых $\ell_1 < \ell_2 \leq o < r_3 < < r_4 \in \Omega$, быть может за исключением точки o , существует $g \in G$, что:

- 1) $(\ell_1)g = r_3, (\ell_2)g = r_4$ либо
- 2) $(\ell_1)ag = r_4, (\ell_2)ag = r_3$.

Представление (G, Ω, a) , где $\Omega = L \overleftarrow{\cup} \{o\}^\varepsilon \overleftarrow{\cup} R$, назовем *m -полутранзитивным*, если для всех $\ell_1 < \ell_2 < \ell \in L$ существует $g \in St_G(\ell)$, что $(\ell_1)g = \ell_2$. Имеет место

Теорема 1.10. Представление (G, Ω, a) m -2-транзитивно тогда и только тогда, когда оно m -транзитивно и m -полутранзитивно.

Следствие 1.11. Если представление (G, Ω, a) m -2-транзитивно, то оно 2-транзитивно либо собственно m -примитивно.

Напомним, многообразие всех нормальнозначных m -групп \mathcal{N} задается тождеством

$$|x||y| \wedge |y|^2|x|^2 = |x||y|.$$

Это многообразие замечательно тем, что оно является наибольшим нетривиальным многообразием m -групп [7]. Следующая теорема дает описание примитивных представлений нормальнозначных групп.

Теорема 1.12. Пусть (G, Ω, a) — m -примитивное представление нормальнозначной m -группы $(G, *)$. Тогда:

1) (G, Ω, a) — правое регулярное представление подгруппы аддитивной группы \mathbb{R} действительных чисел. Более того, если это представление допускает эквивалентность B , то эта подгруппа циклическая, либо

2) представление является собственным и $G \cong G_L \times G_L^*$ для подходящей подгруппы G_L аддитивной группы \mathbb{R} действительных чисел.

§2 Сплетения и многообразия

Пусть (G, Ω, a) , (H, T, b) — представления m -групп (G, φ) и (H, ψ) соответственно и $\Omega = L_1 \overleftarrow{\cup} \{o_1\}^{\varepsilon_1} \overleftarrow{\cup} \overleftarrow{\cup} R_1$, $T = L_2 \overleftarrow{\cup} \{o_2\}^{\varepsilon_2} \overleftarrow{\cup} R_2$. Рассмотрим стандартное (в смысле ℓ -групп) сплетение $GWrH$. Всякий элемент $f \in GWrH$ имеет вид $f = (\{g_\tau\}, h)$, где $g_\tau \in G, \tau \in T, h \in H$. В [1] на $GWrH$ был определен реверсивный автоморфизм второго порядка $\varphi Wr \psi$ по правилу $(f)\varphi Wr \psi = (\{g\varphi_{(\tau)b}\}, (h)\psi)$, превращающий $GWrH$ в m -группу. Пусть $\Sigma = \Omega \overleftarrow{\times} T$. Определим на Σ отображение d по правилу $(w, \tau)d = ((w)a, (\tau)b)$. Ясно, что d — реверсивный автоморфизм второго порядка Σ и $(o_1, o_2)d = (o_1, o_2)$. Определим теперь действие элементов группы $GWrH$ на Σ следующим образом:

$$(w, t)(\{g_\tau\}, h) = ((w)g_{(t)b}, (t)h).$$

Ясно, что так определенное действие является точным и порядковым, т.е. $GWrH \subseteq \text{Aut}(\Sigma)$. Проверим, что $(f)\varphi Wr \psi = dfd$. Действительно, $(w, t)dfd = ((w)a, (t)b)fd = ((w)ag_t, tbh)d = ((w)ag_t a, tbhb) = (w, t)(f)\varphi Wr \psi$. Таким образом, имеем представление $(GWrH, \Sigma, d)$ группы $(GWrH, \varphi Wr \psi)$, которое будем называть *сплетением* m -групп подстановок (G, Ω, a) , (H, T, b) .

Пусть дано представление (G, Ω, a) и на Ω определена m -конгруэнция Θ . Как и выше, Δ — m -блок, содержащий некоторую точку $\ell \in L$. Тогда можно рассмотреть естественно линейно упорядоченное фактормножество Ω/Θ , на котором действует правым умножением G . Через L_Θ обозначим «ленивую» подгруппу G , т.е. это все функции, оставляющие все точки Ω/Θ на месте. Несложно заметить, что L_Θ есть m -идеал и поэтому можно рассмотреть фактор-группу $\overline{G} = G/L_\Theta$, действующую на Ω/Θ . Множество Δ определяет новое линейно упорядоченное множество ∇ и действующую на нем m -транзитивно группу $\overline{G}_{(\nabla)}$. Отметим, что строение ∇ зависит от свойств исходного представления. Следующая теорема, доказанная в [8], есть аналог теоремы Калужнина-Краснера для подстановочных сплетений m -групп.

Теорема 2.1. Пусть представление (G, Ω, a) m -транзитивно и на Ω определена m -конгруэнция Θ . Тогда (G, Ω, a) изоморфно вложима в сплетение $(\overline{G}_{(\nabla)}Wr\overline{G}, \Sigma, d)$, где группы $\overline{G}_{(\nabla)}$ и \overline{G} действуют m -транзитивно на множествах ∇ и Ω/Θ соответственно.

Эта теорема позволяет использовать технику сплетений при изучении многообразий m -групп.

Напомним, что ℓ -подгруппа H ℓ -группы G называется замкнутой, если для любого подмножества элементов H , у которого в G существует точная верхняя грань, она принадлежит H . m -Подгруппу H m -группы G будем называть замкнутой, если она замкнута как ℓ -подгруппа. Отметим, что

$$\left(\bigvee_{i \in I} h_i\right)_* = \bigwedge_{i \in I} (h_i)_*, \quad h_i \in H.$$

Предложение 2.2. Пусть (G, Ω, a) — m -группа подстановок и H — замкнутый идеал. Тогда существует такая m -конгруэнция Θ , что $L_\Theta = H$.

Пусть \mathcal{U}, \mathcal{V} — произвольные многообразия m -групп. Тогда стандартно определяется их произведение $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$ как множество всех таких m -групп $(G, *)$, что в них существует m -идеал $H \in \mathcal{U}$ и $G/H \in \mathcal{V}$.

Теорема 2.3. Пусть (G, Ω, a) — m -транзитивная группа подстановок из произведения $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$ многообразий m -групп \mathcal{U}, \mathcal{V} . Тогда (G, Ω, a) изоморфно вложима в сплетение подходящих m -транзитивных групп подстановок из многообразий m -групп \mathcal{U}, \mathcal{V} .

Понятие мимикрирования позволяет применить предыдущую теорему в теории многообразий. Итак, рассмотрим представления (G, Ω, a) и (H, Λ, b) . Фиксируем некоторое конечное, но произвольное множество $\Phi = \{w_p(\bar{x}, \bar{x}_*) \mid p = 1, \dots, N\}$ слов сигнатуры m от переменных $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Далее рассмотрим произвольный $\bar{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in H^n$ и произвольную пару точек $\lambda, (\lambda)b \in \Lambda$. Пусть $\Lambda_\Phi = \{(\lambda)w_p(\bar{h}, \bar{h}_*)\} \cup \{((\lambda)b)w_p(\bar{h}, \bar{h}_*)\}$. Ясно, что Λ_Φ линейно упорядочено. Будем говорить, что (G, Ω, a) мимикрирует (H, Λ, b) , если найдутся $\alpha, (\alpha)a \in \Omega$ и $\bar{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in G^n$ такие, что линейно упорядоченное множество $\Omega_\Phi = \{(\alpha)w_p(\bar{g}, \bar{g}_*)\} \cup \{((\alpha)a)w_p(\bar{g}, \bar{g}_*)\}$ «сохраняет структуру» Λ_Φ , т. е. $((\alpha)a^\varepsilon)w_p < ((\alpha)a^{\varepsilon'})w_p \Leftrightarrow ((\lambda)b^\varepsilon)w_p < ((\lambda)b^{\varepsilon'})w_p$, где $\varepsilon, \varepsilon' = 0$ либо 1 .

Представление (G, Ω, a) мимикрирует m -группу $(H, *)$, если оно мимикрирует ее всякое представление. Наконец, представление (G, Ω, a) мимикрирует многообразие \mathcal{V} , если $(G, *) \in \mathcal{V}$ и (G, Ω, a) мимикрирует все группы из \mathcal{V} . Очевидно, если (G, Ω, a) мимикрирует \mathcal{V} , то $(G, *)$ порождает \mathcal{V} . Верна

Теорема 2.4. Пусть многообразие m -групп \mathcal{U} порождается классом m -групп U и многообразие m -групп \mathcal{V} мимикрируется классом m -групп V . Тогда $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V} = \text{var}_m(W)$, где $W = \{(UWrV, bWrc)\}$; $(U, b) \in U, (V, T, c) \in V$.

Через \mathcal{I} обозначим многообразие m -групп, определяемое тождеством $x_* = x^{-1}$. Определим $Inv : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ по правилу $(z)Inv = -z$. Тогда пара (\mathbb{Z}, Inv) есть m -группа. Рассмотрим правое регулярное представление $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, Inv)$, где $(z)Inv = -z$.

Теорема 2.5. Представление $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, Inv)$ мимикрирует \mathcal{I} .

Следствие 2.6. $\mathcal{I} = \text{var}_m((\mathbb{Z}, Inv))$.

Через \mathbb{Z}^* обозначим аддитивную группу целых чисел, полученную из \mathbb{Z} путем обращения порядка. Относительно координатного порядка прямое произведение $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ является ℓ -группой. Определим отображение $Exch : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ по правилу $(x, y)Exch = (y, x)$, где $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Тогда пара $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch)$ будет m -группой. Рассмотрим линейно упорядоченное множество $\Lambda = \mathbb{Z} \cup \{o\} \cup \mathbb{Z}^*$. Через $(z)_1, (z)_2$ обозначим элемент Λ , строго меньший (большой) o , и определим $Exch : \Lambda \rightarrow \Lambda$ по правилу $(z)_1 Exch = (z)_2, (z)_2 Exch = (z)_1$ и $(o) Exch = o$. Следовательно, можно рассмотреть представление $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \Lambda, Exch)$.

Теорема 2.7. Представление $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \Lambda, Exch)$ мимикрирует \mathcal{A} .

Следствие 2.8. $\mathcal{A} = \text{var}_m((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch))$.

Пусть $\mathcal{I}^1 = \mathcal{I}$ и $\mathcal{I}^n = (\mathcal{I}^{n-1})\mathcal{I}$ при $n \geq 2$. Аналогично определяется \mathcal{A}^n . Через $Wr^n(\mathbb{Z}, Inv), Wr^n(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch)$ обозначим сплетение n копий m -групп (\mathbb{Z}, Inv) и $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch)$ соответственно.

Следствие 2.9. 1) $\mathcal{I}^n = \text{var}_m(Wr^n(\mathbb{Z}, Inv))$, 2) $\mathcal{A}^n = \text{var}_m(Wr^n(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch))$.

Отметим, что многообразия $\bigvee_n \mathcal{I}^n, \bigvee_n \mathcal{A}^n$ различны, содержатся в многообразии \mathcal{N} нормальнзначных m -групп и являются идемпотентами. Правда, неизвестно, совпадают ли $\bigvee_n \mathcal{A}^n$ и \mathcal{N} ?

В работе [9] построен пример, показывающий, что в решетке многообразий m -групп не всегда выполнено $\mathcal{V}(\bigvee_i \mathcal{U}_i) = \bigvee_i (\mathcal{V}\mathcal{U}_i)$ для бесконечного множества индексов. Более точно. Пусть $\beta_n = \frac{n}{n+1}$ — действительное число ($n \in \mathbb{N}$). Обозначим через $B_{\beta_n} = (\beta_n)$ бесконечную циклическую подгруппу мультипликативной группы положительных действительных чисел, порожденную числом β_n . Рассмотрим множество

$$T_{\beta_n} = \{(r, a) \mid r \in B_{\beta_n}, a \in \mathbb{R}\}$$

с операцией умножения

$$(r, a)(r', a') = (rr', r'a + a').$$

Считаем, что $(r, a) \geq e$ в T_{β_n} , если $r = \beta_n^k$ и $k > 0$ или $k = 0$ и $a \geq 0$ в \mathbb{R} . Непосредственная проверка показывает, что T_{β_n} — линейно упорядоченная группа. Пусть $\mathcal{M}_n = \text{var}_m((T_{\beta_n} \times T_{\beta_n}^*, Exch))$ верна.

Теорема 2.10. Имеет место $\mathcal{A}(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n) \neq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{A}\mathcal{M}_n)$.

Отметим [10], что имеет место

$$\mathcal{U}(\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2) = \mathcal{U}\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{U}\mathcal{V}_2.$$

Список литературы

- 1 *Giraudet M., Rachunek J.* Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. Journal. — 1999. — Vol. 49. — No. 124. — P. 743–766.
- 2 *Giraudet M., Lucas F.* Groupes a' motie' ordonne's, Fundam. Math. — 1991. — Vol. 139. — No. 2. — P. 75–89.
- 3 *Курош А.Г.* Теория групп. — М.: Наука, 1967.
- 4 *Kopytov V.M., Medvedev N.Ya.* The theory of lattice-ordered groups. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- 5 *Вараксин С.В., Зенков А.В.* О представлениях m -групп // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54. — № 2. — С. 298–302.
- 6 *Зенков А.В.* О конгруэнциях m -групп // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54. — № 6. — С. 1280–1288.
- 7 *Копытов В.М., Рахунке Й.* Наибольшее собственное многообразие m -групп // Алгебра и логика. — 2003. — Т. 42. — № 5. — С. 624–635.
- 8 *Зенков А.В.* Сплетения групп монотонных подстановок // Сиб. матем. журн. — 2011. — Т. 52. — № 6. — С. 1264–1270.
- 9 *Баянова Н.В., Зенков А.В.* О бесконечной дистрибутивности в решетке многообразий m -групп // Алгебра и логика. — 2015. — Т. 54. — № 1. — С. 3–15.
- 10 *Зенков А.В., Исаева О.В.* Два вопроса теории m -групп // Сиб. матем. журн. — 2014. — Т. 55. — № 6. — С. 1279–1282.

А.В. Зенков

 M -группа өрімдері мен берілуі

m -Группа дегеніміз — бұл $(G, *)$ жұбы, мұндағы G — торды реттелген ℓ -группа және $*$ 2-ретті кемімелі G автоморфизмі. M -транзитивті көріністің m -группалы еркін сипаттамасы алынған. m -группа дәл m -транзитивті көріністі анықтайтын қажетті және жеткілікті шарттар алынған. Ары қарай m -транзитивті көріністің еркін конгруэнциясы торының құрылымы зерттелген, m -қарапайым көрінісі мен m -2-транзитивті ұғымдары енгізілген. Стабилизаторлар терминінде m -транзитивті қарапайым көрінісінің сипаттамасы алынған. m -2-транзитивтіліктің қажетті және жеткілікті шарттар көрсетілген және осындай көріністердің кейбір қасиеттері зерттелген. Мақалада m -группалардың алмастырып өрілу ұғымы енгізілген және алмастырудың m -транзитивті группасы m -транзитивті m -группалардың алмастыру өріміне салымдылығы дәлелденген. Салдары ретінде m -группалардың екі көпбейнеліктерінің көбейтіндісінің m -транзитивті группасы осы көпбейнеліктерден алынған сәйкес m -транзитивті өрімге салымдылығы табылған.

A.V. Zenkov

Views and plexus m -group

Recall that an m -group is a pair $(G, *)$, where G is an ℓ -group and $*$ is a decreasing order two automorphism of G . We obtain a description of the m -transitive representations of an arbitrary m -group. Some necessary and sufficient conditions are given for an m -group to admit a faithful m -transitive representation. We study the lattice of congruences of an arbitrary m -transitive representation, introduce the notions of m -2-transitive and m -primitive representations, and describe the m -transitive primitive representations in terms of stabilizers. Also we give necessary and sufficient conditions for m -2-transitivity and study some properties of these representations. We introduce the concept of wreath product of the m -groups of permutations and prove that an m -transitive group of permutations with an m -congruence is embeddable into the wreath product of the suitable m -transitive m -groups of permutations. As a consequence, we establish that an arbitrary m -transitive group in the product of two varieties of m -groups embeds into the wreath product of the suitable m -transitive groups of these varieties.

References

- 1 Giraudet M., Rachunek J. *Czech. Math. Journal*, 1999, 49, 124, p. 743–766.
- 2 Giraudet M., Lucas F. *Groupes a' motie' ordonne's, Fundam. Math.*, 1991, 139, 2, p. 75–89.
- 3 Kurosh A.G. *The Theory of Groups*, Moscow: Nauka, 1967.
- 4 Kopytov V.M., Medvedev N.Ya. *The theory of lattice-ordered groups*, Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publ. 1994.
- 5 Varaksin S.V., Zenkov A.V. *Siberian Mathematical Journal*, 2013, 54, 2, p. 229–302.
- 6 Zenkov A.V. *Siberian Mathematical Journal*, 2013, 54, 6, p. 1280–1288.
- 7 Kopytov V.M., Rachunek J. *Algebra and Logic*, 2003, 42, 5, p. 624–635.
- 8 Zenkov A.V. *Siberian Mathematical Journal*, 2011, 52, 6, p. 1264–1270.
- 9 Bayanova N.V., Zenkov A.V. *Algebra and Logic*, 2015, 54, 1, p. 3–15.
- 10 Zenkov A.V., Isaeva O.V. *Siberian Mathematical Journal*, 2014, 55, 6, p. 1279–1282.

UDC 004.822.4

D. Kabenov¹, R. Murathan², V. Golenkov³

¹*Pavlodar State Pedagogical Institute;*

²*Ye.A.Buketov Karaganda State University;*

³*Belarusian State University of Informatics and Radio Electronics, Minsk
(E-mail:kabenov73@mail.ru)*

Methods of creation of intellectual knowledge evaluation system, students in natural language

This article provides a framework for the design and development of intelligent information system of knowledge evaluation using an open form tasks, the «open» (without variants of answers) test tasks are considered as effective. Student's answer entered in a free form gives an opportunity to present student's views on the subject more accurately. And we evaluate his knowledge, and not based on a guessed answer to the question, which proves the effectiveness of the proposed method. This article presents an approach for text analysis in natural language and organization of query in the knowledge based on the ontology.

Key words: intelligent system, ontology, text analysis, assessment of knowledge, test systems.

Introduction

Currently, a large number of organizations (both commercial companies and public educational institutions) develop, acquire and implement a variety of computer-based training. With the development of computer-based training systems, systems of knowledge monitoring also were developing. Thus, within the framework of distance learning, there are separate subsystems deployed and created which are designed to solve this task. Multimedia technologies developed very strong today, offer a wide range of development tools and a visual representation of tasks intended for students. They also give the student a considerable choice of means of answering questions and fulfilling tasks. Today it is not just a choice of one or more text responses from the options, but the choice of the graphics area in the figure, the correlation, the construction of the expression (for example, an algebraic expression or chemical formula) and even free response [1].

Analysis of the answer given by the student to some question, and comparing his answer with the correct answer stored in the database, gives the degree of truth of the student's answer. The degree of the answer truth, as a rule, has two values: the correct answer or wrong answer, however there are possibly intermediate values between these extreme degrees (e.g., partially correct answer). By degrees of the answers truth to the question, the student's level of training is determined and rating is made [2].

Currently, there are many testing systems in various fields of knowledge, for example OLAT (Open Source LMS) [3], Moodle (Moodle Trust, Moodle.org) [4], Sakai (Sakai Foundation, Sakai Project) [5], AuthorWare (Adobe Systems Incorporated) [6]. Most of these tools provide the ability to create multimedia tests, testing for traditional learning and e-learning, saving and transfer of results to the teacher for administration of users and educational groups.

1 Research conducted in the field of computer-aided control of knowledge

Acquiring and representing a domain knowledge model is a difficult problem that has been the subject of numerous Artificial Intelligence research projects since research in this field began [7–9]. Knowledge-based systems and expert systems, in particular, must explicitly represent the knowledge and inferences associated with the expertise in this domain.

For many countries, the e-learning theory emphasizes the importance of the specified cognitive process and personalized learning [10]. Knowledge monitoring and evaluation is an intellectual challenge, requiring the high-quality solutions, which will help to get to a new level in the teaching procedure, as it could allow implementing the concept of the individual approach to learning on a massive scale. Nowadays the automated knowledge test has become very popular, firstly, as it saves the teacher's working hours, relieves him from the routine work and

ensures an objective evaluation of knowledge, the results of which do not depend on the subjective opinions of different teachers.

The paper [11] presents newly developed computerized system of constructive multiple-choice testing. The system combines short answer (SA) and multiple-choice (MC) formats by asking examinees to respond to the same question twice, first in the SA format, and then in the MC format.

The papers [12, 13] describe methods of implementation of a control mechanism of student knowledge with the help of fuzzy set theory combined with neural network technology. The papers apply some serious improvements in the logic of evaluation of knowledge, and methodologies of data interpretation of student responses. The presented architecture has typical configuration of hardware and software in an intranet environment of educational institutions.

The article [14] considered content of compute-aided assembled examination in natural science disciplines, stated requirements to «assembled examination» in general, and addressed some types of tasks on such examinations.

Analysis of the aforementioned work shows that ordinary linear tests with simple forms of the answer do not quite meet the requirements of comprehensive control of students' knowledge. First of all it refers to natural and mathematical sciences, which peculiarity lies in the close relationship of concepts, themes and sections of the course; as the main criterion for learning is the ability to solve tasks of different nature and level of complexity. Therefore development of the adaptive, nonlinear, and intellectual testing methods with more various types of tasks and answers' forms is needed. At the same time, new testing systems should incorporate all the achievements of previous generations of the knowledge control tools.

2 Ontology and Ontology Engineering

Before going into further detail, it is important to define the notion of ontology. Very briefly, ontology is a formal specification of a conceptualization (in this case, a domain) and it includes the definition of classes, objects, properties, relationships and axioms. Ontologies are expressed using a formal language such as RDF or OWL and support automatic inference. Generally, ontologies involve a kind of consensus within a community, meaning that they formalize concepts that are generally accepted within this community. There are many kinds of ontologies such as upper-level ontologies, task ontologies and domain ontologies. We are interested here in domain ontologies.

As previously pointed out, the concept of a domain ontology as envisioned by the eLearning community is relatively new in the field of ITS. However, domain ontology engineering is a growing research area that has received much attention in other fields and it is the corner stone of the Semantic Web. Ontology engineering is a field that explores the methods and tools for handling the ontology lifecycle.

It requires a general and domain-independent methodology that provides guidance for ontology building, refinement and evaluation [15]. The ontology life-cycle can be schematized in four main stages: the specification stage, the formalization stage, the maintenance stage, and the evaluation stage.

- the specification stage identifies the purpose and scope of the ontology. Generally, this relies a lot on domain experts and needs to define the competency questions that the ontology has to answer. It is also dependent on the application that is going to be used by the ontology;
- the formalization stage produces a conceptual and formal model that meets the requirements of the specification stage;
- the maintenance stage keeps track of the ontology's updates and evolution, and checks its consistency;
- finally, the evaluation stage analyzes the resulting ontology and checks if it meets the initial needs and has the desired features.

At this point, we are interested in the formalization stage and how it can benefit from automated methods for knowledge acquisition. In fact, the most common and successful techniques for domain engineering are generally manual, and the best ITS authoring tools can help the expert formalize his knowledge but these tools are generally far from being part of an automated procedure. It is therefore worthwhile to explicitly state the steps that can be automated to alleviate the task of human experts and the burden of knowledge acquisition. Ontology learning techniques have been adopted to achieve this goal [16]. These learning techniques can vary according to the degree of automation (semi-automatic, fully automatic), the ontological knowledge that has to be extracted (concepts, taxonomy, conceptual relationships, attributes, instances, axioms), the knowledge sources (texts, databases, xml documents, etc.) and finally the purpose (creating ontologies from scratch and/or updating existing ontologies).

In order to build ontology of Geometry, it is beneficial to understand the need of ontology and some works concerned of the ontology-based text mining. Ontology is an explicit formal specification of the terms in explicit specification the domain and relations among them [17]. Ontologies are useful as means to support sharing and reutilization of knowledge [18]. This reusability approach is based on the assumption that if a modeling scheme, i.e., ontology, is explicitly specified and mutually agreed upon by the parties involved, and then it is possible to share, reutilize and extend knowledge. Many disciplines now develop standardized ontologies that domain experts can use to share and annotate information in their fields. Problem-solving methods, domain-independent applications, and software agents use ontologies and knowledge bases built on ontologies as data [19].

Reusing existing ontologies may be a requirement if our system needs to interact with other applications that have already committed to particular ontologies or controlled vocabularies [20]. There are libraries of reusable ontologies on the Web and in the literature, for example, the Ontolingua ontology library [21] or the DAML ontology library [22]. The need of ontologies is connected with the inability of the existing methods to adequately automatically process native-language texts. For high-quality word processing, you must have a detailed description of the problem area with a lot of logical links that show the relationships between the terms field. The use of ontologies can provide a native language text in such a way that when it becomes available-for-automatic processing [23].

Within the OSTIS project (The Open Semantic Technologies for Designing the Intelligent Systems) the «Variational Geometric Solver» help system has been generated. On the basis of the Geometry domain ontology. The system operation is organized so, as to answer the questions asked by a user and to give him answers to the questions, as well as to complete the geometric tasks. In the work «The Semantic Technology for the Component Design of the Intelligent Task Solvers» the authors [24] have presented the features of the help system of the intelligent geometric solver.

3 Geometry ontology

An ontology is a formal explicit description of concepts in a domain of discourse (classes (sometimes called concepts)), properties of each concept describing various features and attributes of the concept (slots (sometimes called roles or properties)), and restrictions on slots (facets (sometimes called role restrictions)) [19]. Ontology together with a set of individual instances of classes constitutes a knowledge base.

Development of ontology includes [19]:

- defining classes in the ontology;
- arranging the classes in a taxonomic (subclass – superclass) hierarchy;
- defining slots and describing allowed values for these slots;
- filling in the values for slots for instances.

Our ontology consists of the several levels. The first level contains the classes, instances of which cannot be received from the other classes. The Right Class Shape represents all the entities of the outline shapes. The Specific Right Shapes are the instances of this class.

The front levels are generated by the reasoning process, i.e. using the ontology reasoning block or by various modules, opened by the Reasoning Manager. The higher the level is, the more detailed the information is; for example, on the third level a figure is classified as a two-dimensional one, and in turn, it is classified as a polygon, the polygon — as a convex polygon, the convex polygon — as a quadrilateral, the quadrilateral — as a parallelogram, the parallelogram — as a rectangle or a diamond, the rectangle or the diamond — as a square respectively (Fig. 1).

We arrange classes in a hierarchical taxonomy with a question if, when being an instance of one class, the entity is always (that is, by definition) an instance of another class. If the A class is a superclass of the B class, then every instance of the B class is also the instance of the A superclass.

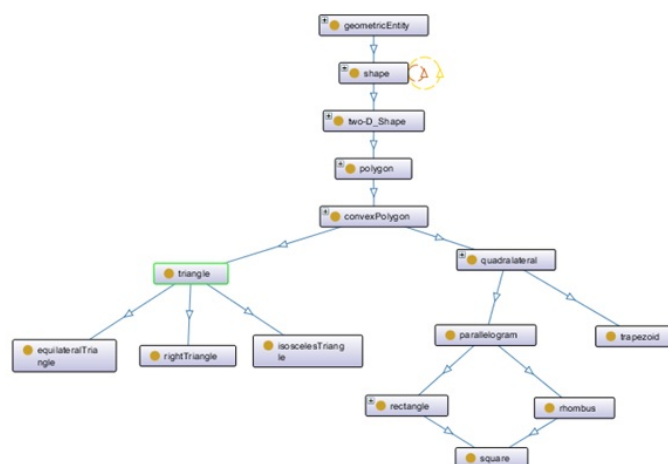


Figure 1. Ontology fragment geometry

4 Data analysis on the natural language based on the ontology

As compared with the traditional forms of learning, the distance learning has several advantages: adjustment to the students' individual peculiarities, a free choice of time, a place and an education level, the use of the new training methods, the modern means of communication and the information transmission between the students and teachers. Nevertheless, knowledge monitoring is particularly important due to the absence of the direct contact of students and professors.

Managing the knowledge monitoring is closely related to the issue of selecting the questions type, the method of generating the test path and the answer validation method.

For the purpose of solving these problems, we offer the concept of the intelligent test system based on the Geometry domain ontology.

The following types of questions for the knowledge quality supervision are suggested:

- the closed-ended test questions, i.e. when the multiple choice questions are suggested, and one of the answers to the question is right and should be chosen;
- the open-ended test questions, i.e. the questions without the proposed alternate answers (these questions are useful for evaluating the knowledge of terms, definitions, concepts, etc.);
- the situation tests, i.e. a set of the test tasks designed for solving the problematic situations (the geometric tasks).

One of the artificial intelligence methods for representing knowledge in a natural language is the semantic network. A semantic network is the domain information model, that has the form of the directed graph, which nodes correspond to the domain entities, and the arcs (edges) set the relationship between them. Concepts, events, properties, processes could be the entities. Thus, the semantic networks are one of the ways to represent knowledge in a natural language. Over the last years in the works of many scientists the special graphdynamic models – the semantic models of representing and processing the knowledge based on the semantic networks [25], have been suggested to use as a formal framework for the designed intelligent systems, the abstract logical semantic models of the intelligent systems.

In his work [26] Golenkov suggested to generate the formal tools for describing the semantics of different knowledge types, as well as the formal tools for describing knowledge processing on the semantic level. A system of the intelligent evaluation of the students' knowledge in the case of the Geometry domain could be developed upon the proposed principles.

The text analysis in a natural language is suggested for analyzing and examining the students' answers to the open-ended test questions. The knowledge description in the Geometry domain was presented as ontology [27].

Let's give a brief description of the proposed method of checking the geometric task solution based on the ontologies. The texts of the geometric task are a set of the coherent sentences. They include simple and complex sentences, incomplete sentences (with anaphora and ellipses). Formal understanding of the geometric tasks' text is their representation in the knowledge language in the domain of Geometry ontology. This representation

should be connected and extended by filling the slot value for the cases, which describe the situation presented by the text.

Reviewing the whole process of analyzing the geometric tasks seems to be impossible in this article. Therefore, let us consider the structure of the situation, which should be resulted from the ontology based on the linguistic analysis for a geometric task.

The Task. A rectangular quadrilateral, which sides are 8 cm and 18 cm, is given. The areas of the rectangular quadrilateral and the square are equal. Find the square side.

Linguistic analysis of the task's text

Our task consists of three sentences. These sentences pass morphological analysis in turn. That is the roots of words is determined and they will be stored in the base of morphemes.

From the first sentence it finds a word rectangular quadrangle – noun, and on ontology is rectangle. Side – noun, on ontology is edge, length is also a noun, on ontology is length, 8 – numeral, 18 – numeral. But there is no length of sides of a rectangular quadrangle in the global ontology, but we added them to the local ontology. Here, the global ontology refers to the ontology of geometry, and the local ontology is constructed from conditions of the task.

From the second sentence it finds a word square – noun, and on ontology is area, rectangular quadrangle – noun, and on ontology is rectangle, quadrangle – noun, and on ontology square, equal – adjective indicates that the area of a rectangular quadrangle and quadrangle are equal.

```

rectangle — edge
select ?subject ?predicate ?range ?type where { (?subject a geom:rectangle. ?range a geom:edge. ?subject ?predicate ?range . ?subject a ?type. FILTER (?type != owl:NamedIndividual) .) UNION (?subject a geom:rectangle. ?range a geom:rectangle. ?subject ?predicate ?range . ?subject a ?type. FILTER (?type != owl:NamedIndividual) .) UNION (?subject a geom:edge. ?range a geom:edge. ?subject ?predicate ?range. ?subject a ?type. FILTER (?type != owl:NamedIndividual) .) }
ABCD hasSide DA
ABCD hasSide CD
ABCD hasSide BC
ABCD hasSide AB
DA parallelTo BC
CD parallelTo AB
BC parallelTo DA
AB parallelTo CD

rectangle edge — length
select ?subject ?predicate ?range ?type where { (?subject a geom:edge. ?range a geom:length. ?subject ?predicate ?range . ?subject a ?type. FILTER (?type != owl:NamedIndividual) .) UNION (?subject a geom:edge. ?range a geom:edge. ?subject ?predicate ?range . ?subject a ?type. FILTER (?type != owl:NamedIndividual) .) UNION (?subject a geom:length. ?range a geom:length. ?subject ?predicate ?range. ?subject a ?type. FILTER (?type != owl:NamedIndividual) .) }
DA hasLength d
CD hasLength c
BC hasLength b
AB hasLength a
DA parallelTo BC
CD parallelTo AB
BC parallelTo DA
AB parallelTo CD
b isEqual d
c isEqual a
d isEqual b
a isEqual c

square — area
select ?subject ?predicate ?range ?type where { (?subject a geom:square. ?range a geom:area. ?subject ?predicate ?range . ?subject a ?type. FILTER (?type != owl:NamedIndividual) .) UNION (?subject a geom:square. ?range a geom:square. ?subject ?predicate ?range . ?subject a ?type. FILTER (?type != owl:NamedIndividual) .) UNION (?subject a geom:area. ?range a geom:area. ?subject ?predicate ?range. ?subject a ?type. FILTER (?type != owl:NamedIndividual) .) }
ABCD hasArea S

rectangle — area
select ?subject ?predicate ?range ?type where { (?subject a geom:rectangle. ?range a geom:area. ?subject ?predicate ?range . ?subject a ?type. FILTER (?type != owl:NamedIndividual) .) UNION (?subject a geom:rectangle. ?range a geom:rectangle. ?subject ?predicate ?range . ?subject a ?type. FILTER (?type != owl:NamedIndividual) .) UNION (?subject a geom:area. ?range a geom:area. ?subject ?predicate ?range. ?subject a ?type. FILTER (?type != owl:NamedIndividual) .) }
ABCD hasArea S

square — edge
select ?subject ?predicate ?range ?type where { (?subject a geom:square. ?range a geom:edge. ?subject ?predicate ?range . ?subject a ?type. FILTER (?type != owl:NamedIndividual) .) UNION (?subject a geom:square. ?range a geom:square. ?subject ?predicate ?range . ?subject a ?type. FILTER (?type != owl:NamedIndividual) .) UNION (?subject a geom:edge. ?range a geom:edge. ?subject ?predicate ?range. ?subject a ?type. FILTER (?type != owl:NamedIndividual) .) }
ABCD hasSide DA
ABCD hasSide CD
ABCD hasSide BC
ABCD hasSide AB
DA parallelTo BC
CD parallelTo AB
BC parallelTo DA
AB parallelTo CD

```

Figure 2. SPARQL query to the knowledge base

Now, the third sentence is analyzed. Hence, the word find – verb, length – noun, on ontology is length, side – noun, on ontology is edge, quadrate – noun, and on ontology is square.

After all the words have been morphologically analyzed, the following questions are asked: To find what? – Side. Of what? – Of Quadrate.

After linguistic analysis of the task's text, a query is made to ontology in the language of query SPARQL [28]. Having made a query, we find that there is an individual of rectangular quadrangle ABCD. ABCD has sides, sides are parallel to each other, sides have lengths and sides are equal to each other. Rectangular quadrangle has an area. Quadrate has an area. SPARQL queries to the knowledge base shown in figure 2.

The table listing all relationships between the properties of the individual rectangular quadrangle is formed according to the results of query to the ontology. Local ontology describes the properties of the class elements that will be needed for this task solution. To solve the task you need to determine the sides of the rectangular quadrangle, lengths of the sides, and the numerical designation of lengths. Determine that the sides are equal and parallel. Quadrangle has an area and is equal to the quadrate area.

We use description logic [29]. With description logic we determine classes and draw the geometry upon the global ontology and fill them with data from the task. Figure 3 shows a table of the relationship between the classes and properties of individuals.

rectangle_rectangle_ABCD	hasSide	rectangle_edge_DA
rectangle_rectangle_ABCD	hasSide	rectangle_edge_CD
rectangle_rectangle_ABCD	hasSide	rectangle_edge_BC
rectangle_rectangle_ABCD	hasSide	rectangle_edge_AB
rectangle_edge_DA	parallelTo	rectangle_edge_BC
rectangle_edge_CD	parallelTo	rectangle_edge_AB
rectangle_edge_BC	parallelTo	rectangle_edge_DA
rectangle_edge_AB	parallelTo	rectangle_edge_CD
rectangle_edge_DA	hasLength	rectangle_length_d
rectangle_edge_CD	hasLength	rectangle_length_c
rectangle_edge_BC	hasLength	rectangle_length_b
rectangle_edge_AB	hasLength	rectangle_length_a
rectangle_edge_DA	parallelTo	rectangle_length_BC
rectangle_edge_CD	parallelTo	rectangle_length_AB
rectangle_edge_BC	parallelTo	rectangle_length_DA
rectangle_edge_AB	parallelTo	rectangle_length_CD
rectangle_length_b	isEqual	rectangle_length_d
rectangle_length_c	isEqual	rectangle_length_a
rectangle_length_d	isEqual	rectangle_length_b
rectangle_length_a	isEqual	rectangle_length_c
rectangle_length_b	isEqual	rectangle_Number_8
rectangle_length_d	isEqual	rectangle_Number_8
rectangle_length_c	isEqual	rectangle_Number_18
rectangle_length_a	isEqual	rectangle_Number_18
square_square_ABCD	hasArea	square_area_S
rectangle_rectangle_ABCD	hasArea	rectangle_area_S

Figure 3. Derivation of relationships and properties using description logic

As the table shows, all the data and relationships between them necessary for solving the task are established. The next step according to the formula calculates the area of rectangular quadrangle, and so on. For this purpose the markup language of mathematical formulas MathML is used. Input and storage of formulas required for the task solution will be made in the markup language of mathematical formulas MathML. Intelligent system of knowledge evaluation has support for editing, viewing, and solution of mathematical expressions in the markup language of mathematical formulas MathML.

5 Conclusions and succeeding activity

This article presents an approach based on ontology, which solves the problem of the text analysis in natural language. We have proposed a method to use Geometry domain ontology to automatically check responses to «open» questions (without variants).

Our concept of creating a computer-aided testing system uses results of intelligent evaluation of the user level and provides a set of tests that are adapted to the student's training level. Knowledge control system distributes the questions in complexity, based on data obtained during testing. This enables the construction of adaptive tests that do not require correction at the user level.

Mathematical models and algorithms created using artificial intelligence methods and languages for knowledge representation will create real smart human-machine system, because they will interact in natural language, which certainly affect the development of smart technologies in our country.

Further research in the framework of the methodological aspects of the automated control of knowledge will concern evaluation of students' knowledge and the development of databases of test questions of different types and different levels of complexity.

References

- 1 *Маслов С.И.* Информатизация образования: направления, средства, технологии: пособие для системы повышения квалификации. — М.: Изд-во МЭИ, 2004. — С. 868.
- 2 *Панченко В.М., Шорохов М.И.* Компьютерные технологии обучения. Мониторинг качества обучения в техническом вузе на основе ретроспективного комплекса: учеб. пособие. — М.: МИРЭА, 2006. — С. 156.
- 3 OLAT — The Open Source LMS. [Online] Available from: — [ER]. Access mode: www.olat.org/website/en/html/index.html.
- 4 Moodle Trust, Moodle.org, Open-source Community-based Tools for Learning. [Online] Available from: — [ER]. Access mode: www.moodle.org.
- 5 Sakai Foundation, Sakai Project. [Online] Available from: — [ER]. Access mode: <http://sakaiproject.org/>
- 6 Adobe Systems Incorporated, Adobe Authorware. [Online] Available from: — [ER]. Access mode: www.adobe.com/products/authorware/
- 7 *Clancey B.* Acquiring, representing and evaluating a competence model of diagnostic strategy. Technical Report: CS-TR-85-1067, Stanford University. — 1985.
- 8 *Brachman R.J., Levesque H.J.* Knowledge Representation and Reasoning. Morgan Kaufmann, San Francisco, 2004.
- 9 *Russell S.J., Norvig P.* Artificial Intelligence: A Modern Approach, 3rd edn. Prentice Hall, Upper Saddle River. — 2009. — No. 43 (1). — P. 5–16.
- 10 *Jui-long H.* Trends of E-learning Research from 2000 to 2008: Use of text mining and bibliometrics. British Journal of Educational Technology. — 2012.
- 11 *Park J.* Constructive multiple-choice testing system. British J. of Educational Technology. Special Issue: Learning objects in progress. — 2010. — No. 41 (6). — P. 1054–1064.
- 12 *Shahbazova Sh., Freisleben B.A.* Network-Based Intellectual Information System for Learning and Testing. Proceedings of the Fourth International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, Siegen, Germany. — 2000. — P. 308–313.
- 13 *Shahbazova Sh.* Application of Fuzzy Sets for Control of Students Knowledge. Application Comput. Math. — 2011. — No. 10 (1). — P. 195–208.

- 14 *Кусманов К.Р., Копеев Ж.Б., Панков П.С.* Содержание и разработка компьютерных комплексных экзаменов по математике и информатике. LXXV Междунар. науч. практ. конф. «Проблемы соотношения межличностных взаимодействий и образовательных технологий в общественных отношениях». — Лондон, 2014. — С. 11–13.
- 15 *Aussenac-Gilles N. et al.* Revisiting Ontology Design: A Methodology Based on Corpus Analysis. In: Dieng, R., Corby, O. (eds.) EKAW 2000. LNCS (LNAI), Springer, Heidelberg. — 2000. — Vol. 1937. — P. 172–188.
- 16 *Guarino N., Welty C.* Evaluating Ontological Decisions with OntoClean. Communications of the ACM. — 2002. — No. 45(2). — P. 61–65.
- 17 *Gruber T.R.* Toward principles for the design of ontologies used for knowledge sharing. International Journal of Human-Computer Studies. — 1995. — No. 43(5, 6). — P. 907–928.
- 18 *Decker S. et al.* Ontobroker: Ontology based access to distributed and semi-structured information. DS-8: Semantic Issues in Multimedia Systems. — 1999.
- 19 *Noy N.F. and McGuinness D.L.* Ontology Development 101: A Guide to Creating Your First Ontology'. Stanford Knowledge Systems Laboratory Technical Report KSL-01-05 and Stanford Medical Informatics Technical Report SMI-2001-0880. — 2001.
- 20 *Maedche A. et al.* Bootstrapping an Ontology-based Information Extraction System. Intelligent exploration of the web, Physica-Verlag GmbH Heidelberg, Germany. — 2003. — P. 345–359.
- 21 The Ontolingua ontology library. [Online] Available from: — [ER]. Access mode: www.ksl.stanford.edu/software/ontolingua/
- 22 The DAML ontology library. [Online] Available from: — [ER]. Access mode: www.daml.org/ontologies
- 23 *Заливако С.С., Шункевич Д.В.* Семантическая технология компонентного проектирования интеллектуальных решателей задач: материалы междунар. науч.-техн. конф. «Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем». — Минск, 2012. — С. 297–314.
- 24 *Khakhalin G. et al.* Integration of the Image and Nutlet Analysis. Synthesis Systems. Intelligent Data Analysis for Real-Life Applications: Theory and Practice. — IGI Global, 2012.
- 25 *Sowa J.* Conceptual Graphs. Handbook of Knowledge Representation, Elsevier. — 2008. — P. 213–237.
- 26 *Голенков В.В., Гулякина Н.А.* Графодинамические модели параллельной обработки знаний: принципы построения, реализации и проектирования: материалы междунар. науч.-техн. конф. «Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем». — Минск, 2012. — С. 23–52.
- 27 *Kabenov D et al.* Intelligent system of knowledge control for e-learning // Journal of International Scientific Publ.: Educational Alternatives. — 2012. — No. 10(2). — P. 250–260.
- 28 BSBM V3 Results. Prof.'s Dr. Christian Bizer Home page, Institute fur Wirtschaftsinformatik. — [ER]. Access mode: www.wiwiss.fu-berlin.de/bizer/Berlin/SPARQLBenchmark/results/V6/index.html.
- 29 *Латшин В.А.* Онтологии в компьютерных системах. — М.: Научный мир, 2010. — С. 224.

