ӘОЖ 517.9

Қ.Н. Оспанов[1], Т.Н. Бекжан[2], Д.Р. Бейсенова[1,3]

[1] *Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан;*
[2] *Синьцзян университеті, Үрімші, Қытай;*
[3] *Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекетті университеті, Қазақстан*
(E-mail: kordan.ospanov@gmail.com)

Комплекс коэффициентті шексіз айырымдық теңдеулер жүйесінің коэрцитивті шешілу шарттары

Бұл бағалаулар жүйеге сәйкес келетін матрицалық оператордың анықталу облысын толық сипаттайды. Жүйенің коэффициенттері шенелмеген тізбектер құрайды. Ал алынған нәтижелер осы коэффициенттердің тербелісіне тәуелсіз. Соңғы факт шексіз айырымдық жүйелердің табиғаты, сингулярлы дифференциалдық теңдеулерге қарағанда, мүлдем өзгеше екенін дәлелдейді.

Кілт сөздер: коэрцитивті шешілу, шексіз айырымдық жүйе, шешімді бағалау, үзіліссіз қайтарымды оператор, тұйық оператор, финитті тізбек.

1 Кіріспе

$h \in (0, h_0)$ (h_0 бекітілген оң сан) санын алып, $Z_h = \{x_n,\, x_n = nh, n \in Z\}$ деп белгілейік. Алдағы уақытта нақты не комплекс $m_{x_j} = m_{jh}$ санының орнына қысқаша m_j деп жазамыз. Төменде

$$(L_0 y)_j := h^{-2}\Delta^{(2)} y_j + h^{-1} r_j \Delta_+ y_j + h^{-1} s_j \overline{\Delta_+ y_j} + q_j y_j + p_j \bar{y}_j = f_j, j \in Z, \tag{1.1}$$

шексіз айырымдық жүйесін қарастыратын боламыз. Мұндағы r_j — берілген нақты, ал s_j, q_j, p_j, f_j — комплекс сандар, $\bar{y}_j -$ y_j-дің комплекс түйіндесі

$$\Delta_+ y_j = y_{j+h} - y_j, \overline{(\Delta_+ y)}_j = \overline{(y_{j+h} - y_j)}, \Delta^{(2)} y_j = y_{j+h} - 2y_j + y_{j-h}\, (j \in Z)\,.$$

Егер

$$y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}, \bar{y} = \{\bar{y}_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}, L_0 y = \left\{(L_0 y)_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}, f = \{f_j\}_{j=-\infty}^{+\infty};$$

$$r = diag\,\{\, r_j,\ j \in Z\}\,, s = diag\,\{\, s_j,\ j \in Z\}\,, q = diag\,\{\, q_j,\ j \in Z\}\,, p = diag\,\{\, p_j,\ j \in Z\}\,,$$

$$\Delta_+ y = \{\Delta_+ y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}, \overline{\Delta_+ y} = \left\{\overline{\Delta_+ y_j}\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}, \Delta^{(2)} y = \left\{\Delta^{(2)} y_j\right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$$

деп белгілеулер енгізсек, онда (1.1) теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$L_0 y = h^{-2}\Delta^{(2)} y + h^{-1} r \Delta_+ y + h^{-1} s \overline{\Delta_+ y} + qy + p\overline{y} = f. \tag{1.2}$$

Айталық, $f \in l_2(h)$ болсын, мұндағы

$$l_2(h) = \left\{ y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} : \|y\|_{2,h} = \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |y_j|^2 h \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Жұмыста (1.2) айырымдық теңдеулердің шексіз жүйесінің $f \in l_2(h)$ кеңістігінде коэрцитивті шешілу мүмкіндігін зерттейтін боламыз. Егер r_j, s_j сандары нөлге тең немесе олар шенелген тізбектер құратын болса, онда (1.2) жүйесінің шешілу шарттары белгілі Штурм-Лиувилль айырымдық жүйесіне ұқсас әдіспен алынады [1]. Ал егер r мен s матрицаларының ең болмағанда біреуі шенелмеген болса, онда (1.2) нұқсанды жүйе болып табылады. Мұндай жүйелер тек симметриялы жағдайда ғана ішінара зерттелген [2]. Ал (1.2) - симметриялы емес және комплекс коэффициентті жүйе. $s = p = 0$, $q = \bar{q}$ дербес жағдайында ол [3] жұмысында қарастырылды. Бұл мақалада [3] жұмыстағы ұқсас әдіс пайдаланылса да, соңғыдан едәуір айырмашылықтары бар. Атап айтқанда, $s = p = 0$, $q = \bar{q}$ болған жағдайда, біздің мақаламыздың негізгі нәтижесі [3] жұмысындағы Теорема 3.1 нәтижесімен беттеседі, бірақ осы Теорема 3.1-дегі коэффициент тербелісіне қойылған (3.2) шарты алынып тасталды. Басқаша айтқанда, [3]-те алынған нәтижелер күрт жақсартылды. Екіншіден, (1.2) жүйесіне сәйкес матрица [3]-те қарастырылған жүйе матрица құрылымына қарағанда күрделі.

(1.2) жүйесін зерттеу тек теориялық қызығушылықтан тумаған. Бұл жүйені стохастикалық процестер мен стохастикалық дифференциалдық теңдеулер теориясында пайда болатын есептер алып келеді [4]. Ал стохастикалық дифференциалдық теңдеулерді аналитикалық зерттеу А.Н. Колмогоровтың [5] мақаласынан бастау алады. Бұл бағыттағы зерттеулер ауқымы барған сайын кеңейе түсуде. Мысалы, осы мәселеге арналған [6] монографиясында 900-ден аса әдебиетке сілтеме жасалған.

