УДК 512.54

А.В. Зенков

Алтайский государственный аграрный университет, Барнаул, Россия
(E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com)

Представления и сплетения m-группы

m-Группа есть пара $(G, {}_*)$, где G — решеточно упорядоченная группа (ℓ-группа) и ${}_*$ есть убывающий автоморфизм 2-го порядка G. В статье получено описание m-транзитивных представлений произвольной m-группы. Найдены необходимые и достаточные условия того, что m-группа допускает точное m-транзитивное представление. Изучено строение решетки конгруэнций произвольного m-транзитивного представления, введены понятия m-2-транзитивного и m-примитивного представлений. Получено описание m-транзитивных примитивных представлений в терминах стабилизаторов. Указаны необходимые и достаточные условия m-2-транзитивности и изучены некоторые свойства таких представлений. Кроме того, введено понятие сплетения m-групп подстановок и доказано, что m-транзитивная группа подстановок вложима в сплетение подходящих m-транзитивных m-групп подстановок. Как следствие, установлено, что произвольная m-транзитивная группа из произведения двух многообразий m-групп вложима в сплетение подходящих m-транзитивных групп из этих многообразий.

Ключевые слова: m-группа, представление, конгруэнция, сплетение.

Введение

Напомним основные понятия теории решеточно упорядоченных групп и групп монотонных подстановок. Решеточно упорядоченная группа (ℓ-группа) — это алгебраическая система G сигнатуры. Далее изучаются только (точные) m-транзитивные представления $l =< \cdot,^{-1}, e, \vee, \wedge >$, совмещающие в себе структуры группы и решетки, связанные естественными соотношениями

$$x(u \vee v)y = xuy \vee xvy; \quad x(u \wedge v)y = xuy \wedge xvy.$$

Согласно [1] m-группой называется алгебраическая система G сигнатуры $m =< \cdot,^{-1}, e, \vee, \wedge, {}_* >$ такая, что $< G, \cdot, {}^{-1}, e, \vee, \wedge >$ является ℓ-группой, а одноместная операция ${}_*$ задает автоморфизм группы $< G, \cdot, {}^{-1}, e >$ порядка 2 и антиавтоморфизм решетки $< G, \vee, \wedge >$, т.е. ${}_*$ взаимно однозначно отображает G на себя, причем выполняются соотношения

$$(xy)_* = x_* y_*, \ (x_*)_* = x, \ (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, \ (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*.$$

В дальнейшем ${}_*$ называем реверсивным автоморфизмом ℓ-группы G второго порядка и m-группу G с фиксированным реверсивным автоморфизмом ${}_*$ записываем как пару $(G, {}_*)$. Класс $\mathcal{M}$ всех m-групп образует многообразие сигнатуры m. Множество всех многообразий m-групп M является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения. Более того, M есть решетка относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий m-групп. Как и в случае решеточно упорядоченных групп, теория представлений и сплетений групп монотонных подстановок оказывается эффективным инструментом изучения решетки M.

Пусть Ω — некоторое линейно упорядоченное множество и a – реверсивный автоморфизм 2-го порядка Ω, т. е. для любых $\omega, \omega' \in \Omega$ верно $((\omega)a)a = \omega$ и $\omega < \omega' \Leftrightarrow (\omega)a > (\omega')a$. Через $Aut(\Omega)$ обозначим группу (относительно суперпозиции) всех порядковых подстановок Ω. Группа $Aut(\Omega)$ может быть превращена в m-группу, если операция ${}_*$ задается при помощи равенства $g_* = aga$ для всякого $g \in Aut(\Omega)$. Стандартно, *представлением m-группы* $(G,{}_*)$ порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Ω является m-гомоморфизм $\nu : G \to Aut(\Omega)$. Этот факт записываем в виде $((G)\nu, \Omega, a)$. Если ν есть изоморфизм, то представление называется *точным* и тогда пишем (G, Ω, a). Отметим [2], что всякая m-группа допускает точное представление порядковыми подстановками подходящего линейно упорядоченного множества.

Представление $((G)\nu, \Omega, a)$ назовем *m-транзитивным*, если для всех $\omega, \omega' \in \Omega$, быть может за исключением точки o, существует такой $x \in G_* = gr.((G)\nu, a)$, что $(\omega)x = \omega'$(здесь o – точка Ω, неподвижная относительно действия a). Фраза «быть может за исключением точки o» означает, что o исключается из рассмотрения, если ее стабилизатор $St_G(o) = G$.