Д. Кабенов, Р. Муратхан, В. Голенков

Білім алушылардың білімін табиғи тілде бағалаудың зерделі жүйесін жасау әдістері

Мақалада білімді бақылаудың зерделі ақпараттық жүйесін жобалау мен жасаудың негізі ұсынылды. Бұл білімді меңгеру үшін «ашық» (жауап үлгілері жоқ) тест тапсырмаларының нәтижелілігі аса зор. Біз қойған сұраққа жауапты таңдап алуын емес, ал оқушының білімін бағалайтын боламыз, өз кезінде ол ұсынылып отырған әдістің тиімділігін дәлелдейді. Авторлар білім алушының табиғи тілдегі жауаптарын автоматты түрде бағалау үшін онтологияға негізделген мәтінді талдау әдісін ұсынды.

Д. Кабенов, Р. Муратхан, В. Голенков

Методы создания интеллектуальной системы оценки знаний обучающихся на естественном языке

В статье предложена основа для проектирования и разработки интеллектуальной системы контроля и оценки знаний с использованием ответа на естественном языке. Для управления этим знанием «открытые» (без вариантов ответа) тестовые задания являются более эффективными. Оцениваем знания, а не отгадывание ответа на заданный вопрос, что доказывает эффективность предлагаемого метода. В связи с этим авторами предложен новый подход анализа текста, основанного на онтологии, для автоматической оценки ответов обучаемых на естественном языке.

References

- 1 Maslov S.I. *Moscow Economic Institute*, 2004, p. 868.
- 2 Panchenko V.M., Shorochov M.I. *Moscow Institute of Radio Engineering, Electronics and Automation*, 2006, p. 156.
- 3 OLAT – *The Open Source LMS*. [Online] Available from, [ER]. Access mode: www.olat.org/website/en/html/index.html
- 4 Moodle Trust, *Moodle.org, Open-source Community-based Tools for Learning*. [Online] Available from, [ER]. Access mode: www.moodle.org
- 5 Sakai Foundation, *Sakai Project*. [Online] Available from, [ER]. Access mode: <http://sakaiproject.org/>
- 6 Adobe Systems Incorporated, *Adobe Authorware*. [Online] Available from, [ER]. Access mode: www.adobe.com/products/authorware/
- 7 Clancey B. *Acquiring, representing and evaluating a competence model of diagnostic strategy*, Technical Report: CS-TR-85-1067, Stanford University, 1985.
- 8 Brachman R.J., Levesque H.J. *Knowledge Representation and Reasoning*, Morgan Kaufmann, San Francisco, 2004.
- 9 Russell S.J., Norvig P. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, 3rd edn. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2009, 43 (1), p. 5–16.
- 10 Jui-long H. *Trends of E-learning Research from 2000 to 2008: Use of text mining and bibliometrics*. *British J. of Educational Technology*, 2012.
- 11 Park J. *Constructive multiple-choice testing system*. *British J. of Educational Technology. Special Issue: Learning objects in progress*, 2010, 41 (6), p. 1054–1064.
- 12 Shahbazova Sh.B., Freisleben A. *Network-Based Intellectual Information System for Learning and Testing*. *Proceedings of the Fourth International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing*, Siegen, Germany, 2000, p. 308–313.
- 13 Shahbazova Sh. *Application of Fuzzy Sets for Control of Students Knowledge*, *Application Comput. Math.*, 2011, 10(1), p. 195–208.
- 14 Kusmanov K.R., Kopeev Zh.B., Pankov P.S. *The content of computer-aided complex examinations in natural science disciplines: materials LXXV International Research and Practice Conference*, International Academy of Science and Higher Education: London, 2014, p. 11–13.
- 15 Aussenac-Gilles N. et al. *Revisiting Ontology Design: A Methodology Based on Corpus Analysis*, In: Dieng, R., Corby, O. (eds.) EKAUW 2000. LNCS (LNAI), Springer, Heidelberg, 2000, 1937, p. 172–188.
- 16 Guarino N., Welty C. *Evaluating Ontological Decisions with OntoClean*, *Communications of the ACM*, 2002, 45(2), p. 61–65.
- 17 Gruber T.R. *Journal International of Human-Computer Studies*, 1995, 43(5–6), p. 907–928.
- 18 Decker S. et al. *Ontobroker: Ontology based access to distributed and semi-structured information*, DS-8: Semantic Issues in Multimedia Systems, 1999.

- 19 Noy N.F., McGuinness D.L. *Ontology Development 101: A Guide to Creating Your First Ontology*, Stanford Knowledge Systems Laboratory Technical Report KSL-01-05 and Stanford Medical Informatics Technical Report SMI-2001-0880, 2001.
- 20 Maedche A. et al. *Bootstrapping an Ontology-based Information Extraction System*, Intelligent exploration of the web, Physica-Verlag GmbH Heidelberg, Germany, 2003, p. 345–359.
- 21 *The Ontolingua ontology library*, [Online] Available from, [ER]. Access mode: www.ksl.stanford.edu/software/ontolingua/
- 22 *The DAML ontology library*, [Online] Available from, [ER]. Access mode: www.daml.org/ontologies
- 23 Shunkevich D.V., Zalivako S.S. *Proceedings of International Conference Open semantic technology of intelligent systems*, Minsk, 2012, p. 297–314.
- 24 Khakhalin G. et al. *Integration of the Image and Nutlet Analysis, Synthesis Systems*, Intelligent Data Analysis for Real-Life Applications: theory and Practice, IGIGlobal, 2012.
- 25 Sowa J. *Conceptual Graphs. Handbook of Knowledge Representation*, Elsevier, 2008, p. 213–237.
- 26 Golenkov V.V., Guliakina N.A. *Proceedings of International Conference Open semantic technology of intelligent systems*, Minsk, 2012, p. 23–52.
- 27 Kabenov D. et al. *Journal of International Scientific Publ.: Educational Alternatives*, 2012, 10(2), p. 250–260.
- 28 *BSBM V3 Results. Prof.'s Dr. Christian Bizer Home page, Institute fur Wirtschaftsinformatik*, [ER]. Access mode: www.wiwiss.fu-berlin.de/bizer/Berlin/SPARQLBenchmark/results/V6/index.html.
- 29 Lapshin V.A. *Ontology in computer systems*, Moscow: Nauchnyi mir, 2010, p. 224.

УДК 517.95

М.Т. Космакова, М.И. Рамазанов, А.С. Токешева, А.А. Хайркулова

*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: svetik_mir69@mail.ru)*

О неединственности решения однородной краевой задачи для уравнения теплопроводности в угловой области

В статье рассмотрена однородная краевая задача для уравнения теплопроводности в вырождающейся угловой области. С помощью потенциалов простого слоя поставленная задача сведена к псевдольтерровому интегральному уравнению второго рода. Полученное интегральное уравнение решается методом регуляризации. С этой целью выделена характеристическая часть интегрального уравнения. Обоснована неприменимость метода последовательных приближений для его решения. Доказана лемма о сведении полученного интегрального уравнения к уравнению с разностным ядром, и представлено его решение. Приведены оценка для резольвенты уравнения с разностным ядром и условия для ограниченности его решения. Явное представление решения уравнения с разностным ядром приводит первоначальное интегральное уравнение к уравнению Вольтерра второго рода со слабой особенностью, которое имеет единственное решение. Решение записано в операторной форме. Показано, что поставленная однородная краевая задача имеет ненулевое решение с точностью до постоянного множителя в классе существенно ограниченных функций с определенным весом. Определены классы единственности решения для поставленной краевой задачи.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение теплопроводности, интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода, характеристическое уравнение, метод регуляризации.

1 Постановка задачи

Рассматривается первая краевая задача теплопроводности в вырождающейся угловой области (области с подвижной границей)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad 0 < x < mt, \quad t \in (0, T); \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0+} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=mt} + k\tilde{u}(t) = 0, \quad (2)$$

где $\tilde{u}(t) = u(x, t)|_{x=mt} = u(mt, t)$, k и m заданы.

2 Сведение краевой задачи к интегральному уравнению

Решение уравнения теплопроводности может быть представлено в виде суммы тепловых потенциалов простого слоя [1]

$$u(x, t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau) d\tau + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-m\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \varphi(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где функция (3) удовлетворяет уравнению (1) для любых $\nu(t), \varphi(t)$, для которых существуют интегралы в (3).

Для того, чтобы удовлетворить граничным условиям (2), найдем $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau) d\tau - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x-m\tau}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-m\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \varphi(\tau) d\tau, \quad (4)$$

тогда граничные условия примут вид [1]

$$-\nu(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{m\tau}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(m\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \varphi(\tau) d\tau = 0; \quad (5)$$

$$\varphi(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{mt}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(mt)^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau) d\tau - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{m}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2(t-\tau)^2}{4a^2}} \varphi(\tau) d\tau = -k\tilde{u}(t). \quad (6)$$

Таким образом, если найдем функции $\nu(t)$, $\varphi(t)$ из системы (5)–(6), то, подставляя их в (3), получим решение задачи (1)–(2).

Из уравнения (5) имеем

$$\nu(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{m\tau}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(m\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \varphi(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^2} \int_0^t \frac{mt}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(mt)^2}{4a^2(t-\tau)}} \left\{ \int_0^\tau \frac{m\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{3/2}} e^{-\frac{(m\tau_1)^2}{4a^2(\tau-\tau_1)}} \varphi(\tau_1) d\tau_1 \right\} d\tau - \\ - K^{(1)}[\varphi] = -k\tilde{u}(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$K^{(1)}[\varphi] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{m}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2(t-\tau)^2}{4a^2}} \varphi(\tau) d\tau.$$

Меняя порядок интегрирования в равенстве (8), вычислим внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} I_1(t, \tau) &= \int_{\tau_1}^t \frac{t\tau_1}{[(t-\tau)(\tau-\tau_1)]^{3/2}} e^{-\frac{m^2 t^2}{4a^2(t-\tau)} - \frac{m^2 \tau_1^2}{4a^2(\tau-\tau_1)}} d\tau = \left\| \sqrt{\frac{t-\tau}{\tau-\tau_1}} = z; \sqrt{t-\tau} = z\sqrt{\tau-\tau_1}; \right. \\ & \quad t-\tau = z^2(\tau-\tau_1); \tau = \frac{t+\tau_1 z^2}{z^2+1}; t-\tau = (t-\tau_1) \frac{z^2}{z^2+1}; \\ & \quad \left. \tau-\tau_1 = (t-\tau_1) \frac{1}{z^2+1}; d\tau = 2(\tau_1-t) \frac{z dz}{(z^2+1)^2} \right\| = \\ &= \int_0^1 \frac{t\tau_1(1+z^2)^{3/2}(1+z^2)^{3/2}}{z^3(t-\tau_1)^{3/2}(t-\tau_1)^{3/2}} e^{-\frac{m^2 t^2(1+z^2)}{4a^2 z^2(t-\tau_1)} - \frac{m^2 \tau_1^2(1+z^2)}{4a^2(t-\tau_1)}} \frac{2z(\tau_1-t)}{(1+z^2)^2} dz = \\ &= \int_0^\infty \frac{2t\tau_1(1+z^2)}{z^2(t-\tau_1)^2} e^{-\frac{m^2 t^2}{4a^2(t-\tau_1)} \frac{1}{z^2} - \frac{m^2 t^2}{4a^2(t-\tau_1)} - \frac{m^2 \tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)} \frac{m^2 \tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)} z^2} dz = \\ &= e^{-\frac{m^2 t^2 + m^2 \tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)}} \int_0^\infty \frac{2t\tau_1}{(t-\tau_1)^2} \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) e^{-\frac{m^2 t^2}{4a^2(t-\tau_1)} \frac{1}{z^2} - \frac{m^2 \tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)} z^2} dz = e^{-\frac{m^2 t^2 + m^2 \tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)}} \times \\ & \quad \times \left[\int_0^\infty \frac{2t\tau_1}{(t-\tau_1)^2} e^{-\frac{m^2 t^2}{4a^2(t-\tau_1)} \frac{1}{z^2} - \frac{m^2 \tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)} z^2} dz + \int_0^\infty \frac{2t\tau_1}{(t-\tau_1)^2} \frac{1}{z^2} e^{-\frac{m^2 t^2}{4a^2(t-\tau_1)} \frac{1}{z^2} - \frac{m^2 \tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)} z^2} dz \right]. \end{aligned}$$

Используя формулы из [2; 321(3.325); 355(3.472(3))], получим

$$\begin{aligned} I_1(t, \tau) &= \frac{m^2}{(2a\sqrt{\pi})^2} e^{-\frac{m^2 t^2 + m^2 \tau_1^2}{4a^2(t-\tau_1)}} \left\{ \frac{2t\tau_1}{(t-\tau_1)^2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{2a\sqrt{t-\tau_1}}{m\tau_1} + \frac{2t\tau_1}{(t-\tau_1)^2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{2a\sqrt{t-\tau_1}}{mt} \right\} e^{-\frac{m^2 t\tau_1}{2a^2(t-\tau_1)}} = \\ &= \frac{m^2}{(2a\sqrt{\pi})^2} e^{-\frac{m^2 t^2 + m^2 \tau_1^2 + 2m^2 t - t\tau_1}{4a^2(t-\tau_1)}} \left\{ \frac{2at\sqrt{\pi}}{m(t-\tau_1)^{3/2}} + \frac{2at\tau_1\sqrt{\pi}}{m(t-\tau_1)^{3/2}} \right\} = \\ &= \frac{m^2}{4a^2\pi} \frac{2a\sqrt{\pi}}{m(t-\tau_1)^{3/2}} (t+\tau_1) e^{-\frac{m^2(t+\tau_1)^2}{4a^2(t-\tau_1)}} = \frac{m(t+\tau_1)}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau_1)^{3/2}} e^{-\frac{m^2(t+\tau_1)^2}{4a^2(t-\tau_1)}}. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (8) примет вид

$$\varphi(t) - \frac{m}{2a\sqrt{-\pi}} \int_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{m^2(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \varphi(\tau) d\tau -$$

$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{m}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2(t-\tau)^2}{4a^2}} \varphi(\tau) d\tau + k\tilde{u}(t) = 0. \quad (9)$$

Теперь найдем $\tilde{u}(t)$ из представления (3):

$$\tilde{u}(t) = u(mt, t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(mt)^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2(t-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \varphi(\tau) d\tau \right\}. \quad (10)$$

Подставим вместо $\nu(t)$ его значение (7) и найдем первое слагаемое, которое обозначим временно через $\tilde{u}_1(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(t) &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(mt)^2}{4a^2(t-\tau)}} \left[\int_0^\tau \frac{m\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{3/2}} e^{-\frac{(m\tau_1)^2}{4a^2(\tau-\tau_1)}} \varphi(\tau_1) d\tau_1 \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \varphi(\tau_1) d\tau_1 \int_{\tau_1}^t \frac{m\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{3/2} \sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2 t^2}{4a^2(t-\tau)} - \frac{m^2 \tau_1^2}{4a^2(\tau-\tau_1)}} d\tau = \|\text{те же замены}^*\| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \varphi(\tau_1) d\tau_1 \int_\infty^0 \frac{m\tau_1(1+z^2)^{3/2} \sqrt{1+z^2}}{(t-\tau_1)^{3/2} z \sqrt{t-\tau_1}} e^{-\frac{m^2 t^2(1+z^2)}{4a^2 z^2(t-\tau_1)} - \frac{m^2 \tau_1^2(1+z^2)}{4a^2(t-\tau_1)}} \frac{2z(\tau_1-t)}{(1+z^2)^2} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \varphi(\tau_1) e^{-\frac{m^2 t^2}{4a^2(t-\tau_1)} - \frac{m^2 \tau_1^2}{4a^2(\tau-\tau_1)}} d\tau_1 \int_0^\infty \frac{2m\tau_1}{t-\tau_1} e^{-\frac{m^2 t^2}{4a^2(t-\tau_1)} z^2 - \frac{m^2 \tau_1^2 z^2}{4a^2(t-\tau_1)}} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \varphi(\tau) e^{-\frac{m^2 t^2}{4a^2(t-\tau)} - \frac{m^2 \tau^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{2m\tau}{t-\tau} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} 2a\sqrt{t-\tau}}{m\tau} e^{-2\frac{m t}{2a\sqrt{t-\tau}} - \frac{m\tau}{2a\sqrt{t-\tau}}} d\tau = \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\tau) \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\tilde{u}(t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{m^2(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{m^2(t-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] \varphi(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Преобразуем равенство (11), используя соотношение

$$\frac{m^2(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} = \frac{m^2(t-\tau)^2 + 4m^2 t\tau}{4a^2(t-\tau)} = \frac{m^2(t-\tau)}{4a^2} + \frac{m^2 t\tau}{a^2(t-\tau)};$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{m^2(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{m^2(t-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] \varphi(\tau) d\tau = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{m^2(t-\tau)}{4a^2} - \frac{m^2 t\tau}{a^2(t-\tau)} +} \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{m^2(t-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] \varphi(\tau) d\tau = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2(t-\tau)}{4a^2}} \left[e^{-\frac{m^2 t\tau}{a^2(t-\tau)}} + 1 \right] \varphi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (8) запишется в виде

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{m^2 t\tau}{a^2(t-\tau)} - \frac{m^2(t-\tau)}{4a^2}} \varphi(\tau) d\tau - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{m}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2(t-\tau)}{4a^2}} \varphi(\tau) d\tau + \\ + \frac{ka}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2(t-\tau)}{4a^2}} \left[e^{-\frac{m^2 t\tau}{a^2(t-\tau)}} + 1 \right] \varphi(\tau) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Умножая обе части уравнения (12) на $e^{\frac{m^2 t}{4a^2}}$ и вводя новую функцию

$$e^{\frac{m^2 t}{4a^2}} \varphi(t) = \varphi_1(t), \quad (13)$$

получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) - \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{m^2 t\tau}{a^2(t-\tau)}} \varphi_1(\tau) d\tau - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{m}{\sqrt{t-\tau}} \varphi_1(\tau) d\tau + \\ + \frac{ka}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{m^2 t\tau}{a^2(t-\tau)}} + 1 \right] \varphi_1(\tau) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Используя соотношение

$$\frac{t + \tau}{(t - \tau)^{3/2}} = \frac{2t - t + \tau}{(t - \tau)^{3/2}} = \frac{2t}{(t - \tau)^{3/2}} - \frac{1}{(t - \tau)^{1/2}},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) - \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{2t}{(t - \tau)^{3/2}} e^{-\frac{m^2 t \tau}{a^2(t - \tau)}} \varphi_1(\tau) d\tau + \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t - \tau)^{1/2}} e^{-\frac{m^2 t \tau}{a^2(t - \tau)}} \varphi_1(\tau) d\tau - \\ - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{m}{\sqrt{t - \tau}} \varphi_1(\tau) d\tau + \frac{ka}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} \left[e^{-\frac{m^2 t \tau}{a^2(t - \tau)}} + 1 \right] \varphi_1(\tau) d\tau = 0, \end{aligned}$$

или же после упрощения получим

$$\varphi_1(t) - \mathbb{K}\varphi_1(t) = 0, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{K}\varphi_1 \equiv \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{2t}{(t - \tau)^{3/2}} e^{-\frac{m^2 t \tau}{a^2(t - \tau)}} \varphi_1(\tau) d\tau - \left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}} + \frac{ka}{\sqrt{\pi}} \right) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} e^{-\frac{m^2 t \tau}{a^2(t - \tau)}} \varphi_1(\tau) d\tau - \\ - \left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}} - \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \right) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} \varphi_1(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Для исследования уравнения (14) выделим его характеристическую часть:

$$\varphi_1(t) - \mathbb{K}_h\varphi_1(t) = \mathbb{K}_0\varphi_1(t), \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_h\varphi(t) &= \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{2t}{(t - \tau)^{3/2}} e^{-\frac{m^2 t \tau}{a^2(t - \tau)}} \varphi_1(\tau) d\tau; \\ \mathbb{K}_0\varphi_1(t) = f_1(t) &= - \left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}} + \frac{ka}{\sqrt{\pi}} \right) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} e^{-\frac{m^2 t \tau}{a^2(t - \tau)}} \varphi_1(\tau) d\tau - \\ &- \left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}} - \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \right) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} \varphi_1(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{16}$$

Умножим обе части этого уравнения на \sqrt{t} и введем новую функцию

$$\sqrt{t}\varphi_1(t) = \varphi_2(t), \tag{17}$$

тогда получим

$$\varphi_2(t) - \int_0^t \mathcal{K}(t, \tau)\varphi_2(\tau) d\tau = f_2(t), \tag{18}$$

где

$$\mathcal{K}(t, \tau) = \frac{m}{a\sqrt{\pi}} \frac{t^{3/2}}{\sqrt{\tau}(t - \tau)^{3/2}} e^{-\frac{m^2 t \tau}{a^2(t - \tau)}}, \quad f_2(t) = \sqrt{t}f_1(t). \tag{19}$$

Отметим следующее свойство ядра $\mathcal{K}(t, \tau)$ характеристического уравнения:

$$\int_0^t \mathcal{K}(t, \tau) d\tau = 1,$$

действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathcal{K}(t, \tau) d\tau &= \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{t^{3/2}}{\sqrt{\tau}(t - \tau)^{3/2}} e^{-\frac{m^2 t \tau}{a^2(t - \tau)}} d\tau = \left\| \eta = \frac{mt}{a\sqrt{t - \tau}}, \quad \eta = \frac{mtd\tau}{2a(t - \tau)^{3/2}}; \right. \\ \tau &= t - \frac{m^2 t^2}{a^2 \eta^2} = t \left[1 - \frac{m^2 t}{a^2 \eta^2} \right] \left\| = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{m\sqrt{t}/a}^{\infty} \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - \frac{m^2 t}{a^2}}} e^{-\eta^2} e^{\frac{m^2 t}{a^2}} d\eta = \left\| \theta^2 = \eta^2 - \frac{m^2 t}{a^2}; \right. \\ &2\theta d\theta = 2\eta d\eta \left\| = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta = 1. \end{aligned}$$

Это, кстати, означает, что к уравнению (18) неприменим метод последовательных приближений.

3 Решение интегрального уравнения

Считая временно правую часть уравнения (15) известной, найдем его решение, т.е. решение характеристического уравнения. Аналогично [3; 174] интегральное уравнение (17) сведем к уравнению с разностным ядром. Для этого произведем в нем замены:

$$t = \left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{t_1}, \tau = \left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{\tau_1}, d\tau = -\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{d\tau_1}{\tau_1^2} \quad (20)$$

и введем новую функцию

$$\varphi_3(t_1) = \varphi_2 \left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{t_1} \right], \quad (21)$$

получим

$$\begin{aligned} & \varphi_2 \left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{t_1} \right] - \frac{m}{a\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{\infty} \frac{a^3 2m\sqrt{\tau_1} 2^3 m^3}{2m^3 t_1^{3/2} a} \frac{\tau_1^{3/2} t_1^{3/2}}{(\tau_1 - t_1)^{3/2}} \exp \left\{ -m^2 \frac{m^4}{2^4 m^4} \frac{1}{t_1 \tau_1} \frac{1}{a^2} \frac{2^2 m^2}{a^2} \frac{\tau_1 t_1}{\tau_1 - t_1} \right\} \times \\ & \times \varphi_2 \left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{\tau_1} \right] \left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{d\tau_1}{\tau_1^2} = f_2 \left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{t_1} \right]. \end{aligned}$$

Упрощая, получим

$$\varphi_3(t_1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{(\tau_1 - t_1)^{3/2}} e^{-\frac{1}{4(\tau_1 - t_1)}} \varphi_3(\tau_1) d\tau_1 = f_3(t_1), \quad (22)$$

где

$$f_3(t_1) = f_2 \left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{t_1} \right]. \quad (23)$$

Таким образом, доказана

Лемма. Интегральное уравнение (15) эквивалентно сводится к уравнению (22) с разностным ядром.

Общее решение интегрального уравнения (22):

$$\varphi_3(t_1) = f_3(t_1) + \int_{t_1}^{\infty} r(t_1 - \tau_1) f_3(\tau_1) d\tau_1 + C, \quad (24)$$

где $r(\theta)$ определяется по формуле

$$r(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\theta)^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{\frac{n^2}{4\theta}}, \theta \in R_-.$$

Для того, чтобы решение $\varphi_3(t_1)$, определяемое формулой (24), было достаточно ограниченным, чтобы интеграл $\int_{t_1}^{\infty} r(t_1 - \tau_1) d\tau_1$ был бы ограничен для любых $t_1 \in R_+$, так как функция $f_3(t_1) + C$ является ограниченной функцией переменной t_1 для любых конечных k . Интеграл $\int_{t_1}^{\infty} r(t_1 - \tau_1) d\tau_1$ будет ограниченным, так как $r(\theta)$ удовлетворяет оценке

$$|r(\theta)| \leq \frac{C}{|\theta|^{3/2}} e^{-\frac{1}{4}|\theta|^{-1}}, \forall \theta \in R_-,$$

где $C = const$. Нужно отметить [1], что резольвента $r(-t)$ интегрального уравнения (18) удовлетворяет интегральному уравнению

$$r(-t) = \frac{2}{\pi t^{3/2}} e^{-\frac{4}{t}} + \int_0^t \frac{2}{\sqrt{\pi} \tau^{3/2}} e^{-\frac{4}{\tau}} r(\tau - t) d\tau.$$

Подставив (21), (23) в (24), получим

$$\varphi_2 \left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{t_1} \right] = f_2 \left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{t_1} \right] + \int_{t_1}^{\infty} r(t_1 - \tau_1) f_2 \left[\left(\frac{a}{2m}\right)^2 \frac{1}{\tau_1} \right] d\tau_1 + C,$$

или

$$\varphi_2(t) = f_2(t) + \int_0^t r \left[\left(\frac{a}{2m^2} \right)^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau} \right) \right] f_2(\tau) \left(\frac{a}{2m} \right)^2 \frac{d\tau}{\tau^2} + C.$$

Применяя обратные замены к (17) и (19), получим

$$\sqrt{t}\varphi_1(t) = \sqrt{t}f_1(t) + \int_0^t r \left[\left(\frac{a}{2m^2} \right)^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau} \right) \right] \sqrt{\tau}f_1(\tau) \left(\frac{a}{2m} \right)^2 \frac{d\tau}{\tau^2} + C;$$

$$\varphi_1(t) = f_1(t) + \int_0^t r \left[\left(\frac{a}{2m^2} \right)^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau} \right) \right] \sqrt{\frac{\tau}{t}}f_1(\tau) \left(\frac{a}{2m} \right)^2 \frac{d\tau}{\tau^2} + \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

Подставим (16) в последнее равенство:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) = & - \left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}} + \frac{ka}{\sqrt{\pi}} \right) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2 t \tau}{a^2(t-\tau)}} \varphi_1(\tau) d\tau - \left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}} - \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \right) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \varphi_1(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^t r \left[\left(\frac{a}{2m} \right)^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau} \right) \right] \left(\frac{a}{2m} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{t\tau^{3/2}}} \left\{ - \left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}} + \frac{ka}{\sqrt{\pi}} \right) \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau-\xi}} e^{-\frac{m^2 \tau \xi}{a^2(\tau-\xi)}} \varphi_1(\xi) d\xi - \right. \\ & \left. - \left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}} - \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \right) \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau-\xi}} \varphi_1(\xi) d\xi \right\} d\tau + \frac{C}{\sqrt{t}}. \end{aligned} \quad (25)$$

В (25) в третьем слагаемом поменяем порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} & \int_0^t r \left[\left(\frac{a}{2m} \right)^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau} \right) \right] \left(\frac{a}{2m} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{t\tau^{3/2}}} \left\{ - \left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}} + \frac{ka}{\sqrt{\pi}} \right) \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau-\xi}} e^{-\frac{m^2 \tau \xi}{a^2(\tau-\xi)}} \varphi_1(\xi) d\xi - \right. \\ & \left. - \left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}} - \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \right) \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau-\xi}} \varphi_1(\xi) d\xi \right\} d\tau = - \left(\frac{a}{2m} \right)^2 \left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}} + \frac{ka}{\sqrt{\pi}} \right) \times \\ & \quad \times \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{\tau-\xi}} e^{-\frac{m^2 \tau \xi}{a^2(\tau-\xi)}} \varphi_1(\xi) d\xi \int_\xi^t r \left[\left(\frac{a}{2m} \right)^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau} \right) \right] \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} - \\ & \quad - \left(\frac{a}{2m} \right)^2 \left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}} - \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \right) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{\tau-\xi}} \varphi_1(\xi) d\xi \int_\xi^t r \left[\left(\frac{a}{2m} \right)^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau} \right) \right] \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} = \\ & = - \left(\frac{a}{2m} \right)^2 \left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}} + \frac{ka}{\sqrt{\pi}} \right) \int_0^t \left\{ \int_\xi^t \frac{1}{\tau^{3/2}\sqrt{t}\sqrt{\tau-\xi}} r \left[\left(\frac{a}{2m} \right)^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau} \right) \right] e^{-\frac{m^2 \tau \xi}{a^2(\tau-\xi)}} d\tau \right\} \varphi_1(\xi) d\xi - \\ & \quad - \left(\frac{a}{2m} \right)^2 \left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}} - \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \right) \int_0^t \left\{ \int_\xi^t \frac{1}{\tau^{3/2}\sqrt{t}\sqrt{\tau-\xi}} r \left[\left(\frac{a}{2m} \right)^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau} \right) \right] d\tau \right\} \varphi_1(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем переписать (25) в виде

$$\mathbb{L}\varphi_1 \equiv \varphi_1(t) - \mathbb{M}\varphi_1 = \frac{C}{\sqrt{t}}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\varphi_1 = & \left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}} + \frac{ka}{\sqrt{\pi}} \right) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{m^2 t \tau}{a^2(t-\tau)}} \varphi_1(\tau) d\tau + \left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}} - \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \right) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \varphi_1(\tau) d\tau + \\ & + \left(\frac{a}{2m} \right)^2 \left(\frac{m}{2a\sqrt{\pi}} + \frac{ka}{\sqrt{\pi}} \right) \int_0^t \left\{ \int_\xi^t \frac{1}{\tau^{3/2}\sqrt{t}\sqrt{\tau-\xi}} r \left[\left(\frac{a}{2m} \right)^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau} \right) \right] e^{-\frac{m^2 \tau \xi}{a^2(\tau-\xi)}} d\tau \right\} \varphi_1(\xi) d\xi + \\ & + \left(\frac{a}{2m} \right)^2 \left(\frac{ka}{\sqrt{\pi}} - \frac{m}{2a\sqrt{\pi}} \right) \int_0^t \left\{ \int_\xi^t \frac{1}{\tau^{3/2}\sqrt{t}\sqrt{\tau-\xi}} r \left[\left(\frac{a}{2m} \right)^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau} \right) \right] d\tau \right\} \varphi_1(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Интегральное уравнение (26) является уравнением Вольтерра со слабой особенностью, поэтому имеет единственное решение

$$\varphi_1(t) = \mathbb{L}^{-1} \left[\frac{C}{\sqrt{t}} \right].$$

4 Классы единственности решения однородной краевой задачи

Используя соотношения (7) и (3), заключаем, что однородная задача (1)–(2) имеет наряду с тривиальным решением и нетривиальное решение с точностью до постоянного множителя в классе существенно ограниченных функций с весом, который определяется следующим образом:

$$(x + t^{1/2})^{-1} u(x, t) \in L_\infty(G), \text{ т.е. } u(x, t) \in L_\infty(G; (x + t^{1/2})^{-1}).$$

Из изложенного выше следует, что *классы единственности* для граничной задачи (1)–(2) определяются следующим утверждением.

Теорема. Классами единственности решения для граничной задачи (1)–(2) являются

$$L_\infty \left(G; [x^{1+\alpha} + t^{(1+\alpha)/2}]^{-1} \right).$$

Список литературы

- 1 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — С. 734.
- 2 Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — С. 1100.
- 3 Джениалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. — Алматы: Ғылым, 2010. — С. 334.

М.Т. Космакова, М.И. Рамазанов, А.С. Токешева, А.А. Хайркулова

Бұрыштық облыстағы жылуөткізгіштік теңдеу үшін біртекті шеттік есептің жалғыз емес шешімі туралы

Мақалада туындалған бұрышты облыста жылуөткізгіштік теңдеуі үшін біртекті шекаралық есеп қарастырылды. Қойылған есеп жай қабатты потенциалдар көмегімен екінші текті псевдо-вольтерр интегралдық теңдеуіне келтірілді. Алынған интегралдық теңдеу реттеу әдісімен шешілді. Осы мақсатта интегралдық теңдеудің сипаттамалық бөлігі айқындалды. Алынған интегралдық теңдеудің өзегі айырымдық теңдеуге келтіру туралы лемма дәлелденіп, оның шешімі жазылды. Өзегі айырымдық болатын теңдеудің резольвентасы үшін бағалауы және оның шешімінің шенелгендік шарты келтірілді. Айырымдық өзекті теңдеу шешімінің айқын түрлендіруі алғашқы интегралдық теңдеуді, жалғыз шешімі болатын әлсіз ерекшелігі бар екінші текті Вольтерр теңдеуіне келтірді. Шешімі операторлық түрде жазылды. Қойылған біртекті шеттік есеп анықталды, салмақты шейлген функциялар класының тұрақты көбейткішіне дейінгі дәлелдікпен нөлдік емес шешімге ие болатыны көрсетілді. Қойылған шеттік есеп үшін шешімдердің жалғыздық класы анықталды.

М.Т. Kosmakova, М.И. Ramazanov, А.С. Tokesheva, А.А. Khairkulova

On the non-uniqueness of solution to the homogeneous boundary value problem for the heat conduction equation in an angular domain

The article deals with the homogeneous boundary value problem for the heat equation in a degenerating angular domain. Using a simple layer potentials the posed problem is reduced to pseudo-Volterra integral equation of the second kind. The obtained integral equation is solved by the method of regularization. For this purpose the characteristic part of the integral equation is allocated. Non-applicability of the method of successive approximations is substantiated for its solving. We have proven the lemma on reducing the obtained integral equation to an equation with a difference kernel and have written its solution. We give

an estimate for the resolvent of the equation with a difference kernel, and the conditions for boundedness of its solutions. The explicit representation of the solution to the equation with a difference kernel leads the initial integral equation to a Volterra equation of the second kind with a weak singularity, which has a unique solution. The solution is written in the operator form. It is shown that the posed homogeneous boundary value problem has a nontrivial solution up to a constant factor in the class of essentially bounded functions with defined weight. Classes of uniqueness for solution to the posed boundary value problem are defined.

References

- 1 Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Equations of mathematical physics*, Moscow: Nauka, 1972, p. 734.
- 2 Gradshtane I.S., Ryzhik I.M. *Tables of integrals, sums, rows and products*, Moscow: Fizmatgiz, 1963, p. 1100.
- 3 Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. *Loaded equations like differential equations disturbances*, Almaty: Gylym, 2010, p. 334.

УДК 517.925

А.А. Кульжумиева¹, Ж.А. Сартабанов²

¹Западно-Казахстанский государственный университет им. М. Утемисова, Уральск;

²Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова

(E-mail: aitan-80@mail.ru)

О приводимости линейной D_e -системы с постоянными на диагонали коэффициентами к D_e -системе с жордановой матрицей в случае эквивалентности ее одному уравнению высшего порядка

В статье предложена методика приведения линейной системы с постоянными на диагонали коэффициентами к каноническому виду при некоторых условиях, налагаемых на собственные значения системы. Используя данную методику, можно исследовать структуры и (θ, ω, ω) -периодические решения линейных систем уравнений с оператором дифференцирования на главной диагонали.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, линейная система, приводимость, жорданова матрица.

В теории колебаний часто встречаются уравнения и системы уравнений с оператором дифференцирования по направлению главной диагонали $t = e\tau$ пространства временных переменных $(\tau, t) = (\tau, t_1, \dots, t_m) \in R \times R \times \dots \times R = R \times R^m$, $R = (-\infty, +\infty)$ вида

$$D_e = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial t_j}, \quad (1)$$

который также называется оператором дифференцирования по Ли в силу системы

$$\frac{dt}{d\tau} = e, \quad (2)$$

где $e = (1, \dots, 1)$ – m -вектор.

В частности, (θ, ω) -периодические по (τ, t) системы вида $D_e x = f(\tau, t, x)$ с дифференциальным оператором D_e тесно связаны с проблемами математической теории многочастотных колебаний [1], где $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$; $\theta = \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m$ – положительные рационально несоизмеримые постоянные. В [2] предложен способ изучения задач (θ, ω) -периодических решений таких систем. Дальнейшее исследование этих проблем выдвинуло изучение систем [3], содержащих характеристику $\sigma = t - e\tau$ оператора D_e .

При исследовании колебательных решений линейных систем уравнений в частных производных первого порядка возникает необходимость приведения матриц с переменными элементами к удобному виду. В этой связи отметим результаты Y. Sibuya [4, 5] и комментарии к ним в монографиях В. Вазова [6], А.М. Самойленко [7] и И.А. Лапшо-Данилевского [8].

Поставим задачу об исследовании приводимости линейной системы с постоянными на диагонали коэффициентами вида

$$D_e x = A(\sigma)x, \quad (3)$$

где D_e – оператор вида (1) с характеристической системой (2), а $n \times n$ – матрица $A(\sigma)$, обладающая свойствами периодичности и гладкости

$$A(\sigma + k\omega) = A(\sigma) \in C_\sigma^{(1)}(R^m), \quad \forall k \in Z^m, \quad (4)$$

$k\omega = (k_1\omega_1, \dots, k_m\omega_m)$ – кратный вектор-период, к системе с жордановой матрицей в случае эквивалентности ее одному D_e -уравнению высшего порядка вида

$$D_e^n u = c_1(\sigma)D_e^{n-1}u + c_2(\sigma)D_e^{n-2}u + \dots + c_n(\sigma)u \quad (5)$$

с дифференцируемыми ω -периодическими коэффициентами. Здесь эквивалентность понимается в смысле перехода из решения (x_1, \dots, x_n) линейной системы (3) к вектор-функции $(u, D_e u, \dots, D_e^{n-1} u)$, полученной из решения $u = u(\sigma, \tau)$ уравнения (5) на основе линейного неособенного преобразования.

Последовательно применяя оператор D_e к обеим частям уравнения (3), имеем

$$D_e x = A(\sigma)x; \tag{6_1}$$

$$D_e^2 x = A^2(\sigma)x; \tag{6_2}$$

.....

$$D_e^{n-1} x = A^{n-1}(\sigma)x; \tag{6_{n-1}}$$

$$D_e^n x = A^n(\sigma)x. \tag{6_n}$$

Теперь из каждой системы (6₁), (6₂), ..., (6_n) выберем l -ое уравнение и составим систему

$$D_e x_l = \sum_{j=1}^n b_{1j}(\sigma)x_j; \tag{7_1}$$

$$D_e^2 x_l = \sum_{j=1}^n b_{2j}(\sigma)x_j; \tag{7_2}$$

.....

$$D_e^{n-1} x_l = \sum_{j=1}^n b_{n-1j}(\sigma)x_j; \tag{7_{n-1}}$$

$$D_e^n x_l = \sum_{j=1}^n b_{nj}(\sigma)x_j, \tag{7_n}$$

где b_{ij} – коэффициенты при x_j l -ой строки произведения $A^i x$ – матрицы A^i и вектора x .

Уравнения (7₁), ..., (7_{n-1}) запишем в виде

$$\begin{cases} x_l = x_l; \\ D_e x_l = b_{1l}(\sigma)x_l + \sum_{l \neq j=1}^n b_{1j}(\sigma)x_j; \\ D_e^2 x_l = b_{2l}(\sigma)x_l + \sum_{l \neq j=1}^n b_{2j}(\sigma)x_j; \\ \dots \\ D_e^{n-1} x_l = b_{n-1l}(\sigma)x_l + \sum_{l \neq j=1}^n b_{n-1j}(\sigma)x_j. \end{cases} \tag{8}$$

Составим матрицу $(n-1) \times (n-1)$ -го порядка вида

$$B^*(\sigma) = \begin{pmatrix} b_{11}(\sigma) & \dots & b_{1,l-1}(\sigma) & b_{1,l+1}(\sigma) & \dots & b_{1n}(\sigma) \\ b_{21}(\sigma) & \dots & b_{2,l-1}(\sigma) & b_{2,l+1}(\sigma) & \dots & b_{2n}(\sigma) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1}(\sigma) & \dots & b_{n-1,l-1}(\sigma) & b_{n-1,l+1}(\sigma) & \dots & b_{nn}(\sigma) \end{pmatrix} \tag{9}$$

и матрицу $B(\sigma)$ порядка $n \times n$ вида

$$B(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{1l}(\sigma) & B^*(\sigma) \\ \dots & \dots \\ b_{n-1,l}(\sigma) & \dots \end{pmatrix} \tag{10}$$

системы уравнений (8).

Предположим, что

$$\det B^*(\sigma) \neq 0, \quad \sigma \in R^m. \quad (11)$$

Лемма. Если для системы (3), обладающей свойством (4), найдется номер $l : 1 \leq l \leq n$, такой, что выполнено условие (11), то D_e -система (3) эквивалентна линейному D_e -уравнению n -го порядка вида (5) относительно x_l .

Тогда из (10) в силу (11) имеем $\det B(\sigma) \neq 0$.

Далее из последних $n - 1$ уравнений системы (8) определим вектор:

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_n)$$

и представим его через

$$(D_e x_l - b_{1,l}(\sigma)x_l, \dots, D_e^{n-1}x_l - b_{n-1,l}(\sigma)x_l) = \Delta(x_l, D_e x_l, \dots, D_e^{n-1}x_l)$$

в виде

$$\tilde{x} = B^{*-1}(\sigma) \cdot \Delta(x_l, D_e x_l, \dots, D_e^{n-1}x_l). \quad (12)$$

Подставив полученное выражение (12) в уравнение (7_n), имеем линейное уравнение

$$D_e^n x_l = c_1(\sigma)D_e^{n-1}x_l + \dots + c_n(\sigma)x_l. \quad (13)$$

Очевидно, что линейная связь между (x_1, x_2, \dots, x_n) и $(x_l, D_e x_l, \dots, D_e^{n-1}x_l)$ реализуется матрицей преобразования $B(\sigma)$, определенной соотношениями (9) и (10).

Лемма доказана.

Допустим, что характеристическое уравнение

$$\lambda^n - c_1(\sigma)\lambda^{n-1} - c_2(\sigma)\lambda^{n-2} - \dots - c_n(\sigma) = 0 \quad (14)$$

имеет корни $\lambda_1(\sigma), \dots, \lambda_s(\sigma)$ кратностей k_1, \dots, k_s , обладающие свойствами:

1⁰) непрерывной дифференцируемости: $\lambda_j(\sigma) \in C_\sigma^{(1)}(R^m)$, $j = \overline{1, n}$;

2⁰) периодичности с периодом $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$: $\lambda_j(\sigma + k\omega) = \lambda_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$, $\sigma \in R^m$, $k \in Z^m$;

3⁰) знакоопределенности $\lambda_j(\sigma)$ для каждого $j = \overline{1, n}$:

а) либо $\lambda_j(\sigma) < 0$, $\forall \sigma \in R^m$;

б) либо $\lambda_j(\sigma) = 0$, $\forall \sigma \in R^m$;

в) либо $\lambda_j(\sigma) > 0$, $\forall \sigma \in R^m$.

4⁰) разделенности:

а) либо $\lambda_j(\sigma) \neq \lambda_l(\sigma)$, $\forall \sigma \in R^m$ для $j \neq l$;

б) либо $\lambda_j(\sigma) = \lambda_l(\sigma)$, $\forall \sigma \in R^m$ для $j \neq l$;

т.е. собственные значения имеют постоянную кратность для всех $\sigma \in R^m$.