$\tilde{l}$ деп барлық финитті тізбектер жиынын белгілейік

$$\tilde{l} = \left\{ \{w_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} :\ \exists N,\ w_j = 0,\ \forall j :\ |j| \geq N \right\}.$$

Ескерту. Жоғарыда енгізілген белгілеулердің барлығы мақаланың аяғына дейін сақталады.

Анықтама 1.1 Егер $\{z_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \tilde{l}$ $(j = 1,\, 2,\, ...\,)$ тізбегі табылып,

$$\|z_j - y\|_{2,h} \to 0, \|L_0 z_j - f\|_{2,h} \to 0 (j \to \infty)$$

қатыстары орындалатын болса, онда $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in l_2\,(h)$ элементін (1.2) жүйесінің шешімі деп атайды.

Белгілі аз бұлқыну теоремасының [7] бір салдарын келтірейік.

Лемма 1.1 $Lu = Au + Bu$ операторы берілсін. Айталық, $A :\ l_2(h) \to l_2(h)$, $D(A) \subseteq D(B)$ болсын және мына шарттар орындалсын:
1) A — тұйық және үзіліссіз қайтарымды оператор;
2) $\|Bu\|_{2,h} \leq \alpha\ \|Au\|_{2,h}$, $\forall u \in D(A)$, $0 < \alpha < 1$.
Сонда L операторы да қайтарымды және $R(L) = l_2(h)$.

2 Бір нұқсанды айырымдық теңдеулер жүйесі үшін коэрцитивті бағалаулар

$$(l_0 y)_j := h^{-2}\Delta^{(2)} y_j + h^{-1} r_j \Delta_+ y_j = f_j, j \in Z, \tag{2.1}$$

жүйесін қарастырамыз. Мұндағы $(l_0 y)_j = (l_0 y)_{x_j}$ $(j \in Z)$. Егер $l_0 y = \left\{ (l_0 y)_j \right\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ деп белгілесек, онда (2.1) теңдеуі былай жазылады:

$$l_0 y = h^{-2}\Delta^{(2)} y + h^{-1} r \Delta_+ y = f. \tag{2.2}$$

Анықтама 2.1 Егер $\{z_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \tilde{l}$ тізбегі табылып,

$$\|z_j - y\|_{2,h} \to 0, \|l_0 z_j - f\|_{2,h} \to 0\ (j \to +\infty)$$

қатыстары орындалатын болса, онда $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in l_2\,(h)$ элементін (2.1) жүйесінің шешімі деп атайды.

$$\tilde{l}_+ = \left\{ \{w_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l} :\ w_j = 0, j = -1,\, -2,\, ... \right\}$$

болсын. Егер [8] жұмысында дәлелденген 2.1 леммасында $b_n = \sum_{j=n}^{+\infty} a_j$ деп алсақ, онда $\Delta_+ b_n = b_{n+1} - b_n = -a_n$ болғандықтан, мынадай тұжырымға келеміз.

Салдар 2.1 Айталық, $1 < p < +\infty$ болсын. Сонда

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n \Delta_+ b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \{b_k\}_{k=0}^{+\infty} \in \tilde{l}_+, \tag{2.3}$$

теңсіздігі орындалуы үшін

$$B_0 = \sup_{r=0,1,2,...} \left(\sum_{n=0}^{r} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=r}^{+\infty} |v_n|^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

болуы қажетті және жеткілікті. Мұндағы
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$
Сонымен бірге, егер C (2.3) бағалауы орындалатындай ең кіші тұрақты болса, онда
$$B_0 \le C \le p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}B_0.$$

$\tilde{l}_- = \left\{ \{w_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l} : \ w_j = 0, j = 0,\ 1,\ 2,\ ... \right\}$ болсын.

Лемма 2.1 Айталық, $1 < p < +\infty$ болсын. Онда
$$\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}|u_n b_n|^p\, h\right)^{\frac{1}{p}} \le \tilde{C}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1}|v_n\Delta_+ b_n|^p\, h\right)^{\frac{1}{p}}, \{b_k\}_{k=-\infty}^{-1} \in \tilde{l}_-, \tag{2.4}$$
теңсіздігі орындалуы үшін
$$\tilde{B} = \sup_{\tau=-1,-2,...}\left(\sum_{n=\tau}^{0}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\tau}|v_n|^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$
болуы қажетті және жеткілікті. Мұндағы
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$
Сонымен бірге, егер $\tilde{C}$ (2.4) орындалатындай ең кіші тұрақты болса, онда
$$\tilde{B} \le \tilde{C} \le p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}\tilde{B}.$$

Бұл лемма жоғарыдағы 2.1 салдарын пайдаланып, [8] жұмысындағы лемма 2.2 алынған әдіспен дәлелденеді.

Енді (2.2)-де берілген нұқсанды айырымдық операторды қарастырып, ол үшін априорлық бағалаулар аламыз.

Лемма 2.2 Айталық, $r_{jh} \ge \varepsilon > 0 (j \in Z)$ болсын. Онда әрбір $y \in \tilde{l}$ үшін
$$\left\|\sqrt{r}\,\frac{\Delta_+ y}{h}\right\|_{2,h} \le \left\|\frac{1}{\sqrt{r}}\,l_0 y\right\|_{2,h} \tag{2.5}$$
бағалауы орындалады.

