УДК 517.96

Б.Т.Калимбетов, Д.А.Сапаков

Международный казахско-турецкий университет им.Х.А.Ясави, Туркестан
(E-mail: bkalimbetov@mail.ru)

Асимптотика решения сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системы с параметрическим усилением

В статье рассмотрена начальная задача для сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системы с быстро осциллирующими коэффициентами. Для асимптотического интегрирования исходной задачи предлагается некоторая модификация метода регуляризации С.А.Ломова. Сущность модификации состоит во введении, наряду с дополнительными независимыми переменными, связанными с быстро осциллирующими коэффициентами, переменных, учитывающих существенно особые сингулярности, которые участвуют в решении исходной задачи. Обоснована процедура построения главного члена асимптотики задачи, который при отсутствии интегрального члена совпадает с главным членом асимптотики решения дифференциальной системы.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, быстро осциллирующий коэффициент, регуляризация, итерационная задача, главный член асимптотики.

При исследовании различных вопросов динамической устойчивости, а также свойств сред с периодической структурой и в других прикладных задачах встречаются дифференциальные уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами. Известно, что для построения асимптотических решений дифференциальных систем уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами обычно используют метод расщепления дифференциальных уравнений [1–4] и метод регуляризации [5–7]. В настоящей работе рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. Основная цель исследования заключается в обосновании влияния интегрального члена на главный член асимптотики решения исходной задачи. Также следует отметить, что рассматривается случай отсутствия резонанса, т.е. частота быстро осциллирующего коэффициента не связана со спектром предельного оператора.

Рассмотрим задачу Коши для системы второго порядка

$$\varepsilon\frac{dz(t,\varepsilon)}{dt}=A(t)z+\varepsilon\varphi(t)\cos\frac{2\beta(t)}{\varepsilon}Bz+\int_{t_0}^{t}k(s)z(s,\varepsilon)ds+h(t),\ z(t_0,\varepsilon)=z^0,\ \ t\in[t_0,T],\qquad(1)$$

где $z(t,\varepsilon)=\{u(t,\varepsilon),v(t,\varepsilon)\}$ – неизвестная вектор-функция; $z^0=\{u^0,v^0\}$ – известный постоянный вектор; $k(t)=\{k_1(t),k_2(t)\}$, $h(t)=\{h_1(t),h_2(t)\}$ —известные вектор-функции; $A(t)=\begin{pmatrix}0&1\\-\alpha^2(t)&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ — заданные матрицы; $\varphi(t),\alpha(t),\beta(t)>0$ – известные функции; $\varepsilon>0$ – малый параметр. Требуется построить главный член асимптотики решения задачи (1) при $\varepsilon\to+0$.

Введем регуляризирующие переменные

$$\tau_0=\frac{2i}{\varepsilon}\beta'(t)\equiv\psi_0(t,\varepsilon),\ \ \tau_i=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_i(s)ds\equiv\psi_i(t,\varepsilon),\ i=1,2,$$

где $\lambda_i(t,\varepsilon)$ – собственные значения матрицы $A(t)$, и, в соответствии с общей теорией метода регуляризации [7], рассмотрим вместо решения $z(t,\varepsilon)$ задачи (1) расширенную функцию $\tilde z(t,\tau,\varepsilon)$, где $\tau=(\tau_0,\tau_1,\tau_2)$ – набор дополнительных регуляризирующих переменных, и потребуем, чтобы для расширенной функции $\tilde z(t,\tau,\varepsilon)$ выполнялось соотношение $\tilde z(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)=z(t,\varepsilon)$.

Для расширенной функции $\tilde z(t,\tau,\varepsilon)$ рассмотрим задачу

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde z}{\partial t}+D_\lambda\tilde z-A(t)\cdot\tilde z+\int_{t_0}^{t}k(s)\tilde z(s,\psi(s,\varepsilon),\varepsilon)ds=\frac{\varepsilon\varphi(t)}{2}(e^{\tau_0}+e^{-\tau_0})B\cdot\tilde z+h(t),\ \ \tilde z(t_0,\psi(t_0,\varepsilon),\varepsilon)=z^0,\qquad(2)$$

где $D_\lambda\tilde z=\sum_{k=0}^{2}\lambda_k(t)\frac{\partial\tilde z}{\partial\tau_k}$; $\psi(t_0,\varepsilon)=\left(\frac{2i\beta(t_0)}{\varepsilon},0,0\right)$.