Данная работа является обзором результатов, полученных при изучении m-транзитивных представлений и связанных с этим вопросом сплетений и многообразий m-групп.

Как обычно, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $|x| = x \vee x^{-1}$, $x \gg y$ означает, что элементы x, y архимедово неэквивалентны, т.е. $|x| > |y|^n$ для любого натурального числа n. Выражение $x \sim y$ используем, если элементы x, y архимедово эквивалентны. Всюду в работе $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ обозначают множества натуральных и целых чисел соответственно; $\mathbb{R}$ — естественно линейно упорядоченное множество действительных чисел. Через $var_m(\mathcal{K})$ обозначаем многообразие m-групп, порожденное классом m-групп $\mathcal{K}$.

Все необходимые сведения по теории групп и решеточно упорядоченных групп можно найти в книгах [3, 4] соответственно.

§1 Представления и конгруэнции

Пусть $(G,_*)$ — произвольная m-группа и V — ее выпуклая ℓ-подгруппа. Как обычно, через $R(G : V)$ обозначим множество правых смежных классов ℓ-группы G по ее выпуклой ℓ-подгруппе V с порядком: $Vx \leq Vy$ тогда и только тогда, когда $vx \leq y$ для некоторого $v \in V$. Если данный порядок линеен, то V называется *спрямляющей*. Следующая теорема, доказанная в [5], дает необходимые и достаточные условия существования m-транзитивного представления в терминах спрямляющих подгрупп.

Теорема 1.1. Пусть $(G,_*)$ – m-группа и V — ее спрямляющая ℓ-подгруппа. Тогда существует линейно упорядоченное множество, *определяемое* V, такое, что группа допускает m-транзитивное представление подстановками этого множества. Обратно: для всякого m-транзитивного представления $((G)\nu, \Omega, a)$ найдется спрямляющая ℓ-подгруппа V, определяющая Ω.

Отметим, что доказательство этой теоремы указывает способы построения m-транзитивных представлений. Рассмотрим теперь вопрос о существовании точных m-транзитивных представлений. Выпуклая ℓ-подгруппа V m-группы $(G,_*)$ называется *представляющей*, если V — спрямляющая и не содержит неединичных m-идеалов.

Теорема 1.2. Произвольная m-группа $(G,_*)$ допускает точное m-транзитивное представление тогда и только тогда, когда она содержит представляющую ℓ-подгруппу.

Как обычно, неединичная m-группа $(G,_*)$ называется *подпрямо m-неразложимой*, если пересечение всех ее неединичных m-идеалов отлично от единицы.

Следствие 1.3. Подпрямо неразложимая m-группа $(G,_*)$ допускает точное m-транзитивное представление.

Следствие 1.4. Всякое многообразие m-групп порождается m-группами, допускающими точное m-транзитивное представление.

Далее изучаются только (точные) m-транзитивные представления. Рассмотрим (G, Ω, a). Пусть $L = \{w \in \Omega \mid (w)a > w\}, R = \{(\ell)a \mid \ell \in L\}$ и o — неподвижная, относительно a, точка Ω. Отметим, что существуют представления, как содержащие неподвижную точку, так и не содержащие таковой. Множество Ω представимо в виде $\Omega = L \overleftarrow{\bigcup} \{o\}^{\varepsilon} \overleftarrow{\bigcup} R$, где $\varepsilon = 1$, если неподвижная точка существует, и $\varepsilon = 0$ в противном случае. Стандартно, отношение эквивалентности Θ, определенное на Ω, будем называть отношением *m-эквивалентности (m-конгруэнтности)*, если оно является выпуклым и $w\Theta w' \Leftrightarrow (w)x\Theta(w')x$ для любого $x \in G_*$. Множество $\mathcal{K}$ всех m-эквивалентностей, определенных на Ω, очевидно, непусто, и более того, на $\mathcal{K}$ можно ввести отношение частичного порядка $\preceq$, полагая $\Theta_1 \preceq \Theta_2 \Leftrightarrow w\Theta_1 w' \Rightarrow w\Theta_2 w'$.

