УДК 510.67

Б.Ш. Кулпешов[1], С.В. Судоплатов[2]

[1]*Международный университет информационных технологий,*
Институт математики и математического моделирования, Алматы;
[2]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,*
Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирский государственный университет, Россия,
Институт математики и математического моделирования, Алматы
(E-mail: b.kulpeshov@iitu.kz)

О поведении 2-формул в упорядоченных теориях с немаксимальным числом счетных моделей

В статье исследованы линейно упорядоченные теории, являющиеся слабо o-минимальными. В частности, рассмотрены теории, имеющие немаксимальный счетный спектр. Изучены двухместные формулы, чьи множества решений лежат собственно во множестве реализаций неалгебраического типа. Исследовано влияние поведения таких формул на число счетных попарно неизоморфных моделей. Доказано, что каждая такая формула порождает отношение эквивалентности.

Ключевые слова: слабая o-минимальность, счетная модель, ранг выпуклости, отношение эквивалентности.

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду в данной статье мы рассматриваем L структуры и предполагаем, что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. Настоящая работа касается понятия *слабой o-минимальности*, первоначально глубоко исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз, когда $a < c < b$, мы имеем $c \in A$. *Слабо o-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вещественно-замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо o-минимальных структур.

Определение 1 [2]. Пусть M — слабо o-минимальная структура, $A \subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические. Будем говорить что тип p не является *слабо ортогональным* типу q ($p \not\perp^w q$), если существуют A-определимая формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.

Лемма 2 ([2], Corollary 34 (iii)). Отношение неслабой ортогональности $\not\perp^w$ является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.

Пусть A, B — произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M. Тогда выражение $A < B$ означает, что $a < b$ всякий раз, когда $a \in A$ и $b \in B$. Выражение $A < b$ (соответственно $b < A$) означает, что $A < \{b\}$ ($\{b\} < A$). Для произвольного типа p мы обозначаем через $p(M)$ множество реализаций типа p в M. Будем говорить, что теория T имеет 2^ω *(менее чем 2^ω) счетных моделей*, если T имеет 2^ω (менее чем 2^ω) счетных попарно неизоморфных моделей.

В настоящей работе исследуется поведение 2-формул, так называемых p-стабильных выпуклых вправо (влево) формул, чьи множества решений собственно лежат во множестве реализаций неалгебраического типа $p \in S_1(\emptyset)$, и доказывается, что каждая из таких формул порождает отношение эквивалентности (т.е. является *эквивалентность-генерирующей*) в слабо o-минимальной теории, имеющей менее чем 2^ω счетных моделей (теорема 10). Также доказывается, что бинарный ранг выпуклости произвольного неалгебраического $p \in S_1(\emptyset)$ конечен (предложение 14), т.е. существует лишь конечное число $\emptyset$-определимых вложенных отношений эквивалентности, разбивающих множество реализаций типа p на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Пример 3. Рассмотрим известный пример Эренфойхта: $M = \langle \mathbb{Q}, <, c_k \rangle_{k\in\omega}$, где $c_k < c_{k+1}$ для каждого $k \in \omega$ и $\lim_{k\to\infty} c_k = \infty$. Рассмотрим тип $p(x)$, замкнутый относительно выводимости и изолируемый множеством формул $\{c_k < x \mid k \in \omega\}$. Очевидно, что $p \in S_1(\emptyset)$ и p — неглавный тип. Как известно, $\mathrm{Th}(M)$ имеет в точности 3 счетные модели: первый случай — тип p не реализуется; второй случай — существует счетная модель $N \succ M$ такая, что $p(N)$ имеет порядковый тип $[0,1)\cap\mathbb{Q}$; третий случай — существует счетная модель $N \succ M$ такая, что $p(N)$ имеет порядковый тип $(0,1)\cap\mathbb{Q}$. Также может быть доказано, что M — о-минимальная структура.