В задаче (2) пока не произведена регуляризация интегрального члена, поэтому ее еще нельзя считать «расширенной» по отношению к исходной задаче (1). Для построения «расширенной» задачи займемся регуляризацией интегрального оператора.

Предположим, что задача (2) имеет решение в виде ряда

$$z(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j}z_{j}(t,\tau) \tag{3}$$

с коэффициентами $z_j(t,\tau)\equiv z_j(t,\tau_0,\tau_1,\tau_2)$, имеющими вид

$$z_j(t,\tau)=z_0^{(j)}(t)+z(t)_1^{(j)}e^{\tau_1}+z_2^{(j)}(t)e^{\tau_2}, \tag{4}$$

где все $z_i^{(j)}(t)\in C^{\infty}[0,T],\ i=\overline{0,2}.$ Подставляя ряд (3) с коэффициентами (4) в интегральный член задачи (2), получим интегралы, имеющие вид

$$I_0(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}k(s)z_0^{(j)}(s)ds;\quad I_i(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}k(s)z_i^{(j)}(s)e^{\psi_i(s,\varepsilon)}ds,\ \ i=1,2.$$

Регуляризация интегралов I_0-I_2 заключается в построении для них формального ряда по степеням малого параметра ε. Для осуществления такой операции применим интегрирование по частям к каждому из интегралов I_0-I_2.

Интеграл $I_0(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)$ уже регуляризован, т.е.

$$I_0(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}k(s)z_0^{(j)}(s)ds.$$

Рассмотрим интеграл $I_1(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon).$ Произведем в нем следующие действия:

$$I_1(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}k(s)z_1^{(j)}(s)e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}ds=\int_{t_0}^{t}k(s)z_1^{(j)}(s)d\left(e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}\right)\left(\frac{\varepsilon}{i\alpha(s)}\right)=$$

$$=\varepsilon\left[\left.\frac{k(s)z_1^{(j)}(s)}{i\alpha(s)}e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}\right|_{s=t_0}^{s=t}-\int_{t_0}^{t}e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{k(s)z_1^{(j)}(s)}{i\alpha(s)}\right)ds\right]=$$

$$=\varepsilon\left[\frac{k(t)z_1^{(j)}(t)}{i\alpha(t)}e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\alpha(x)dx}-\frac{k(t_0)z_1^{(j)}(t_0)}{i\alpha(t_0)}-\int_{t_0}^{t}e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{k(s)z_1^{(j)}(s)}{i\alpha(s)}\right)ds\right]=\varepsilon\frac{k(t)z_1^{(j)}(t)}{i\alpha(t)}e^{\psi_1(t,\varepsilon)}-$$

$$-\varepsilon\frac{k(t_0)z_1^{(j)}(t_0)}{i\alpha(t_0)}-\varepsilon\int_{t_0}^{t}e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{k(s)z_1^{(j)}(s)}{i\alpha(s)}\right]ds.$$

Итак, после однократного интегрирования по частям в $I_1(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)$ выделяются внеинтегральные члены, которые при $\psi=\tau$ имеют вид слагаемых суммы (4), а интегральный член снова является интегралом типа $I_1(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon).$ Многократное интегрирование по частям приводит к формальному ряду

$$I_1(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)\equiv I_1(t,\tau,\varepsilon)=\varepsilon\left[\frac{k(t)z_1^{(j)}(t)}{i\alpha(t)}e^{\tau_1}-\frac{k(t_0)z_1^{(j)}(t_0)}{i\alpha(t_0)}\right]+\sum_{j=2}^{\infty}\varepsilon^{j}\left[v_1^{(j)}(t)e^{\tau_1}+v_0^{(j)}(t)\right].$$

Производя такую же операцию и для интеграла $I_2(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon),$ получим формальный ряд

$$I_2(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)\equiv I_2(t,\tau,\varepsilon)=\varepsilon\left[-\frac{k(t)z_2^{(j)}(t)}{i\alpha(t)}e^{\tau_2}+\frac{k(t_0)z_2^{(j)}(t_0)}{i\alpha(t_0)}\right]+\sum_{j=2}^{\infty}\varepsilon^{j}\left[v_2^{(j)}(t)e^{\tau_2}+v_0^{(j)}(t)\right].$$