Пусть $\Theta \in \mathcal{K}$ и $\triangle = \ell\Theta$ — класс эквивалентности, содержащий произвольную, но фиксированную точку $\ell \in L$. Множество $\triangle$ является m-блоком, т.е. $(\triangle)x \cap \triangle = \emptyset$, либо $(\triangle)x = \triangle$ для любого $x \in G_*$. Обратно: если $\triangle$ – m-блок, то отношение Θ, определенное на Ω по правилу $w = w'$ либо $w, w' \in (\triangle)x$ для подходящего $x \in G_*$, будет отношением m-эквивалентности.

Если $\triangle = \ell\Theta$, то $St_G(\triangle)$ – выпуклая ℓ-подгруппа, содержащая $St_G(\ell)$. Обратно, если H — выпуклая ℓ-подгруппа, содержащая $St_G(\ell)$, то выпуклое замыкание $\triangle$ в Ω орбиты $(\ell)H$ есть m-блок [6].

Таким образом, существует соответствие между $\mathcal{K}$ и множеством $\mathcal{H}$ всех выпуклых ℓ-подгрупп, содержащих $St_G(\ell)$. Следующий пример показывает, что оно не является взаимно однозначным.

Пример. Рассмотрим группу

$$S_2 = \langle a_1, a_2, b | \ [a_1, a_2] = e, a_1^b = a_2, a_2^b = a_1 \rangle.$$

Если $g \in S_2$, то g представим, причем единственным способом, в виде $g = a_1^m a_2^n b^k$, $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Относительно лексикографического порядка, т.е. $g \geq e \Leftrightarrow k > 0$ или $k = 0, m \geq 0, n \geq 0$, S_2 является ℓ-группой. Определим отображение $\varphi : S_2 \to S_2$ по правилу

$$(g)\varphi = a_1^{-m} a_2^{-n} b^{-k}.$$

Тогда (S_2, φ) будет m-группой. Пусть $A_1 = \langle a_1 \rangle, A_2 = \langle a_2 \rangle$. Эти выпуклые ℓ-подгруппы являются спрямляющими, т.е. множества правых смежных классов $X = R(S_2 : A_1), Y = R(S_2 : A_2)$ линейно упорядочены относительно естественно вводимого упорядочения множества правых смежных классов. Рассмотрим $\triangle_1 = \{A_1 a_2^n\}, \triangle_2 = \{A_2 a_1^m\}$. Тогда $X = \overleftarrow{\bigcup} \triangle_1 b^k, Y = \overleftarrow{\bigcup} \triangle_2 b^k$.

Построим новое линейно упорядоченное множество Ω, полагая $\triangle_1 b^k < \triangle_2 b^k \triangle_1 b^{k+1}$. Очевидно, что множество Ω сохраняет линейные порядки исходных множеств. Определим отображение $a : \Omega \to \Omega$ по правилу $(A_1 a_2^n b^k)a = A_2 a_1^{-n} b^{1-k}$ и $(A_2 a_1^m b^k)a = A_1 a_2^{-m} b^{1-k}$. Из определения следует, что a – реверсивный автоморфизм 2-го порядка Ω. Правое регулярное представление (S_2, φ) порядковыми подстановками Ω является точным и m-транзитивным, но не транзитивным. Ясно, что оно не содержит неподвижной точки. Итак, можно рассмотреть представление (S_2, Ω, a). Из сказанного выше следует, что $\nabla^- = \triangle_1 \overleftarrow{\cup} \triangle_2, \triangle_2, \nabla^+ = \triangle_2 \overleftarrow{\cup} \triangle_1, b$ – m-блоки и, более того, $St_{\triangle_2}(S_2) = St_{\nabla^+}(S_2) = St_{\nabla^-}(S_2) = A_1 \times A_2$. Поэтому данный стабилизатор определяет три конгруэнции.

Представление (G, Ω, a) будем называть собственным, если для любого $g \in G$ верно $(L)g = L$. Несложно доказать, что такие представления дают примеры, когда $H \in \mathcal{H}$ определяет две конгруэнции.

Итак, в случае m-групп возможны следующие ситуации: 1) соответствие между $\mathcal{K}$ и $\mathcal{H}$ взаимно однозначно; 2) существует $H \in \mathcal{H}$, определяющая две конгруэнции; 3) существует $H \in \mathcal{H}$, определяющая три конгруэнции. Множество $\mathcal{H}$ является линейно упорядоченным относительно теоретико множественного включения, и все группы этого множества спрямляющие. Отметим, что ситуация 1) наблюдается в случае, когда представление транзитивно.