Обогатим данную теорию новым отношением (бинарным предикатом) $U(x,y)$ следующим образом: пусть $M' = \langle \mathbb{Q}, <, c_k, U^2 \rangle_{k\in\omega}$, где для любого $a \in \mathbb{Q}$

$$U(a, M') = \{b \in \mathbb{Q} \mid a \le b < a + \sqrt{2}\}.$$

Тогда очевидно, что $U(a, M')$ выпукло и для любого $b \in \mathbb{Q}$

$$U(M, b) = \{a \in \mathbb{Q} \mid b - \sqrt{2} < a \le b\}.$$

Рассмотрим следующие формулы:

$$U_0(x,y) := x = y, \quad U_1(x,y) := U(x,y),$$

$$U_2(x,y) := \exists t (U(x,t) \wedge U(t,y)),$$

$$U_n(x,y) := \exists t (U_{n-1}(x,t) \wedge U(t,y)), \quad n \ge 3.$$

Очевидно, что для любого $a \in M'$

$$U(a, M') \subset U_2(a, M') \subset \ldots \subset U_n(a, M') \subset \ldots$$

Может быть доказано, что M' — слабо о-минимальная структура. Также очевидно, что M' не является о-минимальной, поскольку $\{a\}$-определимое множество $U(a, M')$ не имеет правой концевой точки в M', т.е. не является интервалом в M'.

Рассмотрим тип $p'(x)$, замкнутый относительно выводимости и изолируемый множеством формул $\{c_k < x \wedge \neg U(c_k, x) \mid k \in \omega\}$. Очевидно, что $p' \in S_1(\emptyset)$ и p' — неглавный тип. Утверждаем, что $\mathrm{Th}(M')$ имеет 2^ω счетных моделей. Действительно, *U-компоненты* (т.е. компоненты связности, определяемые бинарным отношением U в виде объединения формульных множеств $U_n(a, N) \cup \cup U_n(N, a)$ по всем $n \in \omega$) образуют выпуклые множества, имеющие бесконечный диаметр и линейно упорядоченные отношением $<$. При этом модель M' имеет единственную U-компоненту, и, по компактности, в моделях теории $\mathrm{Th}(M')$ всегда имеются наименьшие U-компоненты. Число таких компонент неограничено, и располагаться эти компоненты могут и дискретно, и плотно. Рассматривая пары U-компонент $P_i = (C_i, C'_i)$, $i \in \omega$, между которыми нет промежуточных, и варьируя наличие или отсутствие плотных вставок (состоящих из плотно упорядоченных U-компонент) между P_i и P_{i+1}, получаем 2^ω счетных моделей.

Приведенное рассуждение показывает, что процесс построения неизоморфных счетных моделей теории $\mathrm{Th}(M')$ подобен аналогичному процессу для теории $\mathrm{Th}(\langle \omega; < \rangle)$ и состоит в варьировании компонент: в первом случае U-компонент, а во втором — дискретных $<$-компонент. При этом каждая счетная модель $\overline{M}$ строится за счет наращивания числа компонент, т.е. представляется в виде объединения элементарной цепи простых над кортежами моделей, каждая из которых содержит конечное число компонент. Если суммарное число компонент конечно, то $\overline{M}$ является снова простой моделью над некоторым конечным множеством A (в которое достаточно поместить по одному элементу из каждой компоненты), а если число компонент бесконечно, то модель $\overline{M}$ является *предельной* [3, 4], т.е. представляется в виде объединения элементарной цепи простых над кортежами моделей и не изоморфна никакой простой модели над кортежем.

Пример 4. Вернемся снова к примеру Эренфойхта. Заменим каждый элемент $a \in M$ копией множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и определим новое бинарное отношение $E(x, y)$ следующим образом: для любых $a_1 = (m_1, n_1), a_2 = (m_2, n_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $E(a_1, a_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

В результате получим структуру $M'' = \langle \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, <, c_k, E^2 \rangle_{k \in \omega}$. Отношение $E(x, y)$ является отношением эквивалентности, разбивающим M'' на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что индуцированный порядок на E-классах является плотным порядком без концевых точек.

В качестве d_k определим произвольный элемент множества $\{q \in M'' \mid q = (c_k, n)$ для некоторого $n \in \mathbb{Q}\}$. Тогда также имеем, что $\lim_{k \to \infty} d_k = \infty$.

Кроме того, может быть доказано, что M'' — слабо о-минимальная структура. Также очевидно, что M'' не является о-минимальной, поскольку $\{a\}$-определимое множество $E(a, M'')$ не имеет ни левой концевой точки, ни правой концевой точки в M'', т.е. не является интервалом в M''.