Теперь расширенную задачу (2) можно записать в виде

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde z(t,\tau,\varepsilon)}{\partial t}+D_{\lambda}\tilde z-A(t)\tilde z+R\tilde z=\frac{\varepsilon\varphi(t)}{2}(e^{\tau_0}+e^{-\tau_0})B\tilde z+h(t),\ \ \tilde z(t_0,\psi(t_0,\varepsilon),\varepsilon)=z^0, \tag{5}$$

где оператор R сопоставляет каждому формальному ряду (3) с коэффициентами $z_i(t,\tau)\in U$ формальный ряд (4), в котором все $\psi_i(t,\varepsilon)$ заменены на τ_i ($i=1,2$). Далее удобно представить оператор R в виде $R\tilde{y}=\sum\limits_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\sum\limits_{j=0}^{s}R_j z_{s-j}(t,\tau)$, где оператор R_j определяется следующим образом. Возьмем произвольную функцию $z(t,\tau)\in U$ в виде суммы (4) и произведем последовательное интегрирование по частям в интеграле $\int\limits_{t_0}^{t}k(s)z_i\left(s,\psi(s)/\varepsilon,\varepsilon\right)ds$ с выделением внеинтегральных членов порядка $1,\varepsilon,...,\varepsilon^s$ включительно. Затем во внеинтегральных членах заменяем $\psi_i(t,\varepsilon)$ на $\tau_i, i=1,2$. Тогда $R_j z(t,\tau)$ есть коэффициент при ε^s во внеинтегральных членах. Из этого определения, в частности, следует, что

$$R_0 z_j(t,\tau)=\int\limits_{t_0}^{t}k(s)z_0^{(j)}(s)ds,\;\; R_1(t,\tau)=\frac{k(t)z_1^{(j)}(t)}{i\alpha(t)}e^{\tau_1}-\frac{k(t)z_2^{(j)}(t)}{i\alpha(t)}e^{\tau_2}+\frac{k(t_0)z_2^{(j)}(t_0)}{i\alpha(t_0)}-\frac{k(t_0)z_1^{(j)}(t_0)}{i\alpha(t_0)}...$$

Подставив теперь ряд (3) в задачу (5) и произведя приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε (с учетом формулы регуляризации интегралов), получим следующие итерационные задачи:

$$L_0 z_0(t,\tau)\equiv D_\lambda z_0-A(t)z_0+\int\limits_{t_0}^{t}k(s)z_0^{(0)}(s)ds=h(t),\quad z_0(t_0,\psi(t_0,\varepsilon))=z^0; \qquad (\varepsilon^0)$$

$$\begin{aligned}L_0 z_1=&-\frac{\partial z_0}{\partial t}+\frac{\varphi(t)}{2}\left(e^{\tau_0}+e^{-\tau_0}\right)Bz_0-\frac{k(t)z_1^{(0)}(t)}{i\alpha(t)}e^{\tau_1}+\frac{k(t)z_2^{(0)}(t)}{i\alpha(t)}e^{\tau_2}+\\&+\frac{k(t_0)z_1^{(0)}(t_0)}{i\alpha(t_0)}-\frac{k(t_0)z_2^{(0)}(t_0)}{i\alpha_2(t_0)},\qquad z_1(t_0,\psi(t_0,\varepsilon))=0;\quad\ldots\end{aligned} \qquad (\varepsilon^1)$$

Решение задачи (ε^0) имеет вид

$$z_0(t,\tau)=z_{o,o}(t,\tau)+z_{ч,н}(t,\tau),$$

где $z_{o.o}(t,\tau)$ — общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (ε^0), а $z_{ч,н}(t,\tau)$ – частное решение уравнения (ε^0). Решение однородного уравнения (ε^0) имеет вид

$$z_{o,o}(t,\tau)=c_1(t)b_1(t)e^{\tau_1}+c_2(t)b_2(t)e^{\tau_2}, \qquad (6)$$

где $b_1(t)=\{1,i\alpha(t)\}$, $b_2(t)=\{1,-i\alpha(t)\}$ – собственные векторы матрицы $A(t)$; $c_1(t), c_2(t)$ – произвольные функции, а частное решение $z_{ч,н}(t,\tau)$ есть

$$z_{ч,н}(t,\tau)\equiv z_0^{(0)}(t)=-A^{-1}(t)\cdot h(t)+\int\limits_{t_0}^{t}A^{-1}(t)\cdot k(s)z_0^{(0)}(s)ds.$$