Для каждой $H_\gamma \in \mathcal{H}$ через $\Theta_\gamma, \Theta_\gamma^+, \Theta_\gamma^-$ обозначим конгруэнции, соответственно определяемые m-блоками: $\triangle_\gamma = conv_\Omega((\ell)H_\gamma)$, $\nabla_\gamma^+ = \triangle_\gamma \overleftarrow{\cup} (\triangle_\gamma)at$, $\nabla_\gamma^- = (\triangle_\gamma)at \overleftarrow{\cup} \triangle_\gamma$. Очевидно, $\Theta_\gamma = \Theta_\gamma^+ \cap \Theta_\gamma^-$. Имеет место

Теорема 1.5. Пусть (G, Ω, a) – произвольное m-транзитивное представление и $\mathcal{K}$ – множество всех m-эквивалентностей, определенных на Ω. Тогда $\mathcal{K}$ есть линейно упорядоченное множество относительно ранее введенного порядка (ситуации 1), 2) либо существует и единственная $H_\alpha \in \mathcal{H}$ такая, что $\Theta_\alpha \preceq \Theta_\alpha^+, \Theta_\alpha^- \preceq \Theta_{\alpha+1}$ и $\mathcal{K}$ линейно упорядочено при $H_\beta \subseteq H_\alpha$ и $H_{\alpha+1} \subseteq H_\beta$.

Следующие m эквиавалентности назовем *тривиальными*: A) эквивалентность, когда все классы эквивалентности одноэлементны; B) эквивалентность, когда все классы эквивалентности двухэлементны; C) эквивалентность, имеющая три (либо два) класса эквивалентности $L, \{o\}, R$ (L, R); D) эквивалентность, имеющая единственный класс эквивалентности Ω. Представление (G, Ω, a) *m-примитивно*, если оно не допускает нетривиальной m-эквивалентности. Следующая теорема дает критерий m-примитивности в терминах стабилизаторов точек.

Теорема 1.6. Произвольное m-транзитивное представление (G, Ω, a), где $\Omega = L \overleftarrow{\bigcup} \{o\}^\varepsilon \overleftarrow{\bigcup} R$, m-примитивно тогда и только тогда, когда для любой точки $w \in \Omega$, быть может за исключением точки o, стабилизатор $St_G(w)$ есть максимальная выпуклая ℓ-подгруппа G.

Следующее утверждение выясняет строение собственных представлений.

Предложение 1.7. Всякое m-транзитивное представление (G, Ω, a) собственно m-транзитивно тогда и только тогда, когда G изоморфна прямому произведению $G_L \times G_L^*$ для подходящей транзитивной ℓ-группы подстановок G_L подходящего линейно упорядоченного множества L и $\Omega = L \overleftarrow{\bigcup} \{o\}^\varepsilon \overleftarrow{\bigcup} L^*$.

Следствие 1.8. Всякая m-группа $(G, _*)$, допускающая собственно m-транзитивное представление $(G_L \times G_L^*, \Omega, a)$, не является упорядоченной.

Следствие 1.9. Собственно m-транзитивное представление $(G_L \times G_L^*, \Omega, a)$ m-примитивно тогда и только тогда, когда транзитивное представление (G_L, L) примитивно.

Будем говорить, что представление (G, Ω, a) *m-2-транзитивно*, если для любых $\ell_1 < \ell_2 \leq o < r_3 < < r_4 \in \Omega$, быть может за исключением точки o, существует $g \in G$, что:

1) $(\ell_1)g = r_3$, $(\ell_2)g = r_4$ либо

2) $(\ell_1)ag = r_4$, $(\ell_2)ag = r_3$.

Представление (G, Ω, a), где $\Omega = L \overleftarrow{\bigcup} \{o\}^\varepsilon \overleftarrow{\bigcup} R$, назовем *$m$-полутранзитивным*, если для всех $\ell_1 < \ell_2 < < \ell \in L$ существует $g \in St_G(\ell)$, что $(\ell_1)g = \ell_2$. Имеет место

Теорема 1.10. Представление (G, Ω, a) m-2-транзитивно тогда и только тогда, когда оно m-транзитивно и m-полутранзитивно.

Следствие 1.11. Если представление (G, Ω, a) m-2-транзитивно, то оно 2-транзитивно либо собственно m-примитивно.