Дәлелдеу. $y \in \tilde{l}$ болсын.
$$\frac{\Delta_+ y_j}{h} = z_j$$
деп белгілейік. Онда
$$\Delta_-\left(\Delta_+ y_j\right) = \Delta^{(2)} y_j = h^{-1}\Delta_- z_j$$
болады да, (2.1) мына түрге келеді:
$$\left(\tilde{l}_0 z\right)_j = h^{-1}\left(z_j - z_{j-h}\right) + r_j z_j = f_j, j \in Z.$$
Соңғы жүйенің екі жағын $z_j = z_{jh}$ - қа көбейтіп, нәтижесін j-лер бойынша қосындылаймыз:
$$h^{-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{jh} - z_{(j-1)h}\right)z_{jh} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} r_{jh} z_{jh}^2 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_{jh} z_{jh}. \tag{2.6}$$
Бұл өрнектегі
$$A := \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{jh} - z_{(j-1)h}\right)z_{jh}$$
қосындысы теріс емес екенін байқауға болады. Шынында да

$$A=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{jh}-z_{(j-1)h}\right)z_{jh}=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{jh}z_{jh}-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{(j-1)h}z_{jh}=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{jh}z_{jh}-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}z_{kh}z_{(k+1)h}=$$

$$=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{jh}z_{jh}-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{jh}z_{(j+1)h}=-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{jh}\left(z_{(j+1)h}-z_{jh}\right)=-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{(j-1)h}\left(z_{jh}-z_{(j-1)h}\right)=$$

$$=-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{(j-1)h}-z_{jh}\right)\left(z_{jh}-z_{(j-1)h}\right)-\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z_{jh}\left(z_{jh}-z_{(j-1)h}\right),$$

немесе

$$2A=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{jh}-z_{(j-1)h}\right)^2.$$

Демек, $A\geq 0$. Онда (2.6)-дан

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}r_{jh}z_{jh}^2\leq\sum_{j=-\infty}^{+\infty}f_{jh}z_{jh}.$$

Лемма шартын және Гельдер теңсіздігін пайдалансақ,

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}r_{jh}z_{jh}^2\leq\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f_{jh}}{\sqrt{r_{jh}}}\right)^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{r_{jh}}z_{jh}\right)^2\right)^{\frac12},$$

осыдан

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\sqrt{r_{jh}}z_{jh}\right)^2h\right)^{\frac12}\leq\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{f_{jh}}{\sqrt{r_{jh}}}\right)^2h\right)^{\frac12},y\in\tilde{l}.$$

Соңғы бағалаудан $z_j=\frac{\Delta_+y_j}{h}$ екенін ескеріп, (2.5)-ке келеміз. Лемма дәлелденді.

(2.5) теңсіздігі және $r_{jh}\geq\varepsilon>0(j\in Z)$ шартынан

$$\left\|\sqrt{r}\,\frac{\Delta_+y}{h}\right\|_{2,h}\leq\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\parallel f\|_{2,h},y\in\tilde{l}, \tag{2.7}$$

бағалауы шығады.

Келесі түрдегі белгілеулерді енгізейік:

$$\alpha_{\varphi,\psi}(n)=\left(\sum_{j=0}^{n}|\varphi_j|^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\psi_j^{-2}\right)^{\frac12}(n=0,\,1,\,2,\,...);$$

$$\beta_{\varphi,\psi}(k)=\left[\left(\sum_{j=k}^{-1}|\varphi_j|^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}\psi_j^{-2}\right)^{\frac12}\right](k=-1,-2,...);$$

$$\gamma_{\varphi,\psi}=\max\left(\sup_{n=0,1,2,...}\alpha_{\varphi,\psi}(n),\sup_{k=-1,-2,...}\beta_{\varphi,\psi}(k)\right),$$

мұндағы $\varphi=\{\varphi_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ $(\varphi_j=\varphi_{x_j})$және $\psi=\{\psi_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ — берілген тізбектер.

Лемма 2.3 Айталық, $r=\{r_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ тізбегі $r_j\geq\varepsilon>0(j\in Z)$ және

$$F^*=\sup_{n=0,1,2,...}\alpha_{1,\sqrt{r}}(n)<\infty, \tag{2.8}$$

$$F^{**} = \sup_{k=-1,-2,...} \beta_{1,\sqrt{r}}(k) < \infty \tag{2.9}$$

шарттарын қанағаттандырсын. Онда $y \in \tilde{l}$ элементі үшін

$$\|y\|_{2,h} \le C_0 \| \, l_0 y\|_{2,h} \tag{2.10}$$

теңсіздігі орындалады. Мұндағы

$$C_0 = 2\sqrt{\frac{F^* + F^{**}}{\varepsilon}}.$$

Лемма (2.5) бағалауынан және Салдар 2.1 мен Лемма 2.1-ден шығады.

Егер (2.10) және (2.7) теңсіздіктерін біріктірсек, онда

$$\|y\|_{2,h} + \left\| \sqrt{r} \, \frac{\Delta_+ y}{h} \right\|_{2,h} \le C_1 \| \, l_0 y\|_{2,h} \, , y \in D(\tilde{l}). \tag{2.11}$$

Мұндағы

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[2\sqrt{F^* + F^{**}} + 1 \right].$$

Айталық, $\lambda \ge 0$ болсын. Келесі

$$l_{0\lambda} y := h^{-2} \Delta^{(2)} y + h^{-1} (r + \lambda) \Delta_+ y \; = \; f, f \in l_2 \, (h) \, , \tag{2.12}$$

теңдеуін қарастырайық.