При выполнении условий 1⁰) – 4⁰) для собственных значений $\lambda_j(\sigma)$, определенных из уравнения (14), уравнение (13) эквивалентно линейной системе

$$D_e z = C(\sigma)z, \quad (15)$$

где $z = (z_1, \dots, z_n)$ – вектор-функция с координатами

$$z_1 = x_l, \quad z_2 = D_e x_l, \quad \dots, \quad z_n = D_e^{n-1}x_l; \quad (16)$$

$C(\sigma)$ – сопровождающая матрица характеристического уравнения (14) вида

$$C(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ c_n(\sigma) & c_{n-1}(\sigma) & c_{n-2}(\sigma) & \dots & c_1(\sigma) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Таким образом, в конечном счете линейная система (3) свелась к линейной системе (15).

При условиях $1^0) - 4^0)$ известно из [9], что система (15) с матрицей (17) приводится к жордановой форме

$$D_e y = J(\sigma)y \quad (18)$$

при помощи неособого линейного преобразования:

$$y = P(\sigma)z, \quad \det P(\sigma) \neq 0. \quad (19)$$

Переставив l -ое уравнение системы (3) на первое место, его можно записать в виде

$$D_e \tilde{x} = \tilde{A}(\sigma)\tilde{x}, \quad (20)$$

где $\tilde{x} = (x_l, x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_n)$, $\tilde{A}(\sigma)$ – матрица, полученная из матрицы $A(\sigma)$ путем переноса l -ой строки на 1-ую строку

$$\tilde{A}(\sigma) = \begin{pmatrix} a_{l1}(\sigma) & \dots & a_{ln}(\sigma) \\ a_{11}(\sigma) & \dots & a_{1n}(\sigma) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{l-1,1}(\sigma) & \dots & a_{l-1,n}(\sigma) \\ a_{l+1,1}(\sigma) & \dots & a_{l+1,n}(\sigma) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\sigma) & \dots & a_{nn}(\sigma) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Ясно, что матрица (21) может быть представлена в виде

$$\tilde{A}(\sigma) = LA(\sigma)L^{-1},$$

где L – неособенная постоянная матрица преобразования.

Из (20) имеем $\tilde{x} = Lx$. В силу соотношений (8), (10), (16) получим $z = B(\sigma)\tilde{x}$ и на основе (19) определим $y = P(\sigma)z$, тогда связь между x и y устанавливается соотношением

$$x = L^{-1}\tilde{x} = L^{-1}B^{-1}z = L^{-1}B^{-1}P^{-1}y = (PBL)^{-1}y. \quad (22)$$

Следовательно, подстановкой (22) систему (3) приводим к системе (18), причем

$$J(\sigma) = (PB)LA(\sigma)(PBL)^{-1}; \quad (23)$$

$$C(\sigma) = BLA(\sigma)(BL)^{-1}. \quad (24)$$

Из соотношений (23) и (24) получим

$$\det[A(\sigma) - \lambda E] = \det[C(\sigma) - \lambda E] = \det[J(\sigma) - \lambda E]. \quad (25)$$

Так как в силу соотношения (25) характеристическое уравнение $\det[C(\sigma) - \lambda E] = 0$ совпадает с уравнением (14), то собственные значения $\lambda_j(\sigma)$ кратности n_j являются собственными значениями и матрицы $A(\sigma)$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. При выполнении условий леммы, (4), (11) и $1^0) - 4^0)$ для матрицы $A(\sigma)$ система (3) неособенным линейным ω -периодическим и непрерывно дифференцируемым преобразованием (22) приводится к системе (18) с жордановой матрицей $J(\sigma)$.

Например, рассмотрим систему двух уравнений

$$\begin{cases} D_e x_1 = a_{11}(\sigma)x_1 + a_{12}(\sigma)x_2; \\ D_e x_2 = a_{21}(\sigma)x_1 + a_{22}(\sigma)x_2. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем

$$x_2 = \frac{1}{a_{12}(\sigma)}[D_e x_1 - a_{11}(\sigma)x_1].$$

Отсюда получим

$$D_e x_2 = \frac{1}{a_{12}(\sigma)}[D_e^2 x_1 - a_{11}(\sigma)D_e x_1].$$

Подставив полученные выражения во второе уравнение системы, убеждаемся, что она при условии $a_{12} \neq 0$ приводится к линейному уравнению

$$D_e^2 x_1 - [a_{11}(\sigma) + a_{22}(\sigma)]D_e x_2 + [a_{11}(\sigma)a_{22}(\sigma) - a_{12}(\sigma)a_{21}(\sigma)]x_2 = 0,$$

причем характеристические уравнения заданной системы и полученные уравнения совпадают. Действительно,

$$\begin{aligned} \det[A(\sigma) - \lambda E] &= \det \begin{vmatrix} a_{11}(\sigma) - \lambda & a_{12}(\sigma) \\ a_{21}(\sigma) & a_{22}(\sigma) - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^2 - [a_{11}(\sigma) + a_{22}(\sigma)]\lambda + [a_{11}(\sigma)a_{22}(\sigma) - a_{12}(\sigma)a_{21}(\sigma)] = 0. \end{aligned}$$

Если

$$a_{11}(\sigma) + a_{22}(\sigma) = \lambda_1(\sigma) + \lambda_2(\sigma);$$

$$\det A(\sigma) = \lambda_1(\sigma)\lambda_2(\sigma)$$

и собственные значения $\lambda_1(\sigma)$, $\lambda_2(\sigma)$ удовлетворяют условиям периодичности, дифференцируемости, разделенности и знакоопределенности, то согласно доказанной теореме периодическим и непрерывно дифференцируемым преобразованием $P(\sigma)$ заданная система приводится к линейной системе с матрицей $J(\sigma)$ жордановой формы.

Если $\lambda_1(\sigma) \neq \lambda_2(\sigma)$, то $J(\sigma) = \text{diag}[\lambda_1(\sigma), \lambda_2(\sigma)]$, а если $\lambda_0(\sigma) = \lambda_1(\sigma) = \lambda_2(\sigma)$, то

$$J(\sigma) = \begin{pmatrix} \lambda_0(\sigma) & 1 \\ 0 & \lambda_0(\sigma) \end{pmatrix}.$$

В заключение отметим, что исследование подобной задачи можно найти в [9–12].

Список литературы

- 1 Харасахал В.Х. Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. — Алма-Ата: Наука, 1970. — С. 200.
- 2 Сартабанов Ж.А. Об одном способе изучения периодических решений уравнений в частных производных специального вида // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. — 1989. — № 1. — С. 42–48.
- 3 Сартабанов Ж.А. Условия периодичности решений дифференциальных систем с многомерным временем // Изв. НАН МОН РК. Сер. физ.-мат. — 2004. — № 5. — С.44–48.
- 4 Sibuya Y. Some Global Properties of Matrices of Functions of One Variable // Math. Annal. — 1965. — No. 161. — P. 67–77.
- 5 Sibuya Y. Formal Solutions of a Linear Ordinary Differential Equation of the n -th Order at a Turning Point // Funkc. Ekvac. — 1962. — No. 4. — P.115–139.
- 6 Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
- 7 Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
- 8 Лапко-Данилевский И.А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1957. — 456 с.
- 9 Кульжумиева А.А. Периодические решения систем дифференциальных уравнений с многомерным временем: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Алматы, 2009. — С. 20.
- 10 Кульжумиева А.А. Исследование периодических решений, приводимых к каноническому виду систем, с линейным дифференциальным оператором по многомерному времени // Евразийский математический журн. — 2008. — № 2. — С. 69–73.
- 11 Kulzhumiyeva A., Sartabanov Zh. Reducibility of linear D_e -system with constant on diagonal coefficients to D_e -system with Jordanian matrix // International conference on differential equations and dynamical systems. July, 2-7, 2010, Suzdal. — P. 220–221.

- 12 Мухамбетова Б.Ж., Сартабанов Ж.А., Кульжумиева А.А. Многопериодические решения систем уравнений с одним квазилинейным дифференциальным оператором в частных производных первого порядка // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2015. — № 2(78). — С. 112–117.

А.А. Кульжумиева, Ж.А. Сартабанов

Жоғарғы ретті бір теңдеуге эквиваленттілігі жағдайында жордан матрицалы D_e -жүйесіне диагоналда тұрақты коэффициенттер мен сызықты D_e -жүйені келтіру туралы

Мақалада жүйенің меншікті мәніне жатқызылатын кейбір шарттар кезінде диагоналында тұрақты коэффициенттермен берілген сызықты жүйені канондық түрге келтіру әдістемесі қарастырылған. Берілген әдістемені қолдана отырып, негізгі диагоналдағы дифференциалдау операторымен сызықты теңдеулер жүйесінің (θ, ω, ω) -периодты шешімдері мен құрылымдарын зерттеуге болады.

A.A. Kulzhumiyeva, Zh.A. Sartabanov

On reducibility of linear D_e -system with constant coefficients on the diagonal to D_e -system with Jordan matrix in the case of equivalence of its higher order one equation

In article proposed the method of bringing a linear system with constant coefficients on the diagonal to canonical form under some conditions on the own values of the system. Using this method, you can examine the structure and (θ, ω, ω) -periodic solutions of linear systems of equations with differential operator on the main diagonal.

References

- 1 Harasahal V.Kh. *Almost periodic solutions of ordinary differential equations*, Alma-Ata: Gylym, 1970, 200 p.
- 2 Sartabanov Zh.A. *Izvestiya AN KazSSR. Ser. phys.-math.*, 1989, 1, p. 42–48.
- 3 Sartabanov Zh.A. *Izvestiya NAN MON RK. Ser. phys.-math.*, 2004, 5, p. 44–48.
- 4 Sibuya Y. *Math. Annal.*, 1965, 161, p. 67–77.
- 5 Sibuya Y. *Funkc. Ekvac.*, 1962, 4, p. 115–139.
- 6 Vazov V. *Asymptotic expansions of ordinary differential equations*, Moscow: Mir, 1968, 464 p.
- 7 Samoilenko A.M. *Elements of the mathematical theory of multifrequency oscillations. Invariant tori*, Moscow: Nauka, 1987, 304 p.
- 8 Lappo-Danilevskiy I.A. *The use functions of matrix to the theory of linear systems of ordinary differential equations*, Moscow: GITTL, 1957, 456 p.
- 9 Kulzhumiyeva A.A. *Periodic solutions of systems of differential equations with multidimensional time: abstract. dis. . . phis.-math. cand. sci.*, Almaty, 2009, p. 20.
- 10 Kulzhumiyeva A.A. *Eurasian Mathematical Journal*, 2008, 2, p. 69–73.
- 11 Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh. *International conference on differential equations and dynamical systems*, July, 2-7, 2010, Suzdal, p. 220–221.
- 12 Mukhambetova B.Zh., Sartabanov Zh.A., Kulzhumiyeva A.A. *Bull. of the Karaganda University. Mathematics ser.* 2015, 2(78), p. 112–117.

УДК 521.1

М.Д. Минглибаев^{1,2}, Г.М. Маемерова¹, Ж.У. Иманова¹

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы;

²Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Алматы

(E-mail: mayemerova@gmail.com)

Вековые возмущения в задаче трех тел с массами, изменяющимися неизотропно в различных темпах

В статье исследована задача трех тел с переменными массами, изменяющимися неизотропно в различных темпах в общем случае. Из-за неизотропного изменения масс появляются реактивные силы. Методами теории возмущения получены канонические уравнения вековых возмущений задачи трех тел с неизотропно изменяющимися массами в различных темпах. Законы изменения масс считаются произвольными. Найдены приближенно-аналитические решения уравнений вековых возмущений в аналогах второй системы элементов Пуанкаре по методу Пикара. На основе этих решений можно сделать анализ эволюции аналогов элементов орбиты. Полученные результаты можно использовать при анализе динамической эволюции тройных гравитирующих систем с неизотропно изменяющимися массами при наличии реактивных сил.

Ключевые слова: задача трех тел, переменные массы, вековые возмущения, аналоги второй системы элементов Пуанкаре, метод Пикара.

Введение

Общеизвестно, что реальные космические тела — нестационарные, так как со временем их массы, размеры, формы и структура распределения масс внутри тел изменяются. Эти процессы особенно интенсивно происходят в двойных и кратных системах [1–5]. В связи с этим исследуется задача трех тел с массами, изменяющимися неизотропно в различных темпах. Тела рассматриваются как сферические тела переменного радиуса со сферическим распределением масс (далее сферические тела).

Следует отметить, что в проблеме трех тел с переменными массами, изменяющимися неизотропно в различных темпах в общем случае, неизвестно ни одного интеграла. Поэтому рассматриваемая задача исследуется методами теории возмущения [5–8].

1 Задача трех тел с неизотропно изменяющимися массами в различных темпах

Рассмотрим систему трех взаимогравитирующих сферических небесных тел T_0 , T_1 и T_2 с переменными массами

$$m_0 = m_0(t), \quad m_1 = m_1(t), \quad m_2 = m_2(t), \quad (1)$$

изменяющимися неизотропно в различных темпах (закон изменения масс произвольный) [5]:

$$\frac{\dot{m}_0}{m_0} \neq \frac{\dot{m}_1}{m_1}, \quad \frac{\dot{m}_0}{m_0} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}, \quad \frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}. \quad (2)$$

Исходя из уравнения Мещерского [9], запишем уравнения движения задачи трех тел с переменными массами при наличии реактивных сил в абсолютной системе координат:

$$m_j \ddot{\vec{R}}_j = \text{grad}_{\vec{R}_j} U + \dot{m}_j \vec{V}_j, \quad U = f \left(\frac{m_0 m_1}{R_{01}^*} + \frac{m_0 m_2}{R_{02}^*} + \frac{m_1 m_2}{R_{12}^*} \right),$$

где \vec{u}_j — абсолютная скорость отделяющихся частиц;

$$\vec{V}_j = \vec{u}_j - \dot{\vec{R}}_j \neq 0, \quad \forall \vec{V}_j, \quad j = 0, 1, 2, \quad (3)$$

— относительная скорость отделяющихся частиц; \vec{R}_j — радиус-вектор центра сферических тел; \vec{R}_{ij}^* — расстояние между центрами сферических тел; f — гравитационная постоянная. Следуя Л.Г. Лукьянову [4], будем считать, что реактивные силы приложены к центру соответствующих сферических тел. Обычно в наблюдательной астрономии для конкретных небесных тел определяются законы изменения масс (1)–(2) и относительные скорости отделяющихся частиц (3). Поэтому будем считать, что величины (1), (3) известны.

2 Уравнения вековых возмущений двухпланетной задачи трех тел с неизотропно изменяющимися массами в различных темпах

Отметим, что уравнения движения в относительной системе координат, в координатах Якоби, в оскулирующих элементах аperiодического движения по квазиконическому сечению, в аналогах элементов Якоби и Делоне приведены в работе [6].

Далее исследование уравнений вековых возмущений сводится к решению следующей системы неавтономных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \frac{\partial R_{i\text{век}}^*}{\partial \eta_i}; & \dot{p}_i &= \frac{\partial R_{i\text{век}}^*}{\partial q_i}; \\ \dot{\eta}_i &= -\frac{\partial R_{i\text{век}}^*}{\partial \xi_i}; & \dot{q}_i &= -\frac{\partial R_{i\text{век}}^*}{\partial p_i}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $R_{i\text{век}}^*$ — возмущающие функции [6–8]; ξ_i, η_i, p_i, q_i — аналоги второй системы элементов Пуанкаре [5]. В настоящей работе в разложении в ряд возмущающей функции сохранены слагаемые с точностью до второй степени включительно малых величин $m_1, m_2, e_1, e_2, i_1, i_2$ [6–8]. Таким образом, в аналогах второй системы элементов Пуанкаре вековые выражения для $R_{1\text{век}}^*, R_{2\text{век}}^*$ имеют вид [7, 8]

$$\begin{aligned} R_{1\text{век}}^* &= \frac{1}{\gamma_1^2} \cdot \frac{\tilde{\beta}_1^4}{2\mu_{10}\Lambda_1^2} + F_{01} + F_{12\text{век}1} + F_{\rho 1\text{век}} + \Phi_{1\text{век}}; \\ R_{2\text{век}}^* &= \frac{1}{\gamma_2^2} \cdot \frac{\tilde{\beta}_2^4}{2\mu_{20}\Lambda_2^2} + F_{02} + F_{12\text{век}2} + F_{\rho 2\text{век}} + V_{\text{век}} + \Phi_{2\text{век}}; \\ F_{01} &= -\frac{b_1\gamma_1^2 a_1^2}{2\psi_1} - f \frac{m_1 m_2}{\gamma_2 \psi_1 a_2}, & F_{12\text{век}1} &= \frac{f}{\psi_1} \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right]_{\text{век}}, & F_{\rho 1\text{век}} &= -\frac{3b_1\gamma_1^2 a_1^2}{4\Lambda_1 \psi_1} (\xi_1^2 + \eta_1^2); \\ F_{02} &= -\frac{b_2\gamma_2^2 a_2^2}{2\psi_2} - f \frac{m_1 m_2}{\gamma_2 \psi_2 a_2}, & F_{12\text{век}2} &= \frac{f}{\psi_2} \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right]_{\text{век}}, & F_{\rho 2\text{век}} &= -\frac{3b_2\gamma_2^2 a_2^2}{4\Lambda_2 \psi_2} (\xi_2^2 + \eta_2^2); \\ V_{\text{век}} &= -\frac{9a_1 a_2 \mu_2 \gamma_2 (2\dot{\gamma}_1 \dot{\nu}_1 + \gamma_1 \ddot{\nu}_1)}{14\sqrt{\Lambda_1} \sqrt{\Lambda_2} \psi_2} (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2); \\ \Phi_{1\text{век}} &= \frac{3a_1 \gamma_1(t)}{2\psi_1 \sqrt{\Lambda_1}} \left\{ -F_{1x}(t) \xi_1 + F_{1y}(t) \eta_1 + \frac{F_{1z}(t)}{\sqrt{\Lambda_1}} [(-\xi_1 q_1 + \eta_1 p_1)] \right\}; \\ \Phi_{2\text{век}} &= \frac{3a_2 \gamma_2(t)}{2\psi_2 \sqrt{\Lambda_2}} \left\{ -F_{2x}(t) \xi_2 + F_{2y}(t) \eta_2 + \frac{F_{2z}(t)}{\sqrt{\Lambda_2}} [(-\xi_2 q_2 + \eta_2 p_2)] \right\}; \\ \vec{F}_1 &= \frac{\dot{m}_1}{m_1} \vec{V}_1 - \frac{\dot{m}_0}{m_0} \vec{V}_0 \neq 0, & \vec{F}_2 &= \left(\frac{\dot{m}_2}{m_2} \vec{V}_2 - \frac{\dot{m}_0}{m_0} \vec{V}_0 \right) - \nu_1 \left(\frac{\dot{m}_1}{m_1} \vec{V}_1 - \frac{\dot{m}_0}{m_0} \vec{V}_0 \right) \neq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Анализ формул (4)–(5) показывает, что уравнения вековых возмущений при наличии реактивных сил в случае неизотропного изменения масс не расщепляются на две системы относительно элементов ξ_i, η_i и p_i, q_i .

Основной целью настоящей работы является выявить явный вид уравнений (4) и методом Пикара найти их приближенные аналитические решения. На основе этих решений получить явный вид уравнений аналогов элементов орбиты.

3 Каноническая система уравнений вековых возмущений в аналогах второй системы элементов Пуанкаре

Уравнения вековых возмущений для эксцентрических элементов ξ_i, η_i имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \frac{\partial F_{1\text{век}}^*}{\partial \eta_1}; & \dot{\eta}_1 &= -\frac{\partial F_{1\text{век}}^*}{\partial \xi_1}; \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{\partial F_{2\text{век}}^*}{\partial \eta_2}; & \dot{\eta}_2 &= -\frac{\partial F_{2\text{век}}^*}{\partial \xi_2},\end{aligned}\tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}F_{1\text{век}}^*(\xi_i, \eta_i, p_i, q_i, t) &= F(\xi_i, \eta_i) + K_6(\eta_1 p_1 - \xi_1 q_1); \\ F_{2\text{век}}^*(\xi_i, \eta_i, p_i, q_i, t) &= F'(\xi_i, \eta_i) + K'_6(\eta_2 p_2 - \xi_2 q_2); \\ F(\xi_i, \eta_i) &= K_0 + K_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + K_2(\xi_2^2 + \eta_2^2) + K_3(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2) + K_4 \xi_1 + K_5 \eta_1; \\ F'(\xi_i, \eta_i) &= K'_0 + K'_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + K'_2(\xi_2^2 + \eta_2^2) + K'_3(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2) + K'_4 \xi_2 + K'_5 \eta_2.\end{aligned}$$

Следует отметить, что задача становится еще сложнее из-за изменения масс неізотропно и, соответственно, добавления реактивной силы. В связи с этим в данной подстановке появляются новые величины, которые имеют вид

$$\begin{aligned}K_4 &= -\frac{3a_1 F_{1x}(t) \gamma_1(t)}{2\psi_1 \sqrt{\Lambda_1}}; & K_5 &= \frac{3a_1 F_{1y}(t) \gamma_1(t)}{2\psi_1 \sqrt{\Lambda_1}}; & K_6 &= \frac{3a_1 F_{1z}(t) \gamma_1(t)}{2\psi_1 \Lambda_1}; \\ K'_4 &= -\frac{3a_2 F_{2x}(t) \gamma_2(t)}{2\psi_2 \sqrt{\Lambda_2}}; & K'_5 &= \frac{3a_2 F_{2y}(t) \gamma_2(t)}{2\psi_2 \sqrt{\Lambda_2}}; & K'_6 &= \frac{3a_2 F_{2z}(t) \gamma_2(t)}{2\psi_2 \Lambda_2},\end{aligned}$$

а величины $K_0, K_1, K_2, K_3, K'_0, K'_1, K'_2, K'_3$ получены в работе [8]:

Уравнения вековых возмущений для облических элементов p_i, q_i определяются следующим образом [8]:

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= \frac{\partial \tilde{F}_{1\text{век}}^*}{\partial q_1}; & \dot{q}_1 &= -\frac{\partial \tilde{F}_{1\text{век}}^*}{\partial p_1}; \\ \dot{p}_2 &= \frac{\partial \tilde{F}_{2\text{век}}^*}{\partial q_2}; & \dot{q}_2 &= -\frac{\partial \tilde{F}_{2\text{век}}^*}{\partial p_2},\end{aligned}\tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{1\text{век}}^*(\xi_i, \eta_i, p_i, q_i, t) &= \psi_1^* F(p_1, q_1) + K_6(\eta_1 p_1 - \xi_1 q_1); \\ \tilde{F}_{2\text{век}}^*(\xi_i, \eta_i, p_i, q_i, t) &= \psi_2^* F(p_1, q_1) + K'_6(\eta_2 p_2 - \xi_2 q_2); \\ F(p_i, q_i) &= K_1^*(p_1^2 + q_1^2) + K_2^*(p_2^2 + q_2^2) + K_3^*(p_1 p_2 + q_1 q_2); \\ \psi_1^* &= -\frac{f m_1 m_2 \nu_0 B_1}{8\psi_1}; & \psi_2^* &= -\frac{f m_1 m_2 \nu_0 B_1}{8\psi_2}; & K_1^* &= \frac{1}{\Lambda_1}; & K_2^* &= \frac{1}{\Lambda_2}; & K_3^* &= -\frac{2}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}}.\end{aligned}$$

4 Приближенно-аналитическое решение уравнений вековых возмущений в аналогах второй системы элементов Пуанкаре по методу Пикара

Запишем в явном виде систему уравнений (6)–(7):

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= K_5 + K_6 p_1 + 2K_1 \eta_1 + K_3 \eta_2; & \dot{\eta}_1 &= K_4 - K_6 q_1 + 2K_1 \xi_1 + K_3 \xi_2; \\ \dot{\xi}_2 &= K'_5 + K'_6 p_2 + 2K'_2 \eta_2 + K'_3 \eta_1; & \dot{\eta}_2 &= K'_4 - K'_6 q_2 + 2K'_2 \xi_2 + K'_3 \xi_1;\end{aligned}\tag{8}$$

$$\dot{p}_1 = -K_6 \xi_1 + 2\psi_1^*(t) \left(\frac{q_1}{\Lambda_1} - \frac{q_2}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \right); \quad \dot{q}_1 = K_6 \eta_1 + 2\psi_1^*(t) \left(\frac{p_1}{\Lambda_1} - \frac{p_2}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \right); \tag{9}$$

$$\dot{p}_2 = -K'_6 \xi_2 + 2\psi_2^*(t) \left(\frac{q_2}{\Lambda_2} - \frac{q_1}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \right); \quad \dot{q}_2 = K'_6 \eta_2 + 2\psi_2^*(t) \left(\frac{p_2}{\Lambda_2} - \frac{p_1}{\sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2}} \right).$$

Используя метод Пикара, напишем решения уравнений (8), (9) в следующем виде:

$$\vartheta_k(t) = \vartheta_k(t_0) + \int_{t_0}^t \Pi_i^{**}(t, \vartheta_k(t_0)) dt, \quad (10)$$

где $\Pi_i^{**}(t, \vartheta_k)$ — правые части уравнений (8), (9); ϑ_k — элементы ξ_i, η_i, p_i, q_i ; $\vartheta_{k0} = \vartheta_k(t_0)$ — их значения в начальный момент времени.

Решения уравнений (10) позволяют анализировать эволюцию аналогов эксцентриситетов e_i , наклонений i_i , аргумента перицентров ω_i и движения долготы восходящих узлов Ω_i , долготы перицентров π_i :

$$e_i^2 = \frac{\vartheta_{\xi_i}^2 + \vartheta_{\eta_i}^2}{\Lambda_i}; \quad \sin^2 i_i = \frac{\vartheta_{p_i}^2 + \vartheta_{q_i}^2}{\Lambda_i};$$

$$\Omega_i = -\arctg \frac{\vartheta_{q_i}}{\vartheta_{p_i}}; \quad \pi_i = -\arctg \frac{\vartheta_{\eta_i}}{\vartheta_{\xi_i}}; \quad \omega_i = \pi_i - \Omega_i; \quad i = 1, 2.$$

Следует отметить, что все вычисления были проделаны с применением системы аналитических вычислений Mathematica [9].

Заключение

В работе рассмотрена задача трех взаимогравитирующих сферических небесных тел с переменными массами, изменяющимися неизотропно в различных темпах в общем случае. Впервые получена система из восьми уравнений вековых возмущений первого порядка в аналогах второй системы элементов Пуанкаре при наличии реактивных сил. Найдены приближенно-аналитические решения уравнений вековых возмущений в аналогах второй системы элементов Пуанкаре по методу Пикара. На основе этих решений можно провести анализ эволюции аналогов элементов орбиты.

Результаты настоящей работы можно использовать при анализе динамической эволюции тройных гравитирующих систем с неизотропно изменяющимися массами при наличии реактивных сил.

Список литературы

- 1 *Omarov T.B. (Editor) Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy.* — New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002. — P. 260.
- 2 *Bekov A.A., Omarov T.B. The Theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems // Astron. and Astrophys. Transactions.* — 2003. — Vol. 22. — No. 2. — P. 145–153.
- 3 *Eggleton P. Evolutionary processes in binary and multiple stars.* — UK: Cambridge University Press, 2006. — P. 332.
- 4 *Лукьянов Л.Г. Динамическая эволюция орбит звезд в тесных двойных системах с консервативным обменом масс // Астрон. журн.* — 2008. — Т. 85. — № 8. — С. 755–768.
- 5 *Минглибаев М.Д. Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. Поступательное и поступательно-вращательное движение.* — Германия: LAP LAMBERT Academic Publ., 2012. — С. 229.
- 6 *Минглибаев М.Д., Маемерова Г.М., Иманова Ж.У. Уравнения движения задачи трех тел с переменными массами при наличии реактивных сил // Вестн. ЕНУ им. Л.Н. Гумилева.* — 2016. — Т. 111. — № 2. — С. 19–25.
- 7 *Прокопья А.Н., Минглибаев М.Д., Маемерова Г.М. Символьные вычисления в исследованиях проблемы трех тел с переменными массами // Программирование.* — 2014. — Т. 40. — № 2. — С. 51–59.
- 8 *Минглибаев М.Д., Маемерова Г.М. Эволюция ориентации орбитальных плоскостей двухпротопланетной задачи трех тел с переменными массами // Астрон. журн.* — 2014. — Т. 91. — № 9. — С. 762–772.
- 9 *Прокопья А.Н. Решение физических задач с использованием системы Mathematica.* — Брест: Изд-во БГТУ, 2005. — С. 260.

М.Д. Минглибаев, Г.М. Маемерова, Ж.У. Иманова

Массалары әр түрлі қарқында изотропсыз өзгертін үш дене есебіндегі ғасырлық ұйытқулар

Мақалада массалары әр түрлі қарқында изотропсыз өзгертін үш дене мәселесі жалпы жағдайда қарастырылған. Массаның изотропсыз өзгеруінен реактивті күштер пайда болады. Ғасырлық ұйытқу теориясының әдістерімен массалары әр түрлі қарқында изотропсыз өзгертін үш дене мәселесінің канондық ғасырлық ұйытқу теңдеулері алынды. Денелердің массалары кез келген заңдылықпен өзгереді. Пикар әдісінің көмегімен Пуанкаре элементтері аналогтарының екінші жүйесінде ғасырлық ұйытқу теңдеулерінің жуық аналитикалық шешімдері табылды. Бұл шешімдердің негізінде орбита элементтері аналогтарының эволюциясы сипатталды. Алынған нәтижелерді реактивті күштер аясында изотропты емес массалары бар динамикалық үш гравитациялық жүйелерін талдауда қолдануға болады.

M.D. Minglibayev, G.M. Mayemerova, Zh.U. Imanova

Secular perturbations in the three-body problem with masses changing anisotropically at the different rates

In this article we investigate the three-body problem with variable masses changing non-isotropically at the different rates in the general case. In this case due to non-isotropically mass changes appear reactive forces. Using the methods of the perturbation theory are obtained the canonical equations of secular perturbations of the three-body problem with masses changing non-isotropically at the different rates. The mass change laws are considered arbitrary. Using Picard's method in the analogues of the second system of the Poincare elements are found approximate analytical solutions of the equations of secular perturbations. On basis of these solutions is possible to do the analysis of the evolution of the analogues elements of the orbit. It can be used in the analysis of the dynamical evolution of triple gravitating systems with varying anisotropic reactive in the presence of the masses forces.

References

- 1 Omarov T.B. *Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy*, New-York: Nova Science Publ. Inc., 2002, p. 260.
- 2 Bekov A.A., Omarov T.B. *Astron. and Astrophys. Transactions*, 2003, 22, 2, p. 145–153.
- 3 Eggleton P. *Evolutionary processes in binary and multiple stars*. UK: Cambridge University Press, 2006, p. 332.
- 4 Luk'yanov L.G., *Astrophysical Journal*, 2008, 85, 8, p. 755–768.
- 5 Minglibayev M.D. *The dynamics of gravitating bodies with variable masses and dimensions. Progressive and progressive-rotational movement*, Germany: LAP LAMBERT Academic Publ., 2012, p. 229.
- 6 Minglibayev M.D., Mayemerova G.M., Imanova Zh.U. *Bull. L.N. Gumilyov ENU*, 2016, 111, 2, p. 19–25.
- 7 Prokopenya A.N., Minglibayev M.D., Mayemerova G.M. *Programming*, 2014, 40, 2, p. 51–59.
- 8 Minglibayev M.D., Mayemerova G.M. *Astron. Journal*, 2014, 91, 9, p. 762–772.
- 9 Prokopenya A.N. *The solution of physical problems using mathematics system*, Brest: BSTU Publ., 2005, p. 260.

UDC 517.948.34

A.E. Mirzakulova, N. Atakhan

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty
(E-mail: aziza.mirzakulova@mail.ru)

Construction of the solution of the boundary value problem for integro differential equation with a small parameter in highest derivatives

The article is devoted to the study analytical formula of solution of boundary value problem with initial jump for a linear integro-differential equation of $n+m$ order with a small parameter in the highest derivatives. In this paper singular perturbed homogeneous differential equation of $n+m$ order are constructed fundamental system of solutions. With the fundamental system of solutions are constructed Cauchy function and boundary functions. Using Cauchy function and boundary functions are obtained explicit analytical formula of solution of considered local boundary value problem for singular perturbed integro-differential equation of high order.

Key words: singularly perturbation, small parameter, boundary functions, Cauchy function, initial jump.

1 Statement of the problem

Consider the following integro differential equation with a small parameter in the highest derivatives

$$L_\varepsilon y \equiv \sum_{r=1}^m \varepsilon^r A_{n+r}(t) \frac{d^{n+r}y}{dt^{n+r}} + \sum_{k=0}^n A_k(t) \frac{d^k y}{dt^k} = F(t) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{l-m+1} H_j(t, x) y^{(j)}(x, \varepsilon) dx \quad (1)$$

with boundary conditions

$$h_i y \equiv \left. \frac{d^i y}{dt^i} \right|_{t=0} = \alpha_i, \quad i = \overline{0, l-1}, \quad h_{l+i} y \equiv \left. \frac{d^i y}{dt^i} \right|_{t=1} = \beta_i, \quad i = \overline{0, p-1}, \quad (2)$$

where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, α_i, β_i are known constants independent of ε , $A_{n+m}(t) = 1$, $m+n = l+p$.

Assume that following conditions hold:

I. $A_i(t) \in C^{n+m+1}([0, 1])$, $i = \overline{0, n+m}$, $F(t) \in C([0, 1])$ and functions $H_j(t, x)$ $j = \overline{0, l-m+1}$ are defined in the domain $D = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ and sufficiently smooth.

II. $A_n(t) \neq 0$, $0 \leq t \leq 1$;

III. The roots $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \dots \neq \mu_m$ of "additional characteristic equation" $\mu^m + A_{n+m-1}(t)\mu^{m-1} + \dots + A_{n+1}(t)\mu + A_n(t) = 0$ satisfy the following inequalities $Re\mu_1 < 0, Re\mu_2 < 0, \dots, Re\mu_m < 0$ and $m < l$.

Similarly boundary value problem for ordinary differential equation was considered in [1]. In the particular case, similarly boundary value problem for singular perturbed integro-differential equation for this case $m = 2$ and $l = 2$ was considered in [2,3].

2 Construction of the fundamental system of solutions

We consider the following homogeneous singularly perturbed equation associated with (1):

$$L_\varepsilon y \equiv \sum_{r=1}^m \varepsilon^r A_{n+r}(t) \frac{d^{n+r}y}{dt^{n+r}} + \sum_{k=0}^n A_k(t) \frac{d^k y}{dt^k} = 0. \quad (3)$$

The fundamental system of solutions of (3) in the interval $0 \leq t \leq 1$ has the following asymptotic representation as $\varepsilon \rightarrow 0$ [4]:

$$y_i^{(q)}(t, \varepsilon) = y_{i0}^{(q)}(t) + O(\varepsilon), \quad i = \overline{1, n}, \quad q = \overline{0, n+m-1};$$

$$y_{n+r}^{(q)}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_r(x) dx\right) (\mu_r^q(t) y_{n+r,0}(t) + O(\varepsilon)), \quad r = \overline{1, m}, \quad q = \overline{0, n+m-1},$$

where functions $y_{i0}(t)$, $i = \overline{1, n}$ are solutions of the problem

$$\sum_{k=0}^n A_k(t) \frac{d^k y_{i0}}{dt^k} = 0, \quad y_{j0}^{(i-1)}(0) = \delta_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n},$$

δ_{ij} is a Kronecker symbol and functions $y_{n+r,0}(t)$, $r = \overline{1, m}$ are solutions of the problem

$$p_r(t) \cdot y'_{n+r,0}(t) + q_r(t) \cdot y_{n+r,0}(t) = 0, \quad y_{n+r,0}(0) = 1, \quad r = \overline{1, m},$$

where functions $p_r(t), q_r(t), r = \overline{1, m}$ are defined the following formula

$$p_r(t) = \sum_{i=0}^m (n+i) A_{n+i}(t) \mu_{r0}^{n+i-1}(t), \quad r = \overline{1, m};$$

$$q_r(t) = \mu'_{r0}(t) \sum_{i=0}^m C_{n+i}^2 A_{n+i}(t) \mu_{r0}^{n+i-2}(t) + A_{n-1}(t) \mu_{r0}^{n-1}(t), \quad r = \overline{1, m};$$

$$C_{n+i}^2 = \frac{(n+i)!}{2!(n+i-2)!}, \quad i = \overline{0, m}.$$

3 Construction of Cauchy function

Definition 1. Function $K(t, s, \varepsilon)$ is called Cauchy function, if it is a solution of the problem

$$L_\varepsilon K(t, s, \varepsilon) = 0, \quad t \neq s;$$

$$K^{(j)}(s, s, \varepsilon) = 0, \quad j = \overline{0, n+m-2}, \quad K^{n+m-1}(s, s, \varepsilon) = 1,$$

and Cauchy function can be represented as

$$K(t, s, \varepsilon) = \frac{W(t, s, \varepsilon)}{W(s, \varepsilon)},$$

where $W(s, \varepsilon)$ is the Wronskian of the fundamental system of solutions $y_1(s, \varepsilon), y_2(s, \varepsilon), \dots, y_{n+m}(s, \varepsilon)$ of (3), $W(t, s, \varepsilon)$ is the $n+m$ -th order determinant obtained from the Wronskian $W(s, \varepsilon)$ by replacing the $n+m$ -th row with $y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), \dots, y_{n+m}(t, \varepsilon)$.

4 Construction of boundary functions

Definition 2. Functions $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n+m}$ are called boundary functions for the boundary value problem (1) and (2), if they satisfy the following problem

$$L_\varepsilon \Phi_i(t, \varepsilon) = 0, \quad i = \overline{1, n+m};$$

$$h_k \Phi_i(t, \varepsilon) = \delta_{ki}, \quad i = \overline{1, n+m}, \quad k = \overline{1, l+p},$$

where δ_{ki} is a Kronecker symbol and boundary functions $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n+m}$ can be represented in the form

$$\Phi_i(t, \varepsilon) = \frac{J_i(t, \varepsilon)}{J(\varepsilon)},$$

where

$$J(\varepsilon) = \begin{vmatrix} h_1 y_1(t, \varepsilon) & \dots & h_1 y_{n+m}(t, \varepsilon) \\ h_2 y_1(t, \varepsilon) & \dots & h_2 y_{n+m}(t, \varepsilon) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{l+p} y_1(t, \varepsilon) & \dots & h_{l+p} y_{n+m}(t, \varepsilon) \end{vmatrix}.$$

$J_i(t, \varepsilon)$ is the determinant obtained from $J(\varepsilon)$ by replacing the i -th row by the fundamental system of solutions $y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), \dots, y_{n+m}(t, \varepsilon)$ of (3).

IV. $J(\varepsilon) \neq 0$.

5 Analytical formula of solution

Denote by the right-hand side of equation (1)

$$z(t, \varepsilon) = F(t) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{l-m+1} H_j(t, x) y^{(j)}(x, \varepsilon) dx. \quad (4)$$

We seek the solution of differential equation $L_\varepsilon y = z(t, \varepsilon)$ in the form

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n+m} C_i \Phi_i(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^t K(t, s, \varepsilon) z(s, \varepsilon) ds, \quad (5)$$

where $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n+m}$ are boundary functions, $K(t, s, \varepsilon)$ is Cauchy function, C_i , $i = \overline{1, n+m}$ are unknown constants, $z(t, \varepsilon)$ is an unknown function.

Substituting function (5) into equality (4), we obtain the following expression:

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) &= F(t) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{l-m+1} H_j(t, x) \sum_{i=1}^{n+m} C_i \Phi_i^{(j)}(x, \varepsilon) dx + \\ &+ \int_0^1 \sum_{j=0}^{l-m+1} H_j(t, x) \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^t K^{(j)}(t, s, \varepsilon) z(s, \varepsilon) ds dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Replacing the order of sum and integral of equality (6), we obtain

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) &= F(t) + \sum_{i=1}^{n+m} C_i \int_0^1 \sum_{j=0}^{l-m+1} H_j(t, x) \Phi_i^{(j)}(x, \varepsilon) dx + \\ &+ \int_0^1 z(s, \varepsilon) ds \frac{1}{\varepsilon^m} \int_s^1 \sum_{j=0}^{l-m+1} H_j(t, x) K^{(j)}(t, s, \varepsilon) dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Introducing of additional symbols of (7), we obtain the following Fredholm integral equation of the second kind:

$$z(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon) + \int_0^1 H(t, s, \varepsilon) z(s, \varepsilon) ds, \quad (8)$$

where

$$\begin{aligned} f(t, \varepsilon) &= F(t) + \sum_{i=1}^{n+m} C_i \int_0^1 \sum_{j=0}^{l-m+1} H_j(t, x) \Phi_i^{(j)}(x, \varepsilon) dx; \\ H(t, s, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^m} \int_s^1 \sum_{j=0}^{l-m+1} H_j(t, x) K^{(j)}(x, s, \varepsilon) dx. \end{aligned}$$

V. 1 is not an eigenvalue of the kernel $H(t, s, \varepsilon)$.

In view of condition V integral equation (8) has an unique solution, that can be represented in the form

$$z(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon) + \int_0^1 R(t, s, \varepsilon) f(s, \varepsilon) ds, \quad (9)$$

where $R(t, s, \varepsilon)$ is a resolvent of the kernel $H(t, s, \varepsilon)$.

Substituting equality (9) into function (5), we obtain analytical formula of solution of boundary value problem (1) and (2):

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n+m} C_i Q_i(t, \varepsilon) + P(t, \varepsilon), \tag{10}$$

where $C_i, i = \overline{1, n+m}$ are unknown constants, functions $Q_i(t, \varepsilon), i = \overline{1, n+m}, P(t, \varepsilon)$ can be represented in the form

$$Q_i(t, \varepsilon) = \Phi_i(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^t K(t, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_i(s, \varepsilon) ds, \quad i = \overline{1, n+m}; \tag{11}$$

$$P(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^t K(t, s, \varepsilon) \bar{F}(s, \varepsilon) ds, \tag{12}$$

where $\Phi_i(t, \varepsilon), i = \overline{1, n+m}$ are boundary functions, $K(t, s, \varepsilon)$ is Cauchy function, functions $\bar{\varphi}_i(s, \varepsilon), i = \overline{1, n+m}, \bar{F}(s, \varepsilon)$ can be represented in the form

$$\bar{\varphi}_i(s, \varepsilon) = \int_0^1 \sum_{j=0}^{l-m+1} \bar{H}_j(s, x, \varepsilon) \Phi_i^{(j)}(x, \varepsilon) dx, \quad i = \overline{1, n+m};$$

$$\bar{H}_j(s, x, \varepsilon) = H_j(s, x) + \int_0^1 R(s, p, \varepsilon) H_j(p, x) dp, \quad j = \overline{0, l-m+1};$$

$$\bar{F}(s, \varepsilon) = F(s) + \int_0^1 R(s, p, \varepsilon) F(p) dp.$$

Using boundary conditions (2) into solution (10), we find constants $C_i = \alpha_{i-1}, i = \overline{1, l}$ and for determining constants $C_{l+i}, i = \overline{1, p}$, we need to solve the system of algebraic equation

$$\begin{cases} C_{l+1}(1 + d_{l+1}(1, \varepsilon)) + C_{l+2}d_{l+2}(1, \varepsilon) + \dots + C_{l+p}d_{l+p}(1, \varepsilon) = \beta_0 - e(1, \varepsilon) - \sum_{i=1}^l \alpha_{i-1}d_i(1, \varepsilon) \\ \dots\dots\dots \\ C_{l+1}d_{l+1}^{(p-1)}(1, \varepsilon) + C_{l+2}d_{l+2}^{(p-1)}(1, \varepsilon) + \dots + C_{l+p}(1 + d_{l+p}^{(p-1)}(1, \varepsilon)) = \beta_{p-1} - e^{p-1}(1, \varepsilon) - \\ - \sum_{i=1}^l \alpha_{i-1}d_i^{(p-1)}(1, \varepsilon), \end{cases} \tag{13}$$

where

$$d_i^{(j)}(1, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^1 K^{(j)}(1, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_i(s, \varepsilon) ds, \quad i = \overline{1, l+p}, \quad j = \overline{0, p-1};$$

$$e^{(j)}(1, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^1 K^{(j)}(1, s, \varepsilon) \bar{F}(s, \varepsilon) ds, \quad j = \overline{0, p-1}.$$

Let the main determinant $\Delta(\varepsilon) = \bar{\Delta} + O(\varepsilon)$ of system (13).