Напомним, многообразие всех нормальнозначных m-групп $\mathcal{N}$ задается тождеством

$$|x||y| \wedge |y|^2|x|^2 = |x||y|.$$

Это многообразие замечательно тем, что оно является наибольшим нетривиальным многообразием m-групп [7]. Следующая теорема дает описание примитивных представлений нормальнозначных групп.

Теорема 1.12. Пусть (G, Ω, a) — m-примитивное представление нормальнозначной m-группы $(G,_{*})$. Тогда:

1) (G, Ω, a) — правое регулярное представление подгруппы аддитивной группы $\mathbb{R}$ действительных чисел. Более того, если это представление допускает эквивалентность B), то эта подгруппа циклическая, либо

2) представление является собственным и $G \cong G_L \times G_L^*$ для подходящей подгруппы G_L аддитивной группы $\mathbb{R}$ действительных чисел.

§ 2 Сплетения и многообразия

Пусть (G, Ω, a), (H, T, b) – представления m-групп (G, φ) и (H, ψ) соответственно и $\Omega = L_1 \overleftarrow{\bigcup} \{o_1\}^{\varepsilon_1} \overleftarrow{\bigcup} R_1$, $T = L_2 \overleftarrow{\bigcup} \{o_2\}^{\varepsilon_2} \overleftarrow{\bigcup} R_2$. Рассмотрим стандартное (в смысле ℓ-групп) сплетение $GWrH$. Всякий элемент $f \in GWrH$ имеет вид $f = (\{g_\tau\}, h)$, где $g_\tau \in G, \tau \in T, h \in H$. В [1] на $GWrH$ был определен реверсивный автоморфизм второго порядка $\varphi Wr\psi$ по правилу $(f)\varphi Wr\psi = (\{(g)\varphi_{(\tau)b}\}, (h)\psi)$, превращающий $GWrH$ в m-группу. Пусть $\Sigma = \Omega \overleftarrow{\times} T$. Определим на Σ отображение d по правилу $(w, \tau)d = ((w)a, (\tau)b)$. Ясно, что d – реверсивный автоморфизм второго порядка Σ и $(o_1, o_2)d = (o_1, o_2)$. Определим теперь действие элементов группы $GWrH$ на Σ следующим образом:

$$(w, t)(\{g_\tau\}, h) = ((w)g_{(t)b}, (t)h).$$

Ясно, что так определенное действие является точным и порядковым, т.е $GWrH \subseteq Aut(\Sigma)$. Проверим, что $(f)\varphi Wr\psi = dfd$. Действительно, $(w, t)dfd = ((w)a, (t)b)fd = ((w)ag_t, tbh)d = ((w)ag_ta, tbhb) = (w, t)(f)\varphi Wr\psi$. Таким образом, имеем представление $(GWrH, \Sigma, d)$ группы $(GWrH, \varphi Wr\psi)$, которое будем называть *сплетением* m-групп подстановок (G, Ω, a), (H, T, b).

Пусть дано представление (G, Ω, a) и на Ω определена m-конгруэнция Θ. Как и выше, $\triangle$ – m-блок, содержащий некоторую точку $\ell \in L$. Тогда можно рассмотреть естественно линейно упорядоченное фактор-множество Ω/Θ, на котором действует правым умножением G. Через L_Θ обозначим «ленивую» подгруппу G, т.е. это все функции, оставляющие все точки Ω/Θ на месте. Несложно заметить, что L_Θ есть m-идеал и поэтому можно рассмотреть фактор-группу $\overline{G} = G/L_\Theta$, действующую на Ω/Θ. Множество $\triangle$ определяет новое линейно упорядоченное множество ∇ и действующую на нем m-транзитивно группу $\overline{G}_{(\nabla)}$. Отметим, что строение ∇ зависит от свойств исходного представления. Следующая теорема, доказанная в [8], есть аналог теоремы Калужнина-Краснера для подстановочных сплетений m-групп.

Теорема 2.1. Пусть представление (G, Ω, a) m-транзитивно и на Ω определена m-конгруэнция Θ. Тогда (G, Ω, a) изоморфно вложима в сплетение $(\overline{G}_{(\nabla)} Wr \overline{G}, \Sigma, d)$, где группы $\overline{G}_{(\nabla)}$ и $\overline{G}$ действуют m-транзитивно на множествах ∇ и Ω/Θ соответственно.