Рассмотрим тип $p''(x)$, замкнутый относительно выводимости и изолируемый множеством формул $\{d_k < x \wedge \neg E(d_k, x) \mid k \in \omega\}$. Очевидно, что $p'' \in S_1(\emptyset)$ и p'' — неглавный тип. Утверждаем, что $\mathrm{Th}(M'')$ имеет 3 счетные модели: первый случай — тип p'' не реализуется; второй и третий случаи — тип p'' реализуется бесконечным числом бесконечных выпуклых E-классов, так что в одном случае индуцированный порядок на E-классах имеет порядковый тип $[0, 1) \cap \mathbb{Q}$, а в другом — порядковый тип $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Определение 5 [5]. Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщенна, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический.

(1) A-определимая формула $F(x, y)$ называется *p-стабильной*, если существуют α, γ_1, $\gamma_2 \in$ $\in p(M)$ такие, что $F(M, \alpha) \setminus \{\alpha\} \neq \emptyset$ и $\gamma_1 < F(M, \alpha) < \gamma_2$.

(2) p-стабильная формула $F(x, y)$ называется *выпуклой вправо (влево)*, если существует $\alpha \in p(M)$ такой, что $F(M, \alpha)$ выпукло, α — левая (правая) концевая точка множества $F(M, \alpha)$ и $\alpha \in F(M, \alpha)$.

Пусть $F_1(x, y), F_2(x, y)$ — p-стабильные выпуклые вправо (влево) формулы. Будем говорить, что $F_2(x, y)$ *больше, чем* $F_1(x, y)$, если существует $\alpha \in p(M)$ такой, что $F_1(M, \alpha) \subset F_2(M, \alpha)$.

Определение 6 [6]. Будем говорить, что p–стабильная выпуклая вправо (влево) формула $F(x, y)$ является *эквивалентность-генерирующей*, если для любых $\alpha, \beta \in p(M)$, таких что

$$M \models F(\beta, \alpha),$$

имеет место

$$M \models \forall x (x \geq \beta \to (F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta))) \quad (M \models \forall x (x \leq \beta \to (F(x, \alpha) \leftrightarrow F(x, \beta)))) .$$

Так, в примере 3 формула $F'(x, y) := U(y, x)$ является p'-стабильной выпуклой вправо и не является эквивалентность-генерирующей. В то же времяв примере 4 формула $F''(x, y) :=$ $E(x, y) \wedge y \leq x$ является p''-стабильной выпуклой вправо и эквивалентность-генерирующей.

Лемма 7 [6]. Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщенна, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический, $F(x, y)$ — p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула. Предположим, что $F(x, y)$ не является эквивалентность-генерирующей. Тогда существуют $\alpha, \beta \in p(M)$ такие, что

$$M \models F(\beta, \alpha) \wedge \exists x (\neg F(x, \alpha) \wedge F(x, \beta)).$$

Лемма 8 [6]. Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщенна, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический, $F(x, y)$ — p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула. Тогда формула

$$F'(x, y) := \exists z (F(z, y) \wedge F(x, z))$$

также является p–стабильной выпуклой вправо (влево).

Лемма 9 [6]. Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический, M — $|A|^+$–насыщенна. Предположим, что $F(x, y)$ — p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула, являющаяся эквивалентность-генерирующей. Тогда:

1) $G(x,y) := F(y,x)$ — p-стабильная выпуклая влево (вправо) формула, являющаяся также эквивалентность-генерирующей;

2) $E(x,y) := F(x,y) \vee F(y,x)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Теорема 10. Пусть T — слабо о-минимальная теория, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический. Тогда любая p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула является эквивалентность-генерирующей.

Доказательство теоремы 10. Допустим противное: существует p-стабильная выпуклая вправо формула $F(x,y)$, не являющаяся эквивалентность-генерирующей. Тогда по лемме 7 в некоторой модели M теории T существуют $\alpha, \beta \in p(M)$ такие, что

$$M \models F(\beta,\alpha) \wedge \exists x(\neg F(x,\alpha) \wedge F(x,\beta)).$$

Рассмотрим следующую формулу:

$$F_1(x,y) := \exists z(F(z,y) \wedge F(x,z)).$$

В силу леммы 8 $F_1(x,y)$ также является p-стабильной, выпуклой вправо формулой. Определим следующие формулы:

$$F_n(x,y) := \exists z(F_{n-1}(z,y) \wedge F(x,z)), \quad n \geq 2.$$

Тогда нетрудно понять, что для любого $\alpha \in p(M)$

$$F_1(M,\alpha) \subset F_2(M,\alpha) \subset \ldots \subset F_n(M,\alpha) \subset ....$$

Рассмотрим следующее множество формул: $p(x) \cup \{x > \alpha\} \cup \{\neg F_i(x,\alpha) \mid i \in \omega\}$. Оно локально совместно и расширяется до неглавного типа $p' \in S_1(\{\alpha\})$.