VI. $\bar{\Delta} \neq 0$.

Theorem. Let the conditions I-VI are valid. Then boundary value problem (1) and (2) on the interval $[0, 1]$ has an unique solution, expressed by the formula

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^l \alpha_{i-1} Q_i(t, \varepsilon) + \sum_{i=1}^p \bar{C}_{l+i} Q_{l+i}(t, \varepsilon) + P(t, \varepsilon), \tag{14}$$

where $Q_i(t, \varepsilon), i = \overline{1, n+m}, P(t, \varepsilon)$ are defined by the formula (11),(12), $\bar{C}_{l+i}, i = \overline{1, p}$ are solutions of the system (13).

References

- 1 Касымов К.А., Нургабыл Д.Н., Уайсов А.Б. Асимптотические оценки решения краевой задачи с начальным скачком для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Украинский. мат. журн. — 2013. — № 5. — С. 629–641.
- 2 Дауылбаев М.К., Мирзакулова А.Е. Краевые задачи с начальными скачками для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Нелинейные колебания. — 2016. — Т. 19. — № 1. — С. 11–21.
- 3 Dauylbaev M.K., Mirzakulova A.E. Asymptotic behavior of solutions of singular integro-differential equations // Discontinuity, Nonlinearity and Complexity. — 2016. — Vol. 5. — No. 2. — P. 147–154.
- 4 Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. — 1957. — Т. 12. — № 5. — С. 3–122.

А.Е.Мирзакулова, Н.Атахан

Мақалада жоғарғы туындыларының алдында кіші параметрі бар интегралды дифференциалдық теңдеулер үшін шекаралық есеп шешімінің аналитикалық формуласы

Мақала жоғарғы туындыларының алдында кіші параметрі бар $n + m$ ретті сызықты интегралды-дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы секірісті шекаралық есеп шешімінің аналитикалық формуласын зерттеуге арналған. Зерттеу жұмысында $n + m$ ретті біртекті дифференциалдық теңдеуінің іргелі шешімдер жүйесі алынған. Іргелі шешімдер жүйесінің көмегімен Коши функциясы және шекаралық функциялар құрылған. Мақалада Коши функциясы және шекаралық функцияларды қолданып, жоғарғы ретті сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін қарастырылып отырған локалды шекаралық есеп шешімінің аналитикалық формуласы берілді.

А.Е.Мирзакулова, Н.Атахан

Построение решения краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных

В статье исследованы аналитические формулы решений краевой задачи с начальным скачком для линейных интегро-дифференциальных уравнений $n + m$ порядка с малым параметром при старших производных. В работе построена фундаментальная система решений сингулярно возмущенного однородного дифференциального уравнения $n+m$ порядка. С помощью фундаментальных систем решений построены функции Коши и граничные функции. Используя функции Коши и граничные функции, получена явная аналитическая формула решений рассматриваемой локальной краевой задачи для сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения высшего порядка.

References

- 1 Kasymov K.A., Nurgabyly D.N., Uaisov A.B. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2013, 5, p. 629–641.
- 2 Dauylbaev M.K., Mirzakulova A.E. *Nonlinear oscillations*, 2016, 19, 1, p. 11–21.
- 3 Dauylbaev M.K., Mirzakulova A.E. *Discontinuity, Nonlinearity and Complexity*, 2016, 5, 2, p. 147–154.
- 4 Vishik M.I., Lyusternik L.A. *UMN*, 1957, 12, 5, p. 3–122.

A.T. Musin

*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana
(E-mail:kabenov73@mail.ru)*

Canonisation reper of complex of lines of three-dimensional flag

The paper studies the three-parameter geometric image of the line – a complex of line of three-dimensional space of the flag. It identifies the main forms that depend linearly on three basic parameters differentials. The expression of the main correlations that isotropic plane passing through the beam aligns flag center beam. There was a lock, leading to full canonization frame line complex. We obtain the geometric characteristics of the structure of the canonical frame line complex. A condition in which the complex is obtained isotropic complex of lines. Write down the equations of the tangent bundle of linear systems. Obtain basic complex quadratic forms of complex. Also derivation formula obtained canonical frame set of three-dimensional space of the flag. Noted all ruled surfaces, which has a touch of the second order linear isotropic complex.

Key words: metric, space, frame, complex, derivative formula, bivector, correlation.

Introduction

Flag spaces be projective n-space, the metric is determined by the absolute, consisting of a set of nested m-planes, $m = 0, 1, \dots, n-1$, called a flag; flag spaces denote by F_n . Taking nonisotropic line as an element

$$r = A + te_1, \quad (1)$$

where A and e_1 are vector functions of three parametric variables. Locally (1) defines the complex of lines. Including the element into frame yields empirical forms

$$\Omega^2 = \omega^2, \Omega^3 = \omega^3, \Omega_1^3 = \omega_1^3, \Omega_1^2 = \omega_1^2,$$

that linearly depend on three differentials du^1, du^2, du^3 main parametric variables. Exclusion of the latter results in the following relation

$$\alpha\omega^3 + \beta\omega_1^2 + \gamma\omega_1^3 + \chi\omega^2 = 0. \quad (2)$$

Consequently the main correlation [1] will take the following form

$$A + te_1 \leftrightarrow (R - A, (\alpha t - \gamma)e_2 + (\beta - \chi t)e_3, e_1) = 0.$$

In this correlation of isotropic plane point that passes through the half-line (ray) is

$$C = A + \frac{\gamma}{\alpha}e_1, \quad (3)$$

this point in [2] is called flag center of the half-line. If we shall not analyze complexes with improper (nonintrinsic) flag center, then we can write the main relation [2] in the following form

$$\omega^3 = \beta\omega_1^2 + \gamma\omega_1^3 + \chi\omega^2. \quad (4)$$

The case of linear dependence of basic forms ω_1^2, ω_1^3 , namely cylindrical complex [3] is excluded. By simple means we get the following out of (4)

$$\delta\beta = \gamma\pi_2^3 - \chi\pi^1, \delta\gamma = \pi^1, \delta\chi = -\pi_2^3. \quad (5)$$

Fixation

$$\gamma = 0, \chi = 0, \pi^1 = 0, \pi_2^3 = 0 \quad (6)$$

leads us to full canonization of the frame. Geometrically the equation $\gamma = 0$ means the conjunction of the beginning of the frame with the flag center of the half line. Let us clarify the direction of vector e_2 . Cluster of tangent linear complexes is given by the following equation

$$\lambda p_{23} + p_{31} - \beta p_{02} = 0. \tag{7}$$

Moreover, the linear complex having half-line (ray) (1) can be given in terms of

$$\{a [A \times e_1]\} = 0, \tag{8}$$

which connects Plucker coordinates of the line (1), i.e. minors of the matrix made up of uniform coordinates of its two points: proper point $(1 : 0 : 0 : 0)$ and improper $(0 : 1 : 0 : 0)$, defined by vector e_1 . In order to find tangent linear complex we have to differentiate equation (8) and make a request (take it as a rule) that resulting relation will be applied towards every linear plane $\omega_1^2 : \omega_1^3 : \omega^2$. This gives us

$$\{a [A \times e_1]\} = 0; \tag{8}$$

$$\{a [dA \times e_1]\} + \{a [A * de_1]\} = 0. \tag{9}$$

Let's take a note that basic values of external product [3] of two analytical points is

$$\begin{aligned} [A \times e_1] &= (1, 0, 0, 0, 0, 0), & [A \times e_2] &= (0, 1, 0, 0, 0, 0); \\ [A \times e_3] &= (0, 0, 1, 0, 0, 0), & [e_1 \times e_2] &= (0, 0, 0, 1, 0, 0); \\ [e_3 \times e_1] &= (0, 0, 0, 0, 1, 0), & [e_2 \times e_3] &= (0, 0, 0, 0, 0, 1). \end{aligned} \tag{10}$$

And if the line has Plucker coordinates

$$\bar{p} = (p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{31}, p_{23}), \tag{11}$$

then

$$\{\bar{a}, \bar{p}\} = a_{01}p_{23} + a_{02}p_{31} + a_{03}p_{12} + a_{12}p_{03} + a_{31}p_{02} + a_{23}p_{01}. \tag{12}$$

As a result of $dA = \omega^i e_i, de_1 = \omega_1^j e_j, (i = 1, 2, 3; j = 2, 3)$ and relations (10), (12), (8), (9) we obtain

$$a_{23} = 0, -\omega^2 a_{03} + \omega^3 a_{02} + \omega_1^2 a_{31} + \omega_1^3 a_{12} = 0. \tag{13}$$

Here as a result of (4)

$$(\beta a_{02} + a_{31}) \omega_1^2 + (\gamma a_{02} + a_{12}) \omega_1^3 + (\chi a_{02} - a_{03}) \omega^2 = 0. \tag{14}$$

because (14) has a place of all the linear planes $\omega_1^2 : \omega_1^3 : \omega^2$, is carried out identically, then

$$a_{31} = -\beta a_{02}, a_{12} = -\gamma a_{02}, a_{03} = \chi a_{02}.$$

Assuming $\lambda = \frac{a_{01}}{a_{02}}$, we can write the following equation $\{\bar{a}, \bar{p}\} = 0$ in an expanded way

$$\lambda p_{23} + p_{31} + \chi p_{12} - \gamma p_{03} - \beta p_{02} = 0$$

or in a canonical frame in terms of (7). Isotropic linear complex [4], i.e. complex that has absolute line can be produced when $\lambda = 0$.

In reality, absolute line is a part of linear complex if and only if $a_{01} = 0$, i.e. when absolute line's Plucker Coordinates $(0, 0, 0, 0, 0, p_{23})$ satisfy the complex's equation. Flag axis [2] of the isotropic linear complex is vector e_2 , as improper point defined by this vector corresponds in nil-system of improper plane. This is the end of geometrical characteristic of buildup of canonical frame. Let's take a note that linear complexes $\omega_1^2 : \omega_1^3 : \omega^2$ tangent to the linear plane are defined by equations

$$2\lambda = \frac{B_2}{B_1}, \tag{15}$$

where

$$B_1 = (\omega_1^2)^2 - \omega^2 \omega_1^3, \quad B_2 = d\beta \omega_1^2 - \omega^1 \omega_1^3 - \omega^2 \omega_2^3$$

are basic quadratic forms of the complex. In order to obtain equation (15) let's differentiate equation (8) one more time and add it to the latter ones. In similar manner, i.e. following the method to find cluster (7), we come to the equation (15). Out of the equation (15) it is visible that isotropic linear complex has a tangency of second order with all the linear complexes, which satisfy the equation $B_2 = 0$.

Derivative formulas of canonical frame of the complex are given by

$$\begin{aligned} dA &= (\xi_1\omega_1^2 + \eta_1\omega_1^3 + \varsigma_1\omega^2) e_1 + \omega^2 e_2 + \beta\omega_1^2 e_3; \\ de_1 &= \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3, de_2 = (\xi_2\omega_1^2 - \varsigma_1\omega_1^3 + \varsigma_2\omega^2) e_3, de_3 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

And external differentials of basic forms can be written as

$$D\omega_1^2 = 0, D\omega_1^3 = (\varsigma_1\omega_1^3 - \varsigma_2\omega^2) \wedge \omega_1^2, D\omega^2 = (\eta_1\omega_1^3 + \varsigma_1\omega^2) \wedge \omega_1^2. \quad (17)$$

Basic system of external differential equations are given by

$$\begin{aligned} (d\beta + \xi_1\omega_1^3 - \xi_2\omega^2) \wedge \omega_1^2 &= 0; \\ d\xi_1 \wedge \omega_1^2 + d\eta_1 \wedge \omega_1^3 + d\varsigma_1 \wedge \omega^2 &= (-2\eta_1\varsigma_1\omega_1^3 + (\eta_1\varsigma_2 - (\varsigma_1)^2)\omega^2) \wedge \omega_1^2; \\ d\xi_2 \wedge \omega_1^2 - d\varsigma_1 \wedge \omega_1^3 + d\varsigma_2 \wedge \omega^2 &= ((\varsigma_1)^2 - \eta_1\varsigma_2)\omega_1^3 - 2\varsigma_1\varsigma_2\omega^2 \wedge \omega_1^2. \end{aligned} \quad (18)$$

System (18) is standard [3]. The arbitrary rule of its solution is one function of three arguments. Full system of invariants of the complex is made up of six coefficients of derivative formulas of canonical frame (16). From first equation of system (18) we can get such form through covariant derivatives

$$d\beta = \beta_1\omega_1^2 - \xi_1\omega_1^3 + \xi_2\omega^2.$$

Invariants of complex of lines. Classification of complexes of lines

Tangent plane of cylinder of the complex is parallel to bivector $\{(A + te_1), e_1\}_{\omega_1^2 = \omega_1^3 = 0}$, i.e. has an equation

$$x_3 = 0 \quad (19)$$

and plane corresponding to the point $A + te_1$ in main correlation has an equation

$$(R - A, te_2 - \beta e_3, e_1) = 0.$$

or in coordinates a following equation

$$\frac{\beta}{t}x_2 + x_3 = 0.$$

This is the reason why flag angle of φ between these planes according to the known formula [5; 302], is equal to $\frac{\beta}{t}$, i.e.

$$\beta = \varphi t.$$

This formula, which resembles Chasles' formula [3; 178] gives us geometrical characteristic of invariant β . by the analogy with theory of the complexes of Euclid space let's call this invariant curvature.

Theorem 1. Linear plane $\omega_1^2 = \omega_1^3 = 0$ is a cylinder with anisotropic generators.

Proof is evident from (16) when $\omega_1^2 = 0, \omega_1^3 = 0$.

Theorem 2. Invariant submanifold $\omega^2 = \omega_1^3 = 0$ is a central linear plane.

Proof. Derivative formulas of canonical frame of linear plane $\omega^2 = \omega_1^3 = 0$ have a following form

$$\frac{dA}{ds} = \xi_1 e_1 + \beta e_3, \quad \frac{de_1}{ds} = e_2, \quad \frac{de_2}{ds} = \xi_2 e_3, \quad \frac{de_3}{ds} = 0,$$

coinciding with the accuracy of labeling of invariants with derivative formulas of the canonical frame of linear plane in F_3 [6; 53]

$$\frac{dA}{ds} = k_1 e_1 + k_2 e_3, \quad \frac{de_1}{ds} = e_2, \quad \frac{de_2}{ds} = k_3 e_3, \quad \frac{de_3}{ds} = 0.$$

This means coincidence of canonical frames of coordinate based submanifold $\omega^2 = \omega_1^3 = 0$ and linear complex, i.e. linear surface $\omega^2 = \omega_1^3 = 0$ is central.

Theorem 3. Linear surface $\omega^2 = \omega_1^3 = 0$ is a family of lines of isotropical plane, enveloping curve l .

Proof. Coordinate based linear surface $\omega^2 = \omega_1^3 = 0$ as it can be seen from its derivative formulas of canonical frame

$$\frac{dA}{ds} = \eta_1 e_1, \quad \frac{de_1}{ds} = e_3, \quad \frac{de_2}{ds} = -\varsigma_1 e_3, \quad \frac{de_3}{ds} = 0.$$

Resulting from (16) is comprised of all the lines, belonging to isotropic plane and enveloping the flat curve.

Invariants ξ_1, β, ξ_2 correspond to invariants k_1, k_2, k_3 of central linear surface, η_1 – radius of curvature [7] of curve l , $\xi_1 = \eta_1 \lim_{\Delta s} \frac{\psi}{\Delta s}$, where ψ is an angle between vectors e_2 , corresponding to near points of curve l , ξ_2 – flag curvature of highly isotropic director of cylinder $\omega_1^2 = \omega_1^3 = 0$. Marked geometrical characteristics of invariants of linear complex occur from analyzing its coordinated based submanifolds. Tangent plane of cylinder is defined by bivector $\{e_1, de_1\}$, i.e. bivector

$$\{e_1, \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3\}. \tag{20}$$

As known, the main cylindroid of the linear complex is a cylindroid which has its director plane coinciding with tangent plane of the cylinder. Bivector (20) is parallel to plane (19) if and only if $\omega_1^3 = 0$. All cylindroids passing through the given half-line (ray) are characterized by the following condition $(e_1, de_1, d^2 e_1) = 0$ or $\omega_1^2 (\omega_1^2 \omega_2^3 + d\omega_1^3) - \omega_1^3 d\omega_1^2 = 0$. From here and from equation $\omega_1^3 = 0$, expressing parallelism of planes (19) and (20), we obtain equation of main cylindroid of the linear complex in terms of

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = \xi_2 \omega_1^2 + \varsigma_2 \omega^2 = 0.$$

The main correlation to the point $M = A + te_1$ is related by the plane

$$(R - A, te_2 - \beta e_3, e_1) = 0,$$

and Chasles correlation [1] to the said point is plane

$$(R - A, e_1, (\omega^2 + t\omega_1^2) e_2 + (\omega^3 + t\omega_1^3) e_3) = 0.$$

These planes coincide when $t = \infty$ and $t = \frac{\xi_2}{2\varsigma_2}$. Consequently, one point of tangency is improper. Second point [2] called affine center of the complex half-line, has a radius-vector

$$A + \frac{\xi_2}{2\varsigma_2} e_1.$$

Inflexional centers of half-line (ray) are defined by equation

$$\varsigma_2 t^4 - 2\xi_2 t^3 + (\beta_1 - 2\varsigma_1 \beta) t^2 + 2\xi_1 \beta t - \eta_1 \beta^2 = 0,$$

where β_1 is covariant derivative from β , for which the following holds

$$d\beta = \beta_1 \omega_1^2 - \xi_1 \omega_1^3 + \xi_2 \omega^2.$$

Nulling one by one invariants of the complex, we obtain the following classes: 1) $\beta = 0$ – special complex. i.e. array of clusters of lines in the tangent planes of the surface, described by the beginning of the frame; 2) $\xi_1 = 0$ – central linear surface is a highly isotropic conoid because strictional line of this linear surface is a highly isotropic line; 3) $\xi_2 = 0$ – central linear surface is a nonisotropic cylindroid. In this case the beginning of the frame is a center of symmetry of four inflexional centers, affine center of the half-line (ray) coincides with flag center; 4) $\varsigma_2 = 0$ – cylinder of the complex degenerates into a nonisotropic plane; one inflexional center is improper; 5) $\eta_1 = 0$ – curve l degenerates into a point, beginning of frame is an inflexional center; 6) $\varsigma_1 = 0$ – tangent to a line described by flag center on a cylinder has a direction of a line of second order.

Complex of class $\beta = 0$ is defined with the arbitrary rule of one function of two arguments, the remaining 5 classes of complexes are defined with the arbitrary rule of two functions of two arguments.

References

- 1 *Кованцов Н.И.* Теория комплексов. — Киев: Изд-во Киевск. ун-та, 1963. — С. 292.
- 2 *Лыжсина Т.В., Мандрикова Н.А., Щербаков Р.Н.* Немеетрическая флаговая теория кривых и ее приложения к теории комплексов: геометрический сб. — Т. 18. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1977. — С. 79–92.
- 3 *Щербаков Р.Н.* Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1973. — С. 236.
- 4 *Лыжсина Т.В.* Регулюсы в трехмерном флаговом пространстве: геометрический сб. — Т. 11. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1973. — С. 75–91.
- 5 *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969. — С. 548.
- 6 *Мусин А.Т.* К вопросу о флаговой наложимости линейчатых комплексов: геометрический сб. — Т. 28. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1988. — С. 53–61.
- 7 *Власова Р.К.* Некоторые классы 2-параметрических семейств прямых L_2 в F_4 // Учен. записки / Латвийский ун-т. — 1972. — Т. 172. — С. 42–46.

А.Т. Мусин

Үшөлшемді жалаулы кеңістігіндегі түзулер кешеннің канондық реперін салу

Мақала үшөлшемді жалаулы кеңістігінің түзулер кешені болып табылатын үшпараметрлік түзусызықты геометриялық кескінді оқып зерттеуге арналды. Негізгі параметрлердің дифференциалдарына сызықты тәуелді бас формалар ерекшеленіп көрсетілген. Сәуле арқылы өтетін изотропты жазықтығына сәуленің жалаулы центрін сәйкестікке қоятын бас корреляцияның өрнегі табылған. Түзусызықты комплекстің реперін толық канондандыратын беку шарттары көрсетілген. Түзусызықты кешеннің канондық репері салынуының геометриялық сипаттамасы алынған. Изотропты сызықтық комплексті кескіндейтін шарт табылған. Жанасушы сызықтық комплекстер шоғының теңдеуі айқындалған. Сондай-ақ автормен кешеннің негізгі квадраттық формалары анықталған, сол сияқты үшөлшемді жалаулы кеңістігіндегі түзусызықты комплекстің канондық реперінің деривациялық формулалары алынған. Изотропты комплекспен екінші ретті жанасуда болатын барлық түзусызықты беттер белгіленген.

А.Т. Мусин

Канонизация репера комплекса прямых трехмерного флагового пространства

Статья посвящена изучению трехпараметрического линейчатого геометрического образа — комплекса прямых трехмерного флагового пространства. Выделены главные формы, зависящие линейно от трех дифференциалов основных параметров. Получено выражение главной корреляции, которая изотропна на плоскости, проходящей через луч, и приводит в соответствие флаговый центр луча. Отмечена фиксация, приводящая к полной канонизации репера линейчатого комплекса. Получена геометрическая характеристика строения канонического репера линейчатого комплекса. Найдено условие, при котором получается изотропный комплекс прямых. Выписано уравнение пучка касательных линейных комплексов. Получены основные квадратичные формы комплекса. Также получены деривационные формулы канонического репера комплекса прямых трехмерного флагового пространства. Отмечены все линейчатые поверхности, с которыми соприкасается изотропный линейный комплекс второго порядка.

References

- 1 Kovantsov N. I. *Theory of complexes*, Kiev: Publ. House Kiev University, 1963, p. 292.
- 2 Lyzhina T.V., Mandrikova N.A., Shcherbakov R.N. *Geometrical collection*, Tomsk: Publ. House Tomsk. University, 1977, 18, p. 79–92.
- 3 Shcherbakov R. N. *Bases of a method of external forms and line differential geometry*, Tomsk: Publ. House Tomsk. University, 1973, p. 236.
- 4 Lyzhina T.V. *Geometrical collection, Tomsk: Publ. House Tomsk. University*, 1973, 11, p. 75–91.
- 5 Rosenfeld B.A. *Non-Euclidean spaces*, Moscow: Nauka, 1969, p. 548.
- 6 Musin A.T. *Geometrical collection*, Tomsk: Publ. House Tomsk. University, 1988, 28, p. 53–61.
- 7 Vlasova R.K. *Scientists. rec. Latvian University*, 1972, 172, p. 42–46.

V.A. Roman'kov

*F.M. Dostoevsky Omsk State University, Russia
(E-mail: romankov48@mail.ru)*

A polynomial algorithm for the braid double shielded public key cryptosystems

We propose new provable practical deterministic polynomial time algorithm of cryptographic analysis for the braid Wang, Xu, Li, Lin and Wang «Double shielded public key cryptosystems», where the authors recommended the Artin braid groups B_n as platforms for proposed protocols. We show that a linear decomposition attack based on the decomposition method introduced by the author works for the image of braids under the Lawrence-Krammer representation by finding the exchanging keys in the both two main protocols by Wang et. al. These keys can be effectively computed in their original form too. Thus the protocols proposed by Wang et. al. are vulnerable.

Key words: cryptography, protocol, braid group, cryptanalysis, attack, linear decomposition, representation.

Introduction

In this paper we discuss, following [1, 2], a new practical attack on the two main protocols proposed in [3]. This attack works when the platform groups are linear. We show that in this case, contrary to the common opinion (and some explicitly stated security assumptions), one does not need to solve the underlying algorithmic problems to break the scheme, i.e., there is another algorithm that recovers the private keys without solving the principal algorithmic problem on which the security assumptions are based. This changes completely our understanding of security of these schemes. The efficacy of the attack depends on the platform group, so it requires a specific analysis in each particular case. In general one can only state that the attack is in polynomial time in the size of the data, when the platform and related groups are given together with their linear representations. In many other cases we can effectively use known linear representations of the groups under consideration. The braid groups are among them in view of the Lawrence-Krammer representation. The monography [1] solves uniformly protocols based on the conjugacy search problem (Ko et. al. [4], Wang et. al. [5]), protocols based on the decomposition and factorization problems (Stickel [6], Alvares et. al. [7], Shpilrain and Ushakov [8]), protocols based on actions by automorphisms (Mahalanobis [9], Habeeb, Kahrobaei et. al. [10], Markov, Mikhalev et.al. [11]), and a number of other protocols. In this paper we apply our method to the double shielded key exchange protocols 1 and 2 proposed in [3].

Construction of a basis

Let V be a finite dimensional vector space over a field F with basis $B = \{v_1, \dots, v_r\}$. Let $\text{End}(V)$ be the semigroup of endomorphisms of V . We assume that elements in V are given as vectors relative to B , and endomorphisms in $\text{End}(V)$ are given by their matrices relative to B . Let $\langle W \rangle$ denotes submonoid generated by W .

For an endomorphism $a \in \text{End}(V)$ and an element $v \in V$ we denote by v^a the image of v under a . Also, for any subsets W of V and A of $\text{End}(V)$ we put $W^A = \{w^a | w \in W, a \in A\}$, and denote by $\text{Sp}(W)$ the subspace of V generated by W . We assume that elements of the field F are given in some constructive form and the «size» of the form is defined. Furthermore, we assume that the basic field operations in F are efficient, in particular they can be performed in polynomial time in the size of the elements. In all the particular protocols considered in this paper the field F satisfies all these conditions.

There is an algorithm that for given finite subsets $W \subseteq V$ and $U \subseteq \text{End}(V)$ finds a basis of the subspace $\text{Sp}(W^{\langle U \rangle})$ in the form $\{w_1^{a(1)}, \dots, w_t^{a(t)}\}$, where $w_i \in W$ and $a(i)$ is a product of elements from U . Furthermore, the number of field operations used by; the algorithm is polynomial in $r = \dim_F(V)$ and the cardinalities $|W|$ and $|U|$ of W and U , respectively.

Using Gauss elimination one can effectively find a maximal linearly independent subset L_0 of W . Notice that $\text{Sp}(L_0^{<U>}) = \text{Sp}(W^{<U>})$. Adding to the set L_0 one by one elements v^a , where $v \in L_0$, $a \in U$ and checking every time linear independence of the extended set, one can effectively construct a maximal linearly independent subset L_1 of $L_0 \cup L_0^U$ which extends the set L_0 . Notice that $\text{Sp}(L_0^{<U>}) = \text{Sp}(L_1^{<U>})$ and the elements in L_1 are of the form w^a , where $w \in W$ and $a = 1$ or $a \in U$. It follows that if $L_0 = L_1$ then L_0 is a basis of $\text{Sp}(W^{<U>})$. If $L_0 \neq L_1$ then we repeat the procedure for L_1 and find a maximal linearly independent subset L_2 of $L_1 \cup L_1^U$ that extends L_1 . Keep going one constructs a sequence of strictly increasing subspaces $L_0 < L_1 < \dots < L_i$ of V . Since the dimension r of V is finite the sequence stabilizes for some $i \leq r$. In this case L_i is a basis of $\text{Sp}(W^{<U>})$ and its elements are in the required form.

To estimate the upper bound of the number of the field operations used by the algorithm, observe first that the number of the field operations in Gauss elimination performed on a matrix of size $n \times r$ is $O(n^2r)$. Hence it requires at most $O(n^2r)$ steps to construct L_0 from W , where $n = |W|$ is the number of elements in W . Notice that $|L_j| \leq r$ for every j . So to find L_{j+1} it suffices to perform Gauss elimination on the matrix corresponding to $L_j \cup L_j^U$ which has size at most $r + r|U|$. Thus the upper estimate on this number is $O(r^3|U|^2)$. Since there are at most r iterations of this procedure one has the total estimate as $O(r^3|U|^2 + r|W|^2)$.

In this paper V is underlying linear space of a matrix algebra $\text{Mat}_t(F)$ of all matrices of size $t \times t$ over F . Let G be a subgroup of the multiplicative group of $\text{Mat}_t(F)$, and A and B are two subgroups of G . Every pair of elements $a \in A$ and $b \in B$ define an automorphism $\varphi(a, b)$ of V such that for every $v \in V$ one has $v^{\varphi(a,b)} = avb$. Let U be submonoid generated by all such automorphisms. Thus for every subset $W \subseteq V$ one can effectively construct a basis of subspace W^U .

The double shielded key exchange protocol 1 from [3]

At first we describe the protocol 1 from [3]. Recall that in [3] the Artin braid groups B_n were recommended as platforms for the proposed protocols constructing.

In view of the Lawrence-Krammer representation of the braid group B_n we can assume that the group G below is given as a linear group over a field F . So, we assume that G is a part of a finite dimensional vector space V .

Alice and Bob agree on a non-abelian group G , and randomly chosen element $h \in G$ and two subgroups A and B of G , such that $ab = ba$ for any $a \in A$ and any $b \in B$. We assume that A and B are finitely generated and are given by the fixed generating sets $\{a_1, \dots, a_n\}$ and $\{b_1, \dots, b_m\}$, respectively.

Alice chooses four elements $c_1, c_2, d_1, d_2 \in A$, computes $x = d_1c_1hc_2d_2$ and then sends x to Bob.

Bob chooses six elements $f_1, f_2, g_1, g_2, g_3, g_4 \in B$, computes $y = g_1f_1hf_2g_2$ and $w = g_3f_1xf_3g_4$, and then sends (y, w) to Alice.

Alice chooses two elements $d_3, d_4 \in A$, computes $z = d_3c_1yc_2d_4$ and $u = d_1^{-1}wd_2^{-1}$, and then sends (z, u) to Bob.

Bob sends $v = g_1^{-1}zg_2^{-1}$ to Alice.

Alice computes $K_A = d_3^{-1}vd_4^{-1} = c_1f_1hf_2c_2$.

Bob computes $K_B = g_3^{-1}ug_4^{-1} = c_1f_1hf_2c_2$ which is equal to K_A and then $K = K_A = K_B$ is Alice and Bob's common secret key.

Now we show how the common secret key can be computed. Let BzB be subspace of V generated by all elements of the form fzg where $f, g \in B$. We can construct a basis $\{e_i z l_i (e_i, l_i \in B, i = 1, \dots, r)\}$ of BzB in a polynomial time as it is explained in the previous section. Since $v \in BzB$, we can effectively write it in the form

$$v = \sum_{i=1}^r \alpha(i) e_i z l_i, \tag{1}$$

where $\alpha(i) \in F$ for $i = 1, \dots, r$. In a similar way we construct bases $\{e'_j h l'_j (e'_j, l'_j \in B, j = 1, \dots, s)\}$ of BhB , and $\{e''_k w l''_k (e''_k, l''_k \in B, k = 1, \dots, q)\}$ of BwB . Then we get presentations

$$y = \sum_{j=1}^s \beta(j) e'_j h l'_j, \tag{2}$$

where $\beta(j) \in F$ for $j = 1, \dots, s$, and

$$x = \sum_{k=1}^q \gamma(k) e''_k w l''_k, \tag{3}$$

where $\gamma(k) \in F$ for $k = 1, \dots, q$.

Now we swap w by u in the right hand side of (3). By direct computation we obtain

$$\sum_{k=1}^q \gamma(k) e_k'' u l_k'' = \sum_{k=1}^q \gamma(k) e_k'' d_1^{-1} w d_2^{-1} l_k'' = d_1^{-1} \left(\sum_{k=1}^q \gamma(k) e_k'' w l_k'' \right) d_2^{-1} = d_1^{-1} x d_2^{-1} = c_1 h c_2. \quad (4)$$

Then we swap h by $c_1 h c_2$ in the right hand side of (2) and get

$$\sum_{j=1}^s \beta(j) e_j' c_1 h c_2 l_j' = c_1 \left(\sum_{j=1}^s \beta(j) e_j' h l_j' \right) c_2 = c_1 y c_2 = c_1 g_1 f_1 h f_2 g_2 c_2. \quad (5)$$

At last we swap z by $c_1 g_1 f_1 h f_2 g_2 c_2$ in the right hand side of (1) and get

$$\sum_{i=1}^r \alpha(i) e_i c_1 g_1 f_1 h f_2 g_2 c_2 l_i = d_3^{-1} \left(\sum_{i=1}^r \alpha(i) e_i z l_i \right) d_4^{-1} = c_1 f_1 h f_2 c_2 = K. \quad (6)$$

The double shielded key exchange protocol 2 from [3]

Now we describe the protocol 2 from [3].

As before we assume that the group G below is given as a linear group over a field F . So, we assume that G is a part of a finite dimensional vector space V .

Alice and Bob agree on a non-abelian group G , and randomly chosen element $h \in G$ and two subgroups A and B of G , such that $ab = ba$ for any $a \in A$ and any $b \in B$. We assume that A and B are finitely generated and are given by the fixed generating sets $\{a_1, \dots, a_n\}$ and $\{b_1, \dots, b_m\}$, respectively.

Alice chooses four elements $c_1, d_1 \in A$ and $f_2, g_2 \in B$, computes $x = d_1 f_1 h_2 d_2$ and then sends x to Bob.

Bob chooses six elements $c_2, d_2, d_3 \in A$ and $f_1, g_1, g_3 \in B$, computes $y = g_1 f_1 h c_2 d_2$ and $w = g_3 f_1 x c_2 d_3$, and then sends (y, w) to Alice.

Alice chooses two elements $d_4 \in A$ and $g_4 \in B$, computes $z = d_4 c_1 y f_2 g_4$ and $u = d_1^{-1} w g_2^{-1}$, and then sends (z, u) to Bob.

Bob sends $v = g_1^{-1} z d_2^{-1}$ to Alice.

Alice computes $K_A = d_4^{-1} v g_4^{-1}$. Bob computes $K_B = g_3^{-1} u d_3^{-1} = c_1 f_1 h f_2 c_2$ which is equal to K_A and then $K = K_A = K_B$ is Alice and Bob's common secret key.

Now we show how the common secret key can be computed. Let BzA be subspace of V generated by all elements of the form fzd where $f \in B, d \in A$.

We can construct a basis $\{e_i z l_i (e_i \in B, l_i \in A, i = 1, \dots, r)\}$ of BzA in a polynomial time as it is explained in the previous section. Since $v \in BzA$, we can effectively write it in the form

$$v = \sum_{i=1}^r \alpha(i) e_i z l_i, \quad (7)$$

where $\alpha(i) \in F$ for $i = 1, \dots, r$.

In a similar way we construct bases $\{e_j' h l_j' (e_j' \in B, l_j' \in A, j = 1, \dots, s)\}$ of BhA , and $\{e_k'' w l_k'' (e_k'' \in B, l_k'' \in A, k = 1, \dots, q)\}$ of BwA .

Then we get presentations:

$$y = \sum_{j=1}^s \beta(j) e_j' h l_j', \quad (8)$$

where $\beta(j) \in F$ for $j = 1, \dots, s$, and

$$x = \sum_{k=1}^q \gamma(k) e_k'' w l_k'', \quad (9)$$

where $\gamma(k) \in F$ for $k = 1, \dots, q$.

Now we swap w by u in the right hand side of (9). By direct computation we obtain

$$\sum_{k=1}^q \gamma(k) e_k'' u l_k'' = \sum_{k=1}^q \gamma(k) e_k'' d_1^{-1} w g_2^{-1} l_k'' = d_1^{-1} \left(\sum_{k=1}^q \gamma(k) e_k'' w l_k'' \right) g_2^{-1} = d_1^{-1} x g_2^{-1} = c_1 h f_2. \quad (10)$$

Then we swap h by $c_1 h f_2$ in the right hand side of (8) and get

$$\sum_{j=1}^s \beta(j) e_j' c_1 h f_2 l_j' = c_1 \left(\sum_{j=1}^s \beta(j) e_j' h l_j' \right) f_2 = c_1 y f_2 = c_1 g_1 f_1 h c_2 d_2 f_2. \quad (11)$$

At last we swap z by $c_1 g_1 f_1 h c_2 d_2 f_2$ in the right hand side of (7) and get

$$\sum_{i=1}^r \alpha(i) e_i c_1 g_1 f_1 h c_2 d_2 f_2 l_i = d_4^{-1} \left(\sum_{i=1}^r \alpha(i) e_i z l_i \right) g_4^{-1} = c_1 f_1 h c_2 f_2 = K. \quad (12)$$

Two other, the shielded public key encryption protocol and the shield digital signature protocol in [3] completely based on the protocols 1 and 2. They can be attacked by the procedures that has been just described.

The Lawrence-Krammer representation

Let B_n denotes the Artin braid group on n strings, $n \in N$, where N denotes the set of natural numbers. R. Lawrence described in 1990 a family of so called *Lawrence representations* of B_n . Around 2001 S. Bigelow [11] and D. Krammer [12] independently proved that all braid groups B_n are linear. Their work used new the *Lawrence-Krammer representations* $\rho_n : B_n \rightarrow \text{GL}_{n(n-1)/2}(Z[t^{\pm 1}, s^{\pm 1}])$ that has been proved faithful for every $n \in N$. One can effectively find the image $\rho_n(g)$ for every element $g \in B_n$.

Moreover, there exists an effective procedure to recover a braid $g \in B_n$ from its image $\rho_n(g)$. It was shown in [13] that it can be done in $O(m^3 \log d_t)$ multiplications of entries in $\rho_n(g)$. Here $m = n(n-1)/2$ and d_t is a parameter that can be effectively computed by $\rho_n(g)$. See [13] for details.

Complexity of the proposed cryptanalysis

In this paper we proposed a polynomial time deterministic algorithm to recover secret keys established by the protocols 1 and 2 in [3]. We assumed that the group G in this protocols is linear. The authors of [3] suggested that the infinite nonabelian groups B_n with $n \geq 12$ can be taken as the platform groups for the protocols 1 and 2 in [3]. By the Lawrence-Krammer representations the groups B_n are linear. Moreover, this representations are effective computable and invertible. Unfortunately, in this setting the proposed protocols are not secure. Our cryptanalysis in the above sections shows that the linear decomposition attack works effectively in this case.

We present a cryptanalysis such that all used tools consist of only classical Gauss elimination process. It is well known that the Gauss elimination process is a polynomial procedure. To estimate the upper bound of the number of the field operations used by the algorithm, observe first that the number of the field operations in Gauss elimination performed on a matrix of size $n \times r$ is $O(n^2 r)$. Hence it requires at most $O(n^2 r)$ steps to construct L_0 from W , where $n = |W|$ is the number of elements in W . Notice that $|L_j| \leq r$ for every j . So to find L_{j+1} it suffices to perform Gauss elimination on the matrix corresponding to $L_j \cup L_j^U$ which has size at most $r + r|U|$. Thus the upper estimate on this number is $O(r^3 |U|^2)$. Since there are at most r iterations of this procedure one has the total estimate as $O(r^3 |U|^2 + r|W|^2)$. When we derive solutions in (1)–(3) and in (7)–(9) we can estimate the time complexity by a polynomial function depending of the dimension r of the space V and the parameter $m = \max\{|A|, |B|\}$ as $O(r^3 m^2)$. With this estimation we can compute the secret keys in the form of matrices. If the platform B_n is given by an abstract presentation, we can use the Lawrence-Krammer's representation, and then its inverse. It was shown in [14] that both these procedures are polynomial in time. Details can be found in [14].

Similar cryptanalysis can be applied to many other protocols based on (semi) groups presented as linear (semi)groups. Moreover, in a number of other cases we can firstly transform our platform to the linear form, and then apply our cryptanalysis. But in this latter case we should care about dimension of representation. Moreover, we need in tractable inverse map. All such topics open new area of pure theoretical investigations

in the representation theory. Fortunately, studying of algebraic algorithms with a point of view of its possible practical application are led by many mathematicians. There are a lot of interesting and useful results in this direction.

Supported by Russian Foundation for Basic Research, project 15-41-04312.

References

- 1 Романьков В.А. Алгебраическая криптография. — Омск: ОмГУ, 2013. — С. 135.
- 2 Романьков В.А. Криптоанализ некоторых схем, использующих автоморфизмы // Прикладная дискретная математика. — 2013. — № 3. — С. 35–51.
- 3 Wang X., Xu C., Li G., Lin H., Wang W. Double shielded public key cryptosystems // Cryptology ePrint Archive Report 2014/588. — 2014. — P. 1–14.
- 4 Ko K.H., Lee S.J., Cheon J.H., Han J.W., Kang J., Park C. New public-key cryptosystem using braid groups // Advances in Cryptology. CRYPTO 2000. — Vol. 1880 (Lecture Notes Comp. Sc.) — Berlin: Springer, 2000. — P. 166–183.
- 5 Wang L., Wang L., Cao Z., Okamoto E., Shao J. New constructions of public-key encryption schemes from conjugacy search problems // Information security and cryptology. (Lecture Notes Comp. Sc.) — Berlin: Springer, 2010. — Vol. 6584. — P. 1–17.
- 6 Stickle E. A New Method for Exchanging Secret Keys // Proc. of the Third Intern. Conf. on Information Technology and Applications (ICITA 05). Contemp. Math. (IEEE Computer Society). — 2005. — Vol. 2. — P. 426–430.
- 7 Alvarez R., Martinez F.-M., Vicent J.F., Zamora A. A Matricial Public Key Cryptosystem with Digital Signature // WSEAS Trans. on Math. — 2008. — Vol. 4(7). — P. 195–204.
- 8 Shpilrain V., Ushakov A. A new key exchange protocol based on the decomposition problem // Algebraic Methods in Cryptography Contemp. Math. — 2006. — Vol. 418. — P. 161–167.
- 9 Mahalanobis A. The Diffie-Hellman key exchange protocol and non-abelian nilpotent groups // Israel Math. Journal. — 2008 — Vol. 165. — P. 161–187.
- 10 Habeeb M., Kahrobaei D., Koupparis C., Shpilrain V. Public key exchange using semidirect product of (semi)groups. — [ER]. Access mode: arXiv math.: 1304.6572v1[cs.CR]. 24 Apr. 2013. — P. 1–12.
- 11 Марков В.Т., Михалев А.В., Грибов А.В., Золотых П.А., Скаженник С.С. Квазигруппы и кольца в кодировании и построении криптосхем // Прикладная дискретная математика. — 2012. — № 4. — С. 35–52.
- 12 Bigelow S. Braid groups are linear // Amer. Math. Soc. Journal. — 2001. — Vol. 1. — P. 471–486.
- 13 Krammer D. Braid groups are linear // Ann. Math. — 2002. — Vol. 155. — P. 131–156.
- 14 Cheon J.H., Jun B. A Polynomial Time Algorithm for the Braid Diffie-Hellman Conjugacy Problem // Advances in Cryptology. CRYPTO-2003. Lect. Notes in Comput. Sci. — 2003. — Vol. 2729. — P. 212–225.

В.А. Романьков

Өрімге негізделген ашық кілті бар қос панельдік шифрлау жүйесі үшін полиномиалды алгоритм

Мақалада ашық кілтпен кемерлер шифрлау жүйесінде негізделген криптографиялық талдау үшін алгоритм уақыты бойынша детерминдік полиномдық практикалық жаңа дәлелденетін Ванга, Ксу, Ли, Лин және Вана «Double shielded public key cryptosystems» ұсынылды. Автор платформа орнына B_n Артина кемер группасын қолдануға кеңес берді. Осы жұмыста автордың жүргізген сызықтық декомпозициялық бағыты бөліктелген әдіске негізделген Лоуренс-Краммер түсінігіне қатысты кемер бейнесіне қолданылып көрсетілген. Нәтижесінде [3] хаттамаға негізделген қос бөлінген кілттер табылды. Бұл кілттер оларды айқын түрде де белсенді есептейді. Осылайша [3] хаттамада осалдығы орнатылған.