Теорема 2.1 Егер $\{r_{jh}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ тізбегі $r_{jh} \ge \varepsilon > 0$ $(j \in Z)$, (2.8) және (2.9) шарттарын қанағаттандырса, онда (2.12) теңдеулер жүйесінің $y \in l_{2,h}$ шешімі бар және ол жалғыз. Сонымен бірге y шешімі үшін

$$\left\| h^{-2} \Delta^{(2)} y \right\|_{2,h} + \left\| h^{-1} (r + \lambda) \Delta_+ y \right\|_{2,h} \le c_1(h) \, \|f\|_{2,h} \tag{2.13}$$

бағалауы орындалады.

Дәлелдеу. Айталық,

$$\tilde{y}_{n+m} = (y_{-m+1}, \, y_{-m+2}, \, ..., \, y_0, \, ..., \, y_{n-1}, \, y_n), \; n, m \in N,$$

элементі

$$l \tilde{y}_{n+m} = \tilde{f}_{n+m} \tag{2.14}$$

теңдігін қанағаттандырсын. Мұндағы

$$\tilde{f}_{n+m} = (\, f_{-m+1}, \, f_{-m+2}, \, ..., \, f_0, \, ..., \, f_{n-1}, \, f_n).$$

Теорема шарттары орындалғанда мұндай $\tilde{y}_{n+m}$ элементі жалғыз ғана. Шынында да, (2.14) - $(n+m) \times$ $\times \, (n+m)$ өлшемді сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі. Егер $l\tilde{y}_{n+m} = 0$ болса, онда (2.10) теңсіздігінен $\tilde{y}_{n+m} = 0$ болатыны шығады. Осыдан әрбір $f \in \tilde{l}$ үшін (2.13) теңдеуінің шешімі бар және жалғыз екенін аламыз.

Айталық, $f \in l_2 \, (h)$, ал $\left\{ \tilde{f}_s \right\} \subset \tilde{l}$ оған жинақталатын тізбек болсын: $\left\| \tilde{f}_s - f \right\|_{2,h} \to 0, \, s \to \infty$. $\tilde{y}_s$ $(s \in Z)$ деп келесі $ly = \tilde{f}_s$ жүйесінің шешімін белгілейік. Онда анықтама бойынша $\|l\tilde{y}_s - f\|_2 \to 0$,$s \to \infty$, ал (2.10)-нан

$$\|\tilde{y}_s\|_{2,h} \le C_1 \, \|l\tilde{y}_s\|_{2,h}$$

екенін аламыз. Соңғы теңсіздіктен

$$\|\tilde{y}_k - \tilde{y}_m\|_{2,h} \le C_1 \, \|l\tilde{y}_k - l\tilde{y}_m\|_{2,h} \to 0, \; k, m \in N,$$

орындалатыны шығады. Олай болса, $\{\tilde{y}_s\}_{s=-\infty}^{+\infty}$ — фундаментальды тізбек. $l_2 \, (h)$ банах кеңістігі болғандықтан, $\|\tilde{y}_s - \bar{y}\|_{2,h} \to 0$ $(s \to \infty)$ орындалатындай $\bar{y} \in l_2$ элементі табылады. Сонымен,

$$\|\tilde{y}_k - \bar{y}\|_{2,h} \to 0, \|l\tilde{y}_k - f\|_{2,h} \to 0, k \to \infty.$$

Демек, 2.1 анықтамасы бойынша $\bar{y}$ — (2.12) теңдеулер жүйесінің шешімі. Ендеше әрбір $f \in l_2$ үшін (2.12) теңдеулер жүйесінің шешімі бар. Шешімнің жалғыз екені (2.10) теңсіздігінен шығады.

Енді (2.12) теңдеулер жүйесінің y шешімі үшін (2.13) бағасы орындалатынын көрсетейік.

$$h^{-1}\Delta_+ y = z$$

деп белгілейік. Онда $\lambda = 0$ жағдайында (2.12)

$$\mathbf{L}_{\,o} z = h^{-1}\Delta_- z + rz = f$$

түріне келеді. Мұндағы $rz = \{r_j z_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$.

$$\mathbf{L}_{\,o} z = h^{-1}\Delta_- z + rz \ (D(\mathbf{L}_{\,o}) = \tilde{l})$$

операторының $l_2\,(h)$ кеңістігіндегі тұйықталуын $\mathbf{L}$ түрінде белгілейік. Айта кетерлігі, $\mathbf{L}$ операторы теорема шарты орындалғанда $l_2\,(h)$-та анықталған. Себебі (2.11) теңсіздігінен әрбір $z \in \tilde{l}$ үшін

$$\|z\|_{2,h} \leq C_1 \, \|\mathbf{L}_{\,o} z\|_{\,2,h}$$

екенін аламыз. Стандартты әдіс бойынша бұл теңсіздік әрбір $z \in D(L)$ үшін де орындалатынын көреміз. Демек, $D(\mathbf{L}\,) \subset l_2$.

