

Н.С.Иманбаев

Казахстанский инженерно-педагогический университет Дружбы народов, Шымкент,  
Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы  
(E-mail: imanbaevnur@mail.ru)

## Характеристический определитель спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с интегральным возмущением краевого условия антипериодического типа

В статье рассмотрена задача, где исследованы базисные свойства системы корневых векторов для оператора Штурма-Лиувилля с интегральным возмущением краевого условия антипериодического типа. В рассматриваемой спектральной задаче определен характеристический детерминант.

*Ключевые слова:* оператор Штурма-Лиувилля, собственные значения, антипериодический тип, возмущенная краевая задача.

В пространстве  $L_2(0,1)$  рассмотрим оператор  $L_0$ , порожденный обыкновенным дифференциальным выражением

$$L_0(u) \equiv -u''(x) + q(x)u(x), q(x) \in C[0,1], 0 < x < 1 \quad (1)$$

и краевыми условиями общего вида

$$U_j(u) = a_{j1}u'(0) + a_{j2}u'(1) + a_{j3}u(0) + a_{j4}u(1) = 0, j = 1, 2. \quad (2)$$

В случае когда краевые условия (2) являются усиленно регулярными, из результатов В.П.Михайлова [1] и Г.М.Кесельмана [2] следует базисность Рисса в  $L_2(0,1)$  систем собственных и присоединенных функций (СиПФ) задачи. В случае когда краевые условия не усиленно регулярны, вопрос о базисности систем СиПФ остается еще открытым.

Введем в рассмотрение матрицу из коэффициентов краевых условий (2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Через  $A(ij)$  будем обозначать матрицу, составленную из  $i$ -го и  $j$ -го столбцов матрицы  $A$ ,  $A_{ij} = \det A(ij)$ . Пусть краевые условия (2) являются регулярными, но не усиленно регулярными. Согласно [3; 73] при выполнении условий

$$A_{12} = 0, A_{14} + A_{23} = 0; A_{14} + A_{23} = m(A_{13} + A_{24}) \quad (3)$$

краевые условия (2) будут эквивалентны регулярным, но не усиленно регулярным краевым условиям.

В [4] было предложено, что все регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия разделить на четыре типа:

- I.  $A_{14} = A_{23}, A_{34} = 0$ .
- II.  $A_{14} = A_{23}, A_{34} \neq 0$ .
- III.  $A_{14} \neq A_{23}, A_{34} = 0$ .
- IV.  $A_{14} \neq A_{23}, A_{34} \neq 0$ .

Например, краевые условия с периодическими или антипериодическими условиями образуют тип I и определяются в следующем виде:

$$A_{14} = A_{23}, A_{34} = 0,$$

т.е.  $a_{11} = -a_{12}, a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = 0, a_{23} = -a_{24}$ . Эти условия будут эквивалентны краевым условиям, задаваемым матрицей  $A$ , где возможны два варианта:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

периодические или

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

антипериодические.

Однако те же краевые условия с «младшими коэффициентами» образуют тип II. Краевые условия, определенные в виде  $A_{14} \neq A_{23}, A_{34} = 0$ , образуют тип III. Эти условия всегда эквивалентны краевым условиям, задаваемым матрицей  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом А.С.Макиным выделен один тип не усиленно регулярных краевых условий, при которых система СиПФ спектральной задачи [4]

$$L_0(u) \equiv -u'(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), q(x) \in C[0, 1], 0 < x < 1 \quad (4)$$

и краевыми условиями общего вида

$$U_j(u) = a_{j1}u'(0) + a_{j2}u'(1) + a_{j3}u(0) + a_{j4}u(1) = 0, j = 1, 2$$

образует базис Рисса при любых потенциалах  $q(x)$ .

В случае  $q(x) \equiv 0$  задача о базисности системы СиПФ задачи с общими регулярными краевыми условиями полностью решена в [5]. Базисные свойства системы корневых векторов оператора двукратного дифференцирования при интегральном возмущении условий периодического типа были изучены в работах [6, 7].

Случай, образующий тип I, в частности, антипериодического типа с интегральным возмущением будет предметом наших исследований в настоящей работе.