В.А. Романьков

Полиномиальный алгоритм для основанной на косах системы шифрования с открытым ключом двойного щита

В статье предложен новый доказуемый практический детерминистский полиномиальный по времени алгоритм для криптографического анализа, основанный на косах системы шифрования с открытым ключом Ванга, Ксу, Ли, Лин и Ванга «Double shielded public key cryptosystems». Рекомендованы к использованию в качестве платформ группы кос Артина B_n . Показана, линейной декомпозиционной атаки, основанной на методе разложения, введенном автором, применимость к образам кос относительно представления Лоуренс-Крамера. В результате найдены разделенные ключи в обоих основных протоколах из [3]. Эти ключи эффективно вычисляются и в их оригинальном виде. Тем самым установлена уязвимость протоколов из [3].

References

- 1 Roman'kov V.A. *Algebraic cryptography*, Omsk: Omsk State University, 2013, p. 135.
- 2 Roman'kov V.A. *Discrete Applied Mathematics*, 2013, 3, p. 35–51.
- 3 Wang X., Xu C., Li G., Lin H., Wang W. *Cryptology ePrint Archive Report 2014/588*, 2014, p. 1–14.
- 4 Ко К.Н., Lee S.J., Cheon J.H., Han J.W., Kang J., Park C. *Advances in Cryptology. CRYPTO 2000. Vol. 1880 (Lecture Notes Comp. Sc.)*, Berlin: Springer, 2000, p. 166–183.
- 5 Wang L., Wang L., Cao Z., Okamoto E., Shao J. *Information security and cryptography*, (Lecture Notes Comp. Sc.), Berlin: Springer, 2010, 6584, p. 1–17.
- 6 Stickel E. *Proc. of the Third Intern. Conf. on Information Technology and Applications (ICITA 05)*, Contemp. Math. (IEEE Computer Society), 2005, 2, p. 426–430.
- 7 Alvarez R., Martinez F.-M., Vicent J.F., Zamora A. *WSEAS Trans. on Math.*, 2008, 4 (7), p. 195–204.
- 8 Shpilrain V., Ushakov A. *Algebraic Methods in Cryptography. Contemp. Math.*, 2006, 418, p. 161–167.
- 9 Mahalanobis A. *Israel Math. Journal*, 2008, 165, p. 161–187.
- 10 Habeeb M., Kahrobaei D., Koupparis C., Shpilrain V. [ER]. Access mode: arXiv math.: 1304.6572v1 [cs.CR], 24 Apr. 2013, p. 1–12.
- 11 Markov V.T., Mihalyov A.V., Gribov A.V., Zolotyh P.A., Skazhenik S.S. *Discrete Applied Mathematics*, 2012, 4, p. 35–52.
- 12 Bigelow S. *Amer. Math. Soc. Journal*, 2001, 1, p. 471–486.
- 13 Krammer D. *Ann. Math. Journal*, 2002, 155, p. 131–156.
- 14 Cheon J.H., Jun B. *Advances in Cryptology. CRYPTO-2003*, Lect. Notes in Comput. Sci., 2003, 2729, p. 212–225.

УДК 519.632

М.А. Султанов, М.Д. Кошанова, Б.Б. Устемирова

*Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан
(E-mail: murat.sultanov@ayu.edu.kz)*

О некорректности обратной задачи численного обращения одномерной свертки

В статье методом численного моделирования показана некорректность обратной задачи численного обращения одномерной свертки. Построена дискретная модель свертки. Проведены вычисления в случае отсутствия и наличия шума. Компьютерными вычислительными экспериментами показано, что пренебрежение ошибками, которые возникают при измерениях в практических случаях, может привести к неверным результатам. Авторами приведены численные примеры и один простой способ правильного численного восстановления свертки.

Ключевые слова: модель, свертка, некорректная и обратная задачи, реконструкция, погрешность, вычислительный эксперимент.

Введение

В настоящее время математическое моделирование и компьютерные технологии широко применяются в фильтрации зашумленных сигналов, обработке смазанных, дефокусированных изображений, в рентгеновской томографии для исследования внутреннего состояния неоднородных объектов через их визуализацию. Потребности сегодняшней практики порождают необходимость совершенствования методов и численных алгоритмов реконструкции задач, приводящих к повышению качества томографических изображений.

Трудности в решении таких задач заключаются главным образом в том, что задачи реконструкции являются некорректно поставленными обратными задачами, т.е. малым погрешностям в исходных данных могут соответствовать большие погрешности в реконструируемых функциях. Это проявляется в возникновении артефактов, ложных контуров в восстанавливаемых изображениях, которые подтверждаются в практическом решении этих задач [1–4].

Основной математической моделью задач восстановления сигналов и реконструкций изображений являются интегральные уравнения 1-го рода типа свертки [2, 4, 5]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(t - \tau)f(\tau) d\tau = g(t), \quad (1)$$

где $f(x)$ — искомый исходный неискаженный сигнал; $g(x)$ — искаженный регистрируемый сигнал; $H(x - \tau)$ — аппаратная функция (функция рассеяния точки — ФРТ).

Как известно, задача решения интегрального уравнения первого рода является некорректной, поэтому для его решения применяются методы теории некорректных и обратных задач [7]. Для решения интегральных уравнений (1) наиболее подходит метод регуляризации Тихонова. Поскольку для практической реализации интерес представляют численные методы, в настоящей работе мы уделяем им основное внимание. При численном решении обратной задачи методом регуляризации Тихонова обычно используются метод преобразования Фурье (ПФ) и метод квадратур, а также методы итераций, например, метод итерации Ландвебера, метод итеративной регуляризации Фридмана [5–7].

На качество восстанавливаемых томографических изображений влияют качество проекционных данных (погрешность, шум), по которым проводится реконструкция изображения, и алгоритм реконструкции, который должен быть устойчивым к погрешностям и шумам проекционных данных. Причиной этих погрешностей может быть неточная фильтрация проекционных данных из-за основного недостатка преобразования Фурье, базой которого являются гармонические функции и которое может давать значительные погрешности при скачкообразных измерительных данных с детекторов (так называемый эффект Гиббса в задачах восстановления изображений). Поэтому необходимо совершенствовать методы реконструкции.

В таких случаях возникает естественный вопрос: а что будет, если при моделировании пренебречь ошибками в начальных данных? Например, использование одной и той же расчетной сетки для моделирования данных и реконструкции иногда приводит, казалось бы, к хорошей реконструкции для данных без шума. Такая ситуация не является реалистичной, и восстановленные таким образом сигналы или изображения не соответствуют действительности, так как их невозможно соотнести с какой-либо реальной обратной задачей, поскольку шум присутствует в любой экспериментальной установке.

В настоящей работе мы на примере обращения одномерной свертки покажем с помощью численных экспериментов, что пренебрежение ошибками в измерениях данных приводит к неверным результатам.

1 Непрерывная модель для одномерной свертки

Математические модели многих некорректно поставленных обратных задач в общем виде можно записать в следующем виде:

$$f = Au + \varepsilon. \quad (2)$$

Здесь u — кусочно-непрерывная функция, определенная на подмножестве R^d ; $f \in R^k$ — числовой вектор, с помощью измерительных приборов; R^d — евклидово пространство размерности d ; A — дифференциальный или интегральный оператор; вектор $\varepsilon \in R^k$ означает ошибки измерений, которые всегда присутствуют в практических ситуациях. Для вектора ε во многих случаях справедливо неравенство $\|\varepsilon\| \leq \delta$, где δ — уровень погрешности.

Приведем постановки прямой и обратной задач относительно нашей математической модели (2).

Прямая задача: «Дано u , найти $f = Au$ ».

Обратная задача. «По данным измерения шума $f = Au + \varepsilon$ и $\|\varepsilon\| \leq \delta$, $\delta > 0$ необходимо извлечь информацию о u ».

Мы будем построить математическую модель одномерной свертки с периодическими краевыми условиями. Рассмотрим периодическую функцию $f : R \rightarrow R$, удовлетворяющий условию $f(x) = f(x + n)$, $n \in Z$, где R и Z — соответственно множество действительных и целых чисел.

Непрерывная модель измерений относится к 1-периодическому сигналу $f : R \rightarrow R$, который размывается 1-периодической функцией размытия точки. Другие названия функции размытия точки: *размытое ядро, импульсное эхо, ядро свертки*.

Сначала с помощью функции ψ_0 , которая определена на отрезке $[-a, a] \in R$ с некоторой константой $0 < a < 1/2$,

$$\psi_0(x) = C_a(x+a)^2(x-a)^2c, \quad -a \leq x \leq a, \quad (3)$$

построим функцию размытия точки ψ , где постоянная $C_a := \left(\int_{-a}^a (x+a)^2(x-a)^2 dx \right)^{-1}$ определяется из следующего условия нормировки:

$$\int_{-a}^a \psi_0(x) dx = 1. \quad (4)$$

Функция размытия точки ψ определяется копированием функции ψ_0 на каждый отрезок $[n - a, n + a]$, $n \in Z$, и она равна нулю вне этих отрезков. Построенная таким образом функция ψ будет неотрицательной и четной:

$$\psi(x) \geq 0 \text{ и } \psi(x) = \psi(-x), \quad \forall x \in R. \quad (5)$$

На рисунке 1 приведен график функции ψ_0 и функции размытия точки ψ при $a = 0,04$.

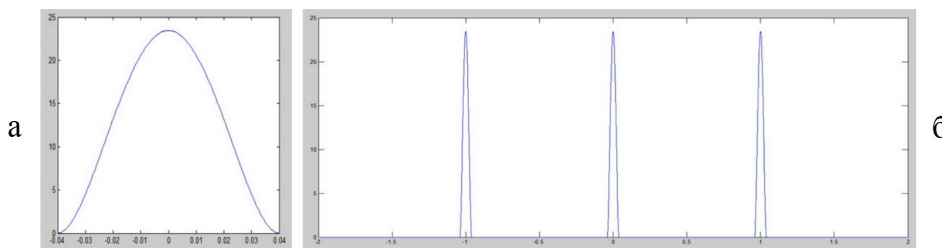


Рисунок 1. Функция ψ_0 (а) и функция размытия точки ψ (б)

Определение. Непрерывная модель свертки задается следующим интегралом:

$$(\psi * u)(x) = \int_{-a}^a \psi(\tau) u(x - \tau) d\tau. \quad (6)$$

Ниже на рисунке 2 показана эффективность свертки с кусочно-непрерывной функцией.

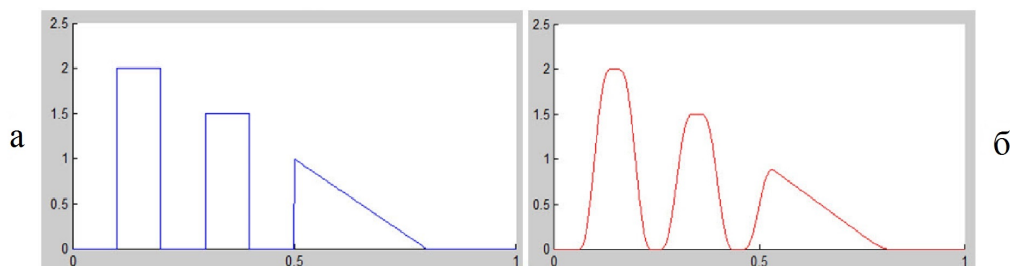


Рисунок 2. а — Сигнальная функция $u(x)$; б — функция $(\psi * u)(x)$

Из рисунка видно, что это сглаживающее свойство свертки, и оно соответствует названию размытое ядро функции размытия точки.

Отметим, что формула (6) не соответствует модели (2), так как в левой части этой формулы не находится вектор размерности k . Однако будем считать, что функция u определена на отрезке $[b, b + 1]$ и можно измерить значения свертки $(\psi * u)(x)$ в k -точках $\tilde{x}_1 = b, \tilde{x}_2 = b + \frac{1}{k}, \tilde{x}_3 = b + \frac{2}{k}, \dots, \tilde{x}_k = b + \frac{k-1}{k}$. Положим

$$u := [(\psi * u)(\tilde{x}_1), (\psi * u)(\tilde{x}_2), \dots, (\psi * u)(\tilde{x}_k)] \in R^k, \quad (7)$$

тогда (6) можно записать в виде $f = Au + \varepsilon$, и она примет вид (2).

2 Дискретная модель свертки

Для численного решения мы должны перейти от непрерывной модели (2) к дискретной

$$f = Au + \varepsilon, \quad (8)$$

где $f \in R^k, u \in R^n, A$ — матрица размера $k \times n$. Строго говоря, f в (2) и (8) разные — в непрерывном случае и в дискретном соответственно.

Чтобы перейти к дискретной модели (8), необходима дискретизация непрерывной модели (2). Для этого определим сетку следующим образом:

$$x_j = b + \frac{j-1}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Тогда периодическую функцию $u(x)$ с действительными значениями можно записать в виде вектор функции u

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T = [u_1(x_1), u_2(x_2), \dots, u_n(x_n)]^T. \quad (10)$$

Заметим, что $\Delta x = x_2 - x_1 = 1/n$.

Далее можем аппроксимировать интеграл в (6) с помощью квадратурных формул численного интегрирования. Для любой непрерывной функции $g : [b, b + 1] \rightarrow R$ можно записать следующее приближенное равенство:

$$\int_b^{b+1} g(x) dx \approx \Delta x \sum_{j=1}^n g(x_j), \quad (11)$$

и с увеличением n приближение становится точнее.

Для удобства возьмем $k = n$ и измерим свертку на той же совокупности точек (9), на которых дискретизируется неизвестная функция $u(x)$. В общем случае в этом нет необходимости, однако в этом случае A будет квадратной матрицей и во многом упрощается задача численного обращения свертки.

Построим матрицу A размерности $n \times n$ такой, чтобы $Au \in R^k$ аппроксимировал $\mathcal{A}u$, определяемый (6). Определим дискретную функцию размытия точки:

$$p = [p_{-v}, p_{-v+1}, \dots, p_{-1}, p_0, p_1, \dots, p_{v-1}, p_v]^T.$$

Вспомним, что для всех $|x| > a > 0$, $\psi_0(x) \equiv 0$. Возьмем $v > 0$ как наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $(v + 1) \times \Delta x > a$, и пусть $\tilde{p}_j = \psi_0(j\Delta x)$, $\forall j = -v, \dots, v$. К примеру, если $a = 0,04$ и $n = 64$, как на рисунке 1, то $v = 2$. В силу условия нормировки (6) будет выполнено следующее приближенное равенство: $\Delta x \sum_{j=-v}^v \tilde{p}_j \approx 1$. В практике при нормировке дискретной функции размытия точки берется следующее соотношение:

$$p = \left(\Delta x \sum_{j=-v}^v \tilde{p}_j \right)^{-1} \tilde{p}, \tag{12}$$

тогда

$$\Delta x \sum_{j=-v}^v p_j = 1. \tag{13}$$

Поэтому

$$\int_{-a}^a \psi(x') u(x_j - x') dx' \approx \Delta x \sum_{l=-v}^v \psi(x_l) u(x_j - x_l) \approx \Delta x \sum_{l=-v}^v p_l u_{j-l},$$

т.е. дискретная свертка находится следующей формулой:

$$(p * u)_j = \sum_{l=-v}^v p_l u_{j-l}, \tag{14}$$

где u_{j-l} для случаев $j - l < 1$ и $j - l > n$ определяется периодическими граничными условиями. Тогда

$$\Delta x (p * u) \approx \mathcal{A}u, \tag{15}$$

и мы найдем вектор измерений $f = [f_1, \dots, f_k]^T$ следующей формулой:

$$f_j = \Delta x (p * u)_j + \varepsilon_j. \tag{16}$$

Записывая (14) с помощью матрицы A , получаем модель (3):

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{bmatrix}.$$

Покажем для $n = 64$, какой будет структура матрицы A свертки. Как мы отметили выше, если $a = 0,04$, то $v = 2$ и функция размытия точки принимает вид $p = [p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1, p_2]$. Тогда согласно (14) имеем

$$\begin{aligned} (p * u)_1 &= pu_1 + p_{-1}u_2 + p_{-2}u_3 + p_2u_{n-1} + p_1u_n; \\ (p * u)_2 &= pu_1 + p_0u_2 + p_{-1}u_3 + p_{-2}u_4 + p_2u_n; \\ (p * u)_3 &= p_2u_1 + p_1u_2 + p_0u_3 + p_{-1}u_4 + p_{-2}u_5; \\ &\vdots \\ (p * u)_n &= p_{-1}u_1 + p_{-2}u_2 + p_2u_{n-2} + p_1u_{n-1} + p_0u_n. \end{aligned}$$

Поэтому матрица A будет имеет вид

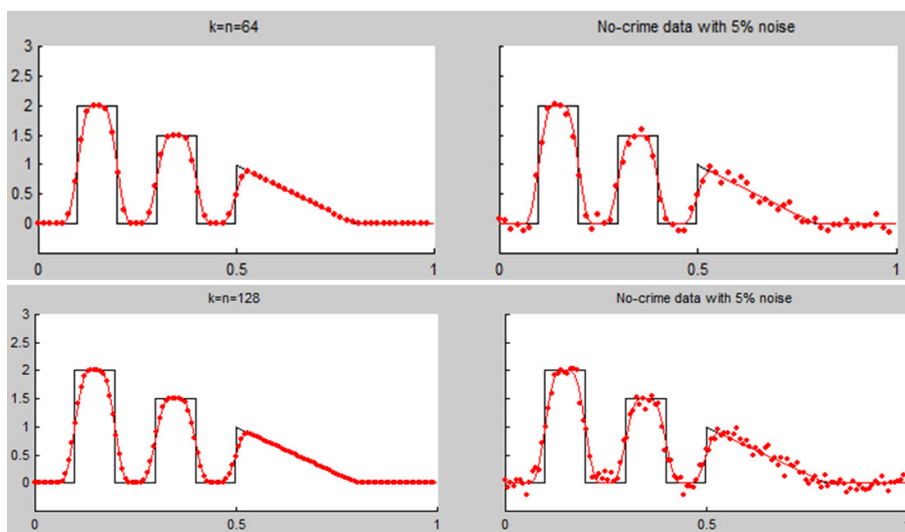
$$A = \Delta x \begin{bmatrix} p_0 & p_{-1} & p_{-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_0 & p_{-1} & p_{-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} & p_{-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} & p_{-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & & p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} & p_{-2} \\ p_{-2} & 0 & \cdots & & 0 & p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} \\ p_{-1} & p_{-2} & \cdots & & 0 & 0 & p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Как видим, A — циркулянтная матрица, а системы линейных уравнений с такой матрицей коэффициентов можно решить с помощью быстрого преобразования Фурье, а также другими итерационными методами.

Возвращаясь к общему случаю определения p по формуле (12), формулу приближения (15) можно записать в виде

$$Au \approx Au. \tag{18}$$

Ниже на рисунке 3 приведены результаты вычислений дискретной модели и результаты сопоставлений их с $(\psi * u)(x)$ непрерывными данными свертки, определяемой формулой (6). Также на рисунке (в правой части) показаны результаты вычислений при добавлении шума в исходные данные $u(x)$. Мы смоделировали случайный вектор для случая $k=64, 128$, взяв вектор с независимыми элементами с гауссовским распределением, имеющим стандартное отклонение $\sigma = 0,05 \cdot \max |u(x)|$. Это соответствует относительному уровню шума 5%.



Свертка $(\psi * u)(x)$, определяемая формулой (6), обозначена сплошной линией, а результаты приближения — точками

Рисунок 3. Результаты приближения по формуле $Au \approx Au$ для различных значений $k = n$

На рисунке 4 приведены элементы матрицы A свертки, неравные нулю при $k = n = 32, k = n = 64$.

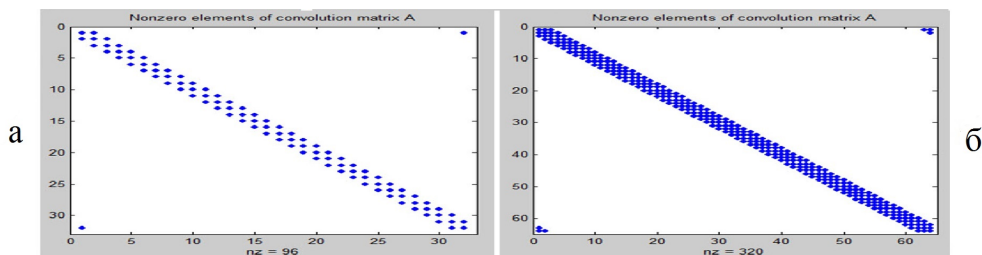


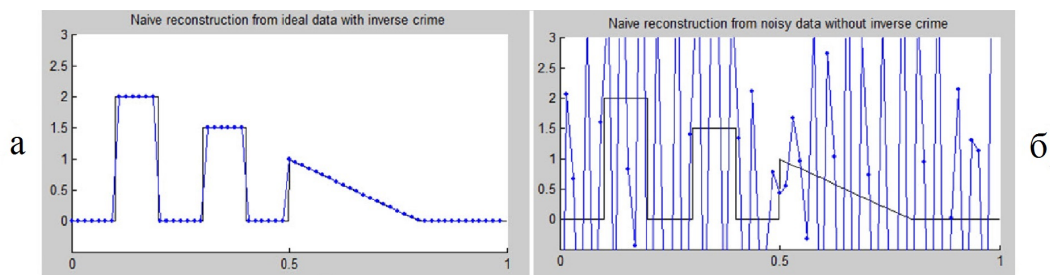
Рисунок 4. Элементы матрицы A свертки, неравные нулю при $k = n = 32$ (а); $k = n = 64$ (б)

Как видно из рисунка 4, количество элементов матрицы A , неравных нулю, не превышает 10% от их общего числа. Это свидетельствует о том, что матрица A является разреженной.

3 Простое обращение свертки

В этом разделе приведены результаты обращения свертки в отсутствие ($\varepsilon = 0$) и при наличии шума с помощью следующей формулы:

$$u \approx A^{-1}f \approx A^{-1}(Au + \varepsilon) = f + A^{-1}(\varepsilon). \quad (19)$$



а) В отсутствие шума; б) при наличии шума

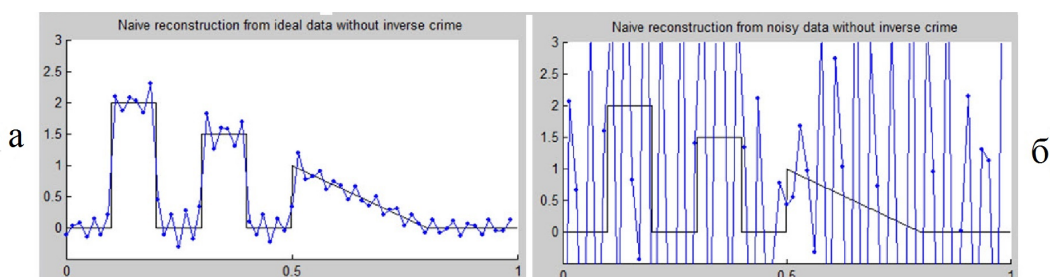
Рисунок 5. Результаты численного обращения свертки

Казалось бы, простое обращение свертки с помощью формулы (19) дает вполне приемлемые результаты (рис. 5 а). Но это неверно, так как в начальных данных содержатся ошибки измерений. Как отмечено во введении, восстановленные таким путем данные невозможно соотнести с какой-либо реальной обратной задачей. При наличии шума уже проявляется некорректность задачи обращения свертки (рис. 5 б).

Поэтому необходимо применять методы регуляризации решения некорректных задач [1, 7], чтобы уменьшить чувствительность решения к ошибкам измерений.

4 Правильное обращение свертки

Покажем здесь один простой способ правильного численного обращения свертки (рис. 6). Мы будем использовать модифицированную функцию размытия точки при моделировании данных, взяв $a = 0,041$. Определяемую формулой (6) функцию $(\psi * u)(x)$ вычислим приближенно в 1000 равномерно расположенных точках интервала $[0, 1]$, используя формулу трапеции с 400 квадратурными точками для оценки интеграла. Далее, используя сплайны, интерполируем значения $(\psi * u)(x)$ на 64 точки сетки.



а) В отсутствие шума; б) при наличии шума

Рисунок 6. Результаты правильного численного обращения свертки

Заключение

В данной работе рассмотрена задача численного обращения одномерной свертки, с помощью численных экспериментов показана некорректность этой задачи. Построен дискретный вариант свертки. Показано, что простое обращение свертки без учета ошибок измерений приводит к неверным результатам. Приведен один простой способ правильного обращения свертки. Проведённое моделирование показывает необходимость и важность применения методов регуляризации при решении некорректных обратных задач.

Список литературы

- 1 Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — С. 199.
- 2 Бейтс Р., Мак-Доннелл М. Восстановление и реконструкция изображений. — М.: Мир, 1989. — С. 336.
- 3 Василенко Г.И., Тараторин А.М. Восстановление изображений. — М.: Радио и связь, 1986. — С. 335.
- 4 Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. — М.: Техносфера, 2006. — С. 1072.
- 5 Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода типа свертки // Некоторые вопросы автоматизированной обработки и интерпретации физических экспериментов. — Вып. 1. — М.: Изд-во МГУ, 1973. — С. 170–191.
- 6 Медофф Б.П. Реконструкция изображений по ограниченным данным: Теория и применение в компьютерной томографии // Реконструкция изображений / Под ред. Г.Старка. — М.: Мир, 1992. — С. 384–436.
- 7 Тихонов А.Н., Гончарский А.В. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. — М.: Наука, 1983. — С. 200.

М.А. Сұлтанов, М.Д. Қошанова, Б.Б. Устемирова

Бірөлшемді үйірткіні терістеу кері есебінің қисынсыздығы жайлы

Мақалада сандық модельдеу әдісімен бірөлшемді үйірткіні терістеу кері есебінің қисынсыз есеп болатындығы көрсетілген. Үйірткінің дискрет моделі құрылған. Шу болған және болмаған жағдайларға есептеулер жүргізілген. Практикалық жағдайларда өлшеулерде пайда болатын қателіктерді есепке алмау қате нәтижелерге алып келу мүмкіндігі компьютерлік есептеу тәжірибелері арқылы зерттелген. Сондай-ақ авторлар үйірткіні сандық тіктеудің бір қарапайым тәсілі және сандық мысалдар келтірген.

M.A. Sultanov, M.D. Koshanova, B.B. Ustemirova

On ill-posedness of the numerical inversion inverse problem of one-dimensional convolution

In the article the method of numerical simulation shows the ill-posedness of the inverse problem of the numerical treatment of one-dimensional convolution. Built discrete convolution model. Calculation performed in the absence and presence of noise. Computer computing experiments have shown that the neglect of an error that occurs when measuring in practical cases, can lead to incorrect results. One easy way to restore the correct numerical convolution, Numerical examples are also given.

References

- 1 Bakushinskii A.B., Goncharsky A.V. *Ill-posed problems. Numerical Methods and Applications*, Moscow: Publ. MSU, 1989, p. 199.
- 2 Bates R., Mac-Donnell M. *Rehabilitation and reconstruction of images*, Moscow: Mir, 1989, p. 336.
- 3 Vasilenko G.I., Taratorin A.M. *Image restoration*, Moscow: Radio and Svyaz, 1986, p. 335.
- 4 Gonzalez R., Woods R. *Digital Image Processing*, Moscow: Technosphere, 2006, p. 1072.
- 5 Goncharsky A.V., Leonov A.S., Yagola A.G. *Some questions automated processing and interpretation of physics experiments*, 1973, 1, p. 170–191.
- 6 Medoff B.P. *Image Reconstruction*, Moscow: Mir, 1992, p. 384–436.
- 7 Tikhonov A.N., Goncharsky A.V. and others. *The regularizing algorithms and apriori information*, Moscow: Nauka, 1983, p. 200.

УДК 519.632

М.А. Султанов¹, Г.Б. Баканов¹, И.Е. Светов², Б.Б. Устемирова¹

¹Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан;

²Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
(E-mail: smurat-59@mail.ru)

Численный алгоритм решения обратной задачи определения зоны малой проницаемости

В статье рассмотрена обратная задача восстановления границы зоны малой проницаемости в пласте по измерениям давления в скважинах. Исследованы постановка задачи и распределение давления внутри слоя в случае, когда давление не меняется поперек слоя. Методами теории решения краевых задач для эллиптических уравнений задача сведена к интегральному уравнению. Авторами предложен итерационный алгоритм решения задачи, проведены вычислительные расчеты для модельных задач.

Ключевые слова: вычислительная диагностика, измеримое поле, проницаемость, неоднородность, прямая и обратная задачи, интегральное уравнение.

Введение

В настоящее время широко развиваются теоретические и прикладные исследования в области вычислительной диагностики, связанные с восстановлением параметров различных сред (естественных и искусственных) по измерениям различных полей (электромагнитных, акустических и др.). Этому способствуют огромные возможности современных быстродействующих компьютеров, так как в задачах вычислительной диагностики необходима сложная обработка поступающих входных данных (измерений полей, сигналов и т.п.). В большинстве случаев при решении подобных задач не удается получить аналитического точного решения, поэтому большое значение для практических приложений представляет разработка численных методов и алгоритмов их решения. В связи с интенсивным освоением месторождений (нефтяных, газовых, угольных и т.д.) и ростом количества ранее пробуренных скважин возникает необходимость определения зон малой проницаемости, что обусловлено нецелесообразностью бурения. Метод интегральных уравнений является одним из основных методов решения подобных задач [1–4], перспективным методом является метод объемных сингулярных интегральных уравнений [5, 6]. В настоящей работе для решения обратной задачи восстановления границы зоны малой проницаемости предложен итерационный алгоритм на основе сведения обратной задачи к интегральному уравнению Фредгольма первого рода с последующим применением метода регуляризации Тихонова.

1 Постановка прямой и обратной задачи

Прямая задача. Рассмотрим достаточно тонкий неоднородный слой и будем считать, что в нем давление не изменяется поперек, т.е. $P(x, y, z) = P(x, y)$. Будем считать, что внутри этого слоя проницаемость постоянна, за исключением некоторой зоны полной непроницаемости S , граница которой ограничена контуром C . Вне зоны непроницаемости пробурено K скважин, устья которых заданы координатами $M_k = (x_k, y_k)$, $k \in [1, K]$ (рис. 1).

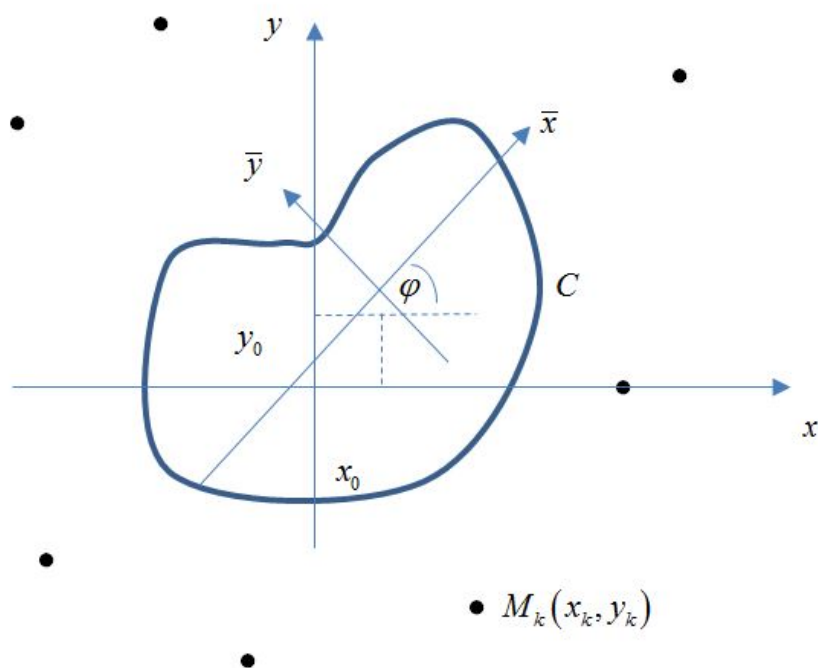


Рисунок 1. Схема зоны непроницаемости

Предполагается, что на большом расстоянии от исследуемой области давление равно постоянному пластовому давлению P_0 . Если работает лишь одна k -я скважина, в которой давление равно P_k , то давление на пласте $P^{(k)}(x, y)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \Delta P^{(k)}(x, y) &= -P_k \cdot \delta(x - x_k) \delta(y - y_k), \\ \frac{\partial P^{(k)}}{\partial n} \Big|_C &= 0, \\ P^{(k)} \Big|_{C_{R_0}} &= P_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где C_{R_0} — окружность большого радиуса R_0 .

Обратная задача. Определить контур C по дополнительной информации по измеренным давлениям в закрытых скважинах:

$$P_m^{(k)} = P^{(k)}(x_m, y_m), \quad m \in [1, K], \quad m \neq k, \quad k \in [1, K]. \quad (2)$$

Таким образом, мы имеем $K(K - 1)$ измеренных данных:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} P_1^{(1)} & P_2^{(1)} & \dots & P_K^{(1)} \\ P_1^{(2)} & P_2^{(2)} & \dots & P_K^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_1^{(K)} & P_2^{(K)} & \dots & P_K^{(K)} \end{pmatrix} \triangleright. \quad (3)$$

2 Сведение краевой задачи к интегральному уравнению

Для того, чтобы свести краевую задачу для уравнения Пуассона к интегральному уравнению, будем рассматривать функцию Грина для задачи Дирихле в круге радиуса R_0 :

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{d(M, M_0)}{r_0 \cdot R_0 \cdot \rho(M, M_0)}. \quad (4)$$

Здесь M — точка с координатами (x, y) ; M_0 — точка с координатами (x_0, y_0) ,

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, d(M, M_0) = \sqrt{(r_0^2 x - R_0^2 x_0)^2 + (r_0^2 y - R_0^2 y_0)^2}.$$

Решение краевой задачи (1) будем искать в следующем виде:

$$P^{(k)}(M) = P_0 + P_k \cdot G(M, M_k) + P_k \cdot \oint_C \mu(M_0) \cdot G(M, M_0) dl_{M_0}. \quad (5)$$

Функция, определенная выражением (5), удовлетворяет уравнению и краевому условию на внешнем контуре C_{R_0} . Подставляя (5) в краевые условия на C , получим интегральное уравнение для плотности потенциала $\mu(M)$:

$$\frac{1}{2}\mu(M) - \oint_C \mu(M_0) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} dl_{M_0} = \frac{\partial G(M, M_k)}{\partial n_M}, \quad M \in C. \quad (6)$$

Определив из уравнения (6) $\mu(M)$, находим давление $P(M)$ в точках M_m с координатами (x_m, y_m) , когда источник расположен в точке M_k с координатами (x_k, y_k) (для такого давления введено обозначение $P_m^{(k)}$). Тогда согласно (5)

$$P_m^{(k)}(M) = P_0 + P_k \cdot G(M_m, M_k) + P_k \cdot \oint_C \mu(M_0) \cdot G(M_m, M_0) dl_{M_0}. \quad (7)$$

Если выполняется условие $R_0 \gg D$, где D — максимальный диаметр области S , то интегральное уравнение (6) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x - x_0}{\rho^2(M, M_0)}; \quad \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{y - y_0}{\rho^2(M, M_0)}. \quad (8)$$

Как видно, решение интегрального уравнения (6) не зависит от R_0 . Однако расчет давления по формуле (5) зависит от R_0 , так как при $R_0 \gg D_0$ (D_0 — диаметр области, где рассчитывается давление) функция Грина (4) имеет следующий вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_0}{\rho(M, M_0)}. \quad (9)$$

Поэтому давление при $\rho(M, M_0) \leq D_0$, согласно (5), имеет вид

$$P^{(k)}(M) = P_0 + \frac{P_k}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho(M, M_k)} + \frac{P_k}{2\pi} \cdot \oint_C \mu(M_0) \ln \frac{1}{\rho(M, M_0)} dl_{M_0} + C. \quad (10)$$

Здесь $C = \frac{P_k \ln R_0}{2\pi} \left(1 + \oint_C \mu(M_0) dl_{M_0}\right)$. Присутствие множителя $\ln R_0$ существенно влияет на точность расчетов, так как при больших R_0 необходимо будет решить интегральное уравнение (6) с достаточно высокой степенью точности. В противном случае возникает существенная погрешность. В связи с этим приходится видоизменять постановку задачи (1) для случая больших значений R_0 .

3 Постановка внешней задачи Неймана

Рассмотрим распределение давления в слое $P(x, y)$ при больших R_0 , тогда $P(x, y)$ будет решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \Delta P^{(k)}(x, y) &= -P_k \cdot \delta(x - x_k) \delta(y - y_k); \\ \frac{\partial P^{(k)}}{\partial n} \Big|_C &= 0, \\ P^{(k)}(x, y) - u_0(x, y) &\rightarrow P_0, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$u_0(M) = \frac{P_k}{2\pi} \cdot \ln \frac{1}{\rho(M, M_0)} \quad (12)$$

— давление в точке M с координатами (x, y) в окрестности источника M_k и в отсутствие зоны непроницаемости.

Решение задачи (11) будем искать в виде

$$P_m^{(k)} = P_0 + u_0(M) + u(M), \quad (13)$$

где $u(M)$ — давление, возникающее в результате наличия зоны непроницаемости S , а P_0 — пластовое давление.

Давление $u(M)$ удовлетворяет внешней задаче Неймана:

$$\begin{aligned} \Delta u(M) &= 0, \\ \frac{\partial u(M)}{\partial n} \Big|_C &= - \frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_C, \end{aligned} \quad (14)$$

$u(M) \rightarrow 0$ на бесконечности. Полученная задача сводится к интегральному уравнению. Для того чтобы удовлетворить условию на бесконечности, решение задачи (14) представим в виде

$$u(M) = \frac{P_k}{2\pi} \cdot \oint_C \mu(M_0) \ln \frac{r(M, O)}{\rho(M, M_0)} dl_{M_0}. \quad (15)$$

Будем считать, что начало координат принадлежит неоднородности S . Это представление является решением уравнения Лапласа и стремится к нулю на бесконечности, так как $\frac{r(M, O)}{\rho(M, M_0)} \rightarrow 1$ при $M \rightarrow \infty$.

Подставляя (15) в граничное условие, получим интегральное уравнение

$$\pi \mu(M) - \oint_C \mu(M_0) K(M, M_0) dl_{M_0} = f(M), \quad (16)$$

где $K(M, M_0) = \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \frac{r(M)}{\rho(M, M_0)}$, $f(M) = \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \frac{1}{\rho(M, M_k)}$.

В случае, когда неоднородность есть круг радиуса a , решение можно получить в явном виде:

$$u(r, \varphi) = \frac{P_k}{2\pi} \ln \frac{r}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \varphi}}, \quad (17)$$

где $\left\{ r_1 = \frac{a^2}{r_0}, \varphi_1 = 0 \right\}$ — точка положения источника. Функция (17) является решением уравнения Лапласа и стремится к нулю на бесконечности. Остается проверить выполнение граничного условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \frac{P_k}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{r - r_1 \cos \varphi}{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \varphi} \right\} = \frac{P_k}{2\pi} \left\{ \frac{1}{a} - \frac{r_0(r_0 - a \cos \varphi)}{a(r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos \varphi)} \right\} = \\ &= \frac{P_k}{2\pi} \cdot \frac{a - r_0 \cos \varphi}{r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (18)$$

Вычислим теперь, согласно (14),

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = - \frac{P_k}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=a} \ln \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi} = - \frac{P_k}{2\pi} \cdot \frac{a - r_0 \cos \varphi}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi} = - \frac{\partial u_0}{\partial r} \Big|_{r=a}. \quad (19)$$

Итак, доказано, что граничное условие задачи (14) выполняется, т.е. (17) является решением задачи (14) для круга.

4 Численный алгоритм прямой задачи и результаты расчетов

Численное исследование алгоритма решения прямой задачи будем проводить для случая одной звездной области непроводимости, контур C которой задан в полярных координатах $r = r(\varphi)$. В этом случае ядро интегрального уравнения (16) можно представить в виде

$$-K(M, M_0) - \frac{K(\varphi, \varphi_0)}{2 \cdot l(\varphi)} \text{ при } M = (r(\varphi), \varphi); M_0 = (r(\varphi_0), \varphi_0); \quad (20)$$

$$K(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{\rho^2(\varphi, \varphi_0)} ((r(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi_0) \cos \varphi_0) \cdot (r(\varphi) \cos \varphi + r'(\varphi) \sin \varphi + (r(\varphi) \sin \varphi - r(\varphi_0) \sin \varphi_0) \cdot (r(\varphi) \sin \varphi - r'(\varphi) \cos \varphi)),$$

где

$$l(\varphi) = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}, \quad \rho^2(\varphi, \varphi_0) = r^2(\varphi) + r^2(\varphi_0) - 2r(\varphi)r(\varphi_0)\cos(\varphi - \varphi_0). \quad (21)$$

После несложных преобразований получим ядро интегрального уравнения

$$K(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{\rho^2(\varphi, \varphi_0)} \{r^2(\varphi) - r(\varphi_0)(r(\varphi) \cos(\varphi - \varphi_0) + r'(\varphi) \sin(\varphi - \varphi_0))\}. \quad (22)$$

Заметим, что ядро этого интегрального уравнения не имеет особенности при совпадении аргументов: $K(\varphi, \varphi_0) \rightarrow \frac{r^2(\varphi) + 2r'(\varphi)r(\varphi) - r(\varphi)r'(\varphi)}{2l^2(\varphi)}$ при $\varphi_0 \rightarrow \varphi$. Правая часть интегрального уравнения (16) равна

$$f(M) = -\frac{f(\varphi)}{2l(\varphi)}.$$

Здесь M — точка с координатами $(r(\varphi), \varphi)$, M_k — точка с координатами (R_k, φ_k) , где $f(\varphi) = K(\varphi, \varphi_k)$ при $r(\varphi_k) = R_k$ или

$$f(\varphi) = \frac{r^2(\varphi) - R_k(r(\varphi) \cos(\varphi - \varphi_k) + r'(\varphi) \sin(\varphi - \varphi_k))}{r^2(\varphi) + R_k^2 - 2R_k r(\varphi) \cos(\varphi - \varphi_k)}. \quad (23)$$

Учитывая, что $dl_{M_0} = l(\varphi_0) d\varphi_0$, можно записать интегральное уравнение (16) в виде

$$\pi\mu(\varphi) + \int_0^{2\pi} K(\varphi, \varphi_0) \mu(\varphi_0) \frac{l(\varphi_0)}{l(\varphi)} d\varphi_0 = -\frac{f(\varphi)}{l(\varphi)}. \quad (24)$$

Введя новую неизвестную функцию $U(\varphi) = \mu(\varphi)l(\varphi)$, получим следующее интегральное уравнение:

$$\pi U(\varphi) + \int_0^{2\pi} K(\varphi, \varphi_0) U(\varphi_0) d\varphi_0 = -f(\varphi). \quad (25)$$

Необходимые для обратной задачи данные, согласно (15), вычисляются по формуле

$$P^k(M) - u_0(M) = u^{(k)} = P_0 + \frac{P_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\varphi) \ln \frac{R_{m-1}^2 + r^2(\varphi) - 2R_{m-1}r(\varphi) \cos(\varphi - \varphi_{m-1})}{R_m^2 + r^2(\varphi) - 2R_m r(\varphi) \cos(\varphi - \varphi_m)} d\varphi. \quad (26)$$

Вычислительные эксперименты проводились для случая, когда контуром C является эллипс

$$r(\varphi) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{a\varepsilon}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (27)$$

где a, b — полуоси эллипса; $\varepsilon = b/a$ — эксцентриситет эллипса. При этом считалось, что точки измерения и возбуждения находятся на окружности радиуса R_u , т.е. $R_m = R_u$ для любого m . Поэтому результаты расчета $u^{(k)}$ зависят от безразмерного параметра $\varepsilon = b/a$, места расположения источника φ_k и измерения φ_m .

На рисунке 2 приведены значения давления $u^{(k)}$ в зависимости от φ_m при различных значениях φ_k , при $\varepsilon = 0,5$, $R_u = 3$.