Теорема шарттары орындалғанда әрбір $\lambda \geq 0$ үшін, жоғарыда көрсетілгендей, $\mathbf{L}_{\,\lambda} = \mathbf{L}\, + \lambda E : l_2\,(h) \to$ $\to l_2\,(h)$ операторы қайтарымды. Мұндағы E – бірлік оператор. Енді $z \in D(\mathbf{L}_{\,\lambda})$ үшін келесі

$$\left\|h^{-1}\Delta_+ z\right\|_{2,h} + \|(r+\lambda)z\|_{2,h} \leq C \, \| \, \mathbf{L}_\lambda \, z\|_{2,h}$$

бағалауы орындалатынын көрсетейік.

$$\mathbf{L}_\lambda z = h^{-1}\Delta_- z + (r+\lambda)\, z = f \tag{2.15}$$

теңдеуін қарастырамыз. Мұндағы

$$r + \lambda = diag\,\{r_j + \lambda, \quad j \in Z\}\,.$$

Айталық, $\{z_j\}_{j=-\infty}^{+\infty} \in \tilde{l}$. (2.15) жүйесіндегі j-ші теңдеудің екі жағын $z_j = z_{jh}$-қа көбейтсек, онда

$$h^{-1}\,(z_j - z_{j-h})\, z_j + (r_j + \lambda)\, z_j^2 = f_j z_j, j \in Z.$$

Осы теңдіктерді j-лер бойынша қосындылаймыз. Сонда

$$h^{-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(z_j - z_{j-h})\, z_j + \sum_{j=-\infty}^{+\infty}(r_j+\lambda)\, z_j^2 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j z_j. \tag{2.16}$$

Жоғарыдағы Лемма 2.2-нің дәлелдеуінен алатынымыз

$$h^{-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{jh} - z_{(j-1)h}\right) z_{jh} = \frac{h^{-1}}{2}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{jh} - z_{(j-1)h}\right)^2 \geq 0.$$

Онда (2.16)-дан

$$\frac{h^{-1}}{2}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(z_{jh} - z_{(j-1)h}\right)^2 h \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_{jh} z_{jh} h \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_{jh}^2 h\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_{jh}^2 h\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{2,h}\, \|z\|_{2,h}\,. \tag{2.17}$$

(2.7)-ден біздің белгілеуіміз бойынша $\|z\|_{2,h} \le C_1 \|f\|_{2,h}$. Ендеше (2.17)-ден

$$\left\|h^{-2}\Delta^{(2)}y\right\|_{2,h} \le C_2 \|f\|_{2,h}$$

теңсіздігін аламыз. Онда (2.12) теңдігінен

$$\left\|h^{-1}(r+\lambda)\Delta_+ y\right\|_{2,h} = \left\|-h^{-2}\Delta^{(2)}y + f\right\|_{2,h} \le$$

$$\le \left\|h^{-2}\Delta^{(2)}y\right\|_{2,h} + \|f\|_{2,h} \le (C_2+1)\|f\|_{2,h}.$$

Соңғы екі теңсіздікті біріктірсек, онда

$$\left\|h^{-2}\Delta^{(2)}y\right\|_{2,h} + \left\|h^{-1}(r+\lambda)\Delta_+ y\right\|_{2,h} \le [2C_2+1]\ \|f\|_{2,h}, y \in \tilde{l}.$$

Бұл теңсіздік (2.12) теңдеуінің әрбір y шешімі үшін де орындалатыны оңай тексеріледі. Теорема дәлелденді.

l арқылы $\tilde{l}$ жиынында анықталған

$$ly = h^{-2}\Delta^{(2)}y + h^{-1}(r+\lambda)\Delta_+ y, \lambda \ge 0,$$

айырымдық операторының $l_2(h)$ кеңістігі нормасындағы тұйықталуын белгілейік.

3 Негізгі теорема және оның дәлелдеуні

Теорема 3.1 Айталық, $r = \{r_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ тізбегі (2.8) және (2.9) шарттарын қанағаттандырсын. $s = \{s_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ тізбегі үшін $r_j \ge \alpha |s_j| + \delta$, $\delta > 0$ $(j \in Z)$, $3A_1(h) < \alpha < 4A_1(h)$ (мұндағы $A_1(h)$- (2.13)-тегі тұрақты) шарттары орындалсын. q және p тізбектері үшін

$$\gamma_{q,r} < \infty; \tag{3.1}$$

$$\gamma_{p,r} < \infty \tag{3.2}$$

шарттары орындалсын. Онда (1.1) теңдеулер жүйесінің $y \in l_2$ (h) шешімі бар және ол жалғыз. Сонымен бірге осы y шешімі үшін

$$\left\|h^{-2}\Delta^{(2)}y\right\|_2 + \left\|h^{-1}r\Delta_+ y\right\|_2 + \left\|h^{-1}s\overline{\Delta_+ y}\right\|_2 + \|qy\|_2 + \|p\overline{y}\|_2 \le C_3\ \|L_0 y\|_2 \tag{3.3}$$

бағалауы орындалады.

Дәлелдеу. $h = k\tau$ ($k > 0$,k — тұрақты) алмастыруын жасасақ, (1.2) мына түрге келеді:

$$L_0 y = \tau^{-2}\Delta^{(2)}\tilde{y} + k\tau^{-1}\tilde{r}\Delta_+\tilde{y} + k\tau^{-1}\tilde{s}\overline{\Delta_+\tilde{y}} + k^2\tilde{q}\,\tilde{y} + k^2\tilde{p}\,\overline{\tilde{y}} = k^2\,\tilde{f},\ \tilde{f} \in l_2(\tau),$$

мұндағы

$$\tilde{y} = \{\tilde{y}_{j\tau}\}_{j=-\infty}^{+\infty} = y(k\tau); \tilde{r} = diag\,\{\tilde{r}_{j\tau},\ j \in Z\}_{j=-\infty}^{+\infty} = r(k\tau);$$

$$\tilde{q} = diag\,\{\ \tilde{q}_{j\tau},\ j \in Z\}_{j=-\infty}^{+\infty} = q(k\tau), \tilde{s} = diag\,\{\ \tilde{s}_{j\tau},\ j \in Z\}_{j=-\infty}^{+\infty} = s(k\tau);$$

$$\tilde{p} = diag\,\{\ \tilde{p}_{j\tau},\ j \in Z\}_{j=-\infty}^{+\infty} = p(k\tau), \tilde{f} = \left\{\tilde{f}_{j\tau}\right\}_{j=-\infty}^{+\infty} = f(k\tau).$$