Утверждаем, что $T(\alpha)$ (где $T(\alpha)$ получается из T добавлением константы для α в сигнатуру), а следовательно, и T, имеет 2^ω счетных моделей (см. рассуждения к примеру 3), что противоречит условиям теоремы.

Следствие 11. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический. Предположим что существует p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула, не являющаяся эквивалентность-генерирующей. Тогда T имеет 2^ω счетных моделей.

Пример 12. Пусть $M = \langle \mathbb{Q}, <, E_i^2 \rangle_{i \in \omega}$ — структура плотного линейного порядка на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$, обогащенная отношениями эквивалентности E_i, $i \in \omega$, на множестве $\mathbb{Q}$, где каждый E_i-класс состоит из бесконечного числа выпуклых открытых E_{i+1}-классов, плотно упорядоченных между собой.

Может быть доказано, что M — слабо о-минимальная структура. Также очевидно, что M не является о-минимальной, поскольку $\{a\}$-определимое множество $E_i(a,M)$ не является интервалом в M.

Выберем из модели M произвольный элемент a. Обозначим через $p(x,a)$ неглавный полный 1-тип из $S(a)$, изолируемый множеством формул $\{x < a\} \cup \{E_i(a,x) \mid i \in \omega\}$. В силу плотности порядка тип $p(x,a)$ либо не имеет реализаций, либо множество его реализаций бесконечно и образует интервал. Таким образом, с каждым элементом a связывается либо пустое множество, либо интервал. Добавляя к этим множествам определяющие их элементы a, получаем либо одноэлементные множества X_a, либо интервалы Y_a с правым концом. Рассматривая модели, в которых чередуются множества X_a с интервалами Y_a, получаем максимальное число неизоморфных счетных моделей. Действительно, составляя начальный отрезок O из множеств X_a и затем перемежая различное конечное количество множеств Y_a с копиями отрезка O, получаем 2^ω вариантов для попарно неизоморфных счетных моделей.

Ранее было введено определение ранга выпуклости одноместной формулы, играющее существенную роль при изучении свойств слабо о-минимальных теорий.

Определение 13 [7]. Пусть T — слабо о-минимальная теория, M — достаточно насыщенная модель теории T, и пусть $\phi(x)$ — произвольная M-определимая формула с одной свободной переменной. *Ранг выпуклости формулы* $\phi(x)$ ($RC(\phi(x))$) определяется следующим образом:

1) $RC(\phi(x)) \geq 1$, если $\phi(M)$ бесконечно;

2) $RC(\phi(x)) \geq \alpha+1$, если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$ и бесконечная последовательность элементов $b_i, i \in \omega$ такие, что:

• для любых $i, j \in \omega$ всякий раз, когда $i \neq j$, мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$;

• для каждого $i \in \omega$ $RC(E(x,b_i)) \geq \alpha$ и $E(M,b_i)$ — выпуклое подмножество множества $\phi(M)$;

3) $RC(\phi(x)) \geq \delta$, если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех $\alpha < \delta$ (δ предельный).

Если $RC(\phi(x)) = \alpha$ для некоторого α, то мы говорим что $RC(\phi(x))$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех α) мы полагаем $RC(\phi(x)) = \infty$.

В частности, теория имеет ранг выпуклости 1, если не существует определимого (с параметрами) отношения эквивалентности с бесконечным числом бесконечных выпуклых классов. Очевидно, что любая о-минимальная теория имеет ранг выпуклости 1.

Рангом выпуклости 1*-типа* p ($RC(p)$) называется инфимум множества $\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$, т.е. $RC(p) := \inf\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$.

Ранг выпуклости произвольной одноместной формулы $\phi(x)$ назовем *бинарным* и будем обозначать через $RC_{bin}(\phi(x))$, если в определении 13 параметрически определимые отношения эквивалентности заменим на $\emptyset$-определимые (т.е. бинарные) отношения эквивалентности.