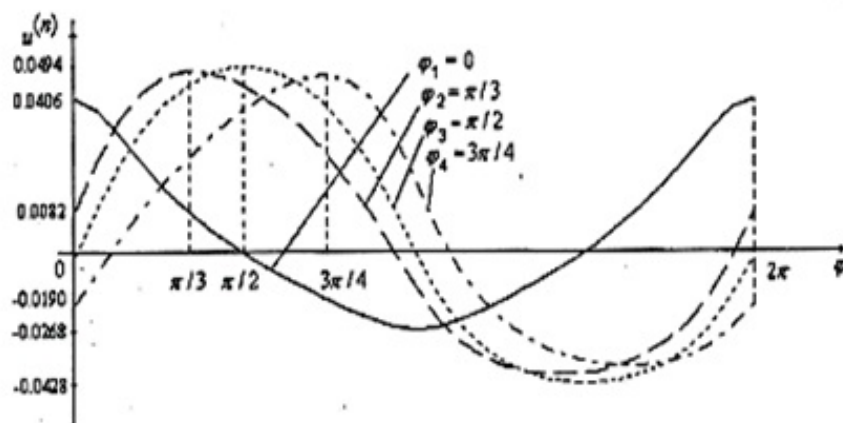


Рисунок 2. Значения давления в зависимости от расположения источника и измерения

Для исследования чувствительности измеряемых величин к положению и размерам области непроницаемости проводились расчеты значений $u^{(k)}$ в m точках окружности радиуса $R_u = 3$. При различных формах эллипса (меняется эксцентриситет эллипса ε) вычислялась величина $q(\varepsilon) = u_{\min}^{(k)} / u_{\max}^{(k)}$, где $u_{\min}^{(k)}$ и $u_{\max}^{(k)}$ — минимальное и максимальное значения $u^{(k)}$ в точках измерения.

Для проверки точности решения прямой задачи проводилось сравнение численных расчетов для области непроницаемости, имеющей форму круга по формуле (17), и решения, полученного с использованием интегрального уравнения (16) и формулы (15). Проведенное исследование показало, что давление, вычисленное с использованием аналитического решения задачи и полученное с помощью интегрального уравнения, совпадает с достаточно большой точностью (погрешность вычислений составляет менее 0,001 %).

На рисунке 3 приведены результаты решения модельной обратной задачи. Здесь сплошной линией показано точное расположение эллиптической неоднородности, пунктирной линией — восстановленное расположение неоднородности для давления с внесенной погрешностью 2,5 %.

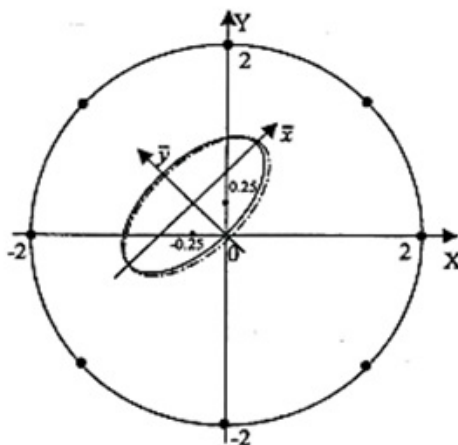


Рисунок 3. Результаты восстановления эллиптической неоднородности

При решении модельной задачи источник находился в восьми скважинах с координатами $(0,0, 2,0)$, расположенных на окружности с радиусом 2 и шагом $\pi/4$. Кроме того, проводилось измерение давления, эллиптическая неоднородность имела параметры $a = 1,5$, $d = 0,8$, $\theta = \pi/4$ — угол поворота эллипса, с центром $(-0,25, 0,25)$.

Работа осуществлена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект 0115РК00681).

Список литературы

- 1 Горюнов А.А., Сосковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — С. 152.
- 2 Самохин А.В. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. — М.: Радио и связь, 1998. — С. 160.
- 3 Ильинский А.С., Свешников А.Г. Прямые и обратные задачи электродинамики // Вестн. Москов. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. — 1978. — № 4. — С. 3–11.
- 4 Kress R. Linear integral equations // App. Math. Sci. — Vol. 82. — New-York: Springer, 1989.
- 5 Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г. Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм для решения задач дифракции электромагнитных волн на плоских экранах // Радиотехника и электроника. — 2008. — Т. 53. — № 4. — С. 441–446.
- 6 Медведик М.Ю. Применение субиерархического метода в задачах электродинамики // Вычисл. методы и программирование. — 2012. — Т.13. — С. 87–97.

М.А.Султанов, Г.Б.Баканов, И.Е.Светов, Б.Б.Устемирова

Кішіөткізгіштік аймағын анықтау кері есебін шешудің сандық алгоритмі

Мақалада ұңғымадағы қысымның өлшеулері бойынша пластағы кішіөткізгіштік аймағын тіктеу кері есебі қарастырылған. Қысым қабат бойлап өзгермейтін жағдайда есептің қойылымы мен қабат ішіндегі қысымның үлестірілімі зерттелген, эллиптикалық тендеулер үшін шеттік есептерді шешу әдістерінің теориясы көмегімен есеп интегралдық тендеуге келтірілген. Есепті шешудің итерациялық алгоритмі ұсынылған, үлгілік есептер үшін есептеулер жүргізілген.

M.A.Sultanov, G.B.Bakanov, I.E.Svetov, B.B.Ustemirova

A numerical algorithm for solving the inverse problem of determining the low permeability zone

The inverse problem of reconstructing the boundaries of low permeability zones of the reservoir for pressure measurements in wells. Formulation of the problem is investigated and the pressure distribution within the layer when the pressure does not change across the layer, using the theory of solving boundary value problems for elliptic equations, the problem is reduced to the integral equation. An iterative algorithm for solving the problem, computational calculations performed for model problems.

References

- 1 Goryunov A.A., Soskovets A.V. *Inverse scattering problems in acoustics*, Moscow: MSU Publ., 1989, p. 152.
- 2 Samokhin A.V. *Integral equation and iterative methods in the electromagnetic scattering*, Moscow: Radio and svyaz, 1998, p. 160.
- 3 Piyinsky A.S., Sveshnikov A.G. *Bull. Moscow. University, Ser. 15. Calculated Mathematics and cybernetics*, 1978, 4, p. 3–11.
- 4 Kress R. *App. Math. Sci.*, 82, New-York: Springer, 1989.
- 5 Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G. *Technology and Electronics.*, 2008, 53, 4, p. 441–446.
- 6 Medvedik M.Yu. *Numerical Methods and Programming*, 2012, 13, p. 87–97.

UDC 512.552

U.K. Turusbekova, G.T. Azieva

*Kazakh University of Economics, Finance and International Trade, Astana
(E-mail: umut.t@mail.ru)*

Quadratic Poisson algebras on $k[x, y, z]$ and their automorphisms

One of the important directions in modern mathematics is applications of Poisson structures and to various problems of mathematics and theoretical mechanics. These problems arise in dynamics of a rigid body, the celestial mechanics, the theory of curls, cosmological models. Poisson algebras play a key role in the Hamiltonian mechanics, symplectic geometry and also are central in the study of quantum groups. Note that a development of the theory of Poisson structures in many respects was stimulated by the dynamics of many-dimensional tops since the latter allows to make the abstract statements of many theorems more vivid and substantial. Note also that some important examples of the Lie-Poisson brackets were already known to Jacobi. In his examples the Poisson brackets appeared on a space of the first integrals of the Hamilton equations. Until recently, an algebraic theory of Poisson structures was scarcely studied. At present, Poisson algebras are investigated by the many mathematicians of Russia, France, the USA, Brazil, Argentina, Bulgaria etc. This paper is devoted to the description of the automorphism group of Poisson algebra P on polynomial algebra $k[x, y, z]$, such that $\{x, y\} = z^2, \{y, z\} = x^2, \{z, x\} = y^2$. One interesting Poisson relation between the homogeneous algebraically dependent elements is established and is proved that the group of automorphisms $Aut_k P$ of algebra P is generated by automorphisms $\varphi_\alpha = (\alpha x, \alpha y, \alpha z), \alpha \in k^*, \tau = (y, z, x)$ and $\delta = (x, \varepsilon y, \varepsilon^2 z)$, where ε – a solution of an equation $x^2 + x + 1 = 0$.

Key words: quadratic Poisson algebras, automorphisms, polinomial algebras, rational function.

Introduction

One of the important directions in modern mathematics is applications of Poisson structures and to various problems of mathematics and theoretical mechanics. These problems arise in dynamics of a rigid body, the celestial mechanics, the theory of curls, cosmological models. Poisson algebras play a key role in the Hamiltonian mechanics, symplectic geometry and also are central in the study of quantum groups. Note that a development of the theory of Poisson structures in many respects was stimulated by the dynamics of many-dimensional tops since the latter allows to make the abstract statements of many theorems more vivid and substantial.

Recall that a vector space B over a field k endowed with two bilinear operations $x \cdot y$ (a multiplication) and $\{x, y\}$ (a Poisson bracket) is called a Poisson algebra if B is a commutative associative algebra under $x \cdot y$, B is a Lie algebra under $\{x, y\}$, and B satisfies the following identity (the Leibniz identity)

$$\{x \cdot y, z\} = \{x, z\} \cdot y + x \cdot \{y, z\}.$$

It is well known [1–4], that the automorphisms of polynomial algebras $k[x, y]$ and free associative algebras $k\langle x, y \rangle$ in two variables are products of affine automorphisms

$$\varphi = (\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \beta_1, \alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \beta_2), \alpha_{ij}, \beta_j \in k$$

and triangular automorphisms

$$\psi = (\alpha_1x + f(y), \alpha_2y + \beta_2), \alpha_1, \alpha_2 \in k^*, f(y) \in k[y], \beta_2 \in k,$$

i.e are tame.

It was proved that the known automorphism of Nagata [5, 6]

$$\sigma = (x + (x^2 - yz)z, y + 2(x^2 - yz)x + (x^2 - yz)^2z, z),$$

of polynomial algebras $k[x, y, z]$ in three variables and Anick automorphism [7, 8]

$$\delta = (x + z(xz - zy), y + (xz - zy)z, z),$$

of free associative algebras $k\langle x, y, z \rangle$ in three variables over a field k of characteristic 0 are not tame, i.e. are *wild*.

In work [9] is proved that the automorphisms of two-generated free Poisson algebras $k\{x, y\}$ over a field k of characteristic 0 are tame. Moreover [1, 4, 9], groups of automorphisms of algebras $k[x, y]$, $k\langle x, y \rangle$, $k\{x, y\}$ are isomorphic, i.e.

$$\text{Aut } k[x_1, x_2] \cong \text{Aut } k\langle x_1, x_2 \rangle \cong \text{Aut } k\{x_1, x_2\}.$$

One of the main problems of affine algebraic geometry (see, for example [10]) is a description of automorphism groups of polynomial algebras in $n \geq 3$ variables.

A classification of all homogeneous quadratic Poisson brackets in three variables is given in work [11]. Among these algebras the most interesting is the Poisson algebra P on polynomial algebra $k[x, y, z]$, such that

$$\{x, y\} = z^2, \{y, z\} = x^2, \{z, x\} = y^2.$$

This paper is devoted to the description of the automorphism group of Poisson algebra P . In section 2 provided informations necessary, designations and definitions are. One interesting Poisson relation between the homogeneous algebraically dependent elements is established. Further, in section 3 is proved that the group of automorphisms $\text{Aut}_k P$ of algebra P is generated by automorphisms $\varphi_\alpha = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, $\alpha \in k^*$, $\tau = (y, z, x)$ and $\delta = (x, \varepsilon y, \varepsilon^2 z)$, where ε — a solution of an equation $x^2 + x + 1 = 0$.

Results of this work in a short form are explained in [12].

Preliminary information

A vector space P over a field K endowed with two bilinear operations $x \cdot y$ (a multiplication) and $\{x, y\}$ (a Poisson bracket) is called a *Poisson algebra* if P is a commutative associative algebra under $x \cdot y$, P is a Lie algebra under $\{x, y\}$, and P satisfies the following identity

$$\{x, y \cdot z\} = \{x, y\} \cdot z + y \cdot \{x, z\}.$$

There are two important classes of Poisson algebras:

1) Symplectic algebras S_n . For each n the algebra S_n is a polynomial algebra $k[x_1, y_1, \dots, x_n, y_n]$, endowed with the Poisson bracket defined by $\{x_i, y_j\} = \delta_{ij}$, $\{x_i, x_j\} = 0$, $\{y_i, y_j\} = 0$, where δ_{ij} is the Kronecker symbol and $1 \leq i, j \leq n$;

2) Symmetric Poisson algebras $PS(L)$. Let L be a Lie algebra with a linear basis $e_1, e_2, \dots, e_k, \dots$. Then $PS(L)$ is the usual polynomial algebra $K[e_1, e_2, \dots, e_k, \dots]$ endowed with the Poisson bracket defined by $\{e_i, e_j\} = [e_i, e_j]$ for all i, j , where $[x, y]$ is the multiplication of the Lie algebra L .

Let is given a Poisson bracket $\{x, y\}$ on polynomial algebra $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$. From Leibniz identity follows that

$$\{f, g\} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \{x_i, x_j\}, \tag{1}$$

where $f, g \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

For any elements f, g of rational function algebra $k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ we define an element $\{f, g\}$ by a formula (1).

Lemma 1. For any $f, g, h \in k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ the next equations are executed:

- (a) $\{f, f\} = 0$;
- (b) $\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$;
- (c) $\{f, \frac{g}{h}\} = \frac{1}{h^2} (\{f, g\}h - g\{f, h\})$;
- (d) $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$.

Proof. The statement (a) is trivial.

Let's prove equation (b). Using a formula (1), we get

$$\begin{aligned} \{fg, h\} &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial (fg)}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} - \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial (fg)}{\partial x_j} \right) \{x_i, x_j\} = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \frac{\partial h}{\partial x_j} - \frac{\partial h}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} g + f \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) \right) \{x_i, x_j\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} - \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \{x_i, x_j\} g + f \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} - \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) \{x_i, x_j\} = \\
 &= \{f, h\} g + f \{g, h\}.
 \end{aligned}$$

For the proof of the statement (c) we use equation (b). We have

$$\begin{aligned}
 \left\{ f, \frac{g}{h} \right\} &= \{f, g\} \frac{1}{h} + g \left\{ f, \frac{1}{h} \right\} = \{f, g\} \frac{1}{h} + g \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial (\frac{1}{h})}{\partial x_j} - \frac{\partial (\frac{1}{h})}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \{x_i, x_j\} = \\
 &= \{f, g\} \frac{1}{h} - \frac{g}{h^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} - \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \{x_i, x_j\} = \{f, g\} \frac{1}{h} - \frac{g}{h^2} \{f, h\} = \\
 &= \frac{1}{h^2} (\{f, g\} h - g \{f, h\}).
 \end{aligned}$$

Let's prove the statement (d). For any $a, b, c, d, p, q \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ we put $f = \frac{a}{b}$, $g = \frac{c}{d}$, $h = \frac{p}{q}$ and consider added $\left\{ \left\{ \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right\}, \frac{p}{q} \right\}$ in equation (d). Using statements (a), (b), (c) we get

$$\begin{aligned}
 \left\{ \left\{ \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right\}, \frac{p}{q} \right\} &= \left\{ \frac{1}{d^2} (\{ \frac{a}{b}, c \} d - c \{ \frac{a}{b}, d \}), \frac{p}{q} \right\} = - \left\{ \frac{1}{d} \{ c, \frac{a}{b} \}, \frac{p}{q} \right\} + \\
 + \left\{ \frac{c}{d^2} \{ d, \frac{a}{b} \}, \frac{p}{q} \right\} &= - \left\{ \frac{1}{b^2 d} (\{ c, a \} b - a \{ c, b \}), \frac{p}{q} \right\} + \left\{ \frac{c}{b^2 d^2} (\{ d, a \} b - a \{ d, b \}), \frac{p}{q} \right\} = \\
 &= - \frac{1}{q^2} \left(\left\{ \frac{1}{b^2 d} (\{ c, a \} b - a \{ c, b \}), p \right\} q - p \left\{ \frac{1}{b^2 d} (\{ c, a \} b - a \{ c, b \}), q \right\} - \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ \frac{c}{b^2 d^2} (\{ d, a \} b - a \{ d, b \}), p \right\} q + p \left\{ \frac{c}{b^2 d^2} (\{ d, a \} b - a \{ d, b \}), q \right\} \right) = \\
 &= - \frac{1}{q^2} \left(- \frac{1}{b^4 d^2} (\{ p, \{ c, a \} b - a \{ c, b \} \} b^2 d q - (\{ c, a \} b - a \{ c, b \}) \{ p, b^2 d \} q) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{p}{b^4 d^2} (\{ q, \{ c, a \} b - a \{ c, b \} \} b^2 d - (\{ c, a \} b - a \{ c, b \}) \{ q, b^2 d \}) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{b^4 d^4} (\{ p, c (\{ d, a \} b - a \{ d, b \}) \} b^2 d^2 q - c (\{ d, a \} b - a \{ d, b \}) \{ p, b^2 d^2 \} q) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{p}{b^4 d^4} (\{ q, c (\{ d, a \} b - a \{ d, b \}) \} b^2 d^2 - c (\{ d, a \} b - a \{ d, b \}) \{ q, b^2 d^2 \}) \right) = \\
 &= \frac{1}{b^4 d^4 q^2} (\{ p, \{ c, a \} b - a \{ c, b \} \} b^2 d^3 q - d^2 (\{ c, a \} b - a \{ c, b \}) \{ p, b^2 d \} q - \\
 &\quad - p b^2 d^3 \{ q, \{ c, a \} b - a \{ c, b \} \} + p d^2 (\{ c, a \} b - a \{ c, b \}) \{ q, b^2 d \} - \\
 &\quad - \{ p, c (\{ d, a \} b - a \{ d, b \}) \} b^2 d^2 q + c (\{ d, a \} b - a \{ d, b \}) \{ p, b^2 d^2 \} q + \\
 &\quad + p \{ q, c (\{ d, a \} b - a \{ d, b \}) \} b^2 d^2 - c (\{ d, a \} b - a \{ d, b \}) \{ q, b^2 d^2 \}).
 \end{aligned}$$

Making similar conversions with added $\left\{ \left\{ \frac{c}{d}, \frac{p}{q} \right\}, \frac{a}{b} \right\}$ and $\left\{ \left\{ \frac{p}{q}, \frac{a}{b} \right\}, \frac{c}{d} \right\}$, and summing them up, we get

$$\left\{ \left\{ \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right\}, \frac{p}{q} \right\} + \left\{ \left\{ \frac{c}{d}, \frac{p}{q} \right\}, \frac{a}{b} \right\} + \left\{ \left\{ \frac{p}{q}, \frac{a}{b} \right\}, \frac{c}{d} \right\} = 0.$$

Corollary. The bracket $\{ \cdot, \cdot \}$ sets up the structure of Poisson algebra on rational function algebra $k(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Lemma 2. Let a, b, c be homogeneous algebraically dependent elements of polynomial algebra $k[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$ over a field k of characteristic 0. If $\{ \cdot, \cdot \}$ is a Poisson bracket on $k[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$, then

$$\deg(a) a \{ b, c \} + \deg(b) b \{ c, a \} + \deg(c) c \{ a, b \} = 0.$$

Proof. Let's consider a case when polynomials a , b and c have identical degrees. Then there is a nontrivial homogeneous polynomial $F(x, y, z)$ of degree p such that

$$F(a, b, c) = 0.$$

If $c \neq 0$ then having divided the last equation on c^p we have

$$F\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right) = 0.$$

Since $F(X, Y, 1) \neq 0$ from here we get algebraic dependence of $\frac{a}{c}$ and $\frac{b}{c}$.

By [13], if $f, g \in k(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ are algebraically dependent then for all $i < j$ we have

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0,$$

i.e. $\{f, g\} = 0$. Therefore,

$$\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right\} = 0.$$

By Lemma 1 (c), we have

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right\} = \frac{1}{c^2} \left(\left\{\frac{a}{c}, b\right\} c - b \left\{\frac{a}{c}, c\right\}\right) = \\ &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{c^2} (\{a, b\} c - a \{c, b\}) c - \frac{1}{c^2} (\{a, c\} c - a \{c, c\}) b\right) = \frac{1}{c^2} \left(\{a, b\} - \frac{a \{c, b\}}{c} - \frac{\{a, c\} b}{c}\right), \end{aligned}$$

i.e.

$$a \{b, c\} + b \{c, a\} + c \{a, b\} = 0.$$

Now let $\deg(a) = p$, $\deg(b) = q$, $\deg(c) = r$. Then a^{qr} , b^{pr} , c^{pq} are homogeneous algebraically dependent elements of identical degree. Therefore,

$$a^{qr} \{b^{pr}, c^{pq}\} + b^{pr} \{c^{pq}, a^{qr}\} + c^{pq} \{a^{qr}, b^{pr}\} = 0.$$

Using Leibniz identity from here we get

$$pqr (pa \{b, c\} + qb \{c, a\} + rc \{a, b\}) a^{qr-1} b^{pr-1} c^{pq-1} = 0.$$

Therefore,

$$pa \{b, c\} + qb \{c, a\} + rc \{a, b\} = 0.$$

Lemma 3. Let p, q and r – pairwise coprime elements of $k[x, y, z]$ and $\deg(p) = \deg(q) = \deg(r)$.

If $p^3 + q^3 + r^3 = 0$, then p, q and r are constants.

Proof. Turning on, if necessary, to algebraic closure of the field k , it is possible to consider what k is algebraically closed. Let's prove the statement of a lemma by induction on $\deg(p)$. If $\deg(p) = 0$, then $p, q, r \in k^*$.

Let $\deg(p) > 0$. Then

$$(-p)^3 = q^3 + r^3 = (q - \gamma_1 r)(q - \gamma_2 r)(q - \gamma_3 r), \tag{2}$$

where $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – roots of an equation $x^3 + 1 = 0$. Note, that multipliers in the right part of this equation are pairwise coprime, since p, q and r are pairwise coprime, by lemma's condition.

Since the left part of equation (2) is a full cube of a polynomial p from here we get

$$\begin{cases} q - \gamma_1 r = a^3 \\ q - \gamma_2 r = b^3 \\ q - \gamma_3 r = c^3 \end{cases} \tag{3}$$

for some pairwise coprime polynomials $a, b, c \in k[x, y, z]$.

Let's choose $\alpha, \beta, \gamma \in k$ such that $\alpha^3 = \gamma_3 - \gamma_2$, $\beta^3 = \gamma_1 - \gamma_3$, $\gamma^3 = \gamma_2 - \gamma_1$. Then $a_1 = \alpha a$, $b_1 = \beta b$, $c_1 = \gamma c$ satisfy an equation

$$a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 = 0.$$

Obviously, $\deg(a_1) = \deg(b_1) = \deg(c_1) < \deg(p)$. Therefore, according to the assumption of induction a_1, b_1 and c_1 – constants. Then from the system of the equations (3) follows that p, q and r are also constants. This contradiction finishes the proof.

Main results

In this section we study automorphisms of Poisson algebra P on polynomial algebra $k[x, y, z]$ such that $\{x, y\} = z^2$, $\{y, z\} = x^2$, $\{z, x\} = y^2$.

Recall that $Aut_k P$ denotes automorphism group of Poisson algebra P . The algebra P has automorphisms

$$\varphi_\gamma : x \rightarrow \gamma x, y \rightarrow \gamma y, z \rightarrow \gamma z, \gamma \in k^*;$$

$$\tau : x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$$

and

$$\delta : x \rightarrow x, y \rightarrow \epsilon y, z \rightarrow \epsilon^2 z,$$

where ϵ – root of an equation $x^2 + x + 1 = 0$.

Theorem. Let k – any field of the characteristic 0 in which the quadratic equation $x^2 + x + 1 = 0$ is solvable. Then the automorphism group $Aut_k P$ of Poisson algebra P is generated by automorphisms φ_γ, τ and δ .

Proof. Let σ – any automorphism of algebra P such that

$$\sigma(x) = a, \sigma(y) = b, \sigma(z) = c.$$

Therefore,

$$\{a, b\} = c^2, \{b, c\} = a^2, \{c, a\} = b^2. \tag{4}$$

Then we have

$$2deg(c) \leq deg(a) + deg(b);$$

$$2deg(a) \leq deg(b) + deg(c);$$

$$2deg(b) \leq deg(c) + deg(a).$$

Summing these inequalities up, we get $deg(a) = deg(b) = deg(c)$.

Suppose that $deg(a) \geq 2$. Let's consider the leading homogeneous parts \bar{a}, \bar{b} and \bar{c} of polynomials a, b and c , respectively. Since σ – automorphism of polynomial algebra $k[x, y, z]$ then the elements \bar{a}, \bar{b} and \bar{c} are algebraically dependent and

$$\{\bar{a}, \bar{b}\} = \bar{c}^2, \{\bar{b}, \bar{c}\} = \bar{a}^2, \{\bar{c}, \bar{a}\} = \bar{b}^2. \tag{5}$$

By Lemma 2 we get

$$\bar{a}^3 + \bar{b}^3 + \bar{c}^3 = 0. \tag{6}$$

If $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = p$, where $p \in k[x, y, z]$, then there are the homogeneous polynomials $a_1, b_1, c_1 \in k[x, y, z]$ such that

$$\bar{a} = p \cdot a_1, \bar{b} = p \cdot b_1, \bar{c} = p \cdot c_1$$

and $(a_1, b_1, c_1) = 1$. From equality (6) follows that

$$a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 = 0.$$

Therefore by Lemma 3 the elements a_1, b_1 and c_1 are constants, that contradicts (5).

Thus σ is affine automorphism, i.e.

$$\begin{aligned} \sigma : x &\rightarrow l_1 + \lambda_1; \\ y &\rightarrow l_2 + \lambda_2; \\ z &\rightarrow l_3 + \lambda_3, \end{aligned}$$

where l_i – linear parts of automorphism σ and $\lambda_i \in k, 1 \leq i \leq 3$. Let's write

$$\begin{aligned} \sigma : x &\rightarrow t_1 = \alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z + \lambda_1; \\ y &\rightarrow t_2 = \alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z + \lambda_2; \\ z &\rightarrow t_3 = \alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z + \lambda_3, \end{aligned}$$

where

$$J(\sigma) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{A} = (\alpha_{ij})$$

and $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

To find coefficients α_{ij} ($1 \leq i, j \leq 3$) it is enough to substitute values t_1, t_2 and t_3 in ratios (4) and to compare coefficients at the corresponding degrees x, y and z . We have

$$\begin{aligned} & \{\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z + \lambda_1, \alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z + \lambda_2\} = \\ & = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})z^2 + (\alpha_{12}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{32})y^2 + (\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31})x^2 = \\ & = (\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z + \lambda_3)^2. \end{aligned}$$

From here $\alpha_{13} \cdot \alpha_{23} = 0$, $\alpha_{13} \cdot \alpha_{33} = 0$, $\alpha_{23} \cdot \alpha_{33} = 0$ and $\lambda_3 = 0$. 3 cases are possible:

1) If $\alpha_{33} \neq 0$ then $\alpha_{23} = 0$ and $\alpha_{13} = 0$, i.e. $t_3 = \alpha_{33}z$.

Substituting value t_3 in the second equation of ratios (4), we get

$$\{\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z + \lambda_2, \alpha_{33}z\} = -\alpha_{12}\alpha_{33}y^2 + \alpha_{22}\alpha_{33}x^2 = (\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z + \lambda_1)^2.$$

From here $\alpha_{11} \cdot \alpha_{21} = 0$, $\alpha_{11} \cdot \alpha_{31} = 0$, $\alpha_{21} \cdot \alpha_{31} = 0$, $\alpha_{31} = 0$ and $\lambda_1 = 0$.

At $\alpha_{11} \neq 0$ we have

$$t_1 = \alpha_{11}x, \quad t_2 = \alpha_{22}y + \alpha_{32}z + \lambda_2.$$

The third equation of ratios (4) gives

$$\{\alpha_{33}z, \alpha_{11}x\} = (\alpha_{22}y + \alpha_{32}z + \lambda_2)^2,$$

wherefrom we get $\alpha_{32} = 0$ and $\lambda_2 = 0$. Therefore,

$$t_1 = \alpha_{11}x, \quad t_2 = \alpha_{22}y, \quad t_3 = \alpha_{33}z,$$

where $\alpha_{11} \cdot \alpha_{33} = \alpha_{22}^2$, $\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} = \alpha_{33}^2$ and $\alpha_{22} \cdot \alpha_{33} = \alpha_{11}^2$. From here follows $\alpha_{11} = \frac{\alpha_{22}^2}{\alpha_{33}}$. Then $\alpha_{22}^3 - \alpha_{33}^3 = 0$. Therefore, $\alpha_{22} = \alpha_{33}$, $\alpha_{22} = \epsilon\alpha_{33}$ or $\alpha_{22} = \epsilon^2\alpha_{33}$, where ϵ – root of an equation $x^3 - 1 = 0$. Thus, we have

$$\sigma_1 : x \rightarrow \alpha_{33}x, \quad y \rightarrow \alpha_{33}y, \quad z \rightarrow \alpha_{33}z;$$

$$\sigma_2 : x \rightarrow \alpha_{33}\epsilon^2x, \quad y \rightarrow \alpha_{33}\epsilon y, \quad z \rightarrow \alpha_{33}z;$$

$$\sigma_3 : x \rightarrow \alpha_{33}\epsilon x, \quad y \rightarrow \alpha_{33}\epsilon^2y, \quad z \rightarrow \alpha_{33}z.$$

2) If $\alpha_{23} \neq 0$ then $\alpha_{13} = 0$ and $\alpha_{33} = 0$. Similar reasonings give

$$\sigma_4 : x \rightarrow \alpha_{23}z, \quad y \rightarrow \alpha_{23}x, \quad z \rightarrow \alpha_{23}y;$$

$$\sigma_5 : x \rightarrow \alpha_{23}\epsilon z, \quad y \rightarrow \alpha_{23}\epsilon^2x, \quad z \rightarrow \alpha_{23}y;$$

$$\sigma_6 : x \rightarrow \alpha_{23}\epsilon^2z, \quad y \rightarrow \alpha_{23}\epsilon x, \quad z \rightarrow \alpha_{23}y.$$

3) If $\alpha_{13} \neq 0$ then $\alpha_{23} = 0$ and $\alpha_{33} = 0$. In this case we have

$$\sigma_7 : x \rightarrow \alpha_{13}y, \quad y \rightarrow \alpha_{13}z, \quad z \rightarrow \alpha_{13}x;$$

$$\sigma_8 : x \rightarrow \alpha_{13}\epsilon y, \quad y \rightarrow \alpha_{13}\epsilon^2z, \quad z \rightarrow \alpha_{13}x;$$

$$\sigma_9 : x \rightarrow \alpha_{13}\epsilon^2y, \quad y \rightarrow \alpha_{13}\epsilon z, \quad z \rightarrow \alpha_{13}x.$$

Thus, we got all possible automorphisms of algebra P . From here it is easy to conclude that

$$\sigma_1 = \varphi_{\alpha_{33}}, \quad \sigma_2 = \tau^2\delta^2\tau\varphi_{\alpha_{33}}, \quad \sigma_3 = \tau^2\delta\tau\varphi_{\alpha_{33}};$$

$$\sigma_4 = \tau^2\varphi_{\alpha_{23}}, \quad \sigma_5 = \tau\delta\tau\varphi_{\alpha_{23}}, \quad \sigma_6 = \tau\delta^2\tau\varphi_{\alpha_{23}};$$

$$\sigma_7 = \tau\varphi_{\alpha_{13}}, \quad \sigma_8 = \delta\tau\varphi_{\alpha_{13}}, \quad \sigma_9 = \delta^2\tau\varphi_{\alpha_{13}}.$$

Therefore the automorphism group of Poisson algebra is generated by automorphisms φ_α , τ and δ .

References

- 1 *Czerniakiewicz A.G.* Automorphisms of a free associative algebra of rank 2, I, II, Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 160. — P. 393–401. — 1972. — Vol. 171. — P. 309–315.
- 2 *Jung H.W.E.* Uber ganze birationale Transformationen der Ebene // Journal reine angew. Math. — 1942. — Vol. 184. — P. 161–174.
- 3 *Van der Kulk W.* On polynomial rings in two variables // Nieuw Archief voor Wiskunde. — 1953. — No. (3)1. — P. 33–41.
- 4 *Макар-Лиманов Л.Г.* Об автоморфизмах свободной алгебры с двумя образующими // Функциональный анализ и его приложения. — 1970. — Т. 4. — № 3. — С. 107–108. // Functional. Anal. Appl. — 1970. — № 4. — С. 262, 263.
- 5 *Shestakov I.P., Umirbaev U.U.* The Nagata automorphism is wild // Proc. Natl. Acad. Sci. USA 100 journal. — 2003. — Vol. 22. — P. 12561–12563.
- 6 *Shestakov I.P., Umirbaev U.U.* Tame and wild automorphisms of rings of polynomials in three variables // Journal of the American Mathematical Society. — 2004. — Vol. 17. — P. 197–227.
- 7 *Umirbaev U.U.* Defining relations for tame automorphism groups of polynomial rings and wild automorphisms of free associative algebras. Dokl. Akad. Nauk, 2006. — No. 3(407). — P. 319–324. English translation: Doklady Mathematics. — 2006. — No. 2(73). — P. 229–233.
- 8 *Umirbaev U.U.* The Anick automorphism of free associative algebras // Journal Reine Angew. Math. — 2007. — Vol. 605. — P. 165–178.
- 9 *Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U.* Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables of // Algebra Journal. — 2009. — P. 3318–3330.
- 10 *Van den Essen A.* Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, Progress in Mat., 190. — Birkhauser verlag, Basel, 2000.
- 11 *Donin J., Makar-Limanov L.* Quantization of quadratic Poisson brackets on a polynomial algebra of three variables // Journal of Pure and Applied Algebra. — 1998. — Vol. 129. — P. 247–261.
- 12 *Turusbekova U.* The automorphism group of a Poisson quadratic algebra on $C[x,y,z]$: abstracts of the Conference «Algebras, Representations and Applications». — Maresias, Brazil, 2007. — P. 70.
- 13 *Shestakov I.P., Umirbaev U.U.* Poisson brackets and two generated subalgebras of rings of polynomials // Journal of the American Mathematical Society. — 2004. — Vol. 17. — P. 181–196.

Ү.Қ. Тұрысбекова, Г.Т. Азиева

$k[x, y, z]$ көпмүшеліктер алгебрасындағы квадраттық Пуассон алгебралары және олардың автоморфизмдері

Қазіргі заманғы математиканың өзекті бағыттарының бірі Пуассон құрылымдарын математика және теориялық механиканың әр түрлі проблемаларына қолдану болып табылады. Бұл есептер қатты денелер динамикасында, аспан механикасында, космологиялық модельдерде кездеседі. Пуассон алгебралары Гамильтон механикасында, симплектикалық геометрияда, сонымен қатар кванттық топтарды зерттеуде маңызды рөл атқарады. Ли–Пуассон жақшаларының кейбір маңызды мысалдары Якоби-ге белгілі болғанын ескерте кетейік. Оның мысалдарында Пуассон жақшалары Гамильтон теңдеулерінің бірінші интегралдары кеңістігінде пайда болған. Соңғы уақытқа дейін Пуассон құрылымдарының алгебралық теориясы аз зерттелген. Қазіргі уақытта Пуассон алгебраларын Ресей, Франция, АҚШ, Бразилия, Аргентина, Болгария және т.б. елдердің көптеген математиктері зерттеуде. Мақала $k[x, y, z]$ көпмүшеліктер алгебрасында $\{x, y\} = z^2, \{y, z\} = x^2, \{z, x\} = y^2$ болатындай P Пуассон алгебрасының автоморфизмдері тобын сипаттауға арналған. Біртекті алгебралық тәуелді элементтер арасында бір пуассондық арақатынас тағайындалды, сонымен қатар P алгебрасының $Aut_k P$ автоморфизмдері тобы $\varphi_\alpha = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, $\alpha \in k^*$, $\tau = (y, z, x)$ және $\delta = (x, \varepsilon y, \varepsilon^2 z)$ автоморфизмдерінен туындайтыны дәлелденді, мұндағы $\varepsilon - x^2 + x + 1 = 0$ теңдеуінің түбірі.

У.К. Турусбекова, Г.Т. Азиева

Квадратичные алгебры Пуассона на $k[x, y, z]$ и их автоморфизмы

Одним из актуальных направлений в современной математике являются приложения пуассоновых структур к различным проблемам математики и теоретической механики. Эти задачи возникают в динамике твердого тела, небесной механике, теории вихрей, космологических моделях. Алгебры Пуассона играют ключевую роль в гамильтоновой механике, симплектической геометрии и также являются центральными в изучении квантовых групп. Отметим, что само развитие теории пуассоновых структур во многом было стимулировано динамикой многомерных волчков, так как последняя позволяет сделать абстрактные формулировки многих теорем более наглядными и содержательными. Заметим также, что некоторые важные примеры скобок Ли–Пуассона были известны еще Якоби. В его примерах скобки Пуассона возникли на пространстве первых интегралов уравнений Гамильтона. До последнего времени алгебраическая теория пуассоновых структур была мало изучена. В настоящее время алгебры Пуассона исследуются многими математиками России, Франции, США, Бразилии, Аргентины, Болгарии и т.д. Настоящая работа посвящена описанию группы автоморфизмов алгебры Пуассона P на алгебре многочленов $k[x, y, z]$ такой, что $\{x, y\} = z^2$, $\{y, z\} = x^2$, $\{z, x\} = y^2$. Установлено одно интересное пуассоново соотношение между однородными алгебраически зависимыми элементами и доказано, что группа автоморфизмов $Aut_k P$ алгебры P порождается автоморфизмами $\varphi_\alpha = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, $\alpha \in k^*$, $\tau = (y, z, x)$ и $\delta = (x, \varepsilon y, \varepsilon^2 z)$, где ε – корень уравнения $x^2 + x + 1 = 0$.

References

- 1 Czerniakiewicz A.G. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1971, 160, p. 393–401
- 2 Jung H.W.E. *Journal reine angew. Math.*, 1942, 184, p. 161–174.
- 3 Van der Kulk W. *Nieuw Archief voor Wiskunde.*, 1953, (3)1, p. 33–41.
- 4 Makar-Limanov L.G. *Functional. Anal. Appl.*, 1970, 4, p. 262, 263.
- 5 Shestakov I.P., Umirbaev U.U. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA 100 Journal*, 2003, 22, p. 12561–12563.
- 6 Shestakov I.P., Umirbaev U.U. *Journal of the American Mathematical Society*, 2004, 17, p. 197–227.
- 7 Umirbaev U.U. *Defining relations for tame automorphism groups of polynomial rings and wild automorphisms of free associative algebras. Dokl. Akad. Nauk*, 2006, 3(407), p. 229–233.
- 8 Umirbaev U.U. *Journal Reine Angew. Math.*, 2007, 605, p. 165–178.
- 9 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. *Algebra Journal*, 2009, p. 3318–3330.
- 10 Van den Essen A. *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, Progress in Mat.*, 190, Birkhauser verlag, Basel, 2000.
- 11 Donin J., Makar-Limanov L. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1998, 129, p. 247–261.
- 12 Turusbekova U. *The automorphism group of a Poisson quadratic algebra on $C[x, y, z]$: abstracts of the Conference «Algebras, Representations and Applications»*, Maresias, Brazil, 2007, p. 70.
- 13 Shestakov I.P., Umirbaev U.U. *Journal of the American Mathematical Society*, 2004, 17, p. 181–196.

УДК 517.95

Б.Х. Турметов¹, К.И. Усманов²¹Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан;²Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы
(E-mail: turmetovbh@mail.ru)

О разрешимости одной внешней краевой задачи с граничным оператором дробного порядка

В статье в классе регулярных гармонических функций изучены свойства некоторых интегро-дифференциальных операторов, обобщающих операторы дробного дифференцирования в смысле Адамара. Эти операторы переводят регулярные гармонические функции в такие же функции и являются взаимно обратными на регулярных гармонических функциях. Во внешности единичного шара изучена краевая задача с граничным оператором дробного порядка. Рассматриваемая задача обобщает известную задачу Неймана на граничные операторы дробного порядка. Доказана теорема о существовании и единственности решения задачи. Получено интегральное представление решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: внешняя задача, уравнения Лапласа, дробная производная, оператор Адамара, регулярная гармоническая функция, задача Неймана.

Введение

Пусть D — ограниченная область из R^n , $n \geq 3$, с гладкой границей S . Известно (см., например, [1]), что любая функция $u(x)$, принадлежащая классу $C^2(D)$ и удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D,$$

называется гармонической функцией в области D .

При исследовании краевых задач для уравнения Лапласа в бесконечных областях дополнительно требуется регулярность решения. А именно функция $u(x)$, гармоническая в области $D_+ = R^n \setminus D$, называется регулярной (на бесконечности), если при $|x| \rightarrow \infty$ выполняется условие

$$|u(x)| \leq C|x|^{-(n-2)}, \quad n \geq 3, \quad (1)$$

где $C = const$.

Заметим, что если для функции $u(x)$ выполняется оценка (1), то для любого мультииндекса $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ с $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$ выполняется оценка (см., например, [2; 373])

$$\frac{\partial^{|\beta|} u(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}} = O\left(|x|^{-(n+|\beta|-2)}\right), \quad n \geq 3. \quad (2)$$

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ — единичный шар, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ — единичная сфера. Обозначим через $\Omega_+ = R^n \setminus \bar{\Omega}$ — внешность единичного шара, где $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial(\Omega)$. Пусть далее $u(x)$ — регулярная гармоническая функция в области Ω_+ и $r = |x|$, $\theta = x/r$.

Для постановки задачи нам необходимо привести определение оператора дробного дифференцирования. Для произвольного положительного числа $\alpha > 0$ оператором дробного интегрирования порядка α в смысле Адамара назовем выражение [3]

$$J_-^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_r^\infty \left(\ln \frac{t}{r}\right)^{\alpha-1} \frac{u(t\theta)}{t} dt.$$

Пусть $m - 1 < \alpha \leq m, m = 1, 2, \dots$, $\delta = r \frac{d}{dr} \equiv \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ — оператор Дирака и $\delta^k = \delta(\delta^{k-1})$, $k = 2, 3, \dots$. Выражение

$$D_-^\alpha u(x) = (-\delta)^m J_-^{m-\alpha} u(x) \equiv \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \left(r \frac{d}{dr}\right)^m \int_r^\infty \left(\ln \frac{t}{r}\right)^{m-1-\alpha} \frac{u(t\theta)}{t} dt$$

называется оператором дифференцирования порядка α в смысле Адамара. В дальнейшем будем полагать $J_-^0 u(x) = u(x)$.

Рассмотрим в области Ω_+ следующую задачу:

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega_+; \tag{3}$$

$$D_-^\alpha u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega_+. \tag{4}$$

Решением задачи (3), (4) назовем регулярную гармоническую функцию $u(x) \in C^2(\Omega_+) \cap C(\bar{\Omega}_+)$, $\bar{\Omega}_+ = \Omega_+ \cup \partial\Omega$, для которой $D^\alpha u(x) \in C^2(\bar{\Omega}_+)$ и которая удовлетворяет условию (4) в классическом смысле.

Так как $J_-^0 u(x) = u(x)$, то при $\alpha = 1$ получим $D_-^\alpha u(x) = \left(-r \frac{d}{dr}\right)^m u(x)$. Следовательно, в случае $\alpha = 1$ рассматриваемая задача (3), (4) совпадает с внешней задачей Неймана для уравнения Лапласа.

Отметим, что внутренние краевые задачи с граничными операторами дробного порядка изучались в [4–9]. Свойства и применения операторов типа Адамара рассматривались в работах [10–12]. Заметим также, что внешние краевые задачи с граничным оператором Римана-Лиувилля изучены в работе [13].

2 Свойства операторов J_-^α и D_-^α

В этом пункте исследуем некоторые свойства операторов J_-^α и D_-^α .

Лемма 1. Пусть $\alpha > 0$ и $u(x)$ — регулярная гармоническая функция в области Ω_+ . Тогда справедливы неравенства

$$|J_-^\alpha u(x)| \leq C|x|^{2-n}, \quad |D_-^\alpha u(x)| \leq C|x|^{2-m-n}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ — регулярная гармоническая функция в Ω_+ . В интеграле $J_-^\alpha u(x)$ меняем переменную t по формуле $t = rs$ и, используя регулярность функции $u(x)$, получим

$$\begin{aligned} |J_-^\alpha u(x)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\infty (\ln s)^{\alpha-1} u(rs) \frac{ds}{s} \right| \leq Cr^{2-n} \int_1^\infty (\ln s)^{\alpha-1} s^{1-n} ds = Cr^{2-n} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-(n-2)t} dt = \\ &= C(n-2)^{2-\alpha} r^{2-n} \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} ds = C_1 |x|^{2-n}. \end{aligned}$$

Первое неравенство из (5) доказано.