Эта теорема позволяет использовать технику сплетений при изучении многообразий m-групп.

Напомним , что ℓ-подгруппа H ℓ-группы G называется замкнутой, если для любого подмножества элементов H, у которого в G существует точная верхняя грань, она принадлежит H. m-Подгруппу H m-группы G будем называть замкнутой, если она замкнута как ℓ-подгруппа. Отметим, что

$$(\bigvee_{i \in I} h_i)_* = \bigwedge_{i \in I} (h_i)_*, \quad h_i \in H.$$

Предложение 2.2. Пусть (G, Ω, a) — m-группа подстановок и H — замкнутый идеал. Тогда существует такая m-конгруэнция Θ, что $L_\Theta = H$.

Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ — произвольные многообразия m-групп. Тогда стандартно определяется их произведение $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$ как множество всех таких m-групп $(G, \ _*)$, что в них существует m-идеал $H \in \mathcal{U}$ и $G/H \in \mathcal{V}$.

Теорема 2.3. Пусть (G, Ω, a) — m-транзитивная группа подстановок из произведения $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$ многообразий m-групп $\mathcal{U}, \mathcal{V}$. Тогда (G, Ω, a) изоморфно вложима в сплетение подходящих m-транзитивных групп подстановок из многобразий m-рупп $\mathcal{U}, \mathcal{V}$.

Понятие мимикрирования позволяет применить предыдущую теорему в теории многообразий. Итак, рассмотрим представления (G, Ω, a) и (H, Λ, b). Фиксируем некоторое конечное, но произвольное множество $\Phi = \{w_p(\overline{x}, \overline{x_*}) \parallel p = 1, \ldots, N\}$ слов сигнатуры m от переменных $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$. Далее рассмотрим произвольный $\overline{h} = (h_1, h_2, \ldots h_n) \in H^n$ и произвольную пару точек $\lambda, (\lambda)b \in \Lambda$. Пусть $\Lambda_\Phi = \{(\lambda)w_p(\overline{h}, \overline{h_*})\} \cup \{((\lambda)b)w_p(\overline{h}, \overline{h_*})\}$. Ясно, что Λ_Φ линейно упорядочено. Будем говорить, что (G, Ω, a) мимикрирует (H, Λ, b), если найдутся $\alpha, (\alpha)a \in \Omega$ и $\overline{g} = (g_1, g_2, \ldots g_n) \in G^n$ такие, что линейно упорядоченное множество $\Omega_\Phi = \{(\alpha)w_p(\overline{g}, \overline{g_*})\} \cup \{((\alpha)a)w_p(\overline{g}, \overline{g_*})\}$ «сохраняет структуру» Λ_Φ, т. е. $((\alpha)a^\varepsilon)w_p < ((\alpha)a^{\varepsilon'})w_q \Leftrightarrow ((\lambda)b^\varepsilon)w_p < ((\lambda)b^{\varepsilon'})w_q$, где $\varepsilon, \varepsilon' = 0$ либо 1.

Представление (G, Ω, a) мимикрирует m-группу $(H, _*)$, если оно мимикрирует ее всякое представление. Наконец, представление (G, Ω, a) мимикрирует многообразие $\mathcal{V}$, если $(G, _*) \in \mathcal{V}$ и (G, Ω, a) мимикрирует все группы из $\mathcal{V}$. Очевидно, если (G, Ω, a) мимикрирует $\mathcal{V}$, то $(G, _*)$ порождает $\mathcal{V}$. Верна

Теорема 2.4. Пусть многообразие m-групп $\mathcal{U}$ порождается классом m-групп U и многообразие m-групп $\mathcal{V}$ мимикрируется классом m-групп V. Тогда $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V} = var_m(\mathrm{W})$, где $\mathrm{W} = \{(UWrV, bWrc)\}\,; (U, b) \in \mathrm{U},\ (V, T, c) \in \mathrm{V}$.

Через $\mathcal{I}$ обозначим многообразие m-групп, определяемое тождеством $x_* = x^{-1}$. Определим $Inv : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по правилу $(z)Inv = -z$. Тогда пара $(\mathbb{Z}, Inv)$ есть m-группа. Рассмотрим правое регулярное представление $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z},\ Inv)$, где $(z)\ Inv = -z$.

Теорема 2.5. Представление $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z},\ Inv)$ мимикрирует $\mathcal{I}$.