Предложение 14. Пусть T — слабо о-минимальная теория, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический. Тогда $RC_{bin}(p) < \omega$.

Доказательство предложения 14. Допустим противное: $RC_{bin}(p) \geq \omega$. Тогда существует бесконечное число $\emptyset$-определимых отношений эквивалентности $\{E_i(x,y) \mid i \in \omega\}$ такое, что либо для любого $a \in p(M)$

$$E_1(a,M) \subset E_2(a,M) \subset \ldots \subset E_i(a,M) \subset \ldots,$$

либо для любого $a \in p(M)$

$$E_1(a,M) \supset E_2(a,M) \supset \ldots \supset E_i(a,M) \supset \ldots$$

В первом случае рассмотрим следующее множество формул:

$$p(x) \cup \{x > a\} \cup \{\neg E_i(a,x) \mid i \in \omega\},$$

а во втором случае —

$$p(x) \cup \{x > a\} \cup \{E_i(a,x) \mid i \in \omega\}.$$

Тогда существуют $p', p'' \in S_1(\{a\})$, расширяющие эти множества соответственно, и p', p'' неглавные. Утверждаем, что $T(a)$ (во втором случае см. рассуждения к примеру 12), а следовательно, и T, имеет 2^ω счетных моделей, что противоречит условиям предложения.

Пусть $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический, $n \in \omega$. Мы говорим, что кортеж $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \in M^n$ является *возрастающим*, если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Мы говорим, что $p(M)$ является *n-неразличимым над* A, если для любых возрастающих n-кортежей $\bar{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$, $\bar{a}' = \langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\rangle \in [p(M)]^n$ $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{a}'/A)$. Также мы говорим, что $p(M)$ является *неразличимым над* A, если для каждого $n \in \omega$ $p(M)$ является n-неразличимым над A.

Предложение 15. Пусть T — слабо о-минимальная теория, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический, $RC(p) = 1$. Тогда $p(M)$ неразличимо над $\emptyset$.

Доказательство предложения 15. Очевидно, что $p(M)$ — 1-неразличимо над $\emptyset$. Покажем, что для каждого натурального $n \geq 2$ $p(M)$ — n-неразличимо над $\emptyset$. Допустим противное: существуют возрастающие кортежи $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$, $\langle a_1', \ldots, a_n'\rangle \in [p(M)]^n$ такие, что

$$tp(\langle a_1, \ldots, a_n\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle a_1', \ldots, a_n'\rangle/\emptyset)$$

и n-минимальное с таким свойством.

В силу минимальности n, $tp(\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle/\emptyset) = tp(\langle a_1', \ldots, a_{n-1}'\rangle/\emptyset)$. Тогда нетрудно понять, что существует $a_n'' \in p(M)$ такой, что $a_{n-1} < a_n''$ и $tp(\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\rangle/\emptyset) \neq tp(\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n''\rangle/\emptyset)$. Следовательно, существует $\emptyset$-определимая формула $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что

$$M \models \phi(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \wedge \neg\phi(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n'').$$

Также в силу минимальности n множество $\{b \in p(M) \mid b > a_{n-2}\}$ является 1-неразличимым над $\{a_1, \ldots, a_{n-2}\}$.

Пусть $p_0(x) := \{x > a_{n-2}\} \cup p(x)$. Тогда $p_0 \in S_1(\{a_1, \ldots, a_{n-2}\})$, $a_{n-1}, a_n, a_n'' \in p_0(M)$.

В силу слабой о-минимальности можно считать, что $\phi(a_1, \ldots, a_{n-1}, M)$ выпукло. Не умаляя общности, предположим, что $a_n < a_n''$. Тогда рассмотрим формулу

$$F(x, a_{n-1}) := x \geq a_{n-1} \wedge \exists y[\phi(a_1, \ldots, a_{n-1}, y) \wedge x \leq y].$$

Нетрудно понять, что $F(x, y)$ — p_0-стабильная выпуклая вправо. Если $F(x, y)$ является эквивалентность-генерирующей, то получаем противоречие с тем, что $RC(p) = 1$. Если же $F(x, y)$ не является эквивалентность-генерирующей, то получаем противоречие с теоремой 10.