Таким образом, решение (6) определено в следующем виде:

$$z_0(t,\tau)=c_1(t)\begin{pmatrix}1\\ i\alpha(t)\end{pmatrix}e^{\tau_1}+c_2(t)\begin{pmatrix}1\\ -i\alpha(t)\end{pmatrix}e^{\tau_2}+z_0^{(0)}(t). \qquad (7)$$

Подчиняя (7) начальным условиям $z_0(t_0,\psi(t_0,\varepsilon))=z^0$, будем иметь

$$c_1(t_0)\begin{pmatrix}1\\ i\alpha(t_0)\end{pmatrix}+c_2(t_0)\begin{pmatrix}1\\ -i\alpha(t_0)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\dfrac{h_2(t_0)}{\alpha^2(t_0)}\\ -h_1(t_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u^0\\ v^0\end{pmatrix},$$

откуда находим

$$c_1(t_0)=\frac{1}{2}\left(u^0+\frac{h_2(t_0)}{\alpha_0^2}+i\frac{h_1(t_0)-v^0}{\alpha_0}\right),\qquad c_2(t_0)=\frac{1}{2}\left(u^0+\frac{h_2(t_0)}{\alpha_0^2}+i\frac{v^0-h_1(t_0)}{\alpha_0}\right). \qquad (8)$$

Переходим к решению задачи (ε^1). Правая часть задачи (ε^1) имеет вид

$$Hz_0=-\left(\dot{z}_0^{(0)}(t)\right)'-c_1'(t)\begin{pmatrix}1\\ i\alpha(t)\end{pmatrix}e^{\tau_1}-c_1(t)\begin{pmatrix}0\\ i\alpha'(t)\end{pmatrix}e^{\tau_1}-c_2'(t)\begin{pmatrix}1\\ -i\alpha(t)\end{pmatrix}e^{\tau_2}-$$

$$-c_2(t)\begin{pmatrix}0\\-i\alpha'(t)\end{pmatrix}e^{\tau_2}+\frac{\varphi(t)}{2}\left(e^{\tau_0}+e^{-\tau_0}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\left(z_0^{(0)}(t)+c_1(t)e^{\tau_1}+c_2(t)e^{\tau_2}\right)- \tag{9}$$
$$-\frac{k(t)z_1^{(0)}(t)}{\lambda_1(t)}e^{\tau_1}-\frac{k(t)z_2^{(0)}(t)}{\lambda_2(t)}e^{\tau_2}+\frac{k(t_0)z_1^{(0)}(t_0)}{\lambda_1(t_0)}+\frac{k(t_0)z_2^{(0)}(t_0)}{\lambda_2(t_0)}.$$

Для разрешимости уравнения (9) необходимо и достаточно, чтобы правая часть была ортогонально базисным элементам $q_i(t,\tau_i)=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2\lambda_i(t)}\right\}e^{\tau_i},\ i=1,2,$ ядра сопряженного оператора $L_0^*\equiv D_{\bar\lambda}-A^*(t)+\int\limits_{t_0}^{t}k(s)z_0^{(0)}(s)$, откуда получаем уравнения для нахождения $c_i(t)$ $(i=1,2)$, а именно:

$$c_i'(t)+c_i(t)\left(\frac{\alpha'(t)}{2\alpha(t)}+\frac{k(t)}{\lambda_i(t)}\right)=0.$$

С учетом начальных условий (8) однозначно находим

$$c_i(t)=c_i(t_0)exp\left(ln\sqrt{\frac{\alpha(t_0)}{\alpha(t)}}-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{k(s)}{\lambda_i(s)}ds\right).$$

Таким образом, решение $z_0(t,\tau)$ задачи (ε^0) имеет вид

$$z_0(t,\tau)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left(u^0+\frac{h_2(t_0)}{\alpha^2(t_0)}+i\frac{(-1)^k\left(v^0-h_1(t_0)\right)}{\alpha(t_0)}\right)\begin{pmatrix}1\\\lambda_k(t)\end{pmatrix}e^{\tau_0}exp\left(ln\sqrt{\frac{\alpha(t_0)}{\alpha(t)}}-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{k(s)}{\lambda_k(s)}ds\right)+z_0^{(0)}(t).$$