Следствие 2.6. $\mathcal{I} = var_m((\mathbb{Z}, Inv)$.

Через $\mathbb{Z}^*$ обозначим аддитивную группу целых чисел, полученную из $\mathbb{Z}$ путем обращения порядка. Относительно координатного порядка прямое произведение $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ является ℓ-группой. Определим отображение $Exch : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ по правилу $(x, y)Exch = (y, x)$, где $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Тогда пара $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch)$ будет m-группой. Рассмотрим линейно упорядоченное множество $\Lambda = \mathbb{Z} \overleftarrow{\cup} \{o\} \overleftarrow{\cup} \mathbb{Z}^*$. Через $(z)_1((z)_2)$ обозначим элемент Λ, строго меньший (больший) o, и определим $Exch : \Lambda \to \Lambda$ по правилу $(z)_1\ Exch = (z)_2$, $(z)_2\ Exch = (z)_1$ и $(o)\ Exch = o$. Следовательно, можно рассмотреть представление $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \Lambda, \mathbb{E}\frown\approx)$.

Теорема 2.7. Представление $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \Lambda,\ Exch)$ мимикрирует $\mathcal{A}$.

Следствие 2.8. $\mathcal{A} = var_m((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch)$.

Пусть $\mathcal{I}^1 = \mathcal{I}$ и $\mathcal{I}^n = (\mathcal{I}^{n-1}\mathcal{I}$ при $n \geq 2$. Аналогично определяется $\mathcal{A}^n$. Через $Wr^n(\mathbb{Z}, Inv)$, $Wr^n(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch)$ обозначим сплетение n копий m-групп $(\mathbb{Z}, Inv)$ и $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch)$ соответственно.

Следствие 2.9. 1) $\mathcal{I}^n = var_m(Wr^n(\mathbb{Z}, Inv))$, *2)* $\mathcal{A}^n = var_m(Wr^n(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch))$.

Отметим, что многообразия $\bigvee\limits_n \mathcal{I}^n$, $\bigvee\limits_n \mathcal{A}^n$ различны, содержатся в многообразии $\mathcal{N}$ нормальнозначных m-групп и являются идемпотентами. Правда, неизвестно, совпадают ли $\bigvee\limits_n \mathcal{A}^n$ и $\mathcal{N}$?

В работе [9] построен пример, показывающий, что в решетке многообразий m-групп не всегда выполнено $\mathcal{V}(\bigvee\limits_i \mathcal{U}_i) = \bigvee\limits_i (\mathcal{V}\mathcal{U}_i)$ для бесконечного множества индексов. Более точно. Пусть $\beta_n = \dfrac{n}{n+1}$ – действительное число $(n \in \mathbb{N})$. Обозначим через $B_{\beta_n} = (\beta_n)$ бесконечную циклическую подгруппу мультипликативной группы положительных действительных чисел, порожденную числом β_n. Рассмотрим множество

$$T_{\beta_n} = \{(r, a) |\ r \in B_{\beta_n},\ \ a \in \mathbb{R}\}$$

с операцией умножения

$$(r, a)(r', a') = (rr', r'a + a').$$

Считаем, что $(r, a) \geq e$ в T_{β_n}, если $r = \beta_n^k$ и $k > 0$ или $k = 0$ и $a \geq 0$ в $\mathbb{R}$. Непосредственная проверка показывает, что T_{β_n} — линейно упорядоченная группа. Пусть $\mathcal{M}_n = var_m((T_{\beta_n} \times T^*_{\beta_n}, Exch))$ верна.

Теорема 2.10. Имеет место $\mathcal{A}(\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n) \neq \bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{A}\mathcal{M}_n)$.

Отметим [10], что имеет место

$$\mathcal{U}(\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2) = \mathcal{U}\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{U}\mathcal{V}_2.$$

Список литературы

1 *Giraudet M., Rachunek J.* Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. Journal. — 1999. — Vol. 49. — No. 124. — P. 743–766.

2 *Giraudet M., Lucas F.* Groupes a' motie' ordonne's, Fundam. Math. — 1991. — Vol. 139. — No. 2. — P. 75–89.

3 *Курош А.Г.* Теория групп. — М.: Наука, 1967.

4 *Kopytov V.M., Medvedev N.Ya.* The theory of lattice-ordered groups. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1994.

5 *Вараксин С.В., Зенков А.В.* О представлениях m-групп // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54. — № 2. — С. 298–302.