Оператор  $L_0$  Штурма-Лиувилля при  $q(x) \equiv 0$  с краевыми условиями типа I является самосопряженной, а система ее собственных функций – обычной тригонометрической системой, образующей ортонормированный базис в пространстве  $L_2(0, 1)$ . В [8] изучены вопросы базисности систем СиПФ периодической задачи для оператора Штурма-Лиувилля при  $q(x) \equiv 0$ . В настоящей работе рассматривается близкая к исследованиям [6-8] спектральная задача при  $q(x) \equiv 0$ , с интегральным возмущением одного из краевых условий (2) типа I

$$L_1(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), 0 < x < 1; \quad (5)$$

$$U_1(u) \equiv u(0) + u(1) = 0; \quad (6)$$

$$U_2(u) \equiv u'(0) + u'(1) = \int_0^1 \overline{p(x)}u(x)dx, p(x) \in L_1(0, 1). \quad (7)$$

Из работы [9] следует, что система СиПФ задачи (5)–(7) полна и минимальна в  $L_2(0, 1)$ . При этом система СиПФ при любых  $p(x)$  образует базис Рисса со скобками. Нашей задачей является построение характеристического определителя задачи (5)–(7).

Здесь воспользуемся методикой нашей работы [10] построения характеристического определителя задачи с интегральным возмущением краевого условия. Построение сопряженной задачи к периодической задаче рассмотрено в работе [11, 12], а к задаче Самарского-Ионкина — в [13, 14].

Следуя процедуре работы [12], получим возмущения самосопряженной задачи, а именно спектральную задачу для нагруженного дифференциального уравнения второго порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} L_1^*(v) &\equiv -v''(x) + p(x)v'(1) = \bar{\lambda}v(x); \\ V_1 &\equiv v(0) + v(1) = 0, V_2(v) \equiv v'(0) + v'(1) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Задача (8) является несамосопряженным возмущением самосопряженной антипериодической задачи. В отличие от работы [8], здесь возмущение происходит за счет изменения уравнения.

Вопросы базисности корневых функций нагруженных дифференциальных операторов изучена в работе И.С. Ломова [15]. Ему удалось распространить метод спектральных разложений В.А.Ильина [16] на случай нагруженных дифференциальных операторов. Вопросы базисности функционально-дифференциальных уравнений были исследованы другим методом в работе [17].

Представляя общее решение уравнения (5) по формуле при  $\lambda \neq 0$

$$u(x, \lambda) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

и удовлетворяя его крайевым условиям (6), (7), получаем линейную систему относительно коэффициентов  $C_k$

$$\begin{cases} C_1(1 + \cos \sqrt{\lambda}) + C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0; \\ C_1[-\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p(x)} \cos \sqrt{\lambda}x dx] + \\ + C_2[\sqrt{\lambda}(1 + \cos \sqrt{\lambda}) - \int_0^1 \overline{p(x)} \sin \sqrt{\lambda}x dx] = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Определитель линейной системы (9) будет характеристическим определителем задачи (5)–(7):

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + \cos \sqrt{\lambda} & \sin \sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p(x)} \cos \sqrt{\lambda}x dx & \sqrt{\lambda}(1 + \cos \sqrt{\lambda}) - \int_0^1 \overline{p(x)} \sin \sqrt{\lambda}x dx \end{pmatrix}. \quad (10)$$

При  $p(x) = 0$  получается характеристический определитель невозмущенной задачи (5)–(7). Так как  $\lambda \neq 0$ , обозначим его через  $\Delta_0(\lambda) = 2(1 + \cos \sqrt{\lambda})$ . Число  $\lambda_0^0 = 0$  не является собственным значением невозмущенной антипериодической задачи (5)–(7), т.е. является регулярной точкой, и принадлежит резольвентному множеству невозмущенного оператора Штурма-Лиувилля  $L_0$ . Число  $\lambda_k^0 = (2(k - 1)\pi)^2$  является двукратным собственным значением невозмущенной антипериодической задачи (5) – (7), а  $u_{k0}^0 = \sqrt{2} \cos(2(k - 1)\pi)x$ ,  $u_{k1}^0 = \sqrt{2} \sin(2(k - 1)\pi)x$  собственными функциями.