Немесе

$$l\tilde{y} + k\tau^{-1}\tilde{s}\overline{\Delta_+\tilde{y}} + k^2\tilde{q}\,\tilde{y} + k^2\tilde{p}\,\overline{\tilde{y}} = k^2\,\tilde{f},$$

мұндағы $l = l(\tau)$

$$l(\tau)y = \tau^{-2}\Delta^{(2)}\tilde{y} + k\tau^{-1}\tilde{r}\Delta_+\tilde{y}\ \ (\tilde{y} \in D(l)) -$$

теңдігімен анықталған тұйық оператор.

$\tilde{r} = \{\tilde{r}_{j\tau}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ тізбегі 2.1 теоремасының шарттарын қанағаттандырады, сондықтан l операторы қайтарымды және кері l^{-1} операторы үзіліссіз. Ал (2.13) теңсіздігі бойынша әрбір $\tilde{y} \in D(l)$ үшін келесі бағалау орындалады:

$$\left\|\tau^{-2}\Delta^{(2)}\tilde{y}\right\|_{2,\tau} + \left\|\tau^{-1}k\tilde{r}\Delta_{+}\tilde{y}\right\|_{2,\tau} \leq \tilde{A}_1(\tau)\, \|\, l\,\tilde{y}\|_{2,\tau}\,. \tag{3.4}$$

Келесі теңдіктер орынды:

$$\gamma_{\tilde{p},\tilde{r}} = \frac{1}{k}\gamma_{p,r}, \gamma_{\tilde{q},\tilde{r}} = \frac{1}{k}\gamma_{q,r}.$$

Шынында да, егер $\alpha_{\tilde{p},\tilde{r}}$, $\beta_{\tilde{p},\tilde{r}}$ және $\alpha_{\tilde{q},\tilde{r}}$, $\beta_{\tilde{q},\tilde{r}}$өрнектерінде $\tilde{q}_j = k^{-2}q_j$, $\tilde{p}_j = k^{-2}p_j$ және $\tilde{r}_j = k^{-1}r_j$ деп ауыстырулар енгізсек, алатынымыз:

$$\alpha_{\tilde{p},\tilde{r}} = \left(\sum_{j=0}^{n}\tilde{p}_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\tilde{r}_j^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=0}^{n}\left(k^{-2}p_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}\left(k^{-1}r_j\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\sum_{j=0}^{n}\tilde{p}_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=n}^{+\infty}r_j^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k}\alpha_{p,r};$$

$$\beta_{\tilde{p},\tilde{r}} = \left(\sum_{j=k}^{-1}\tilde{p}_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}\tilde{r}_j^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=k}^{-1}\left(k^{-2}p_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}\left(k^{-1}r_j\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\sum_{j=k}^{-1}p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=-\infty}^{k}r_j^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k}\beta_{p,r}.$$

Дәл осылар сияқты $\alpha_{\tilde{q},\tilde{r}} = \frac{1}{k}\alpha_{q,r}$ және $\beta_{\tilde{q},\tilde{r}} = \frac{1}{k}\beta_{q,r}$ теңдіктері орындалады. Олай болса,

$$\gamma_{\tilde{p},\tilde{r}} = \max\left(\sup_{n=0,1,2,\dots}\alpha_{\tilde{p},\tilde{r}}, \sup_{k=-1,-2,\dots}\beta_{\tilde{p},\tilde{r}}\right) = \max\frac{1}{k}\left(\sup_{n=0,1,2,\dots}\alpha_{p,r}, \sup_{k=-1,-2,\dots}\beta_{p,r}\right) = \frac{1}{k}\gamma_{p,r};$$

$$\gamma_{\tilde{q},\tilde{r}} = \max\left(\sup_{n=0,1,2,\dots}\alpha_{\tilde{q},\tilde{r}}, \sup_{k=-1,-2,\dots}\beta_{\tilde{q},\tilde{r}}\right) = \max\frac{1}{k}\left(\sup_{n=0,1,2,\dots}\alpha_{q,r}, \sup_{k=-1,-2,\dots}\beta_{q,r}\right) = \frac{1}{k}\gamma_{q,r}.$$

(2.3), (2.4) теңсіздіктерін және(3.1), (3.2) шарттарын пайдалансақ,

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left|k^2\tilde{p}\,\tilde{y}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=-\infty}^{-1}\left|k^2\tilde{p}\,\tilde{y}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=0}^{+\infty}\left|k^2\tilde{p}\,\tilde{y}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2k^2\tilde{B}\left(\sum_{j=-\infty}^{-1}|\tilde{r}_j\Delta_{+}\,\tilde{y}_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2k^2B_0\left(\sum_{j=0}^{+\infty}||\tilde{r}_j\Delta_{+}\,\tilde{y}_j||^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2k^2\gamma_{\tilde{p},\tilde{r}}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}||\tilde{r}_j\Delta_{+}\,\tilde{y}_j||^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2k^2\gamma_{\tilde{p},\tilde{r}}\,\|\tilde{r}\Delta_{+}\,\tilde{y}\|_{2,\tau}\,;$$