Для доказательства второго неравенства из (5) представим функцию $D_-^\alpha u(x)$ в виде

$$D_-^\alpha u(x) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_1^\infty (\ln s)^{\alpha-1} \left(r \frac{d}{dr}\right)^m u(rs) \frac{ds}{s}.$$

Тогда, используя неравенство (2), получим

$$|D_-^\alpha u(x)| \leq C|x|^{2-m-n} \int_1^\infty (\ln s)^{\alpha-1} s^{1-n} ds = C_1 |x|^{2-m-n}, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать регулярные гармонические функции в Ω_+ и поэтому все исследуемые далее интегралы сходятся.

Лемма 2. Пусть $u(x)$ — регулярная гармоническая функция в области Ω_+ . Тогда $J_-^\alpha u(x)$ и $D_-^\alpha u(x)$ также являются регулярными гармоническими функциями в Ω_+ .

Доказательство. Регулярность функций $J_-^\alpha u(x)$ и $D_-^\alpha u(x)$, т.е. выполнение для них оценок типа (1), вытекает из (5). Докажем, что данные функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Представим $J_-^\alpha u(x)$ в виде $J_-^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\infty (\ln s)^{\alpha-1} u(sx) \frac{ds}{s}$ и применим оператор Δ . Тогда

$$\Delta J_-^\alpha [u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_1^\infty (s-1)^{-\alpha} \Delta u(sx) ds \right] = 0.$$

Далее, так как

$$\Delta \left(r \frac{du(x)}{dr} \right) = \left(r \frac{d}{dr} + 2 \right) \Delta u(x), \quad \Delta \left(r \frac{d}{dr} \right)^m u(x) = \left(r \frac{d}{dr} + 2 \right)^m \Delta u(x),$$

то

$$\Delta D_-^\alpha [u](x) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_1^\infty (\ln s)^{\alpha-1} \left(r \frac{d}{dr} + 2 \right)^m \Delta u(sx) \frac{ds}{s} = 0, \quad x \in \Omega_+.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $0 < \alpha$, $u(x)$ — регулярная гармоническая функция в Ω_+ . Тогда для любого $x \in \Omega_+$ справедливы равенства

$$J_-^\alpha [D_-^\alpha u(x)] = u(x), \quad D_-^\alpha [J_-^\alpha u(x)] = u(x). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $x \in \Omega_+$ и $t \geq 1$. Рассмотрим функцию

$$\mathfrak{S}_t [u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} \tau^{-1} D_-^\alpha [u](\tau x) d\tau.$$

Данную функцию можно представить в виде

$$\mathfrak{S}_t [u](x) = -\frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} t \frac{d}{dt} \left\{ \int_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^\alpha D_-^\alpha [u](\tau x) \frac{d\tau}{\tau} \right\}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & t \frac{d}{dt} \left\{ \int_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^\alpha D_-^\alpha [u](\tau x) \frac{d\tau}{\tau} \right\} = \\ & = -t \lim_{\tau \rightarrow t} \left[\left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^\alpha D_-^\alpha [u](\tau x) \frac{1}{\tau} \right] + \alpha t \int_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{t}{\tau} \left(-\frac{\tau}{t^2} \right) D_-^\alpha [u](\tau x) \frac{d\tau}{\tau} = \\ & = -\alpha \int_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} D_-^\alpha [u](\tau x) \frac{d\tau}{\tau}. \end{aligned}$$

Так как $|D_-^\alpha [u](\tau x)| \leq C |\tau x|^{2-n-m}$, $|\tau x| \rightarrow \infty$, то, используя определение оператора D_-^α и равенства

$$J_-^{m-\alpha} = J_-^{m-1-(\alpha-1)}, \quad (-1)^{m-1} \delta^{m-1} J_-^{m-1-(\alpha-1)} = D_-^{\alpha-1},$$

получаем

$$\mathfrak{S}_t [u](x) = -\frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} t \frac{d}{dt} \left\{ \int_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^\alpha \left(-\tau \frac{d}{d\tau} \right) D_-^{\alpha-1} u(\tau x) \frac{d\tau}{\tau} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} t \frac{d}{dt} \left\{ \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^\alpha D_-^{\alpha-1} u(\tau x) \Big|_{\tau=t}^{\tau=\infty} - \alpha \int_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} D_-^{\alpha-1} u(\tau x) \frac{d\tau}{\tau} \right\} = \\
 &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t \frac{d}{dt} \left\{ \int_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} D_-^{\alpha-1} u(\tau x) \frac{d\tau}{\tau} \right\}.
 \end{aligned}$$

Повторяя эту процедуру еще $(m-1)$ раз, для функции $\mathfrak{S}_t[u](x)$ получаем представление

$$\mathfrak{S}_t[u](x) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(\alpha)} \left(t \frac{d}{dt} \right)^m \left\{ \int_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} J_-^{m-\alpha} u(\tau x) d\tau \right\}.$$

По определению оператора J_-^α последнее выражение представляется в виде

$$\frac{(-1)^m}{\Gamma(\alpha)} \left(t \frac{d}{dt} \right)^m \left\{ \int_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} J_-^{m-\alpha} u(\tau x) d\tau \right\} = (-1)^m \left(t \frac{d}{dt} \right)^m J_-^\alpha [J_-^{m-\alpha}[u]](tx).$$

Покажем, что в классе регулярных гармонических в Ω_+ функций имеет место равенство

$$J_-^\alpha [J_-^{m-\alpha}[u]](tx) = J_-^m[u](tx).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 J_-^\alpha [J_-^{m-\alpha}[u]](tx) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{\tau r}^\infty \left(\ln \frac{\xi}{\tau r} \right)^{m-\alpha-1} u(\xi\theta) \frac{d\xi}{\xi} \frac{d\tau}{\tau} = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_\tau^\infty \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{m-\alpha-1} u(sx) \frac{ds}{s} \frac{d\tau}{\tau} = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(m-\alpha)} \int_t^\infty u(sx) \int_t^s \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{m-\alpha-1} \frac{d\tau}{\tau} \frac{ds}{s}.
 \end{aligned}$$

Далее, для внутреннего интеграла после замены переменных получаем

$$\int_t^s \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{s}{\tau} \right)^{m-\alpha-1} \frac{d\tau}{\tau} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m)}.$$

Тогда

$$J_-^\alpha [J_-^{m-\alpha}[u]](tx) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_t^\infty \left(\ln \frac{s}{t} \right)^{m-1} u(sx) \frac{ds}{s} \equiv J_-^m[u](tx).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_t[u](x) &= (-1)^m \left(t \frac{d}{dt} \right)^m J_-^m[u](x) = \\
 &= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m)} \left(t \frac{d}{dt} \right)^m \int_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{m-1} u(\tau x) \frac{d\tau}{\tau} = -t \frac{d}{dt} \int_t^\infty u(\tau x) \frac{d\tau}{\tau} = u(tx).
 \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $t \geq 1$ справедливо равенство

$$u(tx) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty \left(\ln \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} \tau^{-1} D_-^\alpha [u](\tau x) d\tau.$$

Если теперь положим $t = 1$, то

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\infty (\ln \tau)^{\alpha-1} \tau^{-1} D_-^\alpha [u](\tau x) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_r^\infty \left(\ln \frac{s}{r}\right)^{\alpha-1} s^{-1} D_-^\alpha [u](s\theta) ds \equiv J_-^\alpha [D_-^\alpha [u]](x).$$

Первое равенство из (6) доказано. Для доказательства второго равенства из (6) рассмотрим действие оператора D_-^α к функции $J_-^\alpha u(x)$. Имеем

$$D_-^\alpha [J_-^\alpha [u]](x) = (-1)^m \left(r \frac{d}{dr}\right)^m J_-^{m-\alpha} [J_-^\alpha [u]](x) = (-1)^m \left(r \frac{d}{dr}\right)^m [J_-^m [u]](x) = u(x).$$

Лемма доказана.

Таким образом, из утверждения леммы 3 следует, что операторы J_-^α и D_-^α являются взаимно обратными на регулярных гармонических в Ω_+ функциях.

Основное утверждение

Пусть $v(x)$ — регулярное решение задачи Дирихле в области Ω_+ , т.е.

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, & x \in \Omega_+, \\ v(x) = f(x), & x \in \partial\Omega, \\ |v(x)| \leq C|x|^{-(n-2)}, & |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (7)$$

Известно (см., например, [1; 73], что если $f(x) \in C(\partial\Omega)$, то решение задачи (7) существует, единственно и представляется в виде

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{|x|^2 - 1}{|x - y|^{n-1}} f(y) dS_y.$$

Как мы уже отметили, в случае $\alpha = 1$ задача (3), (4) совпадает с внешней задачей Неймана для уравнения Лапласа. Известно (см., например, [14]), что для любого $f(x) \in C(\partial\Omega)$ решение внешней задачи Неймана существует, единственно и представляется в виде

$$u(x) = \int_1^\infty \frac{v(tx)}{t} dt, \quad (8)$$

где $v(x)$ — решение задачи Дирихле (7).

Сформулируем основное утверждение относительно задачи (3), (4).

Теорема. Пусть $\alpha > 0, f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи (3), (4) существует, единственно и представляется в виде

$$u(x) = J_-^\alpha [v](x), \quad (9)$$

где $v(x)$ — решение задачи Дирихле (7).

Доказательство. Пусть решение задачи (3), (4) существует и это $u(x)$. Применим к функции $u(x)$ оператор D_-^α и обозначим $D_-^\alpha [u](x) = v(x)$. По предположению $D_-^\alpha [u](x) \in C(\Omega_+ \cup \partial\Omega)$, тогда $v(x) \in C(\Omega_+ \cup \partial\Omega)$. Поскольку $u(x)$ — гармоническая функция в Ω_+ , регулярная в бесконечности, то в силу утверждения леммы 2 функция $v(x)$ также является гармонической в области Ω_+ и регулярной в бесконечности. Кроме того,

$$v(x)|_{\partial\Omega} = D_-^\alpha [u](x)|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Применим к равенству $D_-^\alpha [u](x) = v(x)$ оператор J_-^α . Поскольку интеграл вида

$$\int_1^\infty (\ln \tau)^{\alpha-1} \tau^{-1} v(\tau x) d\tau$$

при $\alpha > 0$ имеет слабые особенности при $\tau = 1$ и $\tau = \infty$, то он является непрерывной функцией по $x \in \Omega_+ \cup \partial\Omega$ при непрерывной регулярной гармонической функции $v(x) \in C(\Omega_+ \cup \partial\Omega)$. Значит, оператор

J_-^α применим к регулярным функциям из $C(\Omega_+ \cup \partial\Omega)$. В силу первого равенства (6) получаем (9). Кроме того, в силу утверждения леммы 2 функция $J_-^\alpha[v](x)$ является регулярной в бесконечности.

Таким образом, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (7). Причем, если $f(x) \in C(\partial\Omega)$, то решение этой задачи существует, единственно и $v(x) \in C(\Omega_+ \cup \partial\Omega)$.

Пусть, наоборот, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (7) с граничным значением $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда $v(x) \in C(\Omega_+ \cup \partial\Omega)$. Рассмотрим функцию $u(x) = J_-^\alpha[v](x)$. В силу второго равенства из (6) будем иметь

$$D_-^\alpha[u](x) = D_-^\alpha[J_-^\alpha[v]](x) = v(x).$$

Значит, функция $u(x)$ является гармонической в Ω , регулярной в бесконечности и

$$D_-^\alpha[u](x)|_{\partial\Omega} = v(x)|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Теорема доказана.

Замечание 2. В случае $\alpha = 1$ функция (9) совпадает с решением внешней задачи Неймана (8), полученным в работе [14].

Работа выполнена при финансовой поддержке финансирования научно-технических программ и проектов КН МОН РК (проект 0819/ГФ4).

Список литературы

- 1 *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1982. — С. 336.
- 2 *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1981. — С. 512.
- 3 *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam, Elsevier. North-Holland. Mathematics studies. — 2006. — P. 539.
- 4 *Турметов Б.Х., Мырзахасова А.* О разрешимости дробных аналогов задачи Неймана для бигармонического уравнения // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2015. — № 3(79). — С. 87–95.
- 5 *Турметов Б.Х., Торебек Б.Т.* Модифицированные операторы Баврина и их применения // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50. — № 2. — С. 240–250.
- 6 *Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Torebek B.T.* On some integro-differential operators in the class of harmonic functions and their applications // Siberian Advances in Mathematics. — 2012. — Vol. 22. — No. 2. — P. 115–134.
- 7 *Krasnoschok M., Vasylyeva N.* On a nonclassical fractional boundary-value problem for the Laplace operator // Journal of Differential Equations. — 2014. — Vol. 257(6). — P. 1814–1839.
- 8 *Torebek B.T., Turmetov B.Kh.* On solvability of a boundary value problem for the Poisson equation with the boundary operator of a fractional order // Boundary Value Problems. — 2013. — Vol. 2013. — No. 93. — [ER]. Access mode: doi:10.1186/1687-2770-2013-93.
- 9 *Umarov S.R., Luchko Yu.F., Gorenflo R.* On boundary value problems equations with boundary operators of fractional order // Fractional calculus and Applied analysis. — 2000. — Vol. 3. — No. 4. — P. 454–468.
- 10 *Бердышев А.С., Турметов Б.Х., Кадиркулов Б.Ж.* Некоторые свойства и применения интегро-дифференциальных операторов типа Адамара-Маршо в классе гармонических функций // Сибирский математический журн. — 2012. — Т. 53. — № 4. — С. 752–764.
- 11 *Турметов Б.Х., Байметова Н.* О разрешимости некоторых краевых задач с оператором типа Адамара-Маршо // Вестн. Карганд. ун-та. Сер. Математика. — 2012. — № 3(67). — С. 89–98.
- 12 *Muratbekova M.A., Shinaliev K.M., Turmetov B.Kh.* On solvability of a nonlocal problem for the Laplace equation with the fractional-order boundary operator // Boundary Value Problems. — 2014. — [ER]. Access mode: doi: 10.1186/1687-2770-2014-29.
- 13 *Turmetov B.Kh., Torebek B. T.* On solvability of exterior boundary value problem with fractional boundary condition // AIP Conference Proceedings. — 2015. — Vol. 1676, 020096. — [ER]. Access mode: doi: 10.1063/1.4930522.
- 14 *Лифанов И.К.* Сингулярное интегральное уравнение первого рода задачи Неймана // Дифференциальные уравнения. — 1988. — Т. 24. — № 1. — С. 110–115.

Б.Х. Турметов, К.Ы. Усманов

Бөлшек ретті операторлы шеттік шартты бір сыртқы есептің бірімәнді шешімділігі туралы

Мақалада регулярлы гармоникалық функциялар класында Адамар мағынасында бөлшек ретті туындыларды жалпылайтын, кейбір интегралды-дифференциалдық операторлардың қасиеттері зерттелді. Бұл операторлар регулярлы гармоникалық функцияларды регулярлы гармоникалық функцияларға өткізеді және регулярлы гармоникалық функциялар класында өзара кері болады. Бірлік шардың сыртқы облысы үшін бөлшек ретті оператор қатысқан шеттік есеп қарастырылған. Ол есептің шекарасында бөлшек ретті оператор қатысып, белгілі Нейман есебін жалпылайды. Есептің шешімінің бар болуы мен жалғыздығы туралы теорема дәлелденді. Сондай-ақ авторлар зерттелген есеп шешімінің интегралдық өрнектелуін келтірген.

B.Kh. Turmetov, K.I. Usmanov

On solvability of exterior boundary value problem with boundary operators of fractional order

In this paper, in the class of regular harmonic functions we study the properties of some integro-differential operators, generalizing the operators of fractional differentiation in the sense of Hadamard. These operators convert regular harmonic functions in the same functions and are mutually inverse on regular harmonic functions. In the exterior of the unit ball studied the boundary value problem with the boundary operator fractional order. This problem generalizes the known Neumann problem on the boundary operators of fractional order. We prove a theorem on the existence and uniqueness of the solution of the problem. Obtained an integral representation of the solution of this problem.

References

- 1 Bitsadze A.V. *Equations of Mathematical Physics*, Moscow: Nauka, 1980, p. 336.
- 2 Vladimirov V.S. *Equations of mathematical physics*, Moscow: Nauka, 1981, p. 512.
- 3 Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Amsterdam: Elsevier, North-Holland, Mathematics studies, 2006, p. 539.
- 4 Turmetov B.Kh., Mirzakhasova A. *Bull. of Karaganda State University*, ser. Mathematic, 2015, 3(79), p. 87–95.
- 5 Turmetov B.Kh., Torebek B.T. *Differential Equations*, 2015, 51, 2, p. 243–254.
- 6 Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. *Siberian Advances in Mathematics*, 2012, 22, 2, p. 115–134.
- 7 Krasnoschok M., Vasylyeva N. *Differential Equations*, 2014, 257(6), p. 1814–1839.
- 8 Torebek B.T., Turmetov B.Kh. *Boundary Value Problems*, 2013, 2013, 93, [ER]. Access mode: doi:10.1186/1687-2770-2013-93.
- 9 Umarov S.R., Luchko Yu.F., Gorenflo R. *Fractional calculus and Applied analysis*, 2000, 3, 4, p. 454–468.
- 10 Berdyshev A.S., Turmetov B.Kh., Kadyrkulov B.Zh. *Siberian Mathematical Journal*, 2012, 53, 4, p. 752–764.
- 11 Turmetov B.Kh., Baymetova N. *Bull. of Karaganda University, Mathematics ser.*, 2012, 3(67), p. 89–98.
- 12 Muratbekova M.A., Shinaliev K.M., Turmetov B.Kh. *Boundary Value Problems*, 2014, [ER]. Access mode: DOI: 10.1186/1687-2770-2014-29.
- 13 Turmetov B.Kh., Torebek B. T. *AIP Conference Proceedings*, 2015, 1676, 020096, [ER]. Access mode: doi: 10.1063/1.4930522.
- 14 Lifanov I.K. *Differential Equations*, 1988, 24, 1, p. 110–115.

Е. Төлеуғазы

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана
(E-mail: erzhan1996@yandex.ru)

Теоремы вложения, теоремы о следах и продолжении для анизотропных пространств Никольского-Бесова $B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)$

В статье на основе использования интерполяционных свойств анизотропных пространств Лоренца получены неравенства разных метрик и разных измерений для тригонометрических полиномов. На основе теоремы о представлении определены анизотропные пространства Никольского-Бесова $B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)$ по метрике анизотропных пространств Лоренца. Заметим, что в случае, когда $\mathbf{d} = d_1$, указанные пространства совпадают с классическими изотропными пространствами Никольского-Бесова, а в случае $\mathbf{d} = (1, \dots, 1)$ – с анизотропными пространствами Никольского-Бесова, имеющими характер пространств с доминирующими смешанными производными. Описаны элементарные вложения для этих пространств относительно всех параметров, участвующих в их определении. На основе неравенства разных метрик получена предельная теорема вложения для данных пространств относительно сильных параметров. Построен пример, показывающий неулучшаемость условий на параметры пространств для сохранения свойства вложения. На основе неравенства разных измерений получены предельные теоремы о следе и продолжении для функций из рассматриваемых пространств. Отметим, что условия в указанных теоремах также являются неулучшаемыми. В случае $\mathbf{d} = d_1$ из полученных теорем вытекают соответствующие результаты, ранее полученные в работах С.М. Никольского и О.В. Бесова для изотропных пространств, а в случае $\mathbf{d} = (1, \dots, 1)$ – результаты К.А. Бекмаганбетова и Е.Д. Нурсултанова для анизотропных пространств с доминирующими смешанными производными. Полученные результаты показывают, что рассматриваемые пространства имеют гибридную структуру классических изотропных пространств и анизотропных пространств с доминирующими смешанными производными. А именно функции из указанных пространств имеют одинаковые гладкостные и метрические свойства по переменным, входящим в один блок переменных, и разные гладкостные и метрические свойства относительно переменных, входящих в разные блоки. Полученные в работе результаты в дальнейшем могут быть использованы в теории краевых задач уравнений математической физики, в задачах гармонического анализа и теории приближений в анизотропных пространствах.

Ключевые слова: анизотропные пространства Бесова, анизотропные пространства Лоренца, вложение, след, продолжение, неравенство разных метрик, неравенство разных измерений.

Пусть мультииндекс $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$, $\mathbb{T}^d = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i = (x_1^i, \dots, x_{d_i}^i) \in [0, 2\pi)^{d_i}, i = 1, \dots, n\}$. В случае $d = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{n\text{-штук}}$ для тора \mathbb{T}^d введем обозначение \mathbb{T}^n .

Пусть $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ – измеримая в \mathbb{T}^d функция. Через $f^*(t) = f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки к функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ последовательно по мультипеременным x_1, \dots, x_n при фиксированных остальных переменных.

Пусть мультииндексы $p = (p_1, \dots, p_n)$, $r = (r_1, \dots, r_n)$ такие, что если $1 \leq p_i < \infty$, то $1 \leq r_i \leq \infty$, если же $p_i = \infty$, то и $r_i = \infty$, $i = 1, \dots, n$.

Анизотропным пространством Лоренца $L_{pr}(\mathbb{T}^d)$ (см. [1]) назовем множество функций, для которых конечна следующая величина:

$$\|f\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)} = \left(\int_0^{2\pi} \left(t_n^{1/p_n} \dots \left(\int_0^{2\pi} \left(t_1^{1/p_1} f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n) \right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{r_2/r_1} \dots \right)^{r_n/r_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/r_n}.$$

При $r = \infty$ выражение $\left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r}$ понимается как $\sup_{0 \leq t < 2\pi} |f(t)|$.

Лемма 1 ([1]). а) Пусть $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \infty$ и $1 \leq r \leq \infty$, тогда $L_{p_1 r}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow L_{p_0 r}(\mathbb{T}^d)$.

б) Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $1 \leq r_0 \leq r_1 \leq \infty$, тогда $L_{p r_0}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow L_{p r_1}(\mathbb{T}^d)$.

Пусть $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1, i = 1, \dots, n\}$ — вершины n -мерного единичного куба в \mathbb{R}^n , $A = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ — семейство банаховых пространств, являющихся подпространствами некоторого линейного хаусдорфова пространства, которое называется совместимым семейством банаховых пространств [2]. Для элемента a пространства $\sum_{\varepsilon \in E} A_\varepsilon$ определим функционал

$$K(t, a; A) = \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} t^\varepsilon \|a_\varepsilon\|_{A_\varepsilon},$$

где $t^\varepsilon = t_1^{\varepsilon_1} \dots t_n^{\varepsilon_n}$.

Пусть $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$, $1 \leq r = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$. Через $A_{\theta r} = (A_\varepsilon; \varepsilon \in E)_{\theta r}$ обозначим линейное подмножество множества $\sum_{\varepsilon \in E} A_\varepsilon$, для элементов которого верно

$$\|a\|_{A_{\theta r}} = \left(\int_0^{2\pi} \left(t_n^{-\theta_n} \dots \left(\int_0^{2\pi} (t_1^{-\theta_1} K(t, a; A))^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{r_2/r_1} \dots \right)^{r_n/r_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/r_n} < \infty.$$

Лемма 2 ([1]). Пусть $0 < \theta < 1$, $1 \leq r \leq \infty$, $A = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$, $B = \{B_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ — два совместимых семейства банаховых пространств. Если найдутся два вектора $M_0 = (M_1^0, \dots, M_n^0), \dots, M_1 = (M_1^1, \dots, M_n^1)$ с положительными компонентами такие, что для линейного оператора имеет место $T : A_\varepsilon \rightarrow B_\varepsilon$ с оценкой нормы $C_\varepsilon \prod_{i=1}^n M_i^{\varepsilon_i}$ для любого $\varepsilon \in E$, то $T : A_{\theta r} \rightarrow B_{\theta r}$ с нормой

$$\|T\|_{A_{\theta r} \rightarrow B_{\theta r}} \leq \max_{\varepsilon \in E} C_\varepsilon \prod_{i=1}^n (M_i^0)^{1-\theta_i} (M_i^1)^{\theta_i}.$$

Лемма 3 ([1]). а) Пусть $1 \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \leq \infty$, $p_\varepsilon = (p_1^{\varepsilon_1}, \dots, p_n^{\varepsilon_n}), \varepsilon \in E$, $0 < \theta < 1$ и $1 \leq r \leq \infty$. Тогда для пространств Лебега со смешанной метрикой $\{L_{p_\varepsilon}(\mathbb{T}^d)\}_{\varepsilon \in E}$ справедливо равенство

$$(L_{p_\varepsilon}(\mathbb{T}^d); \varepsilon \in E)_{\theta r} = L_{pr}(\mathbb{T}^d),$$

где $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$.

б) Пусть $1 \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \leq \infty$, $1 \leq r_0 = (r_1^0, \dots, r_n^0)$, $r_1 = (r_1^1, \dots, r_n^1) \leq \infty$. Тогда для $0 < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < 1$ и $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ справедливо равенство

$$(L_{p_\varepsilon r_\varepsilon}(\mathbb{T}^d); \varepsilon \in E)_{\theta q} \hookrightarrow L_{pq}(\mathbb{T}^d),$$

где $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Лемма 4 (неравенство разных метрик). Пусть $T_s(x)$ — тригонометрический полином порядка не выше $ss = (s_1^1, \dots, s_{d_1}^1, \dots, s_1^n, \dots, s_{d_n}^n)$ по мультиперемной $x = (x_1^1, \dots, x_{d_1}^1, \dots, x_1^n, \dots, x_{d_n}^n)$. Тогда при $1 < p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \leq p_2 = (p_1^2, \dots, p_n^2) < \infty$, $1 \leq r = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|T_s\|_{L_{p_2 r}(\mathbb{T}^d)} \leq C \prod_{\{i: p_1^i < p_2^i\}} \prod_{j=1}^{d_i} (s_j^i)^{1/p_1^i - 1/p_2^i} \|T_s\|_{L_{p_1 r}(\mathbb{T}^d)}, \quad (1)$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от s .

Доказательство. Из условия леммы мультииндексы $\frac{1}{p_1}$ и $\frac{1}{p_2}$ принадлежат открытому параллелепипеду $(0; 1)^n$. Следовательно, существует параллелепипед $Q_h(0)$ с центром в нуле такой, что $Q_h(\frac{1}{p_1}) \subset (0; 1)^n$ и $Q_h(\frac{1}{p_2}) \subset (0; 1)^n$. Здесь сторона h зависит только от параметров p_1 и p_2 . Отметим, что для вершин $\left\{ \frac{1}{p_1^\varepsilon} \right\}_{\varepsilon \in E}$ и $\left\{ \frac{1}{p_2^\varepsilon} \right\}_{\varepsilon \in E}$ параллелепипедов $Q_h(\frac{1}{p_1})$ и $Q_h(\frac{1}{p_2})$ имеет место равенство

$$\frac{1}{p_1^\varepsilon} - \frac{1}{p_2^\varepsilon} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}, \quad \varepsilon \in E.$$

Из неравенства разных метрик для пространств Лебега со смешанной метрикой для тригонометрических полиномов имеют место

$$\|T_s\|_{L_{p_2^\varepsilon}(\mathbb{T}^d)} \leq C_1 \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{d_i} (s_j^i)^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|T_s\|_{L_{p_1^\varepsilon}(\mathbb{T}^d)}, \quad \varepsilon \in E,$$

где C_1 — абсолютная постоянная.

Далее, согласно предыдущему неравенству и теореме М. Рисса об ограниченности частичных сумм в пространстве Лебега со смешанной метрикой, получаем

$$\begin{aligned} \|S_s(f)\|_{L_{p_2^\varepsilon}(\mathbb{T}^d)} &\leq C_1 \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{d_i} (s_j^i)^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|S_s(f)\|_{L_{p_1^\varepsilon}(\mathbb{T}^d)} \leq \\ &\leq C_2 \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{d_i} (s_j^i)^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|f\|_{L_{p_1^\varepsilon}(\mathbb{T}^d)}, \quad \varepsilon \in E. \end{aligned}$$

Применяя леммы и а) к оператору $S_s(f)$, получаем

$$\|S_s(f)\|_{L_{p_2 r}(\mathbb{T}^d)} \leq C \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{d_i} (s_j^i)^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|f\|_{L_{p_1 r}(\mathbb{T}^d)}.$$

Для доказательства точности в смысле порядка неравенства (1) достаточно рассмотреть полиномы $T_s^{(\beta)}(x) = \prod_{i=1}^n T_{s_i^{(\beta_i)}}(x_i)$, где $T_{s_i^{(\beta_i)}}(x_i) = \sum_{k_i=1}^{s_i} \frac{\cos k_i x_i}{k_i^{\beta_i}}$, так как согласно теореме Харди - Литтлвуда в пространствах Лоренца $L_{pr}(\mathbb{T}^d)$ (см. [3]) при $\beta_i \neq 1/p'_i$ имеем

$$\|T_s^{(\beta)}\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)} = \prod_{i=1}^n \|T_{s_i^{(\beta_i)}}\|_{L_{p_i r_i}(\mathbb{T})} \sim \prod_{i=1}^n \left(\sum_{l_i=1}^{s_i} l_i^{(1/p'_i - \beta_i)r_i - 1} \right)^{1/r_i} \sim \prod_{i=1}^n s_i^{1/p'_i - \beta_i}.$$

Для мультииндекса $d = (d_1, \dots, d_m, d_{m+1}, \dots, d_n)$ обозначим через $\bar{d} = (d_1, \dots, d_m)$.

Лемма 5 (неравенство разных измерений). Пусть $T_s(x)$ — тригонометрический полином порядка не выше $s = (s_1, \dots, s_m, s_{m+1}, \dots, s_n)$ по мультипеременной $x = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ и $1 < p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) < \infty$, $0 < r = (r_1, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_n) \leq \infty$. Тогда для произвольной фиксированной мультиточки $(x_{m+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^{d_{m+1}} \times \dots \times \mathbb{T}^{d_n}$ имеет место неравенство

$$\|T_s(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n)\|_{L_{\bar{p}r}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} \leq C \prod_{i=m+1}^n \prod_{j=1}^{d_i} (s_j^i)^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|T_s\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)},$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от s .

Доказательство. Согласно неравенству разных измерений для тригонометрических полиномов в пространстве Лебега со смешанной метрикой имеем

$$\|T_s(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n)\|_{L_{\bar{p}}([0, 2\pi]^m)} \leq C \prod_{i=m+1}^n \prod_{j=1}^{d_i} (s_j^i)^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|T_s\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}.$$

Далее, применяя схему, использованную в доказательстве леммы, получаем доказательство леммы.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, $1 \leq p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $1 \leq r = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$. Для тригонометрического ряда $f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{i(k, x)}$ обозначим через

$$\Delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} a_k e^{i(k, x)},$$

где $\langle k, x \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_i} k_j^i x_j^i$ — скалярное произведение, а $\rho(s) = \{ k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^d : [2^{s_i-1}] \leq k_i \leq 2^{s_i} \}$.

По аналогии с [1, 4] анизотропным пространством Никольского-Бесова $B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)$ назовем множество рядов $f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{i\langle k, x \rangle}$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)} = \left\| \left\{ 2^{\langle \alpha, s \rangle} \|\Delta_s(f)\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)} \right\} \right\|_{l_q},$$

где $\|\cdot\|_{l_q}$ — норма дискретного пространства Лебега l_q .

Замечание 1. Определенное таким образом анизотропное пространство Бесова $B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)$ в случае $n = 1$ совпадает с изотропным пространством типа Никольского-Бесова $B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^{d_1})$ [2, 5], а в случае $d = (1, \dots, 1)$ — с анизотропным пространством с доминирующей смешанной производной типа Никольского-Бесова $B_{pr}^{\alpha q}([0, 2\pi]^n)$ [2, 5].

Следующая лемма показывает элементарные вложения анизотропных пространств Никольского-Бесова [6].

Лемма 6. Пусть $-\infty \leq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^n) \leq \alpha_0 = (\alpha_0^1, \dots, \alpha_0^n) < \infty$, $1 \leq q_0 = (q_0^1, \dots, q_0^n) \leq q_1 = (q_1^1, \dots, q_1^n) \leq \infty$, $1 \leq p_1 = (p_1^1, \dots, p_1^n) \leq p_0 = (p_0^1, \dots, p_0^n) < \infty$ и $1 \leq r_0 = (r_0^1, \dots, r_0^n) \leq r_1 = (r_1^1, \dots, r_1^n) \leq \infty$. Тогда

$$B_{p_0 r_0}^{\alpha_0 q_0}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow B_{p_1 r_1}^{\alpha_1 q_1}(\mathbb{T}^d).$$

Доказательство следует из свойств пространств $l_q^{\alpha}(A)$ и $L_{pr}(\mathbb{T}^d)$.

Далее сформулированы предельные теоремы вложения разных метрик для анизотропных пространств Никольского-Бесова.

Теорема 1. Пусть $-\infty < \alpha_0 = (\alpha_0^1, \dots, \alpha_0^n) \leq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^n) < \infty$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$, $1 < p_0 = (p_0^1, \dots, p_0^n)$, $p_1 = (p_1^1, \dots, p_1^n) < \infty$ и $1 \leq r = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$. Тогда при $\alpha_0 - d/p_0 = \alpha_1 - d/p_1$ справедливо вложение

$$B_{p_1 r}^{\alpha_1 q}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow B_{p_0 r}^{\alpha_0 q}(\mathbb{T}^d).$$

Доказательство. Пусть $f \in B_{p_1 r}^{\alpha_1 q}(\mathbb{T}^d)$. Тогда, согласно неравенству разных метрик (лемма 4), получаем оценку

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p_1 r}^{\alpha_1 q}(\mathbb{T}^d)} &= \left\| \left\{ 2^{\langle \alpha_0, s \rangle} \|\Delta_s(f)\|_{L_{p_0 r}(\mathbb{T}^d)} \right\} \right\|_{l_q} \leq \\ &\leq C_1 \left\| \left\{ 2^{\langle \alpha_0 + d(1/p_1 - 1/p_0), s \rangle} \|\Delta_s(f)\|_{L_{f p_1 r}(\mathbb{T}^d)} \right\} \right\|_{l_q} = \\ &= C_1 \left\| \left\{ 2^{\langle \alpha_1, s \rangle} \|\Delta_s(f)\|_{L_{p_1 r}(\mathbb{T}^d)} \right\} \right\|_{l_q} = C_1 \|f\|_{B_{p_1 r}^{\alpha_1 q}(\mathbb{T}^d)}, \end{aligned}$$

которая доказывает искомое вложение.

Условие, при котором справедливо вложение из теоремы, неумлучшаемо, а именно справедливо следующее

Утверждение. Пусть $-\infty < \alpha_0 = (\alpha_0^1, \dots, \alpha_0^n) \leq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^n) < \infty$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$; $1 < p_0 = (p_0^1, \dots, p_0^n)$, $p_1 = (p_1^1, \dots, p_1^n) < \infty$, $1 \leq r = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$ и $\alpha_0 - 1/p_0 = \alpha_1 - 1/p_1$. Тогда для произвольных $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$ и $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) > 0$ найдется функция $f_0 \in B_{p_1 r}^{\alpha_1 q}(\mathbb{T}^d)$ такая, что $f_0 \notin B_{p_0}^{(\alpha_0 + \varepsilon)q}(\mathbb{T}^d) \cup B_{(p_0 + \delta)r}^{\alpha_0 q}(\mathbb{T}^d)$.

Доказательство. Для функции $f_{\beta}(x) = \prod_{i=1}^n f_{\beta_i}(x_i)$, где

$$f_{\beta_i}(x_i) = \sum_{k_1^i=1}^{\infty} \dots \sum_{k_{d_i}^i=1}^{\infty} \frac{\cos k_1^i x_1^i \dots \cos k_{d_i}^i x_{d_i}^i}{(k_1^i \dots k_{d_i}^i)^{\beta_i}},$$

согласно оценке нормы одномерного ядра Бернулли, имеем

$$\|\Delta_k(f_{\beta})\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)} = \prod_{i=1}^n \|\Delta_{k_i}(f_{\beta_i})\|_{L_{p_i r_i}(\mathbb{T}^{d_i})} \sim$$

$$\sim \prod_{i=1}^n \left(\sum_{l_i=2^{k_i-1}}^{2^{k_i}-1} l_i^{d_i(1/p'_i-\beta_i)r_i-1} \right)^{1/r_i} \sim \prod_{i=1}^n 2^{d_i(1/p'_i-\beta_i)k_i} = 2^{d(1/p'-\beta)k}.$$

Тогда при

$$\alpha_1 + \frac{d}{p_1'} < d\beta \leq \min \left((\alpha_0 + \varepsilon) + \frac{d}{p_0'}, \alpha_0 + \frac{d}{(p_0 + \delta)'} \right)$$

функция $f_\beta \in B_{p_1'r}^{\alpha_1 q}(\mathbb{T}^d)$ и $f_\beta \notin B_{p_0+\delta}^{\alpha_0+\varepsilon q}(\mathbb{T}^d) \cup B_{(p_0+\delta)r}^{\alpha_0 q}(\mathbb{T}^d)$.

Теорема 2. Пусть $0 < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) < \infty$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots, q_n) \leq * \leq \infty$, $1 < p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) < \infty$, $1 \leq r = (r_1, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_n) \leq \infty$. Тогда при $\alpha_i = d_i/p_i$, $q_i = 1$ для $i = m+1, \dots, n$ имеет место вложение

$$B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow B_{\bar{p}\bar{r}}^{\bar{\alpha}\bar{q}}(\mathbb{T}^{\bar{d}}).$$

Доказательство. Согласно неравенству разных измерений (лемма 5) и неравенству Минковского получаем

$$\begin{aligned} \|f(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n)\|_{B_{\bar{p}\bar{r}}^{\bar{\alpha}\bar{q}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} &= \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{\alpha}, \bar{s} \rangle} \|\Delta_{\bar{s}}(f(\cdot, \dots, \cdot, x_{m+1}, \dots, x_n))\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} \right\} \right\|_{l_{\bar{q}}} \leq \\ &\leq \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{\alpha}, \bar{s} \rangle} \left\| \sum_{s_n=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} \Delta_{s_{m+1}}(\dots \Delta_{s_n}(\Delta_{\bar{s}}(f))) \right\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} \right\} \right\|_{l_{\bar{q}}} \leq \\ &\leq \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{\alpha}, \bar{s} \rangle} \sum_{s_n=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} \|\Delta_{s_{m+1}}(\dots \Delta_{s_n}(\Delta_{\bar{s}}(f)))\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} \right\} \right\|_{l_{\bar{q}}} = \\ &= \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{\alpha}, \bar{s} \rangle} \sum_{s_n=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} \|\Delta_s(f)\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} \right\} \right\|_{l_{\bar{q}}} \leq \\ &\leq C_1 \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{\alpha}, \bar{s} \rangle} \sum_{s_n=0}^{\infty} 2^{s_n/p_n} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} 2^{s_{m+1}/p_{m+1}} \|\Delta_s(f)\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)} \right\} \right\|_{l_{\bar{q}}} \leq \\ &\leq C_1 \sum_{s_n=0}^{\infty} \dots \sum_{s_{m+1}=0}^{\infty} \left\| \left\{ 2^{\langle \alpha, s \rangle} \|\Delta_s(f)\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)} \right\} \right\|_{l_{\bar{q}}} = \\ &= C_1 \left\| \left\{ 2^{\langle \alpha, s \rangle} \|\Delta_s(f)\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)} \right\} \right\|_{l_q} = C_1 \|f\|_{B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)}, \end{aligned}$$

где $\alpha_i = d_i/p_i$, $q_i = 1$ для $i = m+1, \dots, n$.

Покажем, что условия $\alpha_i = d_i/p_i$, $q_i = 1$ при $i = m+1, \dots, n$ обеспечивают выполнение свойства

$$\|f(x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) - \varphi(x_1, \dots, x_m)\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} \rightarrow 0$$

при $\max_{i=m+1, \dots, n} |h_i| \rightarrow 0$.

Действительно, пусть $N \in \mathbb{N}$ и

$$\Gamma_N = \left\{ \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}^d : \prod_{i=1}^n \max(\max_{j=1, \dots, d_i} |k_j^i|, 1) \leq N \right\},$$

тогда

$$\|f(x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) - \varphi(x_1, \dots, x_m)\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \|f(x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) - f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} = \|f(x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) - \\
 &- S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) + S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) - S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) + \\
 &+ S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) - S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} \leq \|f(x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) - \\
 &- S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n)\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} + \|S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) - \\
 &- S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} + \|S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) - f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} = \\
 &= I_1 + I_2 + I_3.
 \end{aligned}$$

Здесь $S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ – частичная сумма ряда Фурье функции $f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$, соответствующая гиперболическому кресту Γ_N .

Для оценки I_1 и I_3 воспользуемся неравенствами Минковского, разных измерений (лемма 5) и Гельдера. Пусть индекс $j = 1$ или $j = 3$, тогда

$$\begin{aligned}
 I_j &\leq \sup_{x_{m+1}, \dots, x_n} \|f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) - S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} = \\
 &= \sup_{x_{m+1}, \dots, x_n} \left\| \sum_{s \notin \Gamma_N} \Delta_s(f; x) \right\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} \leq \sum_{s \notin \Gamma_N} \sup_{x_{m+1}, \dots, x_n} \|\Delta_s(f; x)\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} \leq \\
 &\leq C_1 \sum_{s \notin \Gamma_N} 2^{-\langle \bar{\alpha}, \bar{s} \rangle} 2^{\langle \alpha, s \rangle} \|\Delta_s(f; x)\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)} \leq \\
 &\leq C_1 \left\| \left\{ 2^{\langle \alpha, s \rangle} \|\Delta_s(f; x)\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)} \right\}_{s \notin \Gamma_N} \right\|_{l_q} \cdot \left\| \left\{ 2^{-\langle \bar{\alpha}, \bar{s} \rangle} \right\}_{s \notin \Gamma_N} \right\|_{l_{q'}} \leq \\
 &\leq C_2 \|f - S_{\Gamma_N}(f)\|_{B_{\bar{p}\bar{r}}^{\alpha\bar{q}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Для оценки I_2 воспользуемся тем, что полиномы $S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ являются непрерывными функциями, тогда

$$\|S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) - S_{\Gamma_N}(f; x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} \rightarrow 0$$

при $\max_{i=m+1, \dots, n} |h_i| \rightarrow 0$.

Замечание 2. В теореме, в отличие от теоремы о следах для пространств типа пространств Бесова с доминирующей смешанной производной [7, 8], доказанной для $\alpha_i > d_i/p_i$ при $i = m+1, \dots, n$, рассмотрен предельный случай $\alpha_i = d_i/p_i$ при условии $q_i = 1$ для $i = m+1, \dots, n$ (ранее этот эффект был замечен в работах О.В. Бесова [9, 10]).