Функцию  $p(x)$  представим в виде ряда Фурье по тригонометрической системе

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2(k - 1)\pi)x + b_k \sin(2(k - 1)\pi)x]. \quad (11)$$

Используя (11), вычислим входящие в (10) интегралы и найдем более удобное представление определителя  $\Delta_1(\lambda)$ . После стандартного преобразования определитель  $\Delta_1(\lambda)$  приводится к виду:

$$\Delta_1(\lambda) = 2(1 + \cos \sqrt{\lambda}) - 2 \sin \sqrt{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{(2k - 1)\pi}{\lambda - ((2k - 1)\pi)^2}, \quad (12)$$

где  $\Delta_0(\lambda) = 2(1 + \cos \sqrt{\lambda})$  — характеристический определитель невозмущенной антипериодической задачи. Таким образом, доказана

*Теорема 1.* Характеристический определитель антипериодической спектральной задачи с возмущенными краевыми условиями (5)–(7) представим в виде (12), где  $\Delta_0(\lambda)$  — характеристический определитель невозмущенной спектральной антипериодической задачи;  $b_k$  — коэффициенты разложения (11) функции  $p(x)$  в тригонометрический ряд Фурье.

Функция в виде ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{(2k-1)\pi}{\lambda - ((2k-1)\pi)^2}$  из (12) имеет полюса первого порядка в точках  $\lambda = \lambda_k^0$ , а функция  $2 \sin \sqrt{\lambda}$  и  $\Delta_0(\lambda)$  имеет нули второго порядка в этих же точках. Поэтому функция  $\Delta_1(\lambda)$ , представленная по формуле (12), является целой аналитической функцией переменного  $\lambda$ .

*Замечание 1.* Если рассмотреть возмущенную антипериодическую спектральную задачу (5), (7), (6), т.е. краевые условия (6)–(7) поменяем местами (7)–(6), тогда соответствующий характеристический определитель будет

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) = & -\sqrt{\lambda}2(1 + \cos \sqrt{\lambda}) + (1 + \cos \sqrt{\lambda}) \int_0^1 \overline{p(x)} \sin \sqrt{\lambda} x dx + \\ & + \sin \sqrt{\lambda} \int_0^1 \overline{p(x)} \cos \sqrt{\lambda} x dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Отличие (13) от (12) будет только в знаках.

В заключение отметим, что автор выражает благодарность члену-корреспонденту НАН РК, д.ф.-м.н., профессору М.А. Садыбекову за обсуждение результатов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке бюджетной программы «Фундаментальные и прикладные научные исследования» Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № 0825/ГФ4).*

#### Список литературы

- 1 Михайлов В.П. О базисах Рисса в  $L_2(0,1)$  // ДАН. — 1962. — Т.144. — №5. — С. 981–984.
- 2 Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов СССР. Сер. Математика. — 1964. — № 2. — С. 82–93.
- 3 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 352 с.
- 4 Макин А.С. О спектральных разложениях, отвечающих несамосопряженному оператору Штурма-Лиувилля // ДАН. — 2006. — Т. 406. — №1. — С. 21–24.
- 5 Lang P., Locker J. Spectral Theory of Two-Point Differential Operators Determined by  $-D^2$  // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1990. — Vol. 146. — No. 1. — P.148–191.
- 6 Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. On the basis property of root functions of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Differential Equations. — 2012. — Vol. 48 — № 6. — P. 896–900.
- 7 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. On instability of basis property of the root vectors system of the double differentiation operator with an integral perturbation of periodic type conditions // AIP Conference Proceedings. — 2015. — Vol. 1676 — № 020083. AIP Publ. — [ER]. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930509>.
- 8 Макин А.С. О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42. — № 4. — С. 560–562.