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left|k^2\tilde{q}\,\tilde{y}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=-\infty}^{-1}\left|k^2\tilde{q}\,\tilde{y}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=0}^{+\infty}\left|k^2\tilde{q}\,\tilde{y}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2k^2\tilde{B}\left(\sum_{j=-\infty}^{-1}|\tilde{r}_j\Delta_{+}\,\tilde{y}_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2k^2B_0\left(\sum_{j=0}^{+\infty}||\tilde{r}_j\Delta_{+}\,\tilde{y}_j||^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2k^2\gamma_{\tilde{q},\tilde{r}}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}||\tilde{r}_j\Delta_+\tilde{y}_j||^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2k^2\gamma_{\tilde{q},\tilde{r}}\|\tilde{r}\Delta_+\tilde{y}\|_{2,\tau},$$

немесе

$$\left\|k^2\tilde{p}\,\tilde{y}\right\|_{2,\tau} \leq 2k\tau\gamma_{\tilde{p},\tilde{r}}\left\|k\tau^{-1}\tilde{r}\Delta_+\tilde{y}\right\|_{2,\tau}, \quad \left\|k^2\tilde{q}\,\tilde{y}\right\|_{2,\tau} \leq 2k\tau\gamma_{\tilde{q},\tilde{r}}\left\|k\tau^{-1}\tilde{r}\Delta_+\tilde{y}\right\|_{2,\tau}. \tag{3.5}$$

Екіншіден, теорема шартынан $\left|k\tau^{-1}\tilde{s}_{j\tau}\overline{\Delta_+\tilde{y}_{j\tau}}\right| \leq \frac{1}{\alpha}k\tau^{-1}\tilde{r}_{j\tau}\left|\Delta_+\tilde{y}_{j\tau}\right|$ және $\frac{1}{4\tilde{c}_1(\tau)} \leq \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{3\tilde{c}_1(\tau)}$, мұндағы $\tilde{c}_1(\tau)$ — (3.4) теңсіздігіндегі тұрақты. Сондықтан (3.4) бойынша

$$\left\|k\tau^{-1}\tilde{s}\overline{\Delta_+\tilde{y}}\right\|_{2,\tau} \leq \frac{1}{3\tilde{c}_1}\left\|k\tau^{-1}\tilde{r}\Delta_+\tilde{y}\right\|_{2,\tau} \leq \frac{1}{3}\|l\tilde{y}\|_{2,\tau}. \tag{3.6}$$

Егер

$$k = \min\left\{\frac{1}{6\tau\gamma_{\tilde{p},\tilde{r}}\tilde{c}_1}, \frac{1}{6\tau\gamma_{\tilde{q},\tilde{r}}\tilde{c}_1}\right\}$$

деп ұйғарсақ, онда (3.4) теңсіздігінен

$$\left\|k^2\tilde{p}\tilde{y}\right\|_{2,\tau} \leq \frac{1}{3}\|l\,\tilde{y}\|_{2,\tau}, \tag{3.7}$$

ал (3.5) теңсіздігінен

$$\left\|k^2\tilde{q}\tilde{y}\right\|_{2,\tau} \leq \frac{1}{3}\|l\,\tilde{y}\|_{2,\tau} \tag{3.8}$$

шығады. (3.6), (3.7) және (3.8) теңсіздіктерінен Лемма 1.1 бойынша (1.2) теңдеуінің шешімі бар және жалғыз екеніне көз жеткіземіз.

Айталық, $\tilde{y}$ (1.2) теңдеуінің шешімі болсын. Сонда (3.4), (3.7), (3.8) және (3.6) теңсіздіктерінен алатынымыз:

$$\left\|\tau^{-2}\Delta^{(2)}\tilde{y}\right\|_{2,\tau} + \left\|\tau^{-1}k\tilde{r}\Delta_+\tilde{y}\right\|_{2,\tau} + \left\|\tau^{-1}k\tilde{s}\overline{\Delta_+\tilde{y}}\right\|_{2,\tau} + \left\|k^2\tilde{q}\tilde{y}\right\|_{2,\tau} + \left\|k^2\tilde{p}\overline{\tilde{y}}\right\|_{2,\tau} \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{3} + A_1(\tau)\right)\|\,l\,\tilde{y}\|_{2,\tau}. \tag{3.9}$$

(3.6) және (3.7) бойынша

$$\|\,l\,\tilde{y}\|_{2,\tau} = \left\|\,l\,\tilde{y} + \tau^{-1}k\tilde{s}\overline{\Delta_+\tilde{y}} + k^2\tilde{p}\overline{\tilde{y}}\right\|_{2,\tau} + \left\|\tau^{-1}k\tilde{s}\overline{\Delta_+\tilde{y}} + k^2\tilde{p}\overline{\tilde{y}}\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\,l\,\tilde{y} + \tau^{-1}k\tilde{s}\overline{\Delta_+\tilde{y}} + k^2\tilde{p}\overline{\tilde{y}}\right\|_{2,\tau} + \frac{2}{3}\|\,l\,\tilde{y}\|_{2,\tau},$$

осыдан

$$\|l\,\tilde{y}\|_{2,\tau} \leq 3\|\,L_0\,\tilde{y}\|_{2,\tau}. \tag{3.10}$$

(3.9) және (3.10)-нан

$$\left\|\tau^{-2}\Delta^{(2)}\tilde{y}\right\|_{2,\tau} + \left\|\tau^{-1}k\tilde{r}\Delta_+\tilde{y}\right\|_{2,\tau} + \left\|\tau^{-1}k\tilde{s}\overline{\Delta_+\tilde{y}}\right\|_{2,\tau} + \left\|k^2\tilde{q}\tilde{y}\right\|_{2,\tau} + \left\|k^2\tilde{p}\overline{\tilde{y}}\right\|_{2,\tau} \leq$$

$$\leq (2 + 3c_1(\tau))\|\,L_0\tilde{y}\|_{2,\tau}.$$

Осыдан $\tau = \frac{h}{k}$ алмастыруын жасап, (3.3) теңсіздігіне келеміз. Теорема дәлелденді.