Теорема 3. Пусть $0 < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) < \infty$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots, q_n) \leq \infty$, $1 < p = (p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) < \infty$, $1 \leq r = (r_1, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_n) \leq \infty$. Тогда для функции $\varphi(x_1, \dots, x_m) \in B_{\bar{p}\bar{r}}^{\alpha\bar{q}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})$ при $\alpha_i = d_i/p_i$ и $q_i = 1$ для $i = m+1, \dots, n$ можно построить функцию $f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ от n мультипеременных, обладающую следующими свойствами:

- 1) $f \in B_{\bar{p}\bar{r}}^{\alpha\bar{q}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})$ и $\|f\|_{B_{\bar{p}\bar{r}}^{\alpha\bar{q}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} \leq C \|\varphi\|_{B_{\bar{p}\bar{r}}^{\alpha\bar{q}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})}$;
- 2) $f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = \varphi(x_1, \dots, x_m)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in B_{\bar{p}\bar{r}}^{\alpha\bar{q}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})$. Ее можно представить в виде сходящегося к ней в смысле $L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})$ ряда

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\bar{s}=0}^{\infty} \Delta_{\bar{s}}(\varphi(x_1, \dots, x_m)).$$

Имеем

$$\|\varphi\|_{B_{\bar{p}\bar{r}}^{\alpha\bar{q}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} = \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{\alpha}, \bar{s} \rangle} \|\Delta_{\bar{s}}(\varphi)\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^{\bar{d}})} \right\} \right\|_{l_{\bar{q}}}.$$

Для $i = m+1, \dots, n$ выберем функции $f_i(x_i)$ из $B_{p_i r_i}^{\alpha_i 1}(\mathbb{T}^{d_i})$, где $\alpha_i = d_i/p_i$, такие, что $f_i(0) = 1$, и введем новую функцию

$$f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = \sum_{\bar{s}=0}^{\infty} \Delta_{\bar{s}}(\varphi(x_1, \dots, x_m)) \prod_{i=m+1}^n \Delta_{s_i}(f_i(x_i)).$$

Для этой функции получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p\bar{r}}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)} &= \left\| \left\{ 2^{(\alpha, s)} \|\Delta_s(\varphi)\|_{L_{p\bar{r}}(\mathbb{T}^d)} \right\} \right\|_{l_q} = \\ &= \left\| \left\{ 2^{(\bar{\alpha}, \bar{s})} \|\Delta_{\bar{s}}(\varphi)\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^d)} \right\} \right\|_{l_{\bar{q}}} \prod_{i=m+1}^n \|f_i\|_{B_{p_i r_i}^{\alpha_i 1}(\mathbb{T}^{d_i})} = C \|\varphi\|_{B_{\bar{p}\bar{r}}^{\bar{\alpha}\bar{q}}(\mathbb{T}^d)}. \end{aligned}$$

Из условия $f_i(0) = 1$ для $i = m + 1, \dots, n$ имеем

$$f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = \varphi(x_1, \dots, x_m).$$

Условия $\alpha_i = d_i/p_i$, $q_i = 1$ при $i = m + 1, \dots, n$ обеспечивают непрерывность функций $f_i(x_i)$. Тогда

$$\begin{aligned} &\|f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) - \varphi(x_1, \dots, x_m)\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^d)} = \\ &= \left\| \varphi(x_1, \dots, x_m) \left(\prod_{i=m+1}^n f_i(x_i) - 1 \right) \right\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^d)} \leq \\ &\leq \|\varphi(x_1, \dots, x_m)\|_{L_{\bar{p}\bar{r}}(\mathbb{T}^d)} \left| \prod_{i=m+1}^n f_i(x_i) - 1 \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\max_{i=m+1, \dots, n} |x_i| \rightarrow 0$.

Эти рассуждения показывают, что φ есть след функции f .

Замечание 3. Оператор продолжения, построенный при доказательстве теоремы, – линейный. Здесь следует отметить работу В.И. Буренкова и М.Л. Гольдмана [11], где показано, что в предельном случае для анизотропных пространств Бесова возможно построить только нелинейный оператор продолжения, однако этот эффект не наблюдается для пространств типа пространств Бесова с доминирующей смешанной производной.

Список литературы

- 1 Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Докл. РАН. – 2004. – Т. 394. – № 1. – С. 22–25.
- 2 Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980. – С. 264.
- 3 Гулисашвили А.Б. Тригонометрические ряды с монотонно убывающими коэффициентами и функциями распределения // Матем. заметки. – 1971. – Т. 10. – № 1. – С. 3–10.
- 4 Bazarkhanov D.B. Estimates for the widths of classes of periodic functions of several variables-I // Eurasian mathematical Journal. – 2010. – Vol. 1. – № 3. – P. 11–26.
- 5 Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – С. 400.
- 6 Бекмаганбетов К.А., Нурсултанов Е.Д. Теоремы вложения анизотропных пространств Бесова $B_{p\bar{r}}^{\alpha q}([0, 2\pi]^n)$ // Известия РАН. Сер. матем. – 2009. – Т. 73. – № 4. – С. 3–16.
- 7 Аманов Т.И. Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S_{p, \theta}^{(r)} B(R_n)$ и $S_{p^*, \theta}^{(r)} B$ ($0 \leq x_j \leq 2\pi$; $j = 1, \dots, n$) // Труды МИАН СССР. – 1965. – Т. 77. – С. 5–34.
- 8 Джабраилов А.Д. О некоторых функциональных пространствах. Прямые и обратные теоремы вложения // ДАН СССР. – 1964. – Т. 159. – С. 254–257.
- 9 Бесов О.В. Об условиях существования классического решения волнового уравнения // Сибирский мат. журн. – 1967. – Т. 7 – № 2. – С. 243–256.
- 10 Бесов О.В. Классы функций с обобщенным смешанным условием Гельдера // Труды МИАН СССР. – 1969. – Т. 105. – С. 21–29.
- 11 Буренков В.И., Гольдман М.Л. О продолжении функций в L_p // Труды МИАН СССР. – 1979. – Т. 150. – С. 31–51.

Е. Төлеуғазы

Анизотропты $B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)$ Никольский-Бесов кеңістіктері үшін ену теоремалары, іздер және жалғасу туралы теоремалары

Мақалада анизотропты Лоренц кеңістіктерінің интерполяциялық қасиеттерін қолдану негізінде тригонометриялық полиномдар үшін әр түрлі метрикалық және өлшемдік теңсіздіктер алынды. Өкілдік туралы теорема негізінде анизотропты Лоренц кеңістіктері метрикасы бойынша анизотропты Никольский-Бесов $B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)$ кеңістіктері анықталды. $\mathbf{d} = d_1$ жағдайында көрсетілген кеңістіктер классикалық изотропты Никольский-Бесов кеңістіктеріне сәйкес келетіні, ал $\mathbf{d} = (1, \dots, 1)$ болған жағдайда сипаттамалары үстем аралас туындылары бар кеңістіктер сияқты болатын анизотропты Никольский-Бесов кеңістіктеріне сәйкес келетіні байқалды. Мақалада осы кеңістіктерді анықтауға қатысатын барлық параметрлерге қатысты осы кеңістіктер үшін қарапайым енулер сипатталды. Бұл кеңістіктер үшін күшті параметрлерге қатысты әр түрлі метрикалар теңсіздігі негізінде енудің шектік теоремасы алынды. Ену қасиеттерін сақтау үшін кеңістік параметрлеріне қойылатын шарттардың жақсартылмайтыны жайлы көрсететін мысал құрылды. Қарастырылатын кеңістіктердегі функциялар үшін әр түрлі өлшемдер теңсіздігі негізінде із және жалғасу туралы шектік теоремалар алынды. Айтылған теоремалардағы шарттардың жақсартылмайтынын айтуға болады. $\mathbf{d} = d_1$ болған жағдайда алынған теоремалардан изотропты кеңістіктер үшін С.М.Никольский және О.В.Бесов бұрын-соңды жариялаған жұмыстарындағы сәйкес нәтижелер шығады. Ал $\mathbf{d} = (1, \dots, 1)$ болған жағдайда алынған теоремалардан үстем аралас туындылары бар анизотропты кеңістіктер үшін Қ.Ә.Бекмағанбетов және Е.Д.Нұрсұлтанов бұрын-соңды жариялаған жұмыстарындағы сәйкес нәтижелер шығады. Қарастырылған кеңістіктердің құрылымы гибриді болатынын алынған нәтижелер көрсетті: классикалық изотропты кеңістіктерден және үстем аралас туындылары бар анизотропты кеңістіктерден тұрады. Атап айтқанда, келтірілген кеңістіктердегі функциялардың бір айнымалылар блогіне енетін айнымалылар бойынша тегістік және метрикалық қасиеттері бірдей, ал әр түрлі блоктарға енетін айнымалыларға қатысты тегістік және метрикалық қасиеттері әр түрлі болады. Жұмыста алынған нәтижелерді әрі қарай математикалық физика теңдеулерінің шекаралық есептері теориясында, гармоникалық талдау есептерінде және анизотроптық кеңістіктеріндегі жуықтау теориясында қолдануға болады.

Ye. Toleugazy

Embedding theorems, theorems of a trace and approach for anisotropic $B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)$ Nikol'skii-Besov spaces

In this paper, the inequalities of different metrics and different measurements for trigonometric polynomials are obtained by using the interpolation properties of anisotropic Lorentz spaces. Further, anisotropic Nikol'skii-Besov spaces $B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)$ on the metric of anisotropic Lorentz spaces are defined by using the theorem on the representation. Note that in the case when $\mathbf{d} = d_1$, these spaces coincide with the classical isotropic Nikol'skii-Besov spaces, and in the case $\mathbf{d} = (1, \dots, 1)$ these spaces coincide with anisotropic Nikol'skii-Besov spaces, having the character of spaces with dominant mixed derivatives. In this paper the elementary embeddings are describes for these spaces with respect to all the parameters involved in their definition. By using the inequalities in different metrics the limit embedding theorem is derived for this spaces with respect to the strong parameters. An example showing unimprovability conditions on the parameters of space for save the properties of the embedding is constructed. By using the inequality of different measurements the limit theorems about the track and the continuation for the functions of these spaces are obtained. Note that the conditions in these theorems are also the best possible. In the case $\mathbf{d} = d_1$ from the received theorems follows the corresponding results, which are obtained previously in the works S.M. Nikol'skii and O.V. Besov for isotropic spaces. In the case $\mathbf{d} = (1, \dots, 1)$ from the received theorems follows the corresponding results, which are obtained previously in the works K.A. Bekmaganbetov and E.D. Nursultanov for anisotropic spaces with dominant mixed derivative. The obtained results show that the considered spaces have the hybrid structure of the classical isotropic spaces and anisotropic spaces with dominant mixed derivative. Namely, the function of these spaces have the same smoothness and metric properties to the variables included in one block, and different smoothness and metric properties

with respect to the variables included in different blocks. The results obtained can be further used in the theory of boundary value problems of mathematical physics equations, in problems of harmonic analysis and approximation theory in anisotropic spaces.

References

- 1 Nursultanov E.D. *Reports the Russian Academy of Sciences RF*, 394:1, 2004, 1, p. 22–25.
- 2 Bergh J. and Löfström J. *Interpolation spaces. An introduction*, Moscow: Mir, 1980, p. 264
- 3 Gulisashvili A.B. *Mathematical notes*, 1971, 10, 1, p. 3–10.
- 4 Bazarkhanov D.B. *Eurasian Mathematical Journal*, 2010, 1, 3, p. 11–26.
- 5 Triebel H. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, 18. North-Holland Math. Library, North-Holland, Amsterdam; Moscow: Mir, 1980, p. 400.
- 6 Bekmaganbetov K.A., Nursultanov E.D. *Izvestiya: Mathematics*, 2009, 73 (4):655, p. 3–16.
- 7 Amanov T.I. *Proc. MIAN USSR*, 1965, 77, p. 3–16.
- 8 Jabrailov A.D. *Reports of the Academy of Sciences USSR*, 1964, 159, p. 254–257.
- 9 Besov O.V. *Siberian Mathematical Journal*, 1967, 7, 2, p. 243–256.
- 10 Besov O.V. *Trudy Proc. MIAN USSR*, 1969, 105, p. 21–29.
- 11 Burenkov V.I., Gol'dman M.L. *Proc. MIAN USSR*, 1981, 150, p. 33–53.

АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТТЕР
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
INFORMATION ABOUT AUTHORS

Azieva, G.T. — Master, Senior teacher of the department Informatics and applied Economics, Kazakh University of Economics, Finance and International Trade, Astana.

Atakhan, N. — 3 course doctoral student, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty.

Bakanov, G.B. — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Director of the Research Institute Natural Science, Kh.A.Yasawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan.

Bakirova, E.A. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Leading Researcher, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling CS MES RK, Almaty.

Bokayev, N.A. — Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana.

Buketov, A.V. — Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of subdepartment for Ship Propulsion Plant Operation and General Engineering, Kherson State Maritime Academy, Ukraine.

Burenkov, V.I. — Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Peoples' Cardiff University, United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland.

Bohdan, A.P. — Assistant of Subdepartment Technical Mechanics, Engineering and Computer graphics, Kherson State Maritime Academy, Ukraine.

Golenkov, V. — Head of Informational Intelligent Technologies Department, Belarusian State University of Informatics and Radio Electronics, Minsk.

Dzhumabaev, D.S. — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chief Researcher at the Department of Differential Equations, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling CS MES RK; International University of Information Technologies, Almaty.

Yeskermessuly, A. — Doctoral student in the specialty 6D060100 — «Mathematics», L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana.

Yeshkeyev, A.R. — Doctor of Physical and Mathematical Science, Ye.A. Buketov Karaganda State University.

Zenkov, A.V. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Altai State Agricultural University, Barnaul, Russia.

Imanova, Zh.U. — PhD student of the first course, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty.

Iskakova, N.B. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Leading Researcher, Senior teaching, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling CS MES RK; Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty.

Kabenov, D.I. — PhD., Associate Professor of Computer Science Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Pavlodar State Pedagogical Institute.

Kosmakova, M.T. — PhD doctor, Senior lecturer in Mathematical Analysis and Differential Equations, Ye.A. Buketov Karaganda State University.

Koshanova, M.D. — Candidate of Technical Sciences, Head of the Department of Mathematics, Department, Kh.A.Yasawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan.

Kravtsov, L.V. — Candidate Technical Sciences, Docent, Head of IT, Computer systems and networks, Kherson State Maritime Academy, Ukraine.

- Kulzhumiyeva, A.A.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of the department of physics and mathematics, M. Utemisov West-Kazakhstan State University, Uralsk.
- Mayemerova, G.M.** — PhD, Senior teacher, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty.
- Matin, D.T.** — Master of mathematics, PhD student, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana.
- Minglibayev, M.Zh.** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, V.G. Fesenkov Astrophysical Institute; Al-Farabi Kazakh National University, Almaty.
- Mirzakulova, A.** — 3 course doctoral student, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty.
- Muratkhan, R.** — Senior lecturer of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Ye.A. Buketov Karaganda State University.
- Musin, A.T.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana.
- Ramazanov, M.I.** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Ye.A. Buketov Karaganda State University.
- Roman'kov, V.A.** — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Information systems chair in F.M. Dostoevsky Omsk State University, Russia.
- Sartabanov, Zh.A.** — Doctor of Physical and Mathematical sciences, Professor, K. Zhubanov Aktobe Regional State University.
- Svetov, I.E.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.
- Sultanov, M.A.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of «Mathematics», Kh.A. Yasawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan.
- Temesheva, S.M.** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Chief Researcher at the Department of Differential Equations, Institute of Mathematics and mathematical modeling CS MES RK, Associate Professor of Department of Fundamental Mathematics, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty.
- Tokesheva, A.S.** — Undergraduate of 2 course specialty 6D060100 — «Mathematics», Ye.A. Buketov Karaganda State University.
- Toleugazy, Ye.** — Master of Mathematics, PhD student, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana.
- Turmetov, B.Kh.** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Department of Mathematics, Kh.A. Yasawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling CS MES RK, Almaty.
- Turusbekova, U.K.** — PhD, Senior teacher of the department «Informatics and applied Economics», Kazakh University of Economics, Finance and International Trade, Astana.
- Usmanov, K.I.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Department of Mathematics, Kh.A. Yasawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan.
- Ustemirova, B.B.** — Master student in the specialty 6M070500 — «Mathematical and Computer Modeling», Department of Mathematics, Kh.A. Yasawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan.
- Khairkulova, A.A.** — Undergraduate of 2 course specialty 6D060100 — «Mathematics», Ye.A. Buketov Karaganda State University.

**2016 жылғы «Қарағанды университетінің хабаршысында»
жарияланған мақалалардың көрсеткіші.
«Математика» сериясы**

№ б.

МАТЕМАТИКА

<i>Ақыш А.Ш.</i> Навье-Стокс теңдеулеріне максимум принципінің жай түрі	3	8
<i>Ақышев Ф.</i> Лоренц кеңістігінде функциялардың қоссызықты жуықтауларын бағалау	1	7
<i>Асанова А.Т., Иманчиев А.Е.</i> Жүктелген гиперболалық теңдеулер үшін көп нүктелі шарттары бар бейлокал шеттік есептің шешімділігі туралы	1	15
<i>Аханова А.С., Есенбаева Г.А., Тұрсынғалиев Н.К.</i> Майысу функцияларын қатарларға жіктеу арқылы пластиналарды есептеу	2	15
<i>Әшірбаев Н.Қ., Әшірбаева Ж.Н., Алтынбеков Ш.Е., Шоманбаева М.Т.</i> Серпімді көптіреулі конструкцияда динамикалық толқындардың таралу ерекшеліктері	2	8
<i>Бакирова Ә.А., Искакова Н.Б.</i> Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты емес шеттік есептің шешімінің бастапқы жуықтауын таңдаудың бір тәсілі туралы	4	8
<i>Байтуякова Ж.Ж.</i> Фурье қатарларының күшті қосындылау терминіндегі функцияның периодты жалпыланған Никольский–Бесов–Морри кеңістігіне тиісті болуының қажетті шарты	3	13
<i>Бимендина А.У.</i> Лоренц кеңістігінде енгізудің жеткілікті шарты	3	20
<i>Бокаев Н.А., Буренков В.И., Матин Д.Т.</i> Жалпыланған Морри кеңістігіндегі жиындардың жинақы болуының жеткілікті шарты туралы	4	18
<i>Букетов А.В., Кравцова Л.В., Богдан А.П.</i> Қайта-ауыспалы жүктеме әсерінен композиттік материалдар үлгілерінің қирауын болжау	4	27
<i>Буренков В.И., Кыдырмина Н.А.</i> Соболев–Морри кеңістіктерге арналған Соболев ішіне салу теоремалары	3	32
<i>Бітімхан С.</i> Бесов кластарында жататын функциялардың Фурье қатарларының абсолютті қосындылануы	3	28
<i>Викентьев А.А.</i> Білім қорында автоматты кластерлеу мен Лукасевичтің көпмәнді формулалары үшін сараптамалық түсіндіру негізінде логикалық тұжырымдарда модельдік қашықтықтарды зерттеу. I	2	23
<i>Викентьев А.А.</i> Білім қорында автоматты кластерлеу мен Лукасевичтің көпмәнді формулалары үшін сараптамалық түсіндіру негізінде логикалық тұжырымдарда модельдік қашықтықтарды зерттеу. II	2	32
<i>Викентьев А.А., Авилов М.С.</i> Логикалық білім қорынан автоматтандырылған формулалар кластеризациясында көпмәнді логика формулалары үшін нольдік емес өлшемдер мен жаңа толық метрикалар. I	3	41
<i>Викентьев А.А., Авилов М.С.</i> Логикалық білім қорынан автоматтандырылған формулалар кластеризациясында көпмәнді логика формулалары үшін нольдік емес өлшемдер мен жаңа толық метрикалар. II	3	46
<i>Викентьев А.А., Иванов В.В.</i> Білімдер кеңістігінде бейнелерді тану әдістері	1	26

<i>Дженалиев М.Т., Жамалова Ж.Т., Рамазанов М.И.</i> Автомодельді заң бойынша жылжитын шекарасы бар құлдырайтын облыстағы шеттік есеп жайында	1	46
<i>Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И., Жанболова А.К.</i> Бірқалыпты қозғалмалы шекарасы бар жылуөткізгіштік теңдеуі үшін Вольтерра сингулярлы интегралдық теңдеуінің шешімі	2	40
<i>Джумабаев Д. С., Темешева С.М.</i> Сызықтық емес аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесінің жолақта шенелген шешімі	4	35
<i>Ділдәбек Г., Тенгаева А.А.</i> Параболалы-гиперболалық типті теңдеулер үшін ауысуы бар есептің меншікті мәндерінің бар болуы	2	48
<i>Есбаев А.Н., Есенбаева Г.А.</i> Елеулі жүктелген дифференциалдық жылуөткізгіштік операторы үшін шекті есептің интегралды теңдеуі туралы	3	62
<i>Есбаев А.Н., Есенбаева Г.А., Иванов И.А.</i> Екі өлшемді ортадағы тербелмелі және толқындық жүйелер үшін шеттік есеп туралы	3	55
<i>Есенбаева Г.А., Смаилова А.А.</i> Тіктөртбұрышты пластиналарды вариациялық әдіспен есептеу туралы	2	56
<i>Ескермесұлы Ә.</i> Регулярлық емес коэффициенттері бар төртінші ретті екі мүшелі минималды дифференциалдық оператордың ақау индексін зерттеу	4	46
<i>Есмагамбет Н.А.</i> Пилотсыз ұшу аппараты үшін түрді тану жүйесімен қатар мульти-медиалық фреймворк GStreamer қолдану	2	121
<i>Есмагамбет Н.А., Антипов Ю.Н.</i> Пилотсыз ұшу аппараты үшін түрді тану жүйесін құру	2	128
<i>Ешкеев А.Р.</i> Дөңес экзистенциалды жай йонсондық теориялар	1	41
<i>Ешкеев А.Р.</i> Йонсондық жиындар тұйықтамалардың ұқсастығы	1	35
<i>Ешкеев А.Р.</i> Йонсондық жиындардың ішіндегі Морли рангінің кейбір қасиеттері. ...	4	57
<i>Ешкеев А.Р.</i> Йонсондық жиындар үшін тәуелсіздік қасиеті	4	52
<i>Иманбаев Н.С.</i> Интегралдық толқытылған антипериодты типтегі шеттік шарттармен берілген Штурм-Лиувилль операторының спектралдық есебінің сипаттамалық анықтаушысы	2	68
<i>Зенков А.В.</i> $x_*^n = x^{-n}$ теңбе-теңдікті m -группалардың көпбейнелігі жайында	2	63
<i>Зенков А.В.</i> M -группа өрімдері мен берілуі	4	63
<i>Кабенов Д., Муратхан Р., Голенков В.</i> Білім алушылардың білімін табиғи тілде бағалаудың зерделі жүйесін жасау әдістері	4	70
<i>Космакова М.Т.</i> Құлдырайтын облыстағы жылуөткізгіштік теңдеуі үшін Дирихле есебінің интегралдық теңдеуі туралы	1	62
<i>Космакова М.Т., Рамазанов М.И., Токешева А.С., Хайрқұлова А.А.</i> Бұрыштық облыста жылуөткізгіштік теңдеуі үшін біртекті шеттік есептің жалғыз емес шешімі туралы	4	80
<i>Култешов Б.Ш., Судоплатов С.В.</i> Есептік модельдердің саны максималды емес реттелген теорияларында 2-формулалардың құрылу тәртібі туралы	1	68

<i>Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А.</i> Жоғарғы ретті бір теңдеуге эквиваленттілігі жағдайында жордан матрицалы D_e -жүйесіне диагоналда тұрақты коэффициенттер мен сызықты D_e -жүйені келтіру туралы	4	88
<i>Құсаинова Л., Мырзағалиева А.</i> Салмақты Соболев кеңістіктеріндегі мультипликаторлар жайлы. I-бөлім	2	74
<i>Макажанова Т.Х., Муканов А.А.</i> Суперсызықты бейнеленген меншікті жиындар жайлы	2	84
<i>Минглибаев М.Д., Маемерова Г.М., Иманова Ж.У.</i> Массалары әр түрлі қарқында изотропсыз өзгертін үш дене есебіндегі ғасырлық ұйытқулар	4	94
<i>Мирзакулова А.Е., Атахан Н.</i> Жоғарғы туындыларының алдында кіші параметрі бар интегралды дифференциалдық теңдеулер үшін шекаралық есеп шешімінің аналитикалық формуласы	4	99
<i>Мусин А.Т.</i> Үш өлшемді жалаулы кеңістігіндегі түзулер кешенінің канондық реперін салу	4	104
<i>Мұратбеков М.Б., Игисинов С.Ж., Шырақбаев А.Б.</i> Классикалық емес типті дифференциалдық оператордың шенелмеген облыста бөліктенуі туралы	2	95
<i>Мырзағалиева А.</i> Салмақты Соболев кеңістіктеріндегі мультипликаторлар жайлы. II-бөлім	1	89
<i>Назарова К.Ж.</i> Бейсызық екі нүктелі шеттік есептің оқшауланған шешімінің бар болуы және оның қасиеттері	1	51
<i>Орынбаева Н.Т.</i> Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептің шешімін табу алгоритмдері туралы	2	107
<i>Романьков В.А.</i> Өрімге негізделген ашық кілті бар қос панельдік шифрлау жүйесі үшін полиномиалды алгоритм	4	110
<i>Сагиндыков К.М., Мусайф Г.</i> Ақпаратты қорғау жүйесін бағалау үшін Петри желісін қолдану	3	70
<i>Судоплатов С.В.</i> Теория модельдерінде гиперграфтардағы жиындар мен элементтердің бөлінгіштігі жайында	2	113
<i>Султанов М.А., Баканов Г.Б., Светов И.Е., Устемирова Б.Б.</i> Кішіөткізгіштік аймағын анықтау кері есебін шешудің сандық алгоритмі	4	124
<i>Сұлтанов М.А., Кошанова М.Д., Устемирова Б.Б.</i> Бірөлшемді үйірткіні терістеу кері есебінің қисынсыздығы жайлы	4	116
<i>Тасмамбетов Ж.Н.</i> Матье теңдеуінің шешімін Фробениус-Латышева әдісін пайдаланып құру	3	76
<i>Төлеуғазы Е.Т.</i> Анизотропты $B_{\text{pr}}^{\alpha\mathfrak{q}}(\mathbb{T}^d)$ Никольский-Бесов кеңістіктері үшін ену теоремалары, іздер және жалғасу туралы теоремалары	4	146
<i>Түлеуова Р.У.</i> Координатасы бойынша сызықтық және сызықтық емес заң бойынша өзгертін жылу ағыны берілген жағдайдағы жылусерпінділіктің бір өлшемді есептерінің шешімдерін сандық модельдеу	3	87
<i>Турметов Б.Х., Усманов К.Ы.</i> Бөлшек ретті операторлы шеттік шартты бір сыртқы есептің бірімәнді шешімділігі туралы	4	139

<i>Тұрысбекова У.К., Азиева Г.Т.</i> $k[x, y, z]$ көпмүшеліктер алгебрасындағы квадраттық Пуассон алгебралары және олардың автоморфизмдері	4	131
<i>Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т.</i> Аргументі ауытқитын жылуөткізгіштік теңдеуі үшін антипериодикалық есебінің шешімі бар және жалғыз болуы жөнінде	1	83
<i>Шаяхметова Б.К., Антипов Ю.Н.</i> Қоғамды ақпараттандыру процесінде «білім» педагогикалық ғылым санаттарын құрылымдау	1	76
<i>Шульгина-Таращук А.С., Төлеуханова Р.Ж.</i> Программалық жабдықтар көмегімен транспорттық есепті шешудің жолы	3	93

Указатель статей, опубликованных
в «Вестнике Карагандинского университета» в 2016 году.
Серия «Математика»

	№	с.
МАТЕМАТИКА		
<i>Акишев Г.</i> Оценки билинейных приближений функций в пространстве Лоренца ...	1	7
<i>Акылш А.Ш.</i> Простейший принцип максимума для уравнений Навье–Стокса.	3	8
<i>Асанова А.Т., Иманчиев А.Е.</i> О разрешимости нелокальной краевой задачи для нагруженных гиперболических уравнений с многоточечными условиями	1	15
<i>Аханова А.С., Есенбаева Г.А., Турсынғалиев Н.К.</i> О расчете пластин разложением в ряд функции прогибов	2	15
<i>Аширбаев Н.К., Аширбаева Ж.Н., Алтынбеков Ш.Е., Шоманбаева М.Т.</i> Особенности распространения динамических возмущений в упругой многоопорной конструкции .	2	8
<i>Бажирова Э.А., Исакова Н.Б.</i> Об одном подходе к выбору начального приближения решения нелинейной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений	4	8
<i>Байтуякова Ж.Ж.</i> О необходимом условии принадлежности функции периодическому обобщенному пространству Никольского–Бесова–Морри в терминах сильной суммируемости рядов Фурье	3	13
<i>Бимендина А.У.</i> Достаточное условие для рядов Фурье–Прайса в пространстве Лоренца	3	20
<i>Битимхан С.</i> Абсолютная суммируемость рядов Фурье функции из классов Бесова	3	28
<i>Бокаев Н.А., Буренков В.И., Матин Д.Т.</i> О достаточном условии предкомпактности множеств в обобщенных пространствах Морри	4	18
<i>Букетов А.В., Кравцова Л.В., Богдан А.П.</i> Прогнозирование разрушения образцов композитных материалов под действием повторно-переменных нагрузжений	4	27
<i>Буренков В.И., Кыдырмина Н.А.</i> Теорема вложения Соболева для пространств Соболева–Морри	3	32
<i>Викентьев А.А.</i> Изучение модельных расстояний на логических высказываниях с учетом экспертных интерпретаций для формул многозначных логик Лукасевича и автоматической кластеризации в базах знаний. I	2	23
<i>Викентьев А.А.</i> Изучение модельных расстояний на логических высказываниях с учетом экспертных интерпретаций для формул многозначных логик Лукасевича и автоматической кластеризации в базах знаний. II	2	32
<i>Викентьев А.А., Авилов М.С.</i> Новые полные метрики и меры нетривиальности для формул многозначных логик в автоматической кластеризации формул из логической базы знаний. I	3	41
<i>Викентьев А.А., Авилов М.С.</i> Новые полные метрики и меры нетривиальности для формул многозначных логик в автоматической кластеризации формул из логической базы знаний. II	3	46

<i>Викентьев А.А., Иванов В.В.</i> Методы распознавания образов в пространстве знаний	1	26
<i>Дженалиев М.Т., Жамалова Ж.Т., Рамазанов М.И.</i> О краевой задаче в вырождающейся области с границей, движущейся по автомодельному закону	1	46
<i>Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И., Жанболова А.К.</i> К решению сингулярного интегрального уравнения Вольтерры тепловой задачи с равномерно движущейся границей	2	40
<i>Джумабаев Д.С., Темешева С.М.</i> Ограниченное на полосе решение системы нелинейных гиперболических уравнений со смешанными производными	4	35
<i>Дилдабек Г., Тенгаева А.А.</i> Существование собственного значения задачи со смещением для уравнения параболо-гиперболического типа	2	48
<i>Есбаев А.Н., Есенбаева Г.А.</i> Об интегральном уравнении граничной задачи для существенно нагруженного дифференциального оператора теплопроводности	3	62
<i>Есбаев А.Н., Есенбаева Г.А., Иванов И.А.</i> О краевой задаче для колебательных и волновых процессов в двумерных средах	3	55
<i>Есенбаева Г.А., Смаилова А.А.</i> О расчете прямоугольных пластин вариационным методом	2	56
<i>Ескермесулы А.</i> Исследование индексов дефекта двучленного минимального дифференциального оператора четвертого порядка с нерегулярными коэффициентами	4	46
<i>Есмагамбет Н.А.</i> Применение мультимедийного фреймворка GStreamer в связке с системой опознавания лиц для беспилотных летательных аппаратов	2	121
<i>Есмагамбет Н.А., Антипов Ю.Н.</i> Разработка системы распознавания для беспилотного летательного аппарата	2	128
<i>Ешкеев А.Р.</i> Выпуклые экзистенциально простые йонсоновские теории	1	41
<i>Ешкеев А.Р.</i> Некоторые свойства ранга Морли над йонсоновскими множествами ..	4	52
<i>Ешкеев А.Р.</i> Подобие замыканий йонсоновских множеств	1	35
<i>Ешкеев А.Р.</i> Свойство независимости для йонсоновских множеств	4	57
<i>Иманбаев Н.С.</i> Характеристический определитель спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с интегральным возмущением краевого условия антипериодического типа	2	68
<i>Зенков А.В.</i> О многообразиях m -групп с тождеством $x_*^n = x^{-n}$	2	63
<i>Зенков А.В.</i> Представления и сплетения m -группы	4	63
<i>Кабенов Д., Муратхан Р., Голенков В.</i> Методы создания интеллектуальной системы оценки знаний обучающихся на естественном языке	4	70
<i>Космакова М.Т.</i> Об интегральном уравнении задачи Дирихле для уравнения теплопроводности в вырождающейся области	1	62
<i>Космакова М.Т., Рамазанов М.И., Токешева А.С., Хайркулова А.А.</i> О неединственности решения однородной краевой задачи для уравнения теплопроводности в угловой области	4	80
<i>Култешов Б.Ш., Судоплатов С.В.</i> О поведении 2-формул в теориях с немаксимальным числом счетных моделей	1	68

<i>Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А.</i> О приводимости линейной D_e -системы с постоянными на диагонали коэффициентами к D_e -системе с жордановой матрицей в случае эквивалентности ее одному уравнению высшего порядка	4	88
<i>Кусаинова Л., Мырзагалиева А.</i> О мультипликаторах в весовых пространствах Соболева. Часть I	2	74
<i>Макажанова Т.Х., Муканов А.А.</i> О собственных множествах суперлинейных отображений	2	84
<i>Минглибаев М.Д., Маемерова Г.М., Иманова Ж.У.</i> Вековые возмущения в задаче трех тел с массами, изменяющимися неизотропно в различных темпах	4	94
<i>Мирзакулова А.Е., Атахан Н.</i> Построение решения краевой задачи для интегродифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных ...	4	99
<i>Муратбеков М.Б., Игисинов С.Ж., Шыракбаев А.Б.</i> О разделимости дифференциального оператора неклассического типа, заданного в неограниченной области	2	95
<i>Мусин А.Т.</i> Канонизация репера комплекса прямых трехмерного флагового пространства	4	104
<i>Мырзагалиева А.</i> О мультипликаторах в весовых пространствах Соболева. Часть II	1	89
<i>Назарова К.Ж.</i> Существование изолированного решения нелинейной двухточечной краевой задачи и ее свойства	1	51
<i>Орумбаева Н.Т.</i> Об алгоритмах нахождения решения начально-краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных	2	107
<i>Романьков В.А.</i> Полиномиальный алгоритм для основанной на косах системы шифрования с открытым ключом двойного щита	4	110
<i>Сагиндыков К.М., Мусайф Г.</i> Использование сети Петри для оценки систем защиты информации	3	70
<i>Судоплатов С.В.</i> Об отделимости элементов и множеств в гиперграфах моделей теории	2	113
<i>Султанов М.А., Баканов Г.Б., Светов И.Е., Устемирова Б.Б.</i> Численный алгоритм решения обратной задачи определения зоны малой проницаемости	4	116
<i>Султанов М.А., Кошанова М.Д., Устемирова Б.Б.</i> О некорректности обратной задачи численного обращения одномерной свертки	4	124
<i>Тасмамбетов Ж.Н.</i> О построении решения уравнения Матъе методом Фробениуса-Латышевой	3	76
<i>Төлеугазы Е.</i> Теоремы вложения, теоремы о следах и продолжении для анизотропных пространств Никольского-Бесова $B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)$	4	146
<i>Тулеева Р.У.</i> Численное моделирование решения одномерных задач термоупругости при наличии теплового потока, меняющегося по координате линейным и нелинейным законами	3	87
<i>Турметов Б.Х., Усманов К.И.</i> О разрешимости одной внешней краевой задачи с граничным оператором дробного порядка	4	139

<i>Турысбекова У.К., Азиева Г.Т.</i> Квадратичные алгебры Пуассона на $k[x, y, z]$ и их автоморфизмы	4	131
<i>Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т.</i> О существовании и единственности сильного решения антипедагогической задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом	1	83
<i>Шаяхметова Б.К., Антипов Ю.Н.</i> Структурализация категорий педагогической науки «знание» в процессе информатизации общества	1	76
<i>Шульгина-Таращук А.С., Толеуханова Р.Ж.</i> Поиск решения транспортной задачи средствами программного обеспечения	1	93

**Index of articles published
in the «Bulletin of the Karaganda University» in 2016 y.
«Mathematics» Series**

No. p.

MATHEMATICS

<i>Akischev G.</i> The estimates bilinear of approximations functions in the space Lorentz	1	7
<i>Akysh A.Sh.</i> The simplest maximum principle for Navier–Stokes equations	3	8
<i>Assanova A.T., Imanchiev A.E.</i> On the solvability of a nonlocal boundary value problem for a loaded hyperbolic equations with multi-point conditions	1	15
<i>Ahanova A.S., Yessenbayeva G.A., Tursyngaliyev N.K.</i> On the calculation of plates by the series representation of the deflection function	2	15
<i>Ashirbayev N.K., Ashirbayeva Zh.N., Altynbekov Sh.E., Shomanbayeva M.T.</i> Features distribution of dynamic perturbations in an elastic multisupport construction	2	8
<i>Bakirova E.A., Iskakova N.B.</i> An approach to the choice of the initial approximation of the solution of nonlinear boundary value problem for loaded differential equations	4	8
<i>Baituyakova Zh.Zh.</i> On a necessary condition for a function of periodic generalized Nikol'sky–Besov–Morrey space in terms of strong summability of Fourier series	3	13
<i>Bimendina A.U.</i> Sufficient condition of embedding in the Lorentz space	3	20
<i>Bitimkhan S.</i> Absolute summability of Fourier series of function from Besov's classes . . .	3	28
<i>Buketov A.V., Kravtsova L.V., Bogdan A.P.</i> Prediction of fracture samples of composite materials under the influence of cyclic loading	4	21
<i>Bokayev N.A., Burenkov V.I., Matin D.T.</i> Sufficient conditions for pre-compactness of sets in the generalized Morrey spaces	4	18
<i>Burenkov V.I., Kydyrmina N.A.</i> Sobolev Embedding Theorem for the Sobolev-Morrey spaces	3	32
<i>Vikent'ev A.A.</i> Study of model distances on logical statements based on expert interpretation of the formulas of many-valued logics of Lukasiewicz and automatic clustering of knowledge bases. I	2	23
<i>Vikent'ev A.A.</i> Study of model distances on logical statements based on expert interpretation of the formulas of many-valued logics of Lukasiewicz and automatic clustering of knowledge bases. II	2	32
<i>Vikent'ev A.A., Avilov M.</i> New comprehensive metrics and nontrivial steps to formulas multi-valued logic in the automatic clustering of logical formulas Knowledge Base. I	3	41
<i>Vikent'ev A.A., Avilov M.</i> New comprehensive metrics and nontrivial steps to formulas multi-valued logic in the automatic clustering of logical formulas Knowledge Base. II . . .	3	46
<i>Vikentev A.A., Ivanov V.V.</i> Methods of recognition in the space of knowledge	1	26
<i>Jenaliyev M.T., Zhamalova Zh.T., Ramazanov M.I.</i> On a boundary value problem in a degenerate region with a boundary moving in a self-similar laws	1	46

<i>Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I., Zhanbolova A.K.</i> The solution of the singular Volterra integral equation of the thermal problem with a uniformly moving boundary	2	40
<i>Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M.</i> Bounded solution on the strip to a system of nonlinear hyperbolic equations with mixed derivatives	4	35
<i>Dildabek G., Tengayeva A.A.</i> Existence of eigenvalues of problem with shift for an equation of parabolic-hyperbolic type	2	48
<i>Yesbayev A.N., Yessenbayeva G.A.</i> On the integral equation of the boundary value problem for the essentially loaded differential heat operator	3	62
<i>Yesbayev A.N., Yessenbayeva G.A., Ivanov I.A.</i> On the boundary value problem for the vibration and wave processes in two-dimensional environs	3	55
<i>Yessenbayeva G.A., Smailova A.A.</i> On the calculation of rectangular plates by the variation method	2	56
<i>Yeskermessuly A.</i> Investigation of the deficiency indices of the minimum two-term fourth-order differential operator with irregular coefficients	4	46
<i>Yesmagambet N.A.</i> Implementation GStreamer framework with face detection system for Unmanned Aerial Vehicle	2	121
<i>Yesmagambet N.A., Antipov Yu.N.</i> Development recognition system for Unmanned Aerial Vehicle	2	128
<i>Yeshkeyev A.R.</i> Existential prime convex Jonsson theories and their models	1	41
<i>Yeshkeyev A.R.</i> The similarity of closures of Jonsson sets	1	35
<i>Yeshkeyev A.R.</i> Some properties of Morly rank over Jonsson sets	4	57
<i>Yeshkeyev A.R.</i> The property of independence for Jonsson sets	4	52
<i>Imanbaev N.S.</i> Characteristic determinant of the spectral problem for the Sturm-Liouville operator with the perturbed boundary value conditions	2	68
<i>Zenkov A.V.</i> Varieties with $x_*^n = x^{-n}$ identity m -groups	2	63
<i>Zenkov A.V.</i> Views and plexus m -group	4	63
<i>Kabenov D., Muratkhan R., Golenkov V.</i> Methods of creation of intellectual knowledge evaluation system, students in natural language	4	70
<i>Kosmakova M.T.</i> On an integral equation of the Dirichlet problem for the heat equation in the degenerating domain	1	62
<i>Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Tokesheva A.S., Khairkulova A.A.</i> On the non-uniqueness of solution to the homogeneous boundary value problem for the heat conduction equation in an angular domain	4	80
<i>Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V.</i> On behaviour of 2-formulas in theories with non-maximal number of countable models	1	68
<i>Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A.</i> On reducibility of linear D_e -system with constant coefficients on the diagonal to D_e -system with Jordan matrix in the case of equivalence of its higher order one equation	4	88
<i>Kussainova L., Myrzagaliyeva A.</i> On multipliers in weighted Sobolev spaces. Part I	2	74
<i>Makazhanova T.Kh., Mukanov A.A.</i> About their own sets of superlinear mappings	2	84

<i>Minglibayev M.Zh., Mayemerova G.M., Imanova Zh.U.</i> Secular perturbations in the three-body problem with masses changing non-isotropically at the different rates ...	4	94
<i>Mirzakulova A.E., Atakhan N.</i> Construction of the solution of the boundary value problem for integro differential equation with a small parameter in the highest derivatives	4	99
<i>Musin A.T.</i> Canonisation reper of complex of lines of three-dimensional flag space ..	4	104
<i>Muratbekov M.B., Iginov S.J., Shyrakbaev A.B.</i> On separability of non-classical type differential operator in an unbounded domain	2	95
<i>Myrzagaliyeva A.</i> On multipliers in weighted Sobolev spaces. Part II	2	89
<i>Nazarova K.Zh.</i> The existence of isolated solutions of nonlinear two-point boundary value problem and their properties	1	51
<i>Orumbayeva N.T.</i> Algorithms for finding a solution to the initial boundary value problems for differential equations in partial derivatives	2	107
<i>Roman'kov V.A.</i> A polynomial algorithm for the braid double shielded public key cryptosystems	4	110
<i>Sagindykov K.M., Mussaif G.</i> The use of Petri nets for the evaluation of information security systems	3	70
<i>Sudoplatov S.V.</i> On the separability of elements and sets in hypergraphs of models of a theory	2	113
<i>Sultanov M.A., Bakanov G.B., Svetov I.E., Ustemirova B.B.</i> A numerical algorithm for solving the inverse problem of determining the low permeability zone	4	124
<i>Sultanov M.A., Koshanova M.D., Ustemirova B.B.</i> On ill-posedness of the numerical inversion inverse problem of one-dimensional convolution	4	116
<i>Tasmambetov Zh.N.</i> On the construction of solutions of the Mathieu equation by Frobenius-Latsysheva method	3	76
<i>Toleugazy Ye.</i> Embedding theorems, theorems of a trace and approach for anisotropic $B_{pr}^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)$ Nikol'skii-Besov spaces	4	146
<i>Tuleuova R.U.</i> Numerical simulation of one-dimensional problems of termoelasticity in the presence of heat flux, changing the coordinate linear and non-linear laws	3	87
<i>Turmetov B.Kh., Usmanov K.I.</i> On solvability of exterior boundary value problem with boundary operators of fractional order	4	139
<i>Turusbekova U.K., Azieva G.T.</i> Quadratic poisson algebras on $k[x, y, z]$ and their automorphisms	4	131
<i>Shaldanbayev A.Sh., Shomanbayeva M.T.</i> About the existence and uniqueness of strong solution of the antiperiodic problem for the heat equation with deviating argument .	1	83
<i>Shayakhmetova B.K., Antipov Yu.N.</i> Structuralization of categories of the sknowledge i pedagogical science in Process of informatization of the society	1	76
<i>Shulgina-Tarachshuk A.S., Toleuhanova R.Zh.</i> Search of the solution of a transport task by means of the software	3	93