Определение 16 [8]. Тип $p \in S_1(\emptyset)$ называется *простым*, если для всех $n \in \omega$ всякий раз, когда $f(x_1, \ldots, x_n)$ — нетривиальная $\emptyset$-определимая n-местная функция и $a_1, \ldots, a_n$ — реализации типа p, то $f(a_1, \ldots, a_n)$ не является реализацией типа p.

Следствие 17. Пусть T — слабо о-минимальная теория, имеющая менее чем 2^ω счетных моделей. Предположим, что T — бинарная или T имеет ранг выпуклости 1. Тогда любой неалгебраический тип $p \in S_1(\emptyset)$ является простым.

Доказательство следствия 17. Если T имеет ранг выпуклости 1, то заключение следует из предложения 15. Предположим что T — бинарная. Тогда достаточно показать что в любой модели $M \models T$ не существует $\emptyset$-определимой функции f такой, что для некоторого $a \in p(M)$ $f(a) \in p(M)$. Допустим противное: такая функция f существует. Не умаляя общности, предположим, что $a < f(a)$. Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$F(x, a) := a \leq x \leq f(a).$$

Утверждаем, что $F(x, y)$ — p-стабильная выпуклая вправо формула, не являющаяся эквивалентность генерирующей, что противоречит теореме 10.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант №0830/ГФ4.

Список литературы

1 *Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn C.* Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society. — 2000. — Vol. 352. — P. 5435–5483.

2 *Baizhanov B.S.* Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic. — 2001. — Vol. 66. — P. 1382–1414.

3 *Судоплатов С.В.* Гиперграфы простых моделей и распределения счетных моделей малых теорий // Фундаментальная и прикладная математика. — 2009. — Т. 15. — № 7. — С. 179–203.

4 *Судоплатов С.В.* Классификация счетных моделей полных теорий. Ч. 2. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. — 448 с.

5 *Baizhanov B.S.* One-types in weakly o-minimal theories // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute. — Almaty, 1996. — P. 75–88.

6 *Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh.* On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference / Eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono. — Singapore: World Scientific, 2006. — P. 31–40.

7 *Kulpeshov B.Sh.* Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic. — 1998. — Vol. 63. — P. 1511–1528.

8 *Mayer L.L.* Vaught's conjecture for o-minimal theories // The Journal of Symbolic Logic. — 1988. — Vol. 53. — P. 146–159.

Б.Ш.Кулпешов, С.В.Судоплатов

Есептік модельдердің саны максималды емес реттелген теорияларында 2-формулалардың құрылу тәртібі туралы

Мақалада босаң о-минималды болатын сызықтық реттелген теориялар зертелді. Атап айтқанда, есептік спектрі максималды емес теориялар қарастырылды. Алгебрасыз типтің орындалулар жиынына жататын шешім жиындардың екі-орындық формулалары алынып, сонымен қатар есептік қоса изоморфік емес саны осы формулалар құрылу тәртібінің әсері зерттелді. Кез келген осындай формуласы бар эквиваленттік қатынасты туғызатындығы дәлелденді.

B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov

On behaviour of 2-formulas in ordered theories with non-maximal number of countable models

Here linearly ordered theories being weakly o-minimal are studied. In particular, theories having a non-maximal countable spectrum are considered. Two-place formulas of which the sets of solutions lie in the set of realizations of a non-algebraic type are studied. An influence of behavior of such formulas on the number of countable pairwise non-isomorphic models has been investigated. We prove that each such formula generates an equivalence relation.

References

1 Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn C. *Transactions of The American Mathematical Society*, 2000, 352, p. 5435–5483.

2 Baizhanov B.S. *The Journal of Symbolic Logic*, 2001, 66, p. 1382–1414.

3 Sudoplatov S.V. *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, 169, 5, p. 680–695.

4 Sudoplatov S.V. *Classification of Countable Models of Complete Theories. Part* 2, Novosibirsk: NSTU, 2014, 448 p.

5 Baizhanov B.S. *Proceedings of Informatics and Control Problems Institute*, Almaty, 1996, p. 75–88.

6 Baizhanov B.S., Kulpeshov B. Sh. *Mathematical Logic in Asia*, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference / Eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono, Singapore: World Scientific, 2006, p. 31–40.

7 Kulpeshov B.Sh. *The Journal of Symbolic Logic*, 1998, 63, p. 1511–1528.

8 Mayer L.L. *The Journal of Symbolic Logic*, 1988, 53, p. 146–159.