6 *Зенков А.В.* О конгруэнциях m-групп // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54. — № 6. — С. 1280–1288.

7 *Копытов В.М., Рахунек Й.* Наибольшее собственное многообразие m-групп // Алгебра и логика. — 2003. — Т. 42. — № 5. — С. 624–635.

8 *Зенков А.В.* Сплетения групп монотонных подстановок // Сиб. матем. журн. — 2011. — Т. 52. — № 6. — С. 1264–1270.

9 *Баянова Н.В., Зенков А.В.* О бесконечной дистрибутивности в решетке многообразий m-групп // Алгебра и логика. — 2015. — Т. 54. — № 1. — С. 3–15.

10 *Зенков А.В., Исаева О.В.* Два вопроса теории m-групп // Сиб. матем. журн. — 2014. — Т. 55. — № 6. — С. 1279–1282.

А.В. Зенков

M-группа өрімдері мен берілуі

m-Группа дегеніміз — бұл $(G,\ _*)$ жұбы, мұндағы G — торды реттелген ℓ-группа және $_*$ 2-ретті кемімелі G автоморфизмі. M-транзитивті көріністің m-группалы еркін сипаттамасы алынған. m-группа дәл m-транзитивті көріністі анықтайтын қажетті және жеткілікті шарттар алынған. Ары қарай m-транзитивті көріністің еркін конгруэнциясы торының құрылымы зерттелген, m-қарапайым көрінісі мен m-2-транзитивті ұғымдары енгізілген. Стабилизаторлар тертинінде m-транзитивті қарапайым көрінісінің сипаттамасы алынған. m-2-транзитивтіліктің қажетті және жеткілікті шарттар көрсетілген және осындай көріністердің кейбір қасиеттері зерттелген. Мақалада m-группалардың алмастырып өрілу ұғымы енгізілген және алмастырудың m-транзитивті группасы m-транзитивті m-группалардың алмастыру өріміне салымдылығы дәлелденген. Салдары ретінде m-группалардың екі көпбейнеліктерінің көбейтіндісінің m-транзитивті группасы осы көпбейнеліктерден алынған сәйкес m-транзитивті өрімге салымдылығы табылған.

A.V. Zenkov

Views and plexus m-group

Recall that an m-group is a pair $(G,_*)$, where G is an ℓ-group and $_*$ is a decreasing order two automorphism of G. We obtain a description of the m-transitive representations of an arbitrary m-group. Some necessary and sufficient conditions are given for an m-group to admit a faithful m-transitive representation. We study the lattice of congruences of an arbitrary m-transitive representation, introduce the notions of m-2-transitive and m-primitive representations, and describe the m-transitive primitive representations in terms of stabilizers. Also we give necessary and sufficient conditions for m-2-transitivity and study some properties of these representations. We introduce the concept of wreath product of the m-groups of permutations and prove that an m-transitive group of permutations with an m-congruence is embeddable into the wreath product of the suitable m-transitive m-groups of permutations. As a consequence, we establish that an arbitrary m-transitive group in the product of two varieties of m-groups embeds into the wreath product of the suitable m-transitive groups of these varieties.

References

1 Giraudet M., Rachunek J. *Czech. Math. Journal,* 1999, 49, 124, p. 743–766.

2 Giraudet M., Lucas F. *Groupes a' motie' ordonne's, Fundam. Math.,* 1991, 139, 2, p. 75–89.

3 Kurosh A.G. *The Theory of Groups,* Moscow: Nauka, 1967.

4 Kopytov V.M., Medvedev N.Ya. *The theory of lattice-ordered groups,* Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publ. 1994.

5 Varaksin S.V., Zenkov A.V. *Siberian Mathematical Journal,* 2013, 54, 2, p. 229–302.

6 Zenkov A.V. *Siberian Mathematical Journal,* 2013, 54, 6, p. 1280–1288.

7 Kopytov V.M., Rachunek J. *Algebra and Logic,* 2003, 42, 5, p. 624–635.

8 Zenkov A.V. *Siberian Mathematical Journal,* 2011, 52, 6, p. 1264-1270.

9 Bayanova N.V., Zenkov A.V. *Algebra and Logic,* 2015, 54, 1, p. 3–15.

10 Zenkov A.V., Isaeva O.V. *Siberian Mathematical Journal,* 2014, 55, 6, p. 1279–1282.