Бұл мақала Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігінің 0085/ПЦФ-14 мақсатты бағдарламасы және 5132/ГФ4 грантық жобасы есебінен ішінара қаржыландырылды.

Әдебиеттер тізімі

1 Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n / М. Отелбаев // Труды МИ АН СССР. — 1983. — Т. 161. — С. 195–217.

2 Костюченко А.Г. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / Анатолий Гордеевич Костюченко. — М.: Изд-во МГУ, 1966.

3 Оспанов Қ.Н. Екінші ретті айырымдық бір теңдеулер жүйесі шешімдерінің қасиеттері жайлы / Қ.Н. Оспанов, А. Зұлхажав // Қарағанды ун-нің хабаршысы. Математика сер. — 2015. — № 2(78). — 124–136-б.

4 Prüss J., Rhandi A., Schnaubelt R. The domain of elliptic operators on $L_p(\mathrm{R}^d)$ with unbounded drift coefficients / J. Prüss, A. Rhandi, R. Schnaubelt // Houston J. Math. — 2006. — Vol. 32, No. 2. — P. 563–576.

5 Kolmogoroff A.N. Uber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung / A.N. Kolmogoroff // Mathematische Annalen. — 1931. — Vol. 104.

6 Bogachev V.I. Fokker-Planck-Kolmogorov Equations / V.I. Bogachev, N.V. Krylov, M. Reckner, S.V. Shaposhnikov. — AMS, 2015. — Vol. 207.

7 Kato T. Perturbation theory for lenear operators. (Th. 1.1, Th. 1.16 §4) / T. Kato. — Berlin. Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1966. — 740 p.

8 Зұлхажав А. Екінші ретті айырымдық теңдеулер жүйесінің коэрцитивті шешілу шарттары / А. Зұлхажав // Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ хабаршысы. — 2015. — № 6(109). — 334–337-б.

К.Н. Оспанов, Т.Н. Бекжан, Д.Р. Бейсенова

Условия коэрцитивной разрешимости бесконечной системы разностных уравнений с комплексными коэффициентами

Эти оценки полностью описывают область определения матричного оператора, который соответствует системе. Коэффициенты системы составляют неограниченные последовательности, а полученные результаты не зависят от колебания этих коэффициентов. Последний факт доказывает, что природа бесконечно разностных систем совсем иная, чем у сингулярных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: коэрцитивные решения, бесконечная разница систем, оценка решения, непрерывный возврат оператора, замкнутый оператор, линейная цепь.

K.N.Ospanov, T.N.Bekjan, D.R.Beisenova

Coercive solvability conditions of an infinite system of difference equations with complex coefficients

These estimates completely describe definition range of the matrix operator which corresponds to system. Coefficients of system make the unlimited sequences. And the received results do not depend on fluctuation of these coefficients. The last fact shows that the nature of infinitely difference systems absolutely other than singular differential equations.

Keywords: coercive solution, infinite difference system, solution estimation, continuous return operator, closed operator, linear phinite.

References

1 Otelbaev, M. (1983). Koertsitivnye otsenki i teoremy razdelimosti dlia ellipticheskikh uravnenii v R^n [Coercive estimates and separability theorems for elliptic equations in R^n]. *Trudy MI AN SSSR — Proceedings of the USSR Academy of Sciences MI*, 161, 195–217 [in Russian].

2 Kostyuchenko, A.G. (1966). O nekotorykh spektralnykh svoistvakh differentsialnykh operatorov [On some spectral properties of differential operators]. *Doctor's thesis.* Moscow: Izdatelstvo MHU [in Russian].

3 Ospanov, K.N., Zulhazhav, A. (2015). Ekinshi retti aiyrymdyk bir tendeuler zhuiesi sheshimderinin kasietteri zhaily [On the properties of solutions of one system of second order difference equations]. *Karahandy universitetinin khabarshysy. Matematika seriiasy – Bulletin of Karaganda University. Series Mathematics, 2,* 78, 124–136 [in Kazakh].

4 Pruss, J., Rhandi, A. & Schnaubelt, R. (2006). Houston J. Math., Vol. 32, 2, 563–576.

5 Kolmogoroff, A.N. (1931). Uber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mathematische Annalen, Vol. 104.

6 Bogachev, V.I., Krylov, N.V., Reckner, M. & Shaposhnikov, S.V. (2015). Fokker-Planck-Kolmogorov Equations. AMS, Vol. 207.

7 Kato, T. (1966). Perturbation theory for lenear operators. (Th. 1.1, Th. 1.16 §4). Berlin. Heidelberg; New York: Springer-Verlag.

8 Zulhazhav, A. (2015). Ekinshi retti aiyrymdyk tendeuler zhuiesinin koertsitivti sheshilu sharttary [Conditions of Coercitive Solutions of the Second Order Differential Equations System]. *L.N.Gumilev atyndahy Euraziia ulttyk universitet khabarshysy – Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University, 6,* 109, 334–337 [in Kazakh].