- 9 Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. Математика и механика. — 1982. — № 6. — С. 12–21.
- 10 *Imanbaev N.S., Sadybekov M.A.* Characteristic determinant of the spectral problem for the ordinary differential operator with the boundary load // International conference on analysis and applied mathematics (ICAAM 2014): AIP Conference Proceedings. — 2014. — Vol. 1611. — P. 261–265.
- 11 *Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А.* Базисные свойства корневых функций нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Докл. НАН РК. — 2010. — № 2. — С. 11–13.
- 12 *Imanbaev N.S., Sadybekov M.A.* On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Eurasian Mathematical Journal. — 2013. — Vol. 4. — No. 3. — P. 53–62.
- 13 *Imanbaev N.S.* On the stability and instability of the basis properties of root functions of the Schrodinger equation with nonlocal perturbations of boundary condition // Bull. of Karaganda University. Ser. Mathematics. — 2013. — No. 4 (72). — P.25–30.
- 14 *Imanbaev N.S.* On stability of basis property of root vectors system of the with Sturm-Liouville operator with an integral perturbation of conditions in Nonstrongly regular Samarskii-Ionkin type problems // Differential Equations. — Vol. 2015. — P. 6. — [ER]. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1155/2015/641481>.
- 15 *Ломов И.С.* Свойство базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка на интервале // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27. — № 1. — С. 80–94.
- 16 *Ильин В.А.* О связи между видами краевых условий и свойствами базисности равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям несамосопряженного дифференциального оператора // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30. — № 9. — С. 1516–1529.
- 17 *Гомилько А.М., Радзиевский Г.В.* Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27. — № 3. — С. 385–395.

Н.С.Иманбаев

## **Интегралдық толқытылған антипериодты типтегі шеттік шарттармен берілген Штурм-Лиувилль операторының спектралдық есебінің сипаттамалық анықтауышы**

Мақалада интегралдық толқытылған антипериодты типтегі шеттік шарттармен берілген Штурм-Лиувилль операторының түбірлік векторлар жүйесінің базистік қасиеттерін зерттеуге арналған есеп қарастырылған. Ол спектралдық есептің сипаттамалық анықтауышы ретінде белгіленген.

N.S.Imanbaev

## Characteristic determinant of the spectral problem for the Sturm-Liouville operator with the perturbed boundary value conditions

We study a question on stability and instability of basis property of system of eigen functions of Sturm-Liouville operator with an integral perturbation of anti-periodic type boundary value conditions. The characteristic determinant of a spectral problem of Sturm-Liouville operator has been studied in integral perturbation of antiperiodic type boundary value conditions.

### References

- 1 Mikhailov V.P. *Doklady Mathematics*, 1962, 144, 5, p. 981–984.
- 2 Kesellman G.M. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 1964, 2, p. 82–93.
- 3 Naimark M.A. *Linear Differential Operators*, Moscow: Nauka, 1969, 352 p.
- 4 Makin A.S. *Doklady Mathematics*, 2006, 406, 1, p. 21–24.
- 5 Lang P., Locker J. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1990, 146, 1, p. 148–191.
- 6 Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. *Differential Equations*, 2012, 48, 6, p. 896–900.
- 7 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. *AIP Conference Proceedings*, 2015, 1676, [ER.] Access mode: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930509>.
- 8 Makin A.S. *Differential Equations*, 2006, 42, 4, p. 560–562.
- 9 Shkalikov A.A. *Moscow University Mathematics Bull.*, 1982, 6, p. 12–21.
- 10 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. *International conference on analysis and applied mathematics (ICAAM 2014): AIP Conference Proceedings*, 2014, 1611, p. 261–265.
- 11 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. *Reports of National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan*, 2010, 2, p. 11–13.
- 12 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. *Eurasian Mathematical Journal*, 2013, 4, 3, p. 53–62.
- 13 Imanbaev N.S. *Bull. of Karaganda State University, Ser. Mathematics*, 2013, 4 (72), p. 25–30.
- 14 Imanbaev N.S. *Differential Equations*, 2015, p. 6, [ER]. Access mode: <http://dx.doi.org/10.1155/2015/641481>.
- 15 Lomov I.S. *Differential Equations*, 1991, 27, 1, p. 80–94.
- 16 Illin V.A. *Differential Equations*, 1994, 30, 9, p. 1516–1529.
- 17 Gomillko A.M., Radzievski G.V. *Differential Equations*, 1991, 27, 3, p. 385–395.