Отметим, что при $k(t)\equiv 0$ главный член асимптотики имеет вид

$$z_0(t,\tau)=\begin{pmatrix}\dfrac{h_2(t)}{\alpha^2(t)}\\-h_1(t)\end{pmatrix}+\sqrt{\frac{\alpha(t_0)}{\alpha(t)}}\left\{\begin{pmatrix}1\\i\alpha(t)\end{pmatrix}\frac{\alpha(t_0)f_0-ig_0}{2\alpha(t_0)}e^{\tau_1}+\begin{pmatrix}1\\-i\alpha(t)\end{pmatrix}\frac{\alpha(t_0)f_0+ig_0}{2\alpha(t_0)}e^{\tau_2}\right\},$$

где $f_0=u^0-\dfrac{h_2(t_0)}{\alpha^2(t_0)};\ g_0=v^0+h_1(t_0)$, что совпадает с решением примеров в [8, 5; 177].

Список литературы

1 *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1966.

2 *Шкиль Н.И.* Асимптотические методы в дифференциальных уравнениях. — Киев: Наук. думка, 1971.

3 *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* О дифференциальных уравнениях в гильбертовом пространстве // Укр. матем. журн. 1950. —Вып. 2. — № 4.

4 *Далецкий Ю.Л.* Асимптотический метод для некоторых дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами // ДАН СССР. — 1962. — Вып. 143. — № 5. — С. 1026–1029.

5 *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений: Монография. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

6 *Рыжих А.Д.* Асимптотическое решение линейного дифференциального уравнения с быстро осциллирующим коэффициентом // Тр. МЭИ. — 1978. — Вып. 357. — С. 92–94.

7 *Рыжих А.Д.* Применение метода регуляризации для уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами // Материалы Всесоюз. конф. по асимп. методам. — Ч. I. — Алма-Ата, 1979. — С. 64–66.

8 *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.

Б.Т.Қалымбетов, Д.А.Сапаков

Параметрлік күшейтілген сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйе шешімінің асимптотикасы

Мақалада жылдам осцилляцияланушы коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйе үшін алғашқы есеп қарастырылды. Алғашқы есепті асимптотикалық интегралдау үшін С.А.Ломовтың модификацияланған регуляризациялау әдісі ұсынылды. Модификацияның маңыздылығы жылдам осцилляцияланушы коэффициенттерге байланысты және алғашқы есептің шешімінде қатысушы ерекше сингулярлықтарды ескеретін қосымша тәуелсіз айнымалыларды енгізуге негізделген. Есеп асимптотиканың бас мүшесін құру процедурасына негізделген және интеграл мүше қатыспағанда дифференциалдық жүйе шешімінің асимптотикасының бас мүшесіне сәйкес келуі көрсетілген.

B.T.Kalimbetov, D.A.Sapakov

Asymptotics solving singularly perturbed integro-differential systems with parametric amplification

The initial value problem for a singularly perturbed integro-differential systems with rapidly oscillating coefficients. For asymptotic integration of the original problem, a modification of the method proposed regularization S.A.Lomov. The essence of modification is to introduce along with additional independent variables associated with rapidly oscillating coefficients and variables, taking into account the essential singular singularities that are involved in solving of the original problem. Justified procedure for constructing general member asymptotic solution of problem, which in absence of an integral member coincides with general member asymptotic solution of the differential system.

References

1 Feshchenko S.F, Shkil' N.I, Nikolenko L.D. *Asymptotic methods in the theory of linear differential equations,* Kiev: Naukova dumka, 1966.

2 Shkil N.I. *Asymptotic methods in differential equation,* Kiev: Naukova dumka, 1971.

3 Daletskiy Yu.L., Krein M.G. *Ukrainen. matem. Journal*, 1950, 2, 4, p. 241–250.

4 Daletskiy Yu.L. *Reports AS USSR*, 1962, 143, 5, p. 1026–1029.

5 Lomov S.A. *Introduction to the general theory of singular perturbation,* Trans. of mathem. Monographs, 112, American Mathem. Society, 1992.

6 Ryzhikh A.D. *Proceedings MPEI*, 1978, 357, p. 92–94.

7 Ryzhikh A.D. *Materials All-Union. conferen. by asymptotic. methods*, I, Almaty, 1979, p. 64–66.

8 Daletskiy Yu.L., Krein M.G. *Stability of solutions of differential equations in a Banach space*, Moscow: Nauka